

## 물리교육에서 Spreadsheet 활용

김동휘\* · 김규용\*\* · 강동식\*\* · 강영봉\*\*

### I. 서 론

정보화사회인 요즘 학교에서는 교수 - 학습활동에 컴퓨터를 많이 이용하고 있다. 특히 과학수업에서는 타교과보다도 그 이용도가 커지고 있다. 컴퓨터를 이용하는 수업형태를 보면 대부분이 OHP처럼 결과만을 보여주는데 사용하는 경우가 많았다. 즉, 컴퓨터의 다양하고 유용한 기능들을 적절하게 사용하지 못하고 있는 것이다. 본 논문에서는 PC의 유용한 기능 중의 하나인 스프레드시트의 기능을 알아보고 이 기능을 가진 프로그램인 엑셀<sup>1)</sup>을 사용해서 물리학습에 어떻게 이용하고 학습효과를 극대화 할 것인지를 연구하고자 한다.

이 프로그램은 수치적인 계산들을 반복해서 계산해주고 그 결과들을 바로 그래프로 나타내 주므로써 계산값들이 뜻하는 물리적인 의미를 쉽고 명확하게 알 수 있게 해 준다. 그리고 어느 한 변수의 수치값을 변경했을 경우 나머지 모든 값들이 순식간에 재계산되고 그 결과값에 대한 그래프도 새로이 나타내 줌으로써 학습자로 하여금 많은 시간들을 절약하게 해 준다. 그리고 연속적으로 값을 변경시키면 모든 값들과 그에 해당하는 그래프의 모양이 연속적으로 바뀌므로 차후의 결과들을 예상하는 것을 가능하게 해 준다. 이러한 유용하고 다양한 기능들을 가지고 있기 때문에 일찍부터 스프레드시트는 물리학을 연구하는 데 많이 사용되고 있다.

R. F. Field는 영의 이중슬릿실험에서 무늬의 강도와 진폭이 어떻게 변하는지를 보였고<sup>2)</sup>, D. J. Saunders 와 R. D. Ford는 단일 자유도를 갖는 용수철진

\* 중문중학교 교사

\*\* 제주대학교 과학교육과 교수

자가 감쇄진동하는 경우를 보였으며<sup>3)</sup>, R. J. Beichner는 동등전하들에 의한 포텐셜 표면의 모습들을 나타냈고<sup>4)</sup>, A. M. MacLoed는 감쇠와 공진하는 진동계에서의 여러 가지 물리적인 현상들을 구현했다.<sup>5)</sup> 그리고 R. Newburgh는 절벽 위에서 폭발물을 땅바닥으로 떨어뜨린 후 그 폭발소리를 T시간 지나서 들었을 경우에 절벽의 높이를 구하는 문제를 수학적으로 해를 얻는 경우와 스프레드시트를 이용해서 구하는 경우를 비교해서 후자인 경우가 얼마나 유용한 지를 보였다<sup>6)</sup>. 또한 R. Trumper 와 M. Gelbman은 AC 저항 회로에서 전력, 일, 그리고 유효한 값들을 그래프로 나타내 보였고<sup>7)</sup>, L. Webb은 행성궤도를 계산했으며<sup>8)</sup>, M. L. De Jong은 양전하들 근처의 전기 퍼텐셜의 모습을 그려냈다<sup>9)</sup>.

본 논문에서는 전자기진동에서의 각각의 물리량들을 스프레드시트를 이용해서 계산하고 그 결과를 그래프로 나타냄으로써 이 프로그램이 물리학습에 얼마나 유용한 지를 확인 할 것이다. 이 프로그램이 물리학습에 얼마나 유용한 지를 확인 할 것이다.

고등학교 물리 교과내용을 살펴보면<sup>10)</sup> 물리량을 표현하는 방법으로 그래프를 많이 사용하고 있다. 이와 같이 그래프로 나타내려면 그 데이터에 해당하는 값들을 계산해 내야하고 그럴려면 물리량들이 방정식의 형태로 주어져야 한다. 실지로 대부분의 물리량들이 방정식을 써서 계산해내고 있으며 이때 사용되는 방정식들은 일차미분방정식과 이차미분방정식이다. 일차미분방정식의 계산은 학생들의 수준으로 해결할 수 있지만 이차미분방정식은 그 값을 계산하기가 매우 어렵다. 물리교과에는 이런 이차미분방정식의 형태로 표현되는 물리량들이 전 영역에서 나타나고 있다. 역학에서는 뉴턴의 운동방정식이나 단조화진동자에서 볼 수 있고 전자기학에서는 전자기진동인 LC, LR, LRC진동 그리고 강제진동 등에서 나타나고 있다. 이렇듯 일차와 이차미분방정식은 물리학습에서 결코 빼놓을 수 없는 아주 중요한 식들이고 이 식의 값을 계산할 수 있어야 그 결과값 들을 이용하여 그래프를 그리면서 그에 해당하는 물리량의 의미를 알 수가 있다. 하지만 고등학생들이 이차미분방정식의 해를 구하는 일은 매우 어려운 일이며, 비록 그 해를 구한다해도 단편적인 몇 개의 계산값 만을 가지고는 물리적으로 어떤 의미를 담고 있는지를 파악할 수가 없다. 이 때 스프레드시트를 이용하면 도함수정리 정도의 기본적인 수학적 지식만으로도 간단하게 방정식의 값을 계산해내고 그래프화 할 수 있다.

II장에서 VI장까지는 LC, RC, LRC, 강제진동회로 그리고 비선형 강제진동

회로에서의 전자기진동을 스프레드시트를 활용하여 물리량들을 계산하고, 이 계산값을 이용해서 그래프를 그려 물리적인 현상들을 알아 본다. 그리고 VII장에서는 이미 논의된 것들에 대한 결론을 다룬다.

## II. LR 회로

역학이나 전자기학에서는 이차미분방정식의 형태로 기술되는 물리량들이 많이 있는데 그런 종류의 방정식들 중의 하나는 아래와 같은 형식을 갖는다.

$$a \frac{d^2 q}{dt^2} + b \frac{dq}{dt} + cq = F(t) \quad \text{-----} (\text{II}-1)$$

이 방정식은 역학에서는 단조화진동자의 운동방정식에서 쉽게 찾아볼 수 있는데 감쇠조화운동이나 강제진동 등에서 나타나고 있고, 전자기학에서는 LC진동, LR진동, LRC진동, 강제진동에서 찾아볼 수가 있다. 그러나 위의 이차미분방정식의 해를 얻어내는 데는 그리 간단치가 못하다. 특히 중고등학교학생들의 수준으로는 얻기가 여간 힘들지가 않다. 그리고 어렵게 많은 시간들을 소비하여 그 값들을 계산한다고 하고 그 값들이 갖고 있는 물리적인 의미가 어떤 것인지를 알아내는 것은 더욱 어렵다. 그러나 컴퓨터를 이용하면 상당부분 해결 할 수가 있는 데 그것은 스프레드시트를 이용하는 것이다. 이 프로그램으로 하면 단순히 반복하여 되풀이되는 계산과정들을 짧은 시간에 해결하고 그 결과값들을 다양한 차트로 시시각각으로 그 값들을 변경해 가면서 볼 수 있어서 그 결과값들이 뜻하는 물리적인 의미를 쉽게 파악 할 수가 있어서 좋다. 스프레드시트를 이용해서 (II-1)과 같은 이차미분방정식을 바로 계산하기는 힘들다. 그러나 미분방정식에 대한 정확한 개념만 알고 있다면 스프레드시트를 사용해서 어렵지 않게 그 미분방정식에 대한 풀이 결과를 얻어낼 수 있는데 그러기 위해서는 일차미분방정식으로 변환한 후 오일러법<sup>11)</sup>을 써서 주어진 식을 다시 써 주면 스프레드시트로 쉽게 계산을 할 수가 있다. 이에 대한 수치해석적인 절차는 다음과 같다.

우선 (II-1)식에 새로운 변수를 도입해서 치환하면 간단히 할 수가 있다. 즉

$\frac{dq}{dt}$  를  $i$  라는 새로운 변수로 치환함으로써 위의 두식을 다음과 같이 두 개의 일차미분방정식으로 변환한다.

$$\frac{dq}{dt} = i \text{ -----}(\text{II}-2)$$

$$a \frac{di}{dt} + bi + cq = F(t) \text{ -----}(\text{II}-3)$$

스프레드시트로 (II-2), (II-3)의 미분방정식의 값을 계산하기 위해서 도함수의 정리를 이용해서 다시 쓰면

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \Delta t i(t) \text{ -----}(\text{II}-4)$$

$$i(t + \Delta t) = i(t) + \frac{\Delta t}{a} (F(t) - bi - cq) \text{ -----}(\text{II}-5)$$

로 쓸 수 있다. 이 식은  $t + \Delta t$  시점에서의  $q$  의 값이  $t$  시점에서의  $q$  에 의해서 결정되는 구조로 되어 있다.  $q_0$  를 초기값이라고 하면 이 보다  $\Delta t$  후의 값은  $q_1$  이 된다. 즉,  $q_1$  은 초기값  $q_0$  에  $\Delta t$  와  $q(t)$  의 시간변화율인  $q'(t)$  을 곱한 값을 더한 것이 된다. (II-4)에 의해서 몇 개의 항을 쓰면 다음과 같다.

$$q_1 = q_0 + \Delta t i_0, \quad q_1 = q_0 + \Delta t q_0'$$

$$q_2 = q_1 + \Delta t i_1, \quad q_2 = q_1 + \Delta t q_1'$$

$$q_3 = q_2 + \Delta t i_2, \quad q_3 = q_2 + \Delta t q_2'$$

$n$  번째 항은

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t i_n, \quad q_{n+1} = q_n + \Delta t q_n' \text{ -----}(\text{II}-6)$$

함수기호를 사용하는 일반적인 차분방정식의 형태로 나타내면,

$$q[(n+1)\Delta t] = q(n\Delta t) + \Delta t q'(n\Delta t) \text{ -----}(\text{II}-7)$$

이번에는 전류  $i(t)$  를 (II-6)과 같은 형식으로 나타내면  $n$  번째 항은 다음과 같다.

$$i_{n+1} = i_n + \Delta t i_n' \text{ -----}(\text{II}-8)$$

이를 식(II-7)과 같은 형식으로 나타내면

$$i[(n+1)\Delta t] = i(n\Delta t) + \Delta t i'(n\Delta t) \text{ -----}(\text{II-9})$$

이 된다.

본 논문에서는 이차미분방정식으로 표현되는 물리량 중에서 고등학교와 대학초급과정에서 다루는 전자기진동을 한 예로 선택해서 스프레드시트를 이용해서 직접 구현해 봄으로써 단편적인 계산수치들만을 가지고 전체적인 물리적 의미를 파악하려는 데에 있어서의 어려움을 상당부분 해결 할 수 있을 것이다.

그림1은 인덕터  $L$ , 캐패시터  $C$ , 저항  $R$ , 전압  $V(= V_0 \sin \omega t)$  가 한 회로에 연결되어 있는 전자기진동회로도 이다.

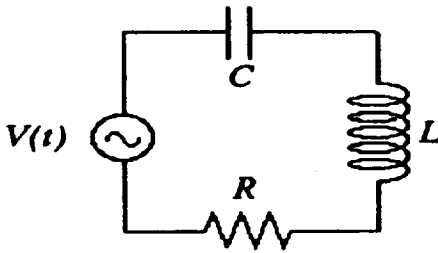


그림 1. 전자기진동회로도. 여기서  $L$ 은 인덕터,  $R$ 은 저항, 그리고  $C$ 는 캐패시터 이다.

그림 1 과 같은 회로도에서 하나의 완전한 폐회로를 구성하는 데 있어서 일어나는 전위의 변화들의 합에 관계된 키르히호프의 폐회로정리를 적용시키면 다음과 같다.

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0 \sin \omega t \text{ -----}(\text{II-10})$$

이 식에서  $V_0$ 는 전압.  $\omega$ 는 각속도,  $t$ 는 시간,  $q$ 는 전하량이다.  $LR$  회로는 식(II-10)에서  $C \rightarrow \infty, V_0 = 0$  인 경우로 이를 적용시키면,

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} = 0 \text{ -----}(\text{II-11})$$

이 된다. (II-11)식을 스프레드시트로 계산하기 위해서는 두 개의 일차미분방정식으로 변환 후 다시 (II-6)와 (II-8)같은 형식으로 바꿔야 계산이 용이하다.

우리가 알고자 하는 것은  $LR$ 회로에서 시간경과에 대한 전하, 전류, 그리고 전하와 전류의 대략적인 상관관계만을 비교 할 것이고 구체적인 수치값이나 단위에는 관심을 가질 필요가 없으므로 편의상 무차원 방정식으로 변환하여 계산한다. (II-11)식을 무차원 방정식으로 고치기 위하여  $\xi$  와  $\tau$  을 다음과 같이 놓자.

$$\xi = \frac{q}{A}, \text{-----(II-12)}$$

$$\tau = \frac{R}{L} t \text{----- (II-13)}$$

$A$ 는 전하차원,  $\frac{L}{R}$  는 시간차원이고  $\xi$ 와  $\tau$  은 전하 와 시간을 무차원으로 표시한 변수이다. 전하의 시간변화를  $\frac{d\xi}{d\tau}$  을 무차원으로 표시한 변수  $\eta$ 로 놓고, 식(II-12)와 (II-13)을 이용하여 식(II-11)을 무차원 방정식으로 변환하면 다음과 같이 두 개의 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \eta, \text{-----(II-14)}$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} + \eta = 0 \text{----- (II-15)}$$

이다. 이 두 개의 식을 스프레드시트로 계산하기 위해서 (II-6)과 (II-8)같은 형태로 변환하면

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \Delta \tau \eta_n \text{-----(II-16)}$$

$$\eta_{n+1} = \eta_n + \Delta \tau \frac{d\eta_n}{d\tau} \text{-----(II-17)}$$

이 된다. 그리고 무차원 회로방정식 (II-15)를  $n$  번째항의 형식으로 나타내면

$$\frac{d\eta_n}{d\tau} = - \eta_n \text{-----(II-18)}$$

이 된다. 여기서  $\Delta \tau$ 는 미소시간차이다. 스프레드시트로 수치적인 계산을 하

기위해서 초기조건을 부여한다. LR회로에서 전류가 초기값  $i_0$  의 세기로 일정하게 흐르다가 전지만을 갑자기 제거했을 때 전류의 감소가 서서히 진행되는 경우이다. 초기 전하나 전류의 값은 어떤 값을 가지든 상관없이 없으므로 여기서는 시간간격은 0.01, 초기시간은 0, 초기전하는 0, 초기전류 10으로 놓았고, 시간값이 4가 되는 400회 반복 계산했다. 계산형식은 표 1에 나타냈는데 지면상 일부만 나타냈다. 그에 대한 계산값들이 표 2이다.

표 1. LR회로에서 스프레드시트를 이용한 시간에 대한 전하, 전류값계산형식

시간간격	시 간	전 하 량	전 류
0.01	0	0	10
	=B5+\$C\$2	=C5+\$C\$2*D5	=D5-\$C\$2*D5
	=B6+\$C\$2	=C6+\$C\$2*D6	=D6-\$C\$2*D6
	=B7+\$C\$2	=C7+\$C\$2*D7	=D7-\$C\$2*D7
	=B8+\$C\$2	=C8+\$C\$2*D8	=D8-\$C\$2*D8
	=B9+\$C\$2	=C9+\$C\$2*D9	=D9-\$C\$2*D9

표 2. LR회로에서 시간에 대한 전하, 전류의 값.

시간간격	시 간	전 하 량	전 류
0.01	0	0	10
	0.01	0.1	9.9
	0.02	0.199	9.801
	0.03	0.29701	9.70299
	0.04	0.3940399	9.6059601
	0.05	0.490099501	9.509900499

표 1과 표 2를 이용해서 시간 변화에 대한 전하, 전류의 그래프를 그려서 그 결과를 그림 2와 그림 3에 나타냈다. 그림 2를 보면 시간이 경과함에 따라 전하량이 증가하다가 일정해 짐을 알 수 있다

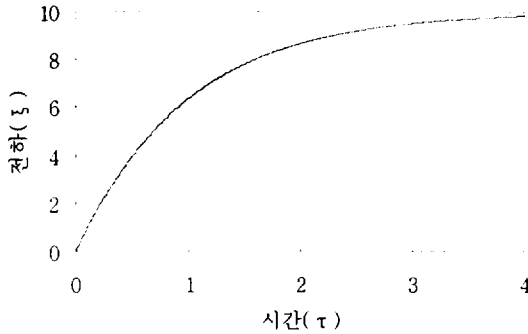


그림 2. LR회로에서 시간에 대한 전하.

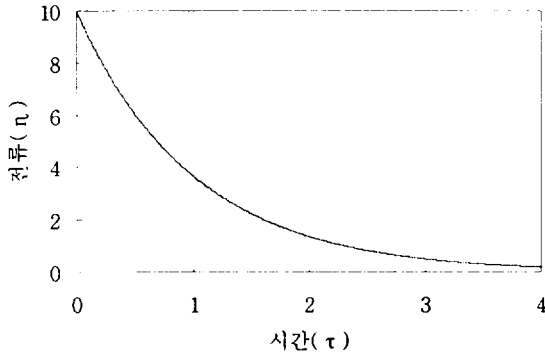


그림 3. LR회로에서 시간에 대한 전류.

그림 3은 시간이 경과함에 따라 전류가 지수함수적으로 감소되고 있음을 보이고 있다. 이번에는 표 1, 표 2를 이용해서 전하량과 전류와의 관계그래프를 그리면 그림 4와 같다. 여기서 초기조건은 시간간격은 0.01, 전하는 0, 그리고 전류는 10이다. 그래프를 그려본 결과 전하량이 증가함에 따라 전류는 감소하고 있다.



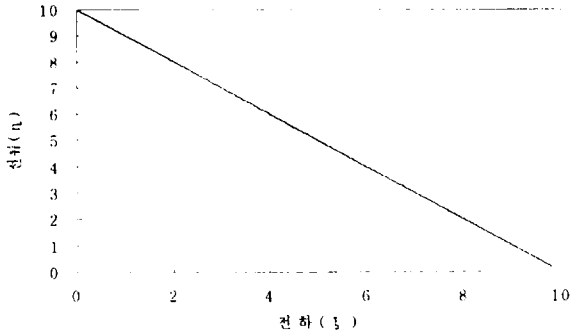


그림 4. LR회로에서 전하와 전류 관계.

이렇게 스프레드시트를 이용하면 이차미분방정식을 풀지 않아도 그 해를 구할 수가 있고 그 값들을 이용해서 그래프를 곧바로 그려서 물리적으로 어떤 의미를 가지고 있는 지를 시각적으로 봄으로써 방정식이 갖고 있는 물리적 의미를 보다 쉽고 명확하게 파악할 수가 있는 것이다.

### Ⅲ. LC 회로

LC회로는 식 (Ⅱ-10)에서  $R=0$  인 경우이다. 회로 방정식은 다음과 같다.

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \text{ -----(Ⅲ-1)}$$

LR회로 문제와 마찬가지로 식(Ⅲ-1)을 무차원 식으로 고치기 위하여 시간을 무차원 변수  $s$

$$s = \frac{1}{\sqrt{LC}} t \text{ -----(Ⅲ-2)}$$

라 놓자. 여기서  $\sqrt{LC}$ 은 시간 차원이다. (Ⅲ-1)과 (Ⅲ-2)를 이용하여 식 (Ⅲ-1)을 무차원 방정식으로 변환하면

$$\frac{dv}{ds} + \xi = 0 \text{ -----(III-3)}$$

이 된다. 여기서

$$v = \frac{d\xi}{ds} \text{ -----(III-4)}$$

이다. (III-4)를 (II-16), (II-17)과 같은 형식으로 나타내면

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \Delta s v_n, \text{ -----(III-5)}$$

$$v_{n+1} = v_n + \Delta s \frac{dv_n}{ds} \text{ -----(III-6)}$$

이 된다.  $n$ 번째항의 형식으로 나타낸  $\frac{dv_n}{ds}$  은 (III-3) 식으로부터

$$\frac{dv_n}{ds} = - \xi_n(s) \text{ -----(III-7)}$$

이 된다. (III-7)를 (III-6)에 대입하면

$$v_{n+1} = v_n - \Delta s \xi_n \text{ -----(III-8)}$$

으로 주어진다. 식 (III-5)와 (III-8)을 이용해서 스프레드시트로 계산하는데 초기조건은 축전기에서 전하를 모두 인덕터를 통해서 방전해버려서 전하가 없다고 가정했고 전하의 시간변화율인 전류는 이 경우에 0 이 아니어서 값을 1로 부여했다. 즉, 시간간격이 0.01, 초기전하는 0, 그리고 초기전류는 1로 해서 계산을 하였고 그 계산값들을 표 3와 표 4에 나타냈다.

표 3. LC회로에서 시간에 따른 전하, 전류 계산 형식

시간간격	시 간	전 하 량	전 류
0.01	0	0	1
	=B5+\$C\$2	=C5+\$C\$2*D5	=D5-\$C\$2*C5
	=B6+\$C\$2	=C6+\$C\$2*D6	=D6-\$C\$2*C6
	=B7+\$C\$2	=C7+\$C\$2*D7	=D7-\$C\$2*C7
	=B8+\$C\$2	=C8+\$C\$2*D8	=D8-\$C\$2*C8
	=B9+\$C\$2	=C9+\$C\$2*D9	=D9-\$C\$2*C9

표 4. LC회로에서 시간에 따른 전하, 전류 계산값

시간간격	시 간	전 하 량	전 류
0.01	0	0	1
	0.01	0.01	1
	0.02	0.02	0.9999
	0.03	0.029999	0.9997
	0.04	0.039996	0.99940001
	0.05	0.04999	0.99900005

표 3 와 표 4 를 이용하여 시간에 따르는 전하와 전류의 그래프를 그리면 그림 5와 그림 6이된다

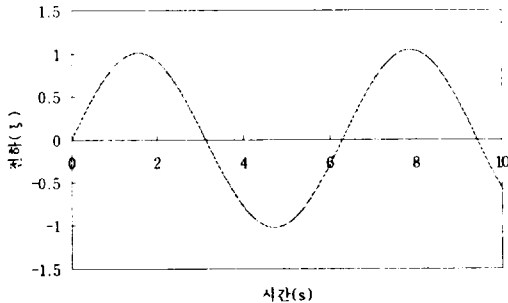


그림 5. LC회로에서 시간에 따른 전하.

그림 5를 보면 시간에 따른 전하량이 주기적으로 증가하고 감소함을 반복하는 사인곡선의 형태를 가짐을 알 수 있다. 위와 같은 그래프가 나타나는 이유는 회로에 저항이 없어서 시간에 경과함에 따라 전하량이 감소되지 않기 때문이다.

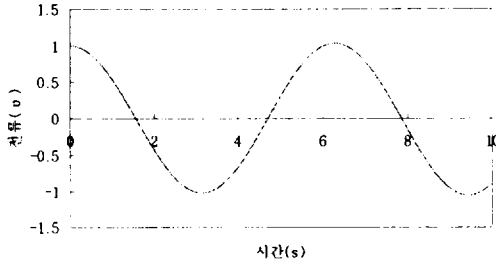


그림 6. LC회로에서 시간에 따른 전하.

그림 6에서 전류도 전하처럼 주기적으로 증가하고 감소하는 사인곡선을 이루고 있음을 알 수 있다. 회로 내에 저항이 없으므로 전하와 전류의 진폭이 시간이 경과함에 따라 서서히 감소하는 현상이 나타나지 않고 있다. 학생들에게 시간을 점차 증가시켜 가면서 나타나는 그래프의 모양을 보여 주면서 이 회로에서는 시간이 많이 경과해도 전류나 전하의 감쇠현상이 나타나지 않는 특성이 있다는 것을 보다 구체적이고 명확하게 인식시켜 줄 수가 있다. 이런 과정은 스프레드시트 시뮬레이션이 갖는 유용한 기능이다. 그림 7은 표 3와 표 4를 이용하여 전하와 전류와의 관계 그래프이다. 이 때의 초기조건은 시간간격 0.01, 전하1, 전류1이다.

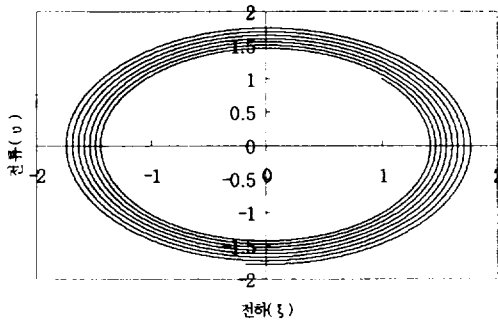


그림 7. LC회로에서 시간에 따른 전하와 전류 관계.

그림 7에서 전하와 전류는 주기적으로 어느 한 쪽이 증가하면 다른 쪽은 감

소함을 반복하고 있음을 알 수 있다.

#### IV. LRC회로

LRC 회로는 저항  $R$ 이 LC회로 내에 직렬로 연결되어 있는 경우의 회로이다. 키르히호프의 회로법칙에 의해서 회로방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \text{ -----(IV-1)}$$

식 (IV-1)를 LC나 LR 회로에서 처럼 두 개의 일차미분방정식으로 고쳐 무차원 방정식으로 변환하기 위하여 저항을 나타내는 무차원 상수  $\sigma$

$$\sigma = R \sqrt{\frac{C}{L}} \text{ -----(IV-2)}$$

를 도입한다. 이 식에서  $\sqrt{\frac{L}{C}}$ 는 저항차원을 가진다. 식(IV-2)와 (III-2)을 이용하면 식 (IV-1)은 다음과 같이  $n$ 번째 항의 형식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{d v_n}{ds} = - \sigma v_n - \xi_n \text{ -----(IV-3)}$$

$$v_{n+1} = v_n - \Delta s (\sigma v_n + \xi_n) \text{ -----(IV-4)}$$

식(III-5) 와 (IV-6) 를 이용해서 스프레드시트로 계산하였다. 이 계산 과정에서 시간 간격은 0.2, 초기 전하값은 1, 초기 전류값은 0 그리고 저항을 나타내는 무차원 매개상수  $\sigma$ 은 0.41 로 놓아서 계산을 하였으며, 엑셀에서의 계산 형식과 계산값들은 그 일부분 만을 표 5과 표 6에 나타냈다. 그리고 이 수치값을 이용하여 시간에 대한 전하와 전류의 그래프는 그림8과 그림 9이다.

표 5. LRC회로에서 시간에 따른 전하, 전류 계산 형식.

시간간격	시 간	전 하	전 류
0.2	0	1	0
	=B7+\$C\$4	=C7+\$C\$4*D7	=D7-\$C\$4*( \$C\$5*D7+C7)
	=B8+\$C\$4	=C8+\$C\$4*D8	=D8-\$C\$4*( \$C\$5*D8+C8)
	=B9+\$C\$4	=C9+\$C\$4*D9	=D9-\$C\$4*( \$C\$5*D9+C9)
	=B10+\$C\$4	=C10+\$C\$4*D10	=D10-\$C\$4*( \$C\$5*D10+C10)
	=B11+\$C\$4	=C11+\$C\$4*D11	=D11-\$C\$4*( \$C\$5*D11+C11)

표 6. LRC회로에서 시간에 따른 전하와 전류의 계산값.

시간간격	시 간	전 하	전 류
0.2	0	1	0
	0.2	1	-0.2
	0.4	0.96	-0.3836
	0.6	0.88328	-0.5441448
	0.8	0.77445104	-0.676180926

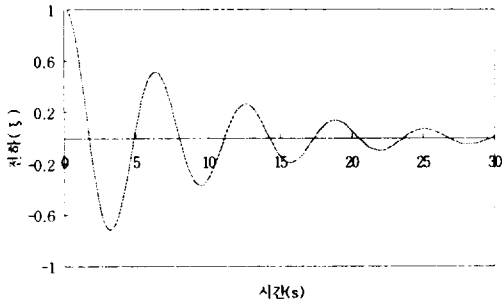


그림 8. LRC회로에서 시간과 전하 관계.

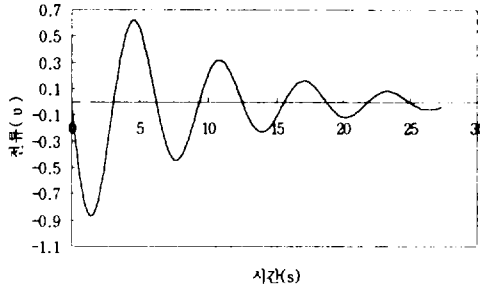


그림 9. LRC회로에서 시간과 전류 관계.

그림 8은 전하량이 시간에 따라 사인곡선적으로 감쇠함을 나타내고 있으며 이미 알려진 결과와 일치한다. 그림 9 역시 시간이 경과함에 따라 전류가 사인 곡선적으로 감쇠하고 있다.

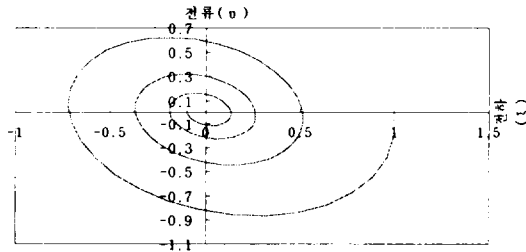


그림 10. LRC회로에서 시간에 따른 전하와 전류관계.

그림 10은 표 5과 표 6에 의해 전하와 전류와의 관계 그래프를 그린 것인데 미흡감쇠진동에 대한 나선형 위상경로를 보여준다. 위상평면에서 반경벡터의 크기가 감소하는 것은 감쇠진동임을 나타내는 것이다.

## V. 강제진동회로

LRC회로에 각진동수  $\omega$  로 변하는 기전력을 가하는 경우 기전력은

$V = V_0 \sin \omega t$ 로 주어진다. 여기서  $V_0$ 은 기전력의 진폭이고  $\omega$ 은 강제 각진동수라 한다. 이러한 기전력이 가해졌을 때에 나타나는 전하, 전류 및 퍼텐셜차의 진동을 강제진동이라한다. 강제진동회로방정식은 키르히호프의 회로 법칙에 의해서 다음과 같다.

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0 \sin \omega t \text{ -----(V-1)}$$

앞에 논의했던 회로에서 처럼 위 방정식은 이차미분방정식이므로 계산을 간편하게 하기 위해서 일차미분방정식으로 변환시킨 후 무차원방정식으로 변환한다. 전압을 무차원으로 표시한 매개변수  $\delta$ 와 각진동수를 무차원으로 표시한 매개변수  $\varphi$ 을 도입한다.

$$\delta = \frac{C V_0}{A} \text{ -----(V-2)}$$

$$\varphi = \omega \sqrt{LC} \text{ -----(V-3)}$$

여기서  $\frac{A}{C}$ 는 전압차원을 가지고  $\sqrt{LC}$ 는 시간 차원을 가진다. (II-12), (III-2), (III-4)와 (IV-2), (V-2), (V-3)을 이용하여 (V-1)을 무차원 방정식으로 고치면 다음과 같다.

$$\frac{dv}{ds} + \sigma v + \xi = \delta \sin \varphi s \text{ -----(V-4)}$$

이를 식 (IV-3)와 같은 형식으로 변환하면,

$$\frac{d v_n}{ds} = -\sigma v_n - \xi_n - \delta \sin \varphi s_n \text{ -----(V-5)}$$

이다. 여기서  $s_n$ 은  $s_n = s_{n+1} - \Delta s$ 의 관계를 갖는다. 식(III-6)은 (V-5)에 의해서

$$v_{n+1} = v_n - \Delta s (\sigma v_n + \xi_n + \delta \sin \varphi s_n) \text{ -----(V-6)}$$

이 된다. 식(III-5)와 식(V-6)에 의해서 스프레드시트로 계산을 하면 표 7과 표 8와 같고 초기조건은 시간간격이 0.007, 매개상수  $\sigma$ 는 2.58,  $\delta$ 은 1.9, 그리고  $\varphi$ 는 2.1이다.



표 7. 강제진동회로에서 시간에 따른 전하, 전류 계산형식.

시간간격	시 간	전 하	전 류
0.007	0	1	0
	$H9+\$D\$3$	$C9+\$D\$3*D9$	$D9-\$D\$3*(\$D\$6*\text{SIN}(\$D\$5*B9)-(\$D\$4*D9)-C9)$
	$B10+\$D\$3$	$C10+\$D\$3*D10$	$D10-\$D\$3*(\$D\$6*\text{SIN}(\$D\$5*B10)-(\$D\$4*D10)-C10)$
	$B11+\$D\$3$	$C11+\$D\$3*D11$	$D11-\$D\$3*(\$D\$6*\text{SIN}(\$D\$5*B11)-(\$D\$4*D11)-C11)$
	$B12+\$D\$3$	$C12+\$D\$3*D12$	$D12-\$D\$3*(\$D\$6*\text{SIN}(\$D\$5*B12)-(\$D\$4*D12)-C12)$
	$B13+\$D\$3$	$C13+\$D\$3*D13$	$D13-\$D\$3*(\$D\$6*\text{SIN}(\$D\$5*B13)-(\$D\$4*D13)-C13)$

표 8. 강제진동회로에서 시간에 따른 전하, 전류 계산값.

시간간격	시 간	전 하	전 류
0.007	0	1	0
	0.007	1	-0.007
	0.014	0.999951	-0.013678077
	0.021	0.999855253	-0.020039744
	0.028	0.999714975	-0.026090473
	0.035	0.999532342	-0.031835695

그림 11, 그림 12, 그림 13은 저항을 나타내는 무차원 상수  $\sigma$ 의 값이 2 보다 작은 경우, 2 인 경우, 그리고 2 보다 큰 경우의 그래프이다. 즉, 각각의 그림들은  $\sigma$ 의 값에 따라 전하가 시간에 따라 진동하면서 감소하는 미흡감쇠(underdamping), 진동없이 시간에 따라 감소하는 임계감쇠(critical damping)와 과도감쇠(overdamping)를 나타낸다.

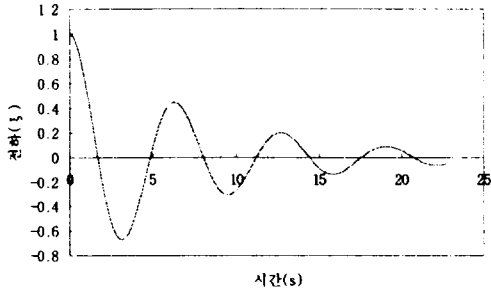


그림 11. 강제진동회로에서 시간에 따른 전하.

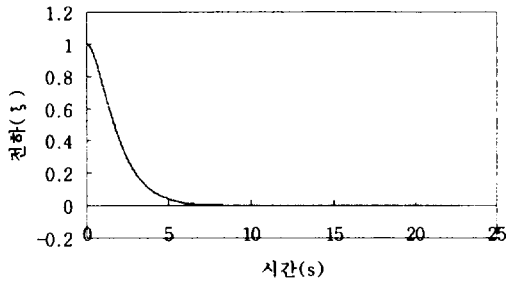


그림 12. 강제진동회로에서 시간과 전하 관계.

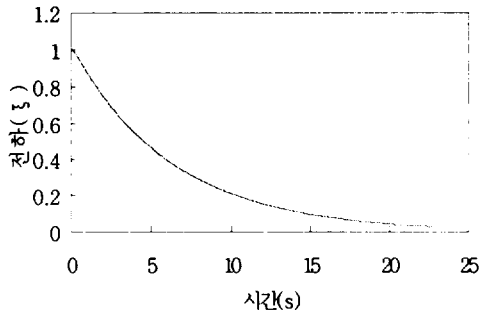


그림 13. 강제진동회로에서 시간과 전하관계.

앞에 그림들처럼 학생들에게  $\sigma$  값들을 연속적으로 변화시켜가면서 2 보다

작은 경우들과 2 인 경우 그리고 2 보다 큰 경우들로 구분지어서 설명하면서 보여준다면 학생들은 저항값의 변화에 따라 감쇠진동하는 물리적 현상을 구체적으로 이해 할 것이다.

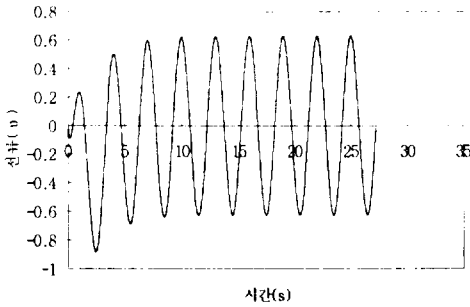


그림 14. 강제진동회로에서 시간에 따른 전류.

표 7과 표 8를 이용해서 시간변화에 대한 전류의 그래프를 그리면 그림 14와 같다. 위 그림에서 전류는 시간에 따라 반복적으로 진동하고 있음을 보여주고 있다. 표 7과 표 8를 이용해서 시간변화에 대한 전하와 전류의 관계그래프를 초기조건들을 다양하게 변화시켜가면서 그림을 그리면 그림 15, 그림 16과 같다.

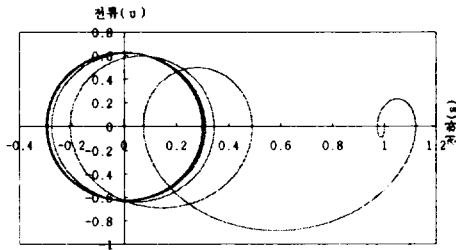


그림 15. 강제진동회로에서 전하와 전류관계.

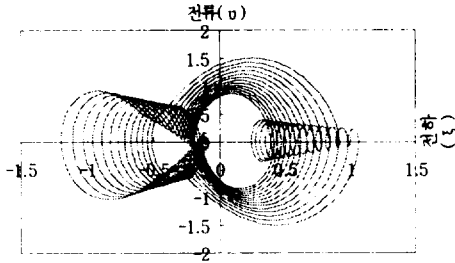


그림 16. 강제진동회로에서 전하와 전류관계.

그림 15와 16에서 전하와 전류는 서로 증가하고 감소함을 반복하거나 증가와 감소하는 크기가 점점 작아지다가 커짐을 반복하고 있다. 위 그림에서 보는 바와 같이 만약 손으로 그 계산값들을 이용해서 그래프를 그린다든 것은 쉽지 않다. 그러나 스프레드시트를 이용하면 간단하게 짧은 시간에 명료하게 그릴 수가 있고 매개 변수값들을 조금씩 조정하면서 그에 맞게 달라지는 결과들을 바로 확인 할 수가 있고 앞으로 어떻게 변해갈지도 대략적인 추측이 가능하다.

## VI. 비선형 강제진동회로

전압과 전류와의 관계에서 전도장치를 통해서 흐르는 전류가 장치에 걸린 퍼텐셜차에 정비례한다는 사실을 나타낸 법칙이 오옴의 법칙인데 전도장치의 저항이 퍼텐셜차의 크기나 극성에 무관할 때 이 장치는 오옴의 법칙을 따른다. 그리고 전도물질의 비저항이 전기장의 크기나 방향에 무관할 때 오옴의 법칙이 적용된다. 일반적으로 구리와 같은 전도체이거나 실리콘 같은 반도체이거나 상관없이 모든 균질한 물질은 적당한 전기장에서는 오옴의 법칙을 따른다. 그러나 전기장이 커지면 모두 오옴의 법칙에 어긋나게 된다. 이처럼 전압과 전류와의 관계에서 오옴의 법칙이 적용이 안되는 경우가 비선형강제진동의 경우라고 생각할 수가 있다. 자연 현상은 거의가 비선형적인 경우가 많다. 이런 비선형적인 물리적 현상은 방정식으로 풀기가 매우 힘이 들어서 사실상 다루기가 아주 까다롭다. 수치해석적으로 계산을 한다면 매개변수 값이 조금만 달라져

도 그 결과는 매우 크게 차이가 날 수가 있다. 그러나 스프레드시트를 이용하면 어렵지 않게 계산을 할 수가 있으며 그 값들을 그래프로 나타냄으로써 막연히 추상적인 생각이 구체적으로 볼 수가 있게된다. 이런 일은 스프레드시트를 사용했을 때 얻을 수 있는 매우 의미있는 결과이다. 여기서는 비선형적인 현상의 하나인, 오음의 법칙에서 전압이 전류의 제곱에 비례하는 경우와 유사한 비선형적인 특별한 예를 다루겠는데 이런 경우 회로방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + b \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 + \frac{q}{C} = V_0 \sin \omega t \text{ ----- (VI-1)}$$

여기서  $b$ 는 비례상수이다. 위 식은 2차 미분방정식이므로 계산을 간단히 하기 위해 무차원방정식으로 고친다. 여기서 인덕턴스를 무차원으로 표시한 매개상수  $\zeta$ 을 도입한다.

$$\zeta = \frac{Ab}{L} \text{ ----- (VI-2)}$$

여기서  $Ab$ 는 인덕턴스차원을 가진다. 식(VI-1)를 식(II-12), (III-2), (III-4), (V-2), (V-3) 그리고 식(VI-2)를 이용해서 무차원방정식으로 고치면

$$\frac{dv}{ds} + \zeta v^2 + \xi = \delta \sin \varphi s \text{ ----- (VI-3)}$$

이 된다.  $n$  번째 항의 형식으로 나타내면

$$\frac{dv_n}{ds} = -\zeta v_n^2 - \xi_n + \delta \sin \varphi s_n \text{ ----- (VI-4)}$$

이다. 식(III-6)은 (VI-4)에 의해서

$$v_{n+1} = v_n + \Delta s (\delta \sin \varphi s_n - \zeta v_n^2 - \xi_n) \text{ ---- (VI-5)}$$

이 된다. (III-6)와 (VI-5)에 의해서 스프레드시트로 시간이 경과함에 따라 변하는 전류값과 전하값들을 계산하면 표 9와 표 10과 같고 여기서 초기조건은 시간간격이 0.002,  $\zeta$ 은 3.05,  $\varphi$ 은 5.2 그리고  $\delta$ 은 1.54이다.

표 9. 비선형강제진동회로에서 시간에 따른 전하, 전류 계산형식

시 간	전 하	전 류
0	1	0
$B9 + \Delta t^3$	$C9 + \Delta t^3 \cdot D9$	$D9 + \Delta t^3 \cdot (\Delta t^6 \cdot \sin(\Delta t^5 \cdot B9) - (\Delta t^4 \cdot D9^2) - C9)$
$B10 + \Delta t^3$	$C10 + \Delta t^3 \cdot D10$	$D10 + \Delta t^3 \cdot (\Delta t^6 \cdot \sin(\Delta t^5 \cdot B10) - (\Delta t^4 \cdot D10^2) - C10)$
$B11 + \Delta t^3$	$C11 + \Delta t^3 \cdot D11$	$D11 + \Delta t^3 \cdot (\Delta t^6 \cdot \sin(\Delta t^5 \cdot B11) - (\Delta t^4 \cdot D11^2) - C11)$
$B12 + \Delta t^3$	$C12 + \Delta t^3 \cdot D12$	$D12 + \Delta t^3 \cdot (\Delta t^6 \cdot \sin(\Delta t^5 \cdot B12) - (\Delta t^4 \cdot D12^2) - C12)$
$B13 + \Delta t^3$	$C13 + \Delta t^3 \cdot D13$	$D13 + \Delta t^3 \cdot (\Delta t^6 \cdot \sin(\Delta t^5 \cdot B13) - (\Delta t^4 \cdot D13^2) - C13)$

표 10. 비선형강제진동회로에서 시간에 따른 전하, 전류 계산값.

시간간격	시 간	전 하	전 류
0.002	0	1	0
	0.002	1	-0.002
	0.004	0.999996	-0.003967993
	0.006	0.999988064	-0.005904022
	0.008	0.999976256	-0.00780813
	0.01	0.99996064	-0.009680363

표 9와 표 10를 이용해서 시간변화에 대한 전하와 전류의 그래프를 그리면 그림 17, 그림 18과 같은데 초기조건은 전하그래프인 경우는 시간간격이 0.002, 전하는 1, 전류 0,  $\zeta$ 는 3.05,  $\varphi$ 은 5.2,  $\delta$ 은 1.54 이고 전류그래프인 경우는 시간간격이 0.0009, 전하는 1, 전류 0,  $\zeta$ 는 0.34,  $\varphi$ 은 110,  $\delta$ 은 692이다.

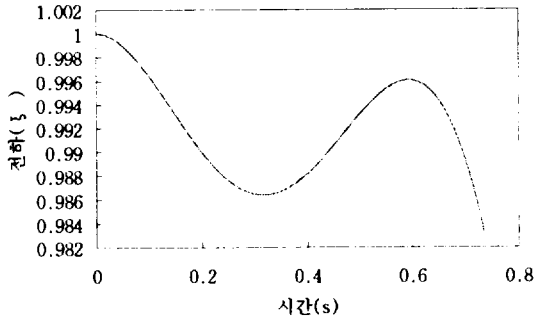


그림 17. 비선형강제진동회로에서 시간변화에 따른 전하.

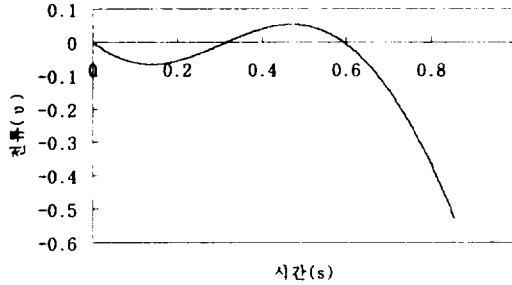


그림 18. 비선형강제진동회로에서 시간변화에 따른 전류.

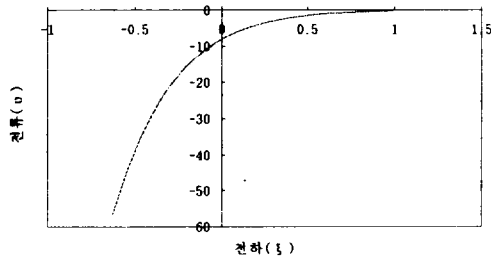


그림 19. 비선형강제진동회로에서 전하와 전류 관계.

그림 19는 비선형 강제진동회로에서 전하와 전류의 관계를 나타낸 그림이다. 비선형강제진동에서는 매개변수들의 미소한 차이에도 그 결과가 많이 변하는 성질을 가지고 있음을 매개변수들을 달리 하면서 그래프를 그리면 쉽게 확인할 수 있다. 실제의 자연현상은 대부분이 비선형적인 경우가 많다. 이런 경우 수치적으로 해석해서 그 값들을 계산하기란 쉽지 않다. 그러나 스프레드시트를 이용하면 쉽게 계산되고 그래프화해서 그 결과를 어렵지 않게 분석할 수 있다.

## Ⅵ. 결 론

지금까지 고등학교과정과 대학초급과정의 물리교과에 많이 다루는 이차미분

방정식을 어떻게 스프레드시트로 계산하는지를 설명하고 이를 적용해서 스프레드시트의 일종인 엑셀을 이용해서 LR, LC, LRC, 강제진동, 비선형강제진동 회로 방정식에서 시간에 대한 전하, 그리고 전류의 값을 계산을 하였고 계산값을 이용해서 여러 가지 물리량들을 나타내는 그래프를 그렸다. 그 결과 여러 물리량들 사이의 상관관계를 나타낼 수가 있었다. 서론에서도 언급했듯이 고등학교과정에서 나오는 물리교과내용들을 분석해보면 이차미분방정식을 이용해서 물리량을 구하는 경우가 많이 있다. 그 대표적인 것이 바로 본 논문에서 다루었던 전자기진동에 관계된 이차미분방정식들이다. 이 방정식들을 고등학생들의 수학적 지식으로 풀어낸다는 것은 사실상 가능치가 없고, 많은 시간과 노력을 해서 계산한다 해도 단편적일 수 밖에 없어서 그 계산값이 가지고 있는 전체적인 의미를 파악하기가 힘들다. 이런 어려운 점은 스프레드시트를 이용하면 상당부분을 쉽게 해결 할 수가 있다.

이차미분방정식을 스프레드시트로 해결하기 위해서는 우선 두 개의 일차미분방정식으로 변환한 후 오일러법에 기초해서 차분방정식의 형태로 변형시켜야 한다. 이렇게 한 후 초기조건을 부여하면 방정식의 해의 값들을 구할 수가 있다.

본 논문에서 사용한 프로그램은 스프레드시트의 일종인 엑셀인데 이 프로그램은 많이 보급되어 있고 학생들과 교사들이 많이 친숙해져 있는 프로그램이다. 따라서 이차미분방정식의 계산값을 구하는 방법만 간단히 배운다면 곧장 물리공부에 적용할 수가 있고 어렵게만 여겨졌던 이차미분방정식의 수학적인 어려움을 극복하고 보다 많은 시간과 정신적 에너지를 창조적으로 물리공부를 하는 곳에 집중 할 수가 있다. 전자기진동에 대한 계산과 그 계산값 들을 그래프로 나타내는 일들은 다른 전문 프로그램을 이용해서 계산할 수 있고 그럴 수도 있지만 가격이 비싸서 학생들이 쉽게 구할 수가 없으며 구했다 해도 사전에 많은 시간을 투자해서 지식을 갖춘 후 이차미분방정식의 해를 구하기 위한 프로그래밍을 해야 하거나 아니면 그 방정식의 해를 구해야 그래프로 그릴 수가 있다. 그러나 엑셀을 사용하면 이런 어려운 점들을 쉽게 극복할 수가 있다. 즉, 프로그래밍을 하지 않아도, 그리고 방정식에 대한 해를 구하지 않아도 원하는 물리량에 대한 그래프를 얻을 수가 있다.

학생들이 스프레드시트를 이용해서 공부를 할 때의 장점을 정리하면, 단순한 반복적인 수치계산을 하거나 이를 바탕으로 그래프를 그리는 데 들어가는



상당한 시간들을 절약할 수가 있고 이 시간에 과학적인 현상이나 막연히 추상적인 물리량들을 그래프로 나타내서 구체화 시킬 수가 있다. 그리고 계산된 데이터들을 바로 그래프화해서 볼 수 있어서 학습효과를 극대화할 수가 있다. 그리고 결과를 분석하고 토의하는 데 보다 많은 시간들을 할애 할 수 있고 과학자들이 학문을 연구하는 것처럼 학생들도 나름대로 스스로 프로그램을 만들고 계산하고 이를 바탕으로 그래프화해서 물리적인 현상들을 좀더 구체적으로 공부해 나갈 수가 있다. 요즘 학생들은 컴퓨터에 매우 친숙해 있고 받아 들이는 속도도 매우 빠르다. 이들에게 물리를 공부하는데 있어서 스프레드시트를 이용하는 법을 가르쳐 준다면 그들은 짧은 시간 내에 익혀서 수동적인 자세가 아닌 선구적인 연구를 수행하는 과학자의 자세로 흥미와 자부심을 가지고 공부를 할 수 있을 것이며 물리에 보다 많은 애착과 관심을 가지고 공부해 나가리라 기대된다.

### 참 고 문 헌

1. 류재구; 한글 엑셀 97, 영진출판사(2000)
2. R. Field; *A spreadsheet simulation for a Young's double slits experiment*, Physics Education. Vol. 30, No. 30, July 1995
3. D. J. Saunders and R. D. Ford; *A numerical learning method for the vibration of a system with a single degree of freedom*,
4. R. J. Beichner; *Visualizing Potential Surfaces with a Spreadsheet*, THE PHYSICS TEACHER, VOL. 35, FEB. 1997.
5. A. M. Macleod; *Further studies of oscillations using computers*, Physics Education, Vol.30, No. 6, November 1995.
6. R. Newburgh; *Analysis, graphs, approximation: a toolbox for solving problems*. Physics Education, Vol. 32, No. 6, November 1997.
7. R. Trumper and M. Gelbman; *Investigating power, work and effective values in an AC resistive circuit through a microcomputer-based laboratory*. Physics Education, Vol. 32, No. 6, November 1997.

8. L. Webb; *Spreadsheets in physics teaching*, Physics Education, Vol.28, 1993.
9. M. L. De Jong; *Graphing Electric Potential*, THE PHYSICS TEACHER, Vol. 31, May 1993.
10. 권숙일 외 2인; *고등학교 물리Ⅱ*, 동아출판사(1990).
11. M. L. De Jong; *INTRODUCTION TO COMPUTATIONAL PHYSICS*, Addison-Wesley (1991).