

GSP를 이용한 작도방법 연구

문정배* · 박진원**

목 차	
I. 서론	III. 결론 및 제언
II. GSP를 이용한 자료 개발	참고문헌

I. 서 론

최근의 학생들의 경향을 살펴보면 인내심은 점점 줄어들고 모든 일에 즉흥적이고 충동적이며 흥미를 끌지 못하는 일에 대해서는 아무리 중요한 일이라고 할지라도 별 관심을 보이지 않는다. 이러한 경향은 수업시간에도 그대로 나타나, 책과 칠판을 위주로 하는 교사중심의 설명식 수업인 경우는 수업에 관심을 갖는 학생이 많지 않다. 이러한 문제를 해결하기 위한 한 방법으로 정보-통신 기술(Information, Communication, and Technology)을 수업에 활용하는 것은 아주 일상적인 일이 되었다.

「초·중등학교 정보통신기술 운영지침」에 의하면 모든 국민공통기본교과에 정보통신기술 활용교육이 10%이상 반영되도록 하고 있다. 이때 10%는 그 수치상의 의미보다는 학습과 일상의 문제해결과정에 있어 ICT의 활용이 자연스러운 삶의 일부가 되도록 하는데 그 의의가 있다고 할 수 있다. 따라서 ICT 활용교육은 정보통신기술을 접함에 있어서 학생들이 보다 유의미하고 생산적인 경험을 할 수 있도록 기회를 제공하는 방향에서 이루어져야 할 것이며, ICT 교수-학습활동 유형 또한 이러한 방향과 같은 맥락에서 제시될 필요가 있다.

현재 학생들은 수학, 그 중에서도 특히 도형에 관한 부분을 매우 어려워하고 있다. 그 이유를 살펴보면 현재 기하교육은 유클리드 기하의 형식적인 취급만이 초점이 되고 있다. 기하의 주된 목적은 학생들의 기하학적 직관을 키우고 논리적 추론 능력을 향상시키는

* 표선중학교 교사

** 제주대학교 수학교육과 부교수

데 있다. 이를 위해서는 연역적 증명 활동만으로는 부족하며, 탐구하고 추측하며 가설을 설정하는 귀납적인 활동도 중요하다. 또한 학생들이 문제를 찾고 패턴화하는 활동이 부족하다. 수학은 패턴의 과학이다. 수학자는 수와 공간에서 패턴을 탐구한다. 패턴을 사용하여 새로운 패턴이나 패턴의 패턴들을 만들어낸다. 수학적 이론은 패턴들 사이의 관계이며 수학의 응용은 패턴을 사용하여 자연적 현상이나 수학적 현상을 설명하고 예상하는 것이다. 수학의 성격이 이러하다면 학교 수학도 패턴을 발견하고 적용하며 패턴을 합리화하는 활동에 초점을 맞추어야 할 것이다. 문제는 교사들의 설명이나 설득이 아니라 학생들 자신의 입장에서 패턴을 찾고 증명하는 활동이 강조되어야 한다는 점이다.

이러한 문제점을 해결하기 위해서는 먼저 수업 환경이 개선되어야 한다. 먼저 수학교육에서 실험실 활동이 강조될 필요가 있다. 과학과 마찬가지로 수학교육에서도 학생들이 실험실에서 관찰하고 토의하는 활동이 필요하다. 이러한 개선은 컴퓨터의 소프트웨어 활용을 통하여 가능할 것으로 생각된다. 컴퓨터와 소프트웨어의 활용은 지필 환경이 갖는 방법적인 한계를 극복하게 해주며, 도형을 쉽게 조작할 수 있도록 하여 도형과 도형의 변환과 관련된 학습내용을 전체적인 시각을 통해 파악할 수 있게 해준다. 따라서 결론을 추정하거나 탐구하는 활동을 위해 컴퓨터의 소프트웨어 활용이 필요하다고 하겠다. 결국 컴퓨터의 소프트웨어 활용을 통하여 기하학적인 도형을 그리는 훈련을 함으로써 기하학의 중요원리를 조기에 비형식적으로 도입할 수 있을 뿐 아니라 문제해결력이나 초인지(metacognition)와 같은 수학적 능력을 향상시킬 수 있다.¹⁾ 따라서 컴퓨터를 수학교과에 이용하기 위한 적절한 자료나 소프트웨어가 부족한 우리의 현실에서 수학교육에 관한 학습 이론이나 배경 이론보다는 학생들에게 직접적으로 도움을 줄 수 있는 소프트웨어의 개발 및 적용이 우선되어야 하겠다.

수학은 내용이 추상적이어서 학생들이 개념이나 원리를 잘 이해하지 못하면 다음 단계로 나가기가 매우 어려우며 따라서 이러한 이유로 수학학습 시간에 흥미를 느끼게 해주고 능동적으로 학생들이 수업에 참여하게 해야 할 것임은 당연하다. 특히 수요자중심의 교육을 지향하고 있는 7차 교육과정에서는 수요자인 학생들의 요구를 스스로 해결할 수 있도록 학생활동 중심의 교육을 강조하고 있으며 가르치는 교사들에게도 새로운 수업방법의 개선과 자료를 개발하여 학생들이 쉽게 이해하고 수업의 참여도를 높이기 위하여 다양한 교육매체를 활용하도록 권장하고 있다. 이러한 관점에서 GSP는 학생들이 선생님과 함께 스스로 문제를 찾아 나가고 또 이를 통하여 기본적인 수학적 개념을 자연스럽게 익힐 수 있도록 수학 수업을 진행하는데 활용할 수 있는 좋은 프로그램이라고 생각된다.

본 논문에서는 GSP를 사용하여 수업 시간에 활용할 수 있는 몇 가지 도형을 작도하는 방법을 알아보았다. 먼저 GSP 프로그램에 대하여 소개하려고 한다.

1) 류희찬(1994), "탐구활동으로서의 기하교육", 『중등우리교육』, pp.214~217. ; 강병욱(1999), "컴퓨터 소프트웨어 활용이 도형학습에 미치는 영향(GSP를 중심으로)", 석사학위논문, 제주대학교 교육대학원, pp.5~6에서 재인용.

1. GSP의 특징

GSP는 작도프로그램이다. 이 프로그램은 기존의 정적이고 고정된 도형에서 동적이고 움직이는 도형을 작도하여 관찰함으로써 여러 가지 기하학적 관계를 이해하고 도형의 성질을 탐구하는 데 도움을 줄 수 있는 프로그램이다. 기능상으로는 유클리드 기하의 도형을 완벽하게 구현할 수 있으며, 나아가 애니메이션기능, 자취기능을 통하여 실제 우리가 머릿속에서 상상하기 힘든 여러 가지 도형을 직접 시각적으로 보여줌으로써 기하의 여러 가지 성질을 발견하는데 좋은 아이디어를 제공해 줄 수 있다. 뿐만 아니라 평행이동, 회전, 대칭이동, 벡터 등을 이용하면 다양하게 움직이는 그림을 그릴 수 있으며 이러한 그림을 활용하여 한층 더 생동감 넘치는 수업시간을 만들 수 있게 한다.

GSP는 특징을 살펴보면 다음과 같다.²⁾

첫째, 눈금 없는 자와 컴퍼스를 사용해서 도형을 작도하는 경우에는 생생한 기하학적 원리를 담는데 여러 가지 한계가 있다. 그러나 GSP는 점, 선, 원을 그리는 것에서 출발하여 선분의 중점, 평행선, 주어진 선분의 길이와 같은 반지름의 원, 기하학적 관계를 나타낸 그래프 등을 그릴 수 있다. GSP를 이용하면 도형의 본질적인 관련성을 나타내는 그림을 빠르고 정확하게 그릴 수 있다.


둘째, GSP를 사용하여 그린 도형에서는 도형의 한 부분을 끌면 서로 연관된 부분의 도형이 변하게 된다. 종이 위에 연필을 사용해서 그린 도형이 기하학적 관계를 나타내는 어떤 특정한 경우를 표현한 것인데 비해, GSP는 여러 가지 비슷한 경우를 많이 표현할 수 있다.

셋째, 스크립트를 실행하면 도형 사이의 관계와 특정한 도형 자체 모두를 관찰할 수 있으므로 설정한 가설이 옳은지 또는 옳지 않음을 동적으로 확인할 수 있다.

넷째, 스크립트는 작도 단계를 기록하는 것이다. 스크립트를 단계별로 직접 기록할 수도 있고, 이미 작도된 도형들로부터 만들 수도 있다. 스크립트를 도구와 같이 사용하여 도형이나 도형들을 반복적으로 그릴 수 있다.

다섯째, GSP는 도형의 모양을 여러 가지로 바꾸고 설정할 수 있으므로 동적이며 아름답게 자기의 발견을 표현할 수 있다. 도형에 색을 줄 수 있고, 이름을 붙일 수 있고, 설명을 써넣을 수 있다. 스크립트에도 설명을 달 수 있고, 출력을 할 수 있으며, 저장할 수도 있다. GSP는 사용자와 상호작용 하는 동적인 칠판으로 사용될 수 있다.

여섯째, 변환메뉴의 반복 기능을 사용하여 같은 작업의 순환(Recursion)을 할 수 있고 이를 이용하여 프랙탈의 그림 등 아름다운 여러 가지 도형들을 작도할 수 있다.



일곱째, GSP에는 사용자 도구 만들기 가 있어서 정다각형, 타원, 각 표시 등의 도구들을 편리하게 가져다 쓸 수 있으며 자주 사용하게 되는 도형들을 스스로 만들어 넣어 두면 언제든지 간편하게 사용할 수 있다.

2) 수학사랑(1999), “예제로 배우는 한글 GSP”, p.8

2. GSP의 교육적 효과

GSP의 교육적 효과를 살펴보면 다음과 같다.³⁾

첫째, 동적인 평면기하의 성질을 정적인 상태의 인쇄 매체나 칠판 등을 통하여 지도할 때보다 더욱 확실하게 이해시킬 수 있다.

둘째, 새로운 멀티미디어 매체로서 GSP는 일반적인 그림 프로그램과 달리 직선도구() 또는 원도구()만을 사용하는 작도와 측정을 통하여 학생들의 흥미를 자극할 수 있다. 또한 학생들이 직접 GSP를 사용한다면 학습욕구를 유발할 수 있을 뿐만 아니라 학습 내용을 눈으로 확인할 수 있어서 더욱 효과적이다.

셋째, 평면기하의 성질을 발견적으로 찾아내려고 할 때 GSP를 마치 실험도구처럼 사용하여 실제로 작도하고, 측정하여 그 성질에 대한 가설을 학습자 스스로 세울 수 있도록 도와 줄 수 있다.

넷째, 평면도형의 성질을 직관적으로 충분히 이해한 다음 연역적으로 증명하는 것이 필요한데 이 때에 GSP는 정확한 그림을 제공하여 증명이나 문제 풀이에 필요한 정보를 확실하게 제공해 준다.

다섯째, 애니메이션과 끌기를 사용하여 평면기하의 성질을 연속적이면서 역동적으로 관찰할 수 있다. 특히 애니메이션으로 만들어지는 흔적 남기기는 도형의 자취를 생생하게 보여 준다. 따라서 많은 도형을 그 정의에 의하여 구현해 봄으로써 확실한 개념을 얻고 그로부터 파생되는 도형의 성질에 자연스럽게 접근할 수 있다.

여섯째, GSP에서 제공되는 직교좌표계와 극좌표계를 통하여 평면기하의 여러 가지 성질에 대한 해석기하적 접근이 가능하다.

II. GSP를 이용한 자료 개발

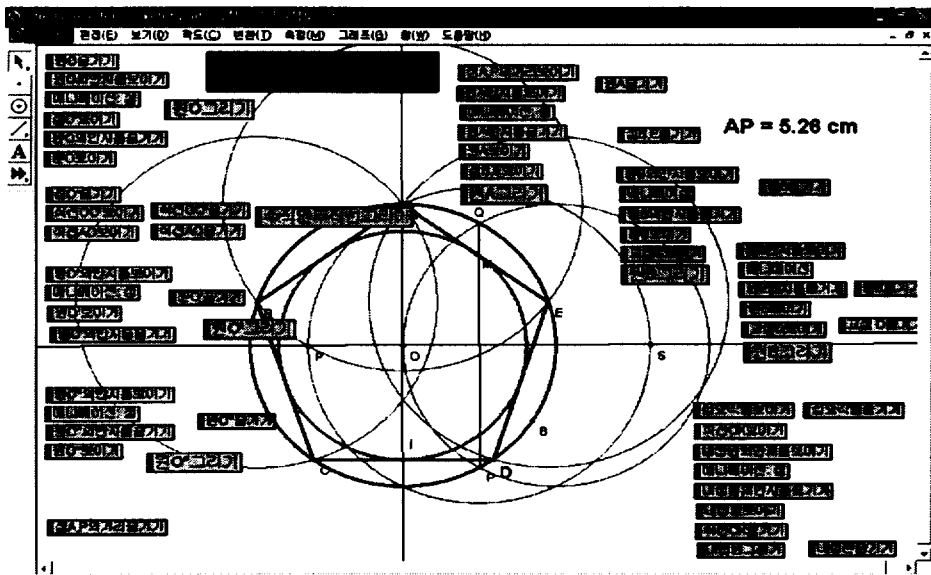
1. 여러 가지 다각형 그리기

(가) 정오각형의 작도

먼저 원 O 를 작도하고 원 위에 한 점 O' 를 잡는다. 두 점 O, O' 를 지나는 직선을 긋고 원의 중심 O 를 지나는 수선을 작도하고 원과의 교점을 A 라 하자. 그리고 점 O' 를 중심, $\overline{OO'}$ 를 반지름으로 하는 원을 그리고 원 O 와의 교점을 작도하고 두 점을 연결한다. 그 선분과 $\overline{OO'}$ 의 교점을 O'' 라 하자. 점 O'' 를 중심으로 $\overline{O''A}$ 를 반지름으로 하는 원을 그리고 $\overline{OO'}$ 와 만나는 점을 P 라고 하여 \overline{AP} 의 길이를 측정한다.

3) 임해경(2005), "초중등교사를 위한 GSP 활용", 『수학사랑』, pp.9~10.

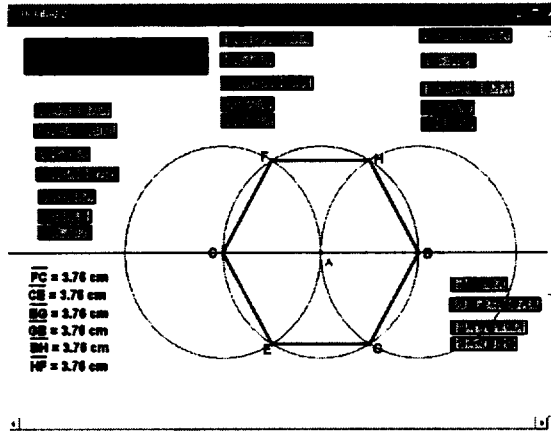
다. 점 A 와 \overline{AP} 의 측정값을 선택하여 작도메뉴의 중심과 반지름이 주어진 원을 실행하고 원 O 와의 교점을 BE 라고 하자. 각각 점 B, E 를 중심, \overline{AP} 의 측정값을 선택하여 작도메뉴의 중심과 반지름이 주어진 원을 실행하고 두 원 B, E 와 원 O 와의 교점을 C, D 라고 하자. 점 A, B, C, D, E 를 선분으로 연결하면 정오각형이 작도된다. 점 O, C 를 지나는 직선을 작도하고 \overline{AE} 와 교점을 M 이라고 하자. \overline{OM} 을 반지름으로 하는 원을 그리면 내접원 작도가 완성된다. 필요 없는 개체를 선택하여 숨기고, 각 단계에 맞는 버튼을 만들면 실제 작도하는 모습을 확인할 수 있다.



<그림1> 정오각형의 작도

(나) 정육각형의 작도

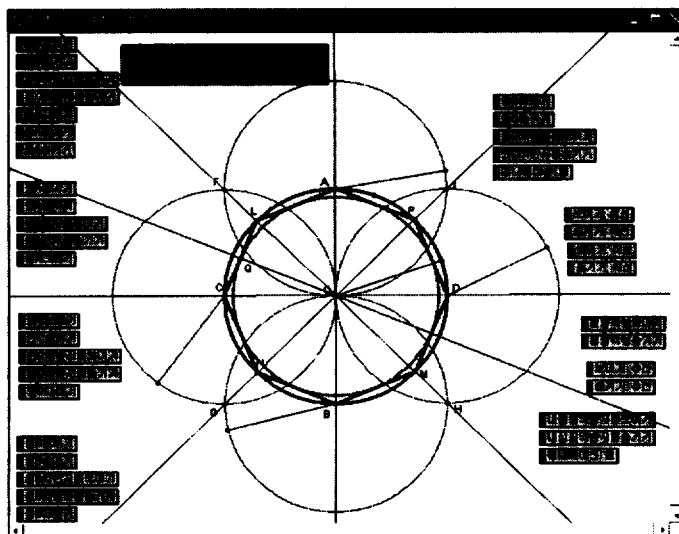
정육각형의 한 변의 길이는 외접원의 반지름의 길이와 같다는 사실을 이용하면 된다. 임의의 원 A 를 그리고 원 위에 한 점 B 를 잡는다. 점 A 와 B 를 지나는 직선을 작도하고 원과의 교점을 C 라고 하자. 점 C, D 를 각각 중심, \overline{AB} 를 반지름으로 하는 원을 작도하고 원 A 와 교점을 F, E, G, H 라고 하자. 점 F, C, E, G, B, H 를 차례로 연결하면 정육각형의 된다. 그러지는 과정을 보이기 위해 각 개체를 선택하여 편집 → 동작버튼 → 숨기기/보이기를 실행하여 버튼을 만들어 준다. 생성된 버튼들을 각 단계별로 묶어 편집메뉴 → 동작 → 동시연결실행 명령을 주어 실행버튼 **원A그리기** **원B그리기** **원C그리기** **정육각형생성** 을 만들어 준다. 위의 버튼을 제외한 나머지 개체들을 선택하여 모두 숨겨준다. **원A그리기** **원B그리기** **원C그리기** **정육각형생성** 버튼을 누를 때마다 정육각형을 그리는 애니메이션이 실행됨을 확인할 수 있을 것이다.



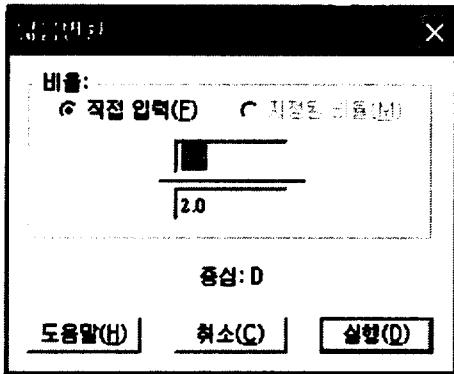
<그림 2> 정육각형의 작도

(다) 정팔각형의 작도

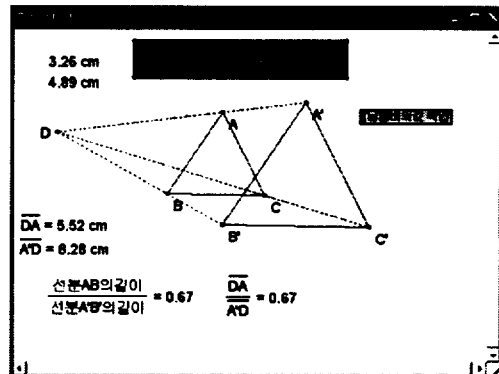
원 O 를 작도한다. 원 위의 점 A 를 작도하고 이 점과 점 O 를 지나는 직선을 작도한다. 점 O 를 지나고 \overline{OA} 에 수직인 직선을 작도하고 원 O 과의 교점을 C, D 라고 하자. 점 A, O 를 차례로 선택하여 작도메뉴의 중심과 원주 위의 한 점이 주어진 원을 실행한다. 위와 같은 방법으로 원 C, E, G 를 작도하고 원 O 와 교점을 F, G, H, I 라고 하자. $\overline{FG}, \overline{GI}$ 를 작도하고 원 O 와 교점을 L, M, N, P 라고 하자. 8개의 점 A, L, C, N, B, M, D, P 를 선분으로 연결하면 정팔각형이 작도된다. 점 O 를 지나 \overline{LC} 에 수직인 직선을 긋고 수선의 발을 Q 라 하자. \overline{OQ} 를 반



<그림 3> 정팔각형의 작도

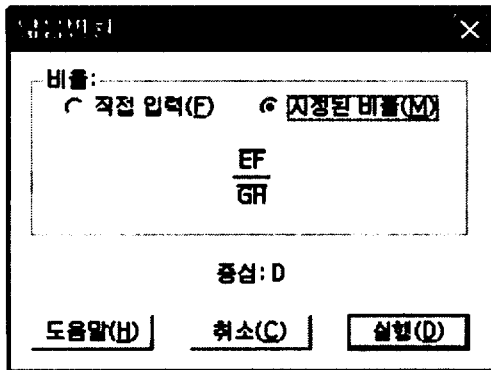


<그림 6> 답음변환 창_직접입력

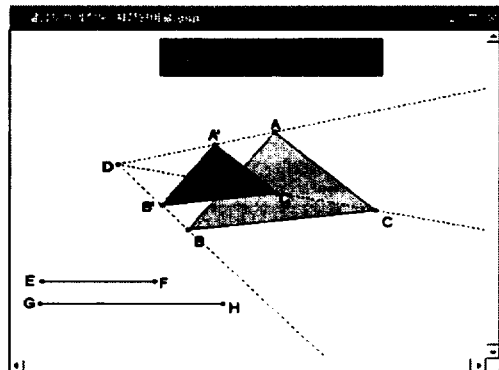


<그림 7> 답음도형의 작도

동적인 작도를 하기 위해서는 지정된 비율을 사용하면 된다. 먼저 화면에 적당한 $\triangle ABC$ 를 그린다. 답음이 중심이 될 점 D 를 찍고 난 다음에 \overline{EF} , \overline{GH} 를 그린다. \overline{EF} , \overline{GH} 를 차례로 선택하여 두 선분으로 비율지정을 실행하면 간단한 애니메이션으로 지정된 비율을 나타낸다. 도구로 $\triangle ABC$ 를 선택하여 변환메뉴 \rightarrow 답음변환 \rightarrow 지정된 비율을 실행하면 작도가 완성된다. 지정된 비율 > 1 이면 확대, 지정된 비율 < 1 이면 축소변환이 된다. 답음의 중심 D 와 대응점들을 반직선으로 연결하고 삼각형의 내부를 적당한 색으로 칠하자. 여기서 \overline{EF} , \overline{GH} 를 각각 움직여 보면 답음도형이 어떻게 움직이는지 생동감 있게 관찰할 수 있다.



<그림 8> 답음변환 창_지정된 비율

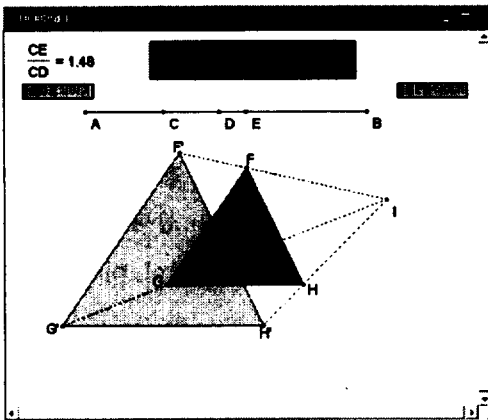


<그림 9> 답음도형_애니메이션

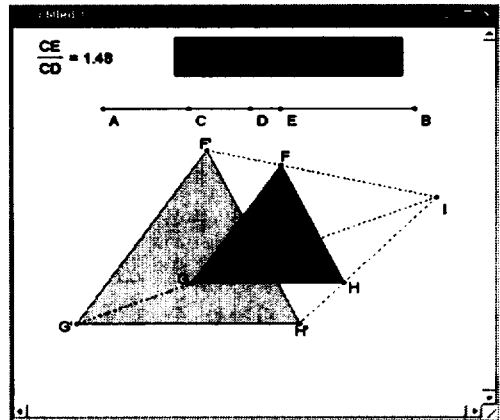
세 점 사이의 방향이 있는 거리를 이용하여 비율을 지정할 수 있다. 만약 임의의 선분 위에 세 점 A, B, C 가 있다면 이들을 선택한 순서대로 측정메뉴의 비율을 선택하면 분모 분자가 되어 화면에 계산되어 나타난다. 그 비율은 처음 선택한 점을 기준으로 같은 쪽에 있으면 답음의 중심으로부터 같은 쪽에, 다른 쪽에 있으면 답음 도형을 서로 반대방

항에 나타난다. 스케치화면에 \overline{AB} 를 작도하고 그 위에 세 점 C, D, E 를 작도한다. 출발점을 C 로 하여 차례로 D, E 를 선택한다. 세 점이 선택되면 측정메뉴 → 비율을 실행하면 화면에 $\frac{CE}{CD}$ 와 그 값이 계산되어 나타난다. 화면에 $\triangle FGH$ 를 작도하고

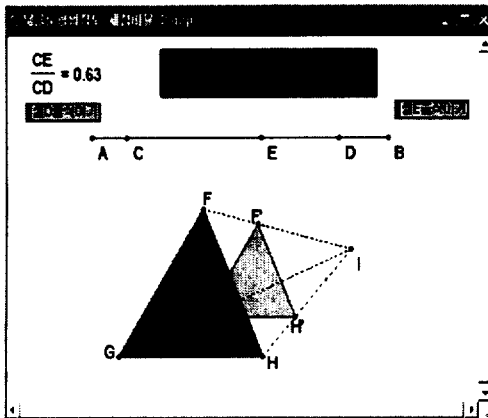
를 선택하여 변환메뉴의 비율지정을 실행한다. $\triangle FGH$ 를 선택하고 변환메뉴에서 답음변환을 실행하면 비율에 의해 결정되는 답은 도형이 그려진다. 답음의 중심 점 I 와 답은 도형의 대응점들을 차례로 연결하면 작도가 완성된다. 답음의 중심으로부터 같은 방향 또는 다른 방향에 두 답은 도형이 나타나도록 점 D 또는 E 를 움직이면서 관찰할 수 있도록 버튼을 만들어주어 두 도형의 위치관계 확인할 수 있다.



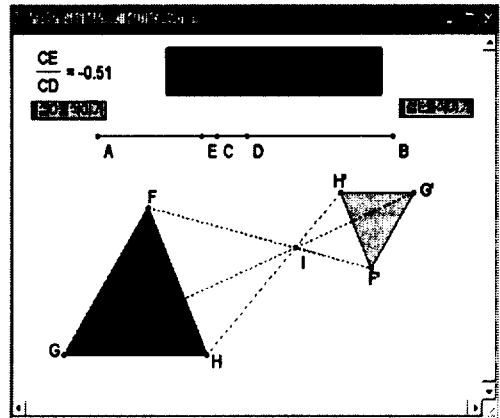
<그림 10> 답음변환_비율사용_애니메이션_1



<그림 11> 답음변환_비율사용_애니메이션_2



<그림 12> 답음변환_비율사용_애니메이션_3



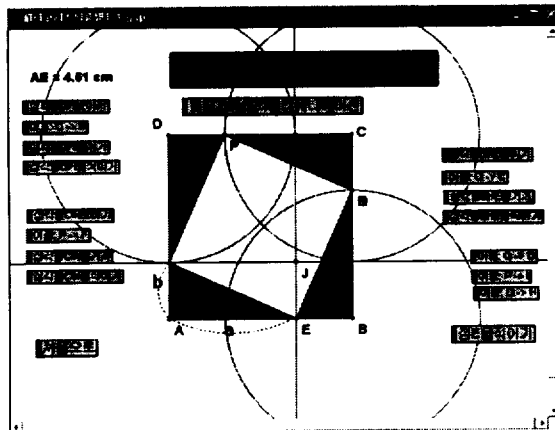
<그림 13> 답음변환_비율사용_애니메이션_4

4. 피타고라스의 정리

(가) 방법 1

\sphericalangle 를 이용하여 \overline{AB} 를 작도하고 그 위에 점 E 를 잡는다. 점 B, C, D 각각 중심, \overline{AE} 를 반지름으로 하는 세 원을 그린다. 이 원들과 정사각형의 세 변과의 교점을 각각 H, P, F 라고 하고 $\triangle BHE, \triangle CIH, \triangle DFI$ 를 작도한다. \overline{CD} 위에 점 O 를 잡고 점 D, E 를 선택하여 변환메뉴 \rightarrow 벡터지정을 실행하고 점 O 를 점 K 까지 움직이는 이동버튼 **[이동(O, K)]**, 거꾸로 이동되는 버튼 **[이동(O, K)]**를 만든다. 점 D, F, P 를 선택하여 작도메뉴의 삼각형의 내부를 작도하고 숨기기/보이기 버튼을 만들어 하나는 항상숨김, 다른 것은 항상보임 옵션을 준다. **[삼각형DFP를숨이기]**, **[삼각형DFP를보이기]**를 선택하여 편집메뉴 \rightarrow 동작 \rightarrow 동시연결실행에서 동시연결실행 옵션을 선택하여 **[삼각형DFP를숨이기]** 버튼을 만든다. \overline{IF} 위에 점 P 를 잡고 점 I, P 를 선택하여 변환메뉴 \rightarrow 벡터지정을 실행하고 점 P 를 점 F 까지 움직이는 이동버튼 **[이동(P, F)]**, 거꾸로 이동되는 버튼 **[이동(P, F)]**를 만든다.

점 C, I, H 를 선택하여 작도메뉴의 삼각형의 내부를 작도하고 숨기기/보이기 버튼을 만들어 하나는 항상숨김, 다른 것은 항상보임 옵션을 준다. **[삼각형CIH를숨이기]**, **[삼각형CIH를보이기]**를 선택하여 편집메뉴 \rightarrow 동작 \rightarrow 동시연결실행에서 동시연결실행 옵션을 선택하여 **[삼각형CIH를숨이기]** 버튼을 만든다. 위와 같은 방법으로 $\triangle BHE$ 에 대해서도 같은 과정을 반복하여 작도한다. **[삼각형BHE를숨이기]** **[삼각형BHE를보이기]** **[삼각형BHE를숨이기]** 버튼을 차례로 선택하여 **[피타고라스정리(방법1)]** 버튼을 만든다. **[이동(O, D)]** **[이동(P, F)]** **[이동(Q, H)]**를 차례로 선택하여 **[정사각형]** 버튼을 만들어 주고 점 E 에 대해서도 움직이기 버튼을 만든다.



<그림 14> 피타고라스의 정리 (방법 1)

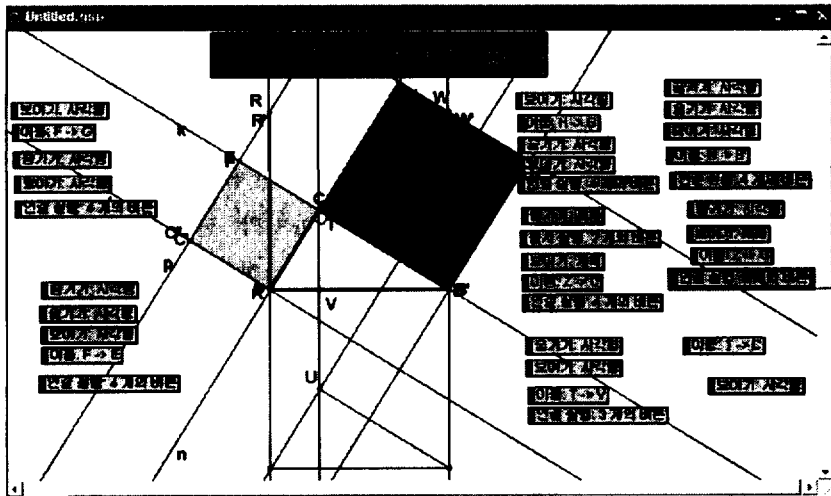
필요 없는 개체를 선택하여 숨겨주면 작도가 완성된다. **피터링** **이동** 버튼을 누르면 생동감 있는 해당 애니메이션이 실행됨을 확인할 수 있다.

(나) 방법 24)

먼저 직각삼각형 ABC 를 작도한다. $\triangle ABC$ 의 세 점을 각각 한 변으로 하는 정사각형 세 개를 작도한다. $\triangle ABC$ 의 두 꼭지점을 지나는 직선을 세 개를 작도하고 $\triangle ABC$ 각 변을 한 변으로 하는 정삼각형을 변환메뉴의 회전이동 명령을 실행하여 작도한다. 직선 p 위에 점 F 를 잡고, 점 E 를 F 만큼 변환메뉴에서 벡터지정을 실행한다. 점 C' 를 변환메뉴 \rightarrow 평행이동 \rightarrow 지정된 벡터 옵션을 주어 실행시켜 점 C'' 를 작도하고 $\square ACFC''$ 를 만들고 난 다음에 내부를 색칠한다. 점 F, G 와 점 F, E 를 각각 차례로 선택하여 편집 \rightarrow 동작 \rightarrow 이동 명령을 주어 **이동** **이동** 버튼을 만들어 주면 $\square ACFC''$ 이 버튼을 누를 때마다 이동됨을 확인할 수 있다. 직선 q 위에 점 H 를 잡고, 점 H 를 B' 만큼 변환메뉴에서 벡터지정을 실행하고 난 다음에 위의 ⑤번과 같이 사각형을 만들어 준다. 점 H, Z 와 점 F, E 를 차례로 선택하여 편집 \rightarrow 동작 \rightarrow 이동 명령을 주어 **이동** **이동** 버튼을 만들어 주면 $\square BDHC$ 가 이 버튼을 누를 때마다 이동됨을 확인할 수 있다. $\square ACGR$, $\square CBWZ$ 을 각각 선택하여 편집 \rightarrow 동작메뉴 \rightarrow 숨기기/보이기 버튼을 만들고 옵션을 항상 보이거나 항상 숨기기 중 하나를 선택하여 만들어 준다. 꼭지점 C 를 지나고 \overline{BC} 에 수직인 수선을 작도하고 이와 평행이면서 점 A, B 를 각각 지나는 직선을 작도하자. 직선 n 위에 점 Z 를 잡고 점 G, Z 를 차례로 선택하여 변환메뉴의 벡터지정을 실행한다. 점 R, A, B, D 를 차례로 선택하여 변환메뉴 \rightarrow 평행이동 \rightarrow 지정된 벡터 옵션을 주어 실행한다. 벡터이동에 의해 생긴 점 R', A', C' 과 Z 를 선택하여 사각형의 내부를 노란색으로 채운다. 벡터이동에 의해 생긴 점 C', W', C' 과 Z 를 선택하여 사각형의 내부를 녹색으로 채운다. 점 Z, C 와 점 Z, G 를 각각 차례로 선택하여 편집 \rightarrow 동작 \rightarrow 이동 명령을 주어 **이동** **이동** 버튼을 만들어 주면 $\square R'A'C'Z'$, $\square C'B'W'Z'$ 이 버튼을 누를 때마다 이동됨을 확인할 수 있다. 직선 n 위에 점 T 를 잡고 점 T, A 를 지나는 직선을 그리고 이 직선과 평행이면서 점 A' 를 지나는 직선을 그리고 직선 n 과의 교점을 U 라고 하자. 네 점 A, A', U, T 와 U, B', B, T 각각 선택하여 사각형의 내부를 색으로 채운다. 점 T, V 와 점 T, C 를 각각 차례로 선택하여 편집 \rightarrow 동작 \rightarrow 이동 명령을 주어 **이동** **이동**

4) 김향숙 외 (2005) "창의적인 수학을 위한 GSP활용" pp. 61~67

이름: T->C 버튼을 만들어 주면 $\square AA'UT$, $\square UB'BT$ 가 이 버튼을 누를 때마다 이동됨을 확인할 수 있다. 각 버튼을 누를 때마다 사각형들이 보이거나 숨길 수 있도록 버튼을 만들고 이들을 적당히 묶어가면서 작업을 하고 필요 없는 개체는 선택하여 숨겨주면 작도가 완성된다. 숨기기, 연결 실행버튼들을 숨기거나 적당히 묶어서 단계별로 재배열하고 또 이들을 묶어서 **실행하기** **처음으로** 버튼을 만들어 버튼을 눌러보면 생동감 있는 해당 애니메이션이 실행됨을 확인할 수 있다.



<그림 15> 피타고라스의 정리 (방법 2)

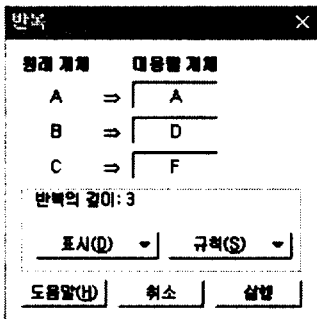
5. 프랙탈

프랙탈은 자연계의 구조적 불규칙성을 기술하고 분석할 수 있는 기하학으로 그 개념은 1975년 IBM 연구원이면서 하버드 객원교수로 있던 만델브로트(Mandelbrot)가 소개하였다. 자연의 형상을 근사적으로 보아 대충 산을 원뿔로, 나무는 삼각형에 막대가 달린 모양으로 묘사하게 되지만 이는 정확한 묘사가 아니다. 자연의 형상에 내포된 불규칙성을 간파한 만델브로트는 “구름은 둥그렇지 않으며 산은 원뿔 모양이 아니다. 해안선은 부드러운 곡선이 아니며 번개는 결코 직선으로 퍼져 나가지 않는다.”고 주장했다. 자연 형상에 내포된 불규칙성의 정도는 축척에 상관없이 일정함을 간파하고 “영국 해안선의 길이는 얼마일까?”를 생각하며 놀라운 사실을 발견하게 된다. 그는 해안선의 길이는 재는 자의 길이가 짧아질수록 지수함수적으로 늘어난다는 사실을 밝혀냈다. 프랙탈은 고전적인 유클리드 기하보다 자연현상을 더 잘 나타낼 수 있다. 그 이유는 프랙탈이 자기닮음을 특징으로 하고 있는데 자연에는 자기유사성의 성질이 많이 존재하기 때문이다. 일정 기간의 날씨 패턴은 긴 주기의 날씨 패턴과 닮았다. 나뭇가지는 나무와 닮았고 바위는 산과 닮았다. 프랙탈은 과학, 의학, 컴퓨터 등의 응용 분야에 많다. 프랙탈의 예로서는 고사리 잎의

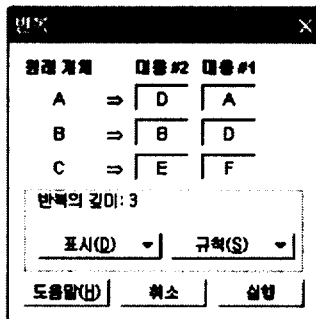
가지치기 모양, 구름의 무정형 패턴, 번개의 불규칙적 궤적, 전기의 방전 패턴, 눈 등의 결정의 성장 모습, 허파, 실핏줄, 신경망의 가지 구조, 불규칙적인 주가의 등락 패턴, 분자들의 무질서 운동, 우주의 은하계의 비정규적 분포 등 분자부터 천문학적 단위까지 모든 척도의 자연계의 비정규적 분포 현상들에서 나타난다.

(가) 시어핀스키 삼각형5)

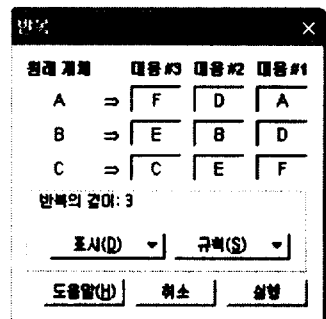
삼각형 ABC 를 그린다. 삼각형의 세 개의 변을 선택하고 작도메뉴의 중점을 선택하여 실행하고 이들을 선분으로 연결한다. $\triangle ADF$, $\triangle DBE$, $\triangle FEC$ 의 내부를 적당한 색으로 칠한다. 점 A, B, C 를 선택하고 변환메뉴의 반복을 실행하여 대화상자가 나타나면 점 A, D, F 를 차례로 클릭 한다. 규칙(S) ▾을 클릭하여 대응추가를 선택하고 점 D, B, E 를 차례로 클릭한다. 한 번 더 규칙에서 대응추가를 하고 점 F, E, C 를 클릭한다. 표시(O) ▾를 클릭하여 마지막 단계만 선택하고 실행한다. $\triangle ADF$, $\triangle DBE$, $\triangle FEC$ 의 내부를 보기메뉴 → 삼각형 숨기기 선택하여 숨기면 시어핀스키 삼각형이 완성된다. 그려진 도형을 모두 선택하여 키보드의 \oplus , \ominus 키를 클릭하면서 깊이를 조절하면서 관찰할 수 있다.



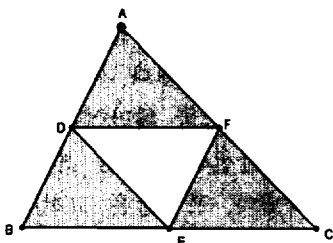
<그림 16> 반복 창 (1)



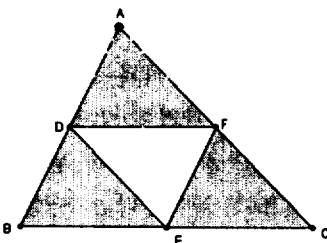
<그림 17> 반복 창 (2)



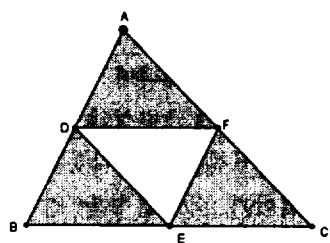
<그림 18> 반복 창 (3)



<그림 19> 시어핀스키 삼각형 작도 (2)

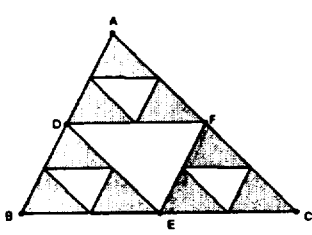


<그림 20> 시어핀스키 삼각형 작도 (1)

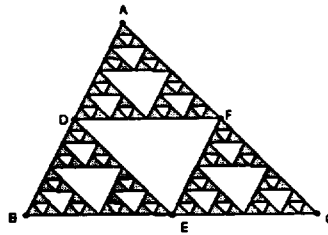


<그림 21> 시어핀스키 삼각형 작도 (3)

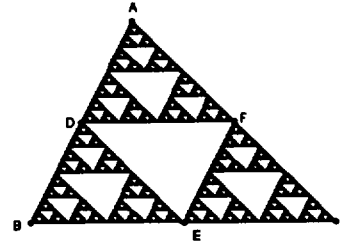
5) 임해경(2005), "초중등교사를 위한 GSP 활용", 「수학사랑」, pp.146~147.



<그림 22> 시어핀스키 삼각형
깊이 (1)



<그림 23> 시어핀스키 삼각형
깊이 (2)



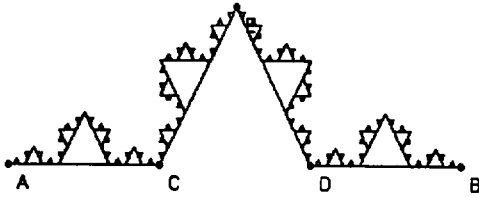
<그림 24> 시어핀스키 삼각형
깊이 (3)

(나) 코흐곡선⁶⁾

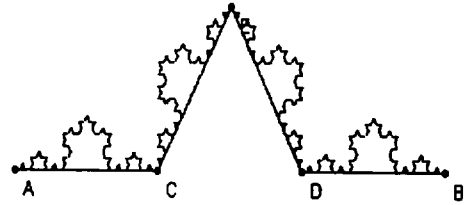
프랙탈 기하라는 수학의 한 분야가 있기 오래 전인 1904년 코흐(Helge von Koch)에 의하여 처음 프랙탈이 소개 되었다. 코흐는 『어떤 유한공간에 꼭 탄 곡선의 길이는 무한히 길다.』는 것을 보여주기 위하여 곡선을 연구하였고 그이 이름을 따서 코흐곡선(Koch curve)라 하였다. 정삼각형의 각 변을 삼등분해 중앙의 $\frac{1}{3}$ 를 제거한다. 제거된 부분에 꼭 지점이 바깥쪽을 향하도록 정삼각형의 두 변을 그린다. 이를 반복하면 눈송이 모양의 아름다운 모양이 나타나는데 이것이 코흐곡선이다. 이 도형은 둘레 길이는 무한히 늘어나면서 일정한 공간(처음삼각형에 외접하는 원)은 벗어나지 않는다. 물론 교차하지도 않는다. 무한히 반복된 코흐곡선을 현미경으로 들여다보면 원래의 모양과 유사함을 발견할 수 있다. 이것을 자기유사성이라 하는데 프랙탈 구조의 특징이다.

\overline{AB} 를 그린다. 점 A를 더블클릭하여 중심지정하고 점 B를 선택하여 변환 → 닮음변환을 눌러 점 B를 1/3, 2/3의 비율로 닮음변환시킨 점 C, D를 작도한다. 점 C를 더블클릭하여 중심지정하고 점 D를 선택한 후 변환 → 회전이동을 눌러 60°회전이 동시된 점 E를 작도한다. \overline{AB} 를 숨기고 각 점들을 차례로 선분으로 연결한다. 점 A, B를 차례로 선택하여 변환메뉴의 반복을 클릭해서 나타나는 대화상자에서 점 A, C를 클릭한다. 규칙의 대응추가를 하고 점 C, E를 클릭한다. 같은 방법으로 다시 대응추가를 하고 점 E, D를 클릭한다. (점 D, E에 대해서도 마찬가지) 그려진 도형을 모두 선택하여 키보드의 [F8], [F9] 키를 클릭하면서 깊이를 조절하면서 코흐곡선을 관찰할 수 있다.

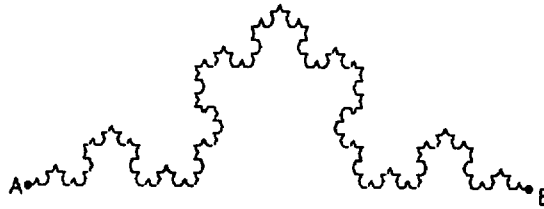
6) 임혜경(2005), "초중등교사를 위한 GSP 활용", 『수학사랑』, pp. 150~152.



<그림 25> 코흐곡선 작도 (1)



<그림 26> 코흐곡선 작도 (2)

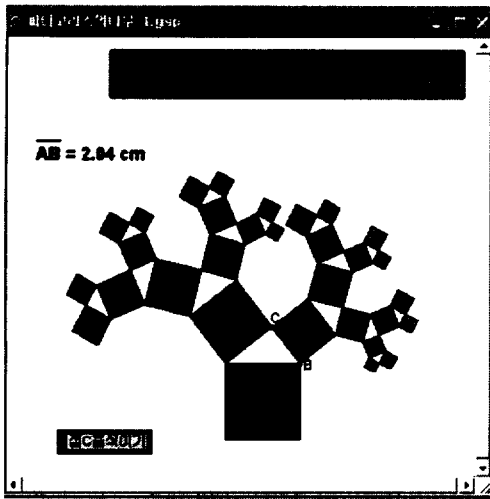


[그림27] 코흐곡선 작도 (3)

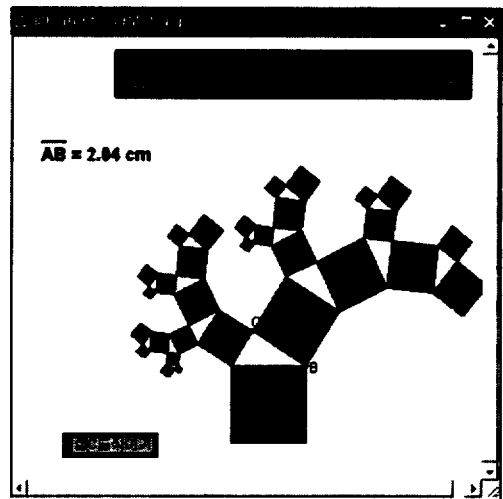
(다) 피타고라스의 나무?

\overline{AB} 를 그리고 이것을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고 내부를 색칠한다. \overline{AB} 의 중점 O 를 잡고 점 O, B, A 선택하여 작도메뉴에서 원 위의 호를 실행한다. \overline{AB} 위에 점 C 를 찍고 A, B 에 각각 연결하자. 그러면 $\triangle ABC$ 는 $\angle BCA$ 가 직각인 삼각형이 된다. \overline{AB} 와 중점 O 를 숨기고 $\overline{AC}, \overline{CB}$ 를 각각 한 변으로 하는 정사각형을 작도하고 내부를 색으로 채운다. 측정값에 따라서 사각형의 내부 색이 변할 수 있도록 \overline{AB} 를 측정하자. \overline{AB} 의 측정값과 사각형의 내부를 선택하여 보기메뉴 \rightarrow 가변색에서 값의 범위를 적당히 준다. 점 A, B 를 차례로 선택하고 변환메뉴의 반복을 클릭하면 대화상자가 나타나는데 여기서 점 E, D 를 차례로 선택하고, 다시 규칙을 클릭하여 대응추가를 선택하고 점 G, F 를 차례로 선택한다. 또 이 대화상장에서 규칙의 점이 아닌 개체만을 선택하고, 표시의 모든 단계의 개체를 선택하고 실행한다. 점 C 를 제외하고 모든 점을 숨긴다. 점 C 를 움직일 수 있도록 애니메이션 버튼 **점C를이동** 을 만든다. **점C를이동** 버튼을 누를 때마다 움직이는 그림을 관찰할 수 있다. 도형 전체를 선택하여 \oplus, \ominus 키를 클릭하면서 깊이를 조절하면 그림을 관찰할 수 있다.

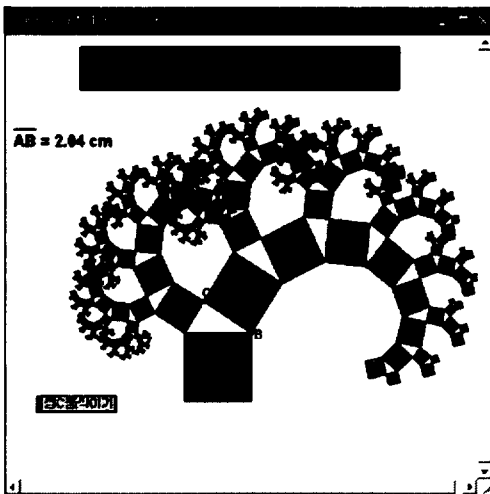
7) 임혜경(2005), "초중등교사를 위한 GSP 활용", 「수학사랑」, pp.153~156.



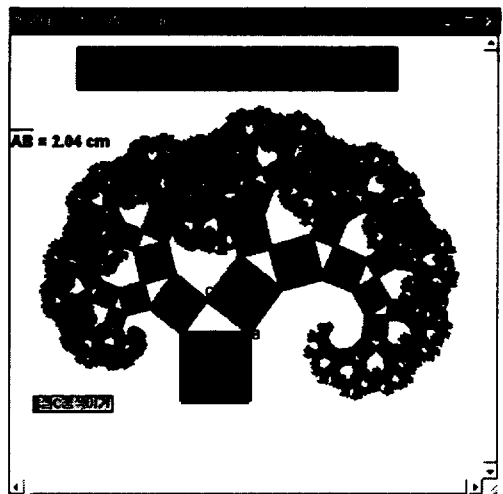
<그림 28> 피타고라스의 나무 애니메이션 (1)



<그림 29> 피타고라스의 나무 애니메이션 (2)



<그림 30> 피타고라스의 나무 애니메이션 (3)

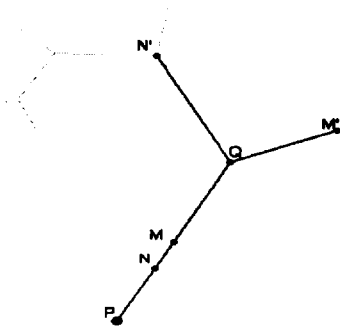


<그림 31> 피타고라스의 나무 애니메이션 (4)

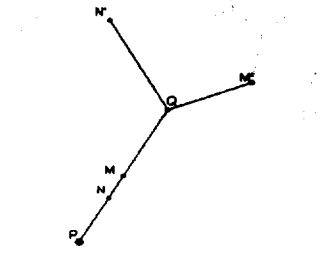
(라) 나뭇가지 작도

점 B 를 중심으로 임의의 \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{BD} 를 그린다. 점 B 를 중심, \overline{BC} 를 반지름으로 하는 원을 그리고 이 원에 두 점을 찍고 점 B 와 이 점들을 차례로 선택하여 작도메뉴 → 원 위의 호를 실행하여 호를 작도한다. 점 C 를 선택하여 편집 → 원에서 점 분리를 실행하고 원을 숨기고 난 다음에 이점을 선택하여 호에 점 병합을 시킨다. 점 B 를 중심, \overline{BD} 를 반지름으로 하는 원을 그리고 이 원에 두 점을 찍고 점 B 와 이 점들을 차례로 선택하여 작도메뉴 → 원 위의 호를 실행하여 호를 작도한다. 점 D 를

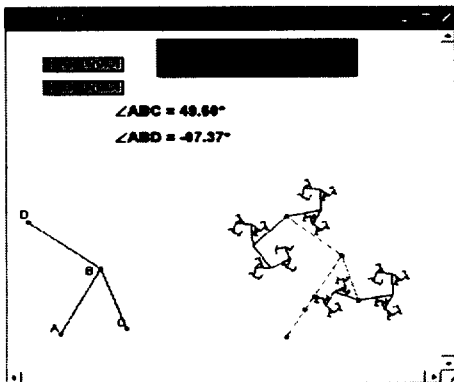
선택하여 편집 → 원에서 점 분리를 실행하고 원을 숨기고 난 다음에 이점을 선택하여 호에 점 병합을 시킨다. 점 A, B, C , 점 A, B, D 를 각각 차례로 선택하여 각의 크기를 측정하여 화면에 표시한다. 화면에 임의의 선분 PQ 를 작도하고 이 선분에 중점 M 을 잡는다. $\angle ABC = 138.61^\circ$ 를 선택하여 각 지정을 실행하고 점 Q 를 중심으로 지정된 각만큼 회전이동 시키고 점 M, M' 를 선분으로 연결한다. $\angle ABD = -120.98^\circ$ 를 선택하여 각 지정을 실행하고 점 Q 를 중심으로 지정된 각만큼 회전이동 시키고 점 N, N' 를 선분으로 연결한다. 점 P, Q 를 차례로 선택하고 변환메뉴의 변환을 실행시켜 대응될 개체에 점 Q, N' 를 입력하고 대응추가 하여 Q, M' 를 입력하여 실행시킨다. 필요 없는 개체를 선택하여 숨기고 점 C, D 를 선택하여 편집메뉴 → 동작버튼 → 애니메이션을 실행하여 [] [] 버튼을 만든다. 그려진 개체를 선택하여 ⊕ ⊖ 버튼을 각각 여러번 눌러보면 각 단계에 맞는 그림이 그려진다. $\angle ABC = 138.61^\circ$ 와 그려진 개체를 선택하여 가변색의 컬러를 선택하여 실행한다. [] []를 눌러보면 점 C, D 가 움직임에 따라서 그려진 개체가 색깔이 변하면서 움직이는 것을 관찰할 수 있다.



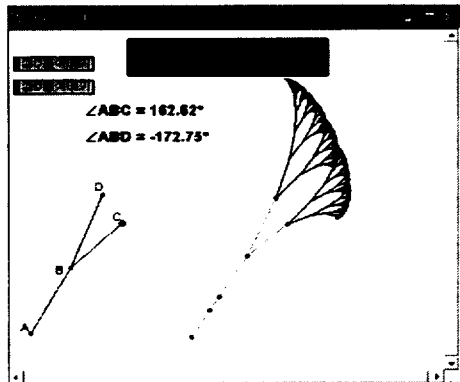
<그림 32> 나뭇가지 작도 (1)



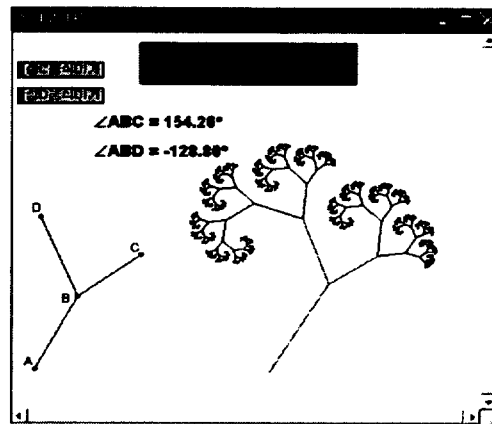
<그림 33> 나뭇가지 작도 (2)



<그림 44> 나뭇가지 작도애니메이션 (1)



<그림 45> 나뭇가지 작도애니메이션 (2)



<그림 46> 나뭇가지 작도애니메이션 (3)

Ⅲ. 결론 및 제언

수학을 의미 있게 지도하는 방법에는 여러 가지가 있겠으나 본 논문에서는 탐구형 소프트웨어를 활용한 교수·학습 방법의 변화 가능성을 살펴보았다. 새로운 사실을 스스로 탐구·발견하고, 발견한 사실을 확장·일반화하며, 수학의 재미와 아름다움을 느끼고, 새로운 연구에 대한 아이디어를 탐색하는 학생이 될 수 있게 하는 것이 탐구형 소프트웨어를 수학 교수·학습에 활용하여 얻을 수 있는 효과라고 하겠다.

수학교육에 컴퓨터를 활용함에 있어서 컴퓨터가 갖는 장점을 최대한 활용하고 역효과를 방지하기 위하여 교사는 컴퓨터 환경이 제공할 수 있는 독특한 경험이 무엇인지 살펴보고, 수학학습에 좋지 않은 영향을 줄 가능성이 없는지, 그리고 이런 경험을 적절한 교수학적 처방을 통해 효율적으로 이용할 수는 없는지 연구하여야 한다. 흥미 위주의 동기 유발에 초점을 맞추는 것은 위험하며 시각적 효과에 만족해 버리는 오류를 범해서는 안 된다. 또한 교사는 컴퓨터를 사용함에 있어서 본질적이지 않은 것에 관심을 빼앗기지 않도록 주의하여야 한다. 수학적 내용의 본질적인 부분은 그대로 둔 채 지도 방법과 환경을 다양하게 변화시키는 경험을 적용하는 과정에서 지나치게 화려한 색상, 사운드, 복잡한 애니메이션 등이 의미 있는 개념 형성에 역효과로 작용할 수도 있다. 그래서 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 다양한 학습도구를 학생들이 자유롭게 사용할 수 있는 컴퓨터실이나 여러 가지 물리적인 환경이 갖추어져야 한다.

둘째, GSP 뿐만 아니라 기하교육과 관련된 많은 프로그램들이 개발되어 교육 현장에서 프로그램이 활용되어야 한다. 현재 GSP 프로그램은 공간 기하에 적용하기엔 다소의 어려움이 있으며 또한 몇 가지 제약이 따른다. 그러므로 이를 보완하기 위한 새로운 프로그램

의 개발이나 이미 개발된 다른 프로그램과의 연계 등을 이용하여 단점을 극복해 나가는 것이 필요하다.

셋째, 스스로 탐구할 수 있는 활동적인 내용을 강조해야 한다. 지금까지의 설명위주의 강의는 피하고 학생들의 수준을 올바르게 인식하고 적절한 학습 환경을 제공해주어야 한다. 따라서 탐구형 소프트웨어 및 기술공학이 포함된 다양한 학습내용과 문제들이 수록된 교재 개발이 활발하게 이루어져야 한다. 교재 개발에 중점을 두어야 할 것은 학생들이 개념에 기초한 이해를 하도록 하는 것이고, 기하적인 직관과 논리적인 추론 능력, 그리고 탐구 능력을 향상시킬 수 있는 것이어야 한다.

구체적인 조작물 사용, 컴퓨터 공학에 관한 자료, 기하 탐구에 관한 자료의 수집과 다양한 프로그램 개발에 대한 연구가 이루어진다면 보다 더 개선된 기하수업이 될 것이다.

참 고 문 헌

- 수학사랑편집부(1998), 고등학교 수학에서의 GSP 활용, 수학사랑.
- 강병욱(1999), 컴퓨터 소프트웨어 활용이 도형학습에 미치는 영향(GSP를 중심으로), 제주대학교 교육대학원.
- 손인수 외(1999), 예제로 배우는 한글 GSP, 수학사랑.
- 수학사랑편집부(2001), GSP 수업활동의 개요, 수학사랑.
- 수학사랑편집부(2001), GSP 101과제, 수학사랑.
- 장훈 외(2001), 초보자를 위한 GSP 첫걸음, 수학사랑.
- 송영준(2002), GSP 사용자를 위한 GSP 사용설명서. 수학사랑.
- 강상호(2003), 중학교에서의 정보통신기술 활용방안, 석사학위 논문, 제주대학교 교육대학원.
- 강순자 외(2004), 원을 중심으로 GSP를 이용한 기하탐구, 경문사.
- 김향숙 외(2005), 창의적 수학을 이용한 GSP 활용, 경문사.
- 김향숙 외(2006), GSP를 이용한 기하의 이해, 경문사.
- 양승갑 외(2002), 중학교 수학 7, 8, 9 교과서 및 교사용 지도서, (주)금성출판사.
- 조태근 외(2002), 중학교 수학 7, 8, 9 교과서 및 교사용 지도서, (주)금성출판사.
- 이준열 외(2002), 중학교 수학 7, 8, 9 교과서 및 교사용 지도서, (주)도서디딤돌.
- 진평국 외(2002), 중학교 수학 7, 8, 9 교과서 및 교사용 지도서, (주)교학연구소.
- 박윤범 외(2002), 중학교 수학 7, 8, 9 교과서 및 교사용 지도서, (주)대한교과서.
- 강행고 외(2002), 중학교 수학 7, 8, 9 교과서 및 교사용 지도서, (주)중앙진흥교육연구소
- 이영하 외(2002), 중학교 수학 7, 8, 9 교과서 및 교사용 지도서, (주)교문사.
- 박규홍 외(2002), 중학교 수학 7, 8, 9 교과서 및 교사용 지도서, 두레교육(주).
- 금중해 외(2002), 중학교 수학 7, 8, 9 교과서 및 교사용 지도서, (주)고려출판.
- 황석근 외(2002), 중학교 수학 7, 8, 9 교과서 및 교사용 지도서, 한서출판사.