

이동경계조건을 고려한 유동해석기법

김 남 형* · 박 지 훈*

The Technique of Flow Analysis Considering Moving Boundary Condition

Nam-Hyeong Kim* · Ji-Hun Park*

ABSTRACT

In this paper, the numerical model of the flow analysis by finite element technique is described. The Galerkin method is employed for spatial discretization. Two step explicit finite element scheme is used to discretize the time function, which has advantage in problems treating large numbers of elements and unsteady state. Two dimensional hydrodynamic model considering moving boundary condition is developed. Also the model flume was applied to verify in the idealized water, and the results of this study confirm the efficiency of moving boundary treatment in coastal numerical computation.

Key Words : Flow analysis, Finite element, Galerkin method, Moving boundary

1. 서 론

천해역에 있어서 해수의 유동을 파악하는 것은, 공학상 매우 중요한 문제이다. 천해역에서 해수유동의 해석에 폭넓게 이용되어지고 있는 수치해석모델로서는 유한차분법과 유한요소법으로 대별할 수 있다. 각각의 방법은 장단점이 있으나 불규칙한 지형과 수심을 용이하게 표현할 수 있는 유한요소법이 보다 현실적이다 라고 할 수 있다.

우리나라의 서·남해안과 같이 넓은 조간대를 가지고 있는 해역에서는 고정경계에 의한 오차를 줄이기 위하여 조간대를 포함하는 유동계산을 하여야 한다.

따라서 서·남해안과 같은 넓은 조간대를 가지고 있는 해역에서의 해수유동을 정확히 해석하기 위해서는 복잡한 해안선을 정확하게 나타낼 수 있는 유한요소 해석에 2차원적으로 작용하는 외력과 조간대를 고려한 수치모델의 해석수법의 개발이 필요하겠다.

본 연구에서는, 김 등[1-3]에 의해 개발된 천해장 파방정식에, Kawahara and Umetus[4-5]에 의해 제안된 이동경계수법을 도입하여, 고정경계에 대한 유한요소법에 의한 유동해석 모델을 보완·향상시켰다. 정립된 모형은 조간대를 갖는 1차원의 장방형수로에 적용하여 해석모델의 타당성의 검토를 하였고, 또 실험인 제주항에 적용하여 유동해석을 수행하였다.

* 제주대학교 해양과학부

School of Ocean Science, Cheju Nat'l Univ.

II. 기본방정식

비압축성 3차원 유체의 천해역에서 천해장파방정식을 유도해 보자. Fig.1에서와 같이 X축과 Y축을 정수면 내에서 수평 직각방향으로 잡고, Z축을 연직방향으로 잡는다. 이때, 평균 수심을 나타내는 것으로서 $h(x, y)$, 정수면으로부터 측정된 조위를 $\eta(x, y, t)$ 로 나타낸다. 연속의 방정식은 다음과 같이 나타낸다.

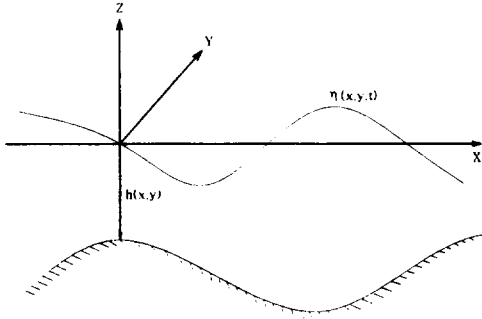


Fig.1. Vertical cross section of the sea

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(uH)}{\partial x} + \frac{\partial(vH)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

여기서 $H = h + \eta$ 이고, u, v 는 X, Y방향의 유속이다.

수심방향에서의 가속도는 무시할 정도로 작고, 정수압은 작용한다고 가정하면, 운동방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - fv + \frac{gu\sqrt{u^2+v^2}}{Hc^2} - v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + fu + \frac{gv\sqrt{u^2+v^2}}{Hc^2} - v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3)$$

여기서, f 는 Coriolis 힘이며, $f = 2\omega \sin \phi$

($\omega = 7.292 \cdot 10^{-5} \text{ (rad/sec)}$ $\phi =$ 위도 (rad))로 주어진다. g 는 중력가속도 ($= 9.81 \text{ m/sec}^2$)이며, v 은 와동점성계수, c 는 해저마찰에 대한 Chezy의 계수 ($= 1/n h^{1/6}$, n 은 Manning의 조도계수)이다.

경계조건으로서는, 유속 또는 조위가 주어지는 경계를 생각한다.

$$u = \hat{u}, \quad v = \hat{v}, \quad \eta = \hat{\eta} \quad (4)$$

여기서 $\hat{\quad}$ 는 주어진 일정한 값을 의미한다.

한편, 연안에 있어서의 지형은 불규칙하고 반드시 X축 혹은 Y축과 일치하지 않는다. 따라서, 연안으로 향하는 법선방향의 유속을 0으로 한다. 단, 흐름이 없다고 생각되는 지점에서는, u, v 모두 0로 한다.

II. 유한요소기법

3.1. 공간방향의 이산화

천해장파방정식(1),(2),(3)를 시간에 대하여 이산화하기 전에 공간방향으로 유한 요소기법을 적용하여 이산화한다. 또, 천해장파방정식(1),(2),(3)는 비선형항이 포함되어져 있기 때문에, 유한요소의 해를 얻기 위하여 Galerkin method를 적용한다. Galerkin method는 가중잔차합수를 미지의 형상함수와 똑같이 취한다. 여기서는 가중잔차합수는 경계위에서는 값이 0이지만, 그밖의 영역에서는 임의의 값을 취한다. 여기서는 가중잔차합수 u^*, v^*, η^* 를 각각 식(1),(2),(3)에 곱하여 해석영역 Ω 에 대하여 적분하면, 다음의 방정식이 주어진다.

$$\int_{\Omega} \eta^* \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \eta^* \frac{\partial(uH)}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \eta^* v \frac{\partial(vH)}{\partial y} d\Omega = 0 \quad (5)$$

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} u^* u \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} u^* v \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega + g \int_{\Omega} u^* \frac{\partial \eta}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} u^* f v d\Omega + \int_{\Omega} u^* \frac{g \sqrt{u^2 + v^2}}{Hc^2} d\Omega - \int_{\Omega} u^* v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) d\Omega = 0 \quad (6)$$

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial v}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} v^* u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} v^* v \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega + g \int_{\Omega} v^* \frac{\partial \eta}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega} v^* f u d\Omega + \int_{\Omega} v^* \frac{g \sqrt{u^2 + v^2}}{Hc^2} d\Omega - \int_{\Omega} v^* v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) d\Omega = 0 \quad (7)$$

유한요소법으로 식(5),(6),(7)을 이산화할 때에, 해석 영역의 형상으로서 여러 가지 형상이 고려되지만, 일반적으로 잘 이용되고 있는 삼각형 요소를 이용한다. 유한요소내의 임의의 위치에 대한 미지의 유속 u, v 와 미지의 조위 η 의 값은 삼각형의 정점의 값을 이용하여 다음과 같이 1차식으로 근사된다.

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{a=1}^3 \phi_a u_a, & u^* &= \sum_{a=1}^3 \phi_a u_a^* \\ v &= \sum_{a=1}^3 \phi_a v_a, & v^* &= \sum_{a=1}^3 \phi_a v_a^* \\ \eta &= \sum_{a=1}^3 \phi_a \eta_a, & \eta^* &= \sum_{a=1}^3 \phi_a \eta_a^* \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

여기서, ϕ 는 유속 및 조위의 분포상황을 각 요소 내에서 근사하는 보간함수이고, 보간함수의 형상은,

$$\phi = \frac{1}{2\Delta} (a_a + b_a x + c_a y) \quad (a=1,2,3) \quad (9)$$

여기서, Δ 는 삼각형의 면적이다.

식(5),(6),(7)에 식(8)을 대입하고, $u_a^*, v_a^*, \eta_a^* (a=1,2,3)$ 가 임의의 값인 것을 고려하면, 다음과 같은 요소방정식이 얻어진다.

$$\sum_{\beta=1}^3 M_{a\beta} \dot{\eta}_{\beta} + \sum_{\beta,\gamma=1}^3 X_{a\beta\gamma} u_{\beta} H_{\gamma} + \sum_{\beta,\gamma=1}^3 Y_{a\beta\gamma} v_{\beta} H_{\gamma} = 0 \quad (10)$$

$$\sum_{\beta=1}^3 M_{a\beta} \dot{u}_{\beta} + \sum_{\beta,\gamma=1}^3 X_{a\beta\gamma} u_{\beta} u_{\gamma} + \sum_{\beta,\gamma=1}^3 Y_{a\beta\gamma} v_{\beta} u_{\gamma} + \sum_{\beta=1}^3 A_{a\beta} \eta_{\beta} - \sum_{a,\beta=1}^3 L_{a\beta} v_{\beta} + \sum_{a,\beta=1}^3 I_{a\beta} u_{\beta} + \sum_{a,\beta=1}^3 N_{a\beta} u_{\beta} = 0 \quad (11)$$

$$\sum_{\beta=1}^3 M_{a\beta} \dot{v}_{\beta} + \sum_{\beta,\gamma=1}^3 X_{a\beta\gamma} u_{\beta} v_{\gamma} + \sum_{\beta,\gamma=1}^3 Y_{a\beta\gamma} v_{\beta} v_{\gamma} + \sum_{\beta=1}^3 B_{a\beta} \eta_{\beta} + \sum_{a,\beta=1}^3 L_{a\beta} u_{\beta} + \sum_{a,\beta=1}^3 I_{a\beta} v_{\beta} + \sum_{a,\beta=1}^3 N_{a\beta} v_{\beta} = 0 \quad (12)$$

여기서, $\dot{u}_{\beta} = \frac{\partial u_{\beta}}{\partial t}$, $\dot{v}_{\beta} = \frac{\partial v_{\beta}}{\partial t}$, $\dot{\eta}_{\beta} = \frac{\partial \eta_{\beta}}{\partial t}$ 이고, 식(10),(11),(12)에 나타난 계수는 다음과 같다.

$$M_{a\beta} = \int_{\Omega} \phi_a \phi_{\beta} d\Omega = \frac{\Delta}{12} (1 + \delta_{a\beta})$$

$$A_{a\beta} = g \int_{\Omega} \phi_a \frac{\partial \phi_{\beta}}{\partial x} d\Omega = g \frac{b_{\beta}}{6}$$

$$X_{a\beta\gamma} = \int_{\Omega} \phi_a \phi_{\beta} \frac{\partial \phi_{\gamma}}{\partial x} d\Omega = \frac{b_{\gamma}}{24} (1 + \delta_{a\beta})$$

$$B_{a\beta} = g \int_{\Omega} \phi_a \frac{\partial \phi_{\beta}}{\partial y} d\Omega = g \frac{c_{\beta}}{6}$$

$$Y_{a\beta\gamma} = \int_{\Omega} \phi_a \phi_{\beta} \frac{\partial \phi_{\gamma}}{\partial y} d\Omega = \frac{c_{\gamma}}{24} (1 + \delta_{a\beta})$$

$$L_{a\beta} = f \int_{\Omega} \phi_a \phi_{\beta} d\Omega = f \frac{\Delta}{12} (1 + \delta_{a\beta})$$

$$I_{a\beta} = \frac{g}{Hc^2} \int_{\Omega} \phi_a \phi_{\beta} \sqrt{u_{\beta}^2 + v_{\beta}^2} d\Omega$$

$$= \frac{g}{Hc^2} \frac{\Delta}{12} (1 + \delta_{a\beta}) \sqrt{u_{\beta}^2 + v_{\beta}^2}$$

$$N_{a\beta} = v_{\beta} \left(\frac{\partial \phi_a}{\partial x} \frac{\partial \phi_{\beta}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_a}{\partial y} \frac{\partial \phi_{\beta}}{\partial y} \right) d\Omega = v_{\beta} \Delta$$

$$\left\{ \begin{aligned} &(b_1 b_1 + c_1 c_1)(b_1 b_2 + c_1 c_2)(b_1 b_3 + c_1 c_3) \\ &(b_2 b_1 + c_2 c_1)(b_2 b_2 + c_2 c_2)(b_2 b_3 + c_2 c_3) \\ &(b_3 b_1 + c_3 c_1)(b_3 b_2 + c_3 c_2)(b_3 b_3 + c_3 c_3) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

여기서, $\delta_{\alpha\beta}$ 는 Kronecker의 Delta이며, $\alpha = \beta$ 일 때에는 1이고, $\alpha \neq \beta$ 일 때는 0의 값을 갖는다.

식(10),(11),(12)을 모든 요소에 관하여 더하면, 다음과 같은 전체 방정식이 얻어진다.

$$[M]\{\dot{\eta}\} + [XH]\{u\} + [YH]\{v\} = 0 \quad (14)$$

$$[M]\{\dot{u}\} + [Xu]\{u\} + [Yu]\{v\} + [A]\{\eta\} - [L]\{v\} + [I+N]\{u\} = 0 \quad (15)$$

$$[M]\{\dot{v}\} + [Xv]\{u\} + [Yv]\{v\} + [B]\{\eta\} + [L]\{u\} + [I+N]\{v\} = 0 \quad (16)$$

또, 식(14),(15),(16)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[Z]\{K\} + [T]\{K\} = 0 \quad (17)$$

여기서,

$$[Z] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix}, \quad \{K\} = \begin{Bmatrix} \dot{\eta} \\ u \\ v \end{Bmatrix} \\ [T] = \begin{bmatrix} XH & YH & 0 \\ Xu+I+N & Yu-L & A \\ Xv+L & Yv+I+N & B \end{bmatrix}, \quad \{K\} = \begin{Bmatrix} \eta \\ u \\ v \end{Bmatrix} \quad (18)$$

이다. $\{K\}$ 는 전 절점에 대한 유속과 조위를 나타내는 벡터이고, $[Z], [T]$ 는 각각 유한요소에 있어서 계산된 계수를 조합한 것에 의해 얻어진 행렬이다. 전체방정식(17)은 시간에 관한 미분을 포함하고 있다.

3.2. 시간방향의 이산화

유한요소법에 의해 공간방향으로 이산화한 식(17)을 시간방향으로 이산화한다. 식(17)은 시간 미분을 포함하는 항이 있으므로 2단계 양적스킴을 이용하여 이산화한다. 2단계 양적스킴은 축차시간 적분법이다. 시간 스텝 n 과 $n+1$ 의 사이에 $n+1/2$ 의 중간단계의 스텝을 설정하는 것에 의해, 다음과 같이 주어진다.

$$K^{n+1/2} = K^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{dK^n}{dt} \quad (19)$$

$$K^{n+1} = K^n + \Delta t \frac{dK^{n+1/2}}{dt} \quad (20)$$

식(17)에 2단계 양적스킴의 식(19),(20)을 대입하면, 아래와 같은 관계가 얻어진다.

$$[Z]\{K^{n+1/2}\} = [Z]\{K^n\} - \frac{\Delta t}{2} [T]\{K^n\} \quad (21)$$

$$[Z]\{K^{n+1}\} = [Z]\{K^n\} - \Delta t [T]\{K^{n+1/2}\} \quad (22)$$

윗식의 좌변의 행렬 $[Z]$ 의 역행렬을 계산해야 하기 때문에, 식(21), (22)는 완전한 양적해석법이 아니다. 따라서, 좌변의 계수행렬을 집중화하면, 다음의 알고리즘이 얻어진다.

$$[\bar{Z}]\{K^{n+1/2}\} = [\bar{Z}]\{K^n\} - \frac{\Delta t}{2} [T]\{K^n\} \quad (23)$$

$$[\bar{Z}]\{K^{n+1}\} = [\bar{Z}]\{K^n\} - \Delta t [T]\{K^{n+1/2}\} \quad (24)$$

여기서 $[\bar{Z}]$ 은 집중행렬이고, 다음과 같다.

$$[\bar{Z}] = \begin{bmatrix} \bar{m} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{m} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{m} \end{bmatrix}, \quad \bar{m} = \frac{\Delta}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$[Z] = e[\bar{Z}] + (1-e)[Z]$$

여기서, e 는 Lumping parameter로 불려지며, 본 계산에서는 e 를 0.90으로 하였다. 식(23), (24)를 전체의 영역에서 경계조건을 주어 계산을 하면, 각 절점에서 유속과 조위를 구할 수가 있다.

IV. 이동경계조건기법

연안역에서 조간대와 같이 침수와 노출이 반복되는 지역에서의 침수와 노출의 경계와 한계를 명확하게 하는 것은 매우 중요하며, 본 모델에서 사용된 방법

은 다음과 같다.

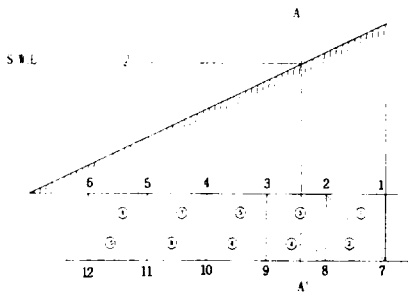


Fig.2. Schematic illustration of moving boundary condition.

- 1) 계산영역에서 계산절점이 노출되었는지 침수되었는지를 총수심에 의하여 판단한다. 즉, $H \leq 0$ 이면 노출로 간주하고, $H > 0$ 이면 침수된 것으로 간주한다.
- 2) 계산요소가 침수되었는지 노출되었는지 조사한다. 본 계산에 있어서 사용된 요소는 3각형 요소로서 3개의 절점에 대하여 조사하였다. 각 요소의 절점 중에 2개 이상이 노출된 경우는 완전히 노출된 것으로 간주하고 계산에서 제외하였다.
- 3) 어느 요소가 육지와 해수 사이의 경계에 있는지를 결정한다. 계산요소의 절점중에 1절점만이 노출되어 있는 경우는 노출 절점이 경계위에 놓여 있는 것으로 보아 노출된 1절점에서의 총 수심을 0으로 하고, 그 요소의 각 절점에서의 유속성분을 0으로 하였다. 노출되지 않은 나머지 2개 절점의 수면 변위는 계산에 포함시켰다.

V. 이동경계조건 검증 및 고찰

위의 과정을 예를 들어 설명하면 다음과 같다. Fig. 3과 같은 유한요소 격자망을 생각하자.

가. Fig. 2의 순간적인 해수면을 S.W.L.이라 할 때 요소 ①과 ②는 총수심이 0보다 작기 때문에 계산에서 제외한다.

나. 절점2,3,8로 구성된 요소 ③과 절점3,9,8로 구성

된 요소④는 계산에 사용된다. 그러나 절점2,3,8,9에서의 유속성분을 0으로, 절점2,8에서의 해수면 조위를 0으로 지정한다.

다. 완전히 침수되어 있는 요소⑤~⑩은 온전히 계산에 포함된다.

본 연구에서는 계산의 안정을 위하여 실제 계산에 있어서 침수와 노출의 한계를 0이 아닌 0에 가까운 10cm 값을 사용하였다.

장방형수조는 Fig.3와 같이 1.2km×2.4km의 크기고 계산해역 우측 일부에 조간대를 갖으며 좌측경계가 개방된 폐쇄만의 형상이다.

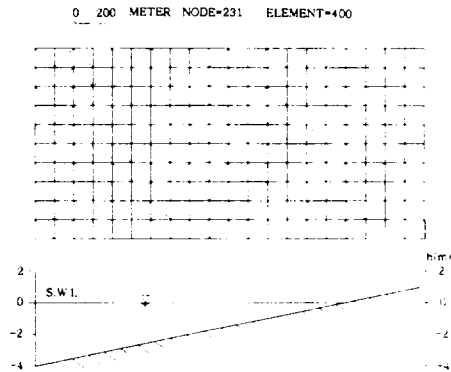


Fig.3. Finite element idealization of wave channel for model tests.

대상영역의 요소분할은 격자간격을 120m, 절점수와 요소수를 각각 231개 및 400개로 구성하였다. 아래그림은 평균해면을 기준으로 한 대상해역의 수심 분포를 나타낸다. 이와 같은 수로의 좌측개방경계에 진폭 2m, 주기 10,000초의 장파를 전파시키는 경우에 대해 수치해석을 행하였다. 수치해석을 행할 때의 계산시간 간격은 10초, Manning의 조도계수는 0.03을 사용하였으며 Lumping parameter e 는 0.90으로 하였다. 계산시 Coriolis힘은 무시하였다.

수면 변위를 유속벡터로 Fig. 4에 나타내었다. Fig. 4(a)에서 31,500sec에서는 수면이 1m상승함에 따라 수조안쪽으로 유속이 이동하는 것을 나타내었고, Fig. 4(b)는 계산시간 35,000sec에서는 물이 그림의 왼쪽으로 빠지면서 전체면적의 20%가 노출되며, Fig. 4(c)는 계산시간 37,000sec는 좌측경계에서 수심이 2m까지 하강했을 때로 전체면적의 60%가 노출된다.

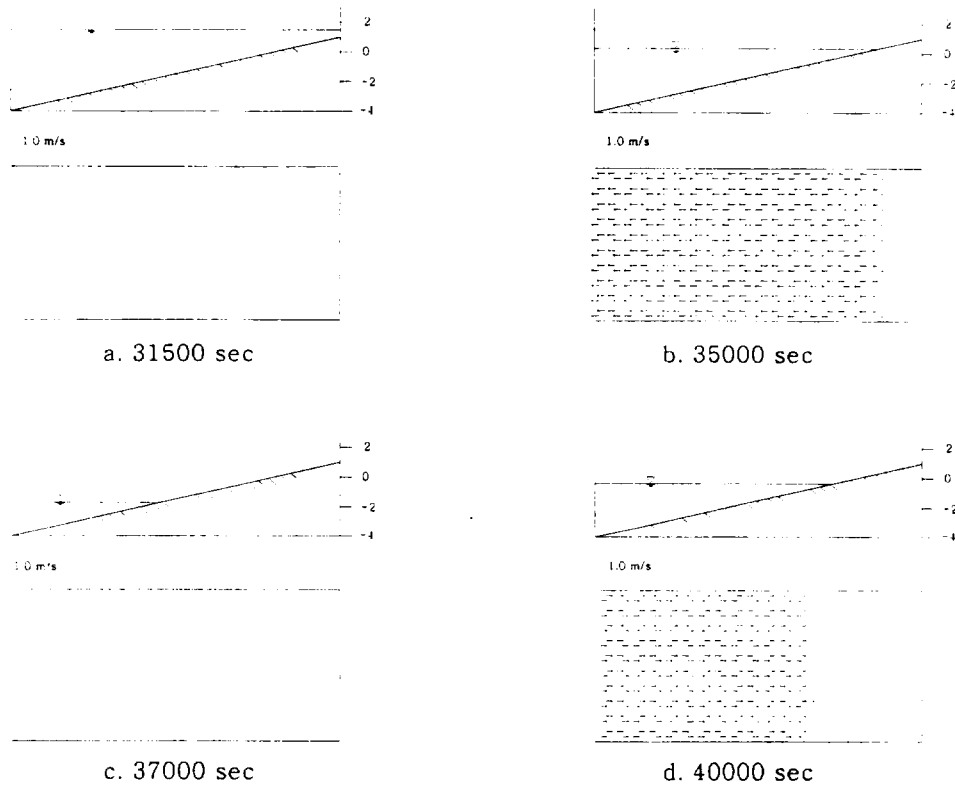


Fig. 4. Water level and velocity vectors

Fig. 4(d)에서는 40,000sec에서는 수면이 초기상태로 상승한 경우로, 노출된 부분이 다시 침수되는 것을 알 수 있다.

VI. 제주항의 유동계산

천해장과의 유한요소방정식(23),(24)를 이용하여, 제주항의 유동문제를 수치해석 하였다. Fig.5는 제주항의 해석영역을 삼각형의 유한요소로 분할한 것을 나타낸 것이며, 총절점수는 1,437절점, 총요소수는 2,582 요소로 했다. 수치해석의 초기 조건으로서, 유속은 전 절점에 있어서 0으로 가정하며, 해면은 조위의 변동이 전혀 없는 정수면으로 가정하는 cold start의 조건을 주었다.

경계조건으로서 연안경계에 대한 법선방향의 유속을 0으로 하고, 만입구(A-B)에서는 계산 step마다 해수면은 M_2 조로서 다음과 같은 조화함수로 주었다.

$$\eta = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \Delta t\right) \quad (26)$$

여기서, A 는 진폭으로 1.97m이고, T 는 주기로 $T = 12 + 5/12(hr)$ 으로 했다. 또한 $\Delta t = 0.2sec$ 로 주었다.

식(26)에서 주어진 조위를 계산했을 때, Fig.6은 고조시의 수표면이 1.7m 상승했을 때에 제주항내로 흘러들어오는 양상을 나타내며, Fig.7은 저조시 조건대

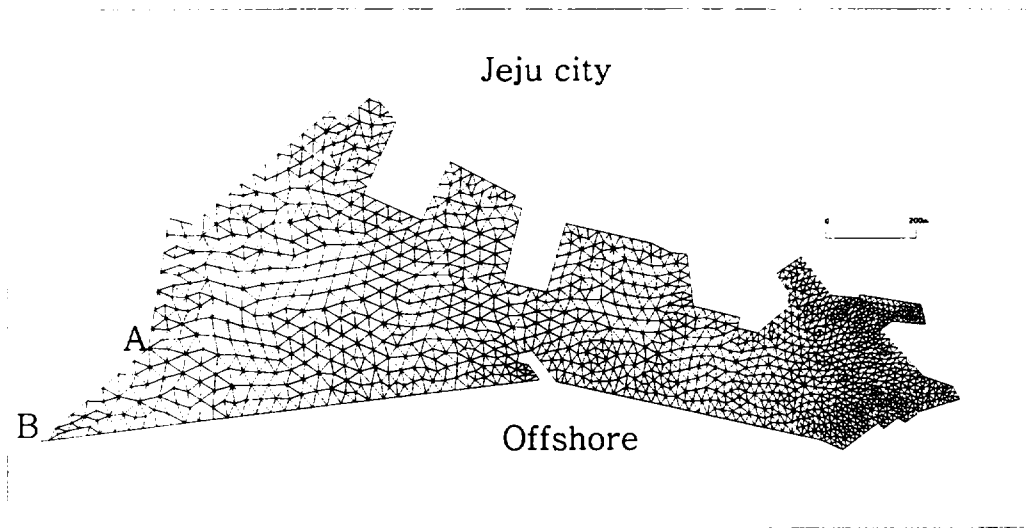


Fig.5. Finite element idealization of Jeju harbor.

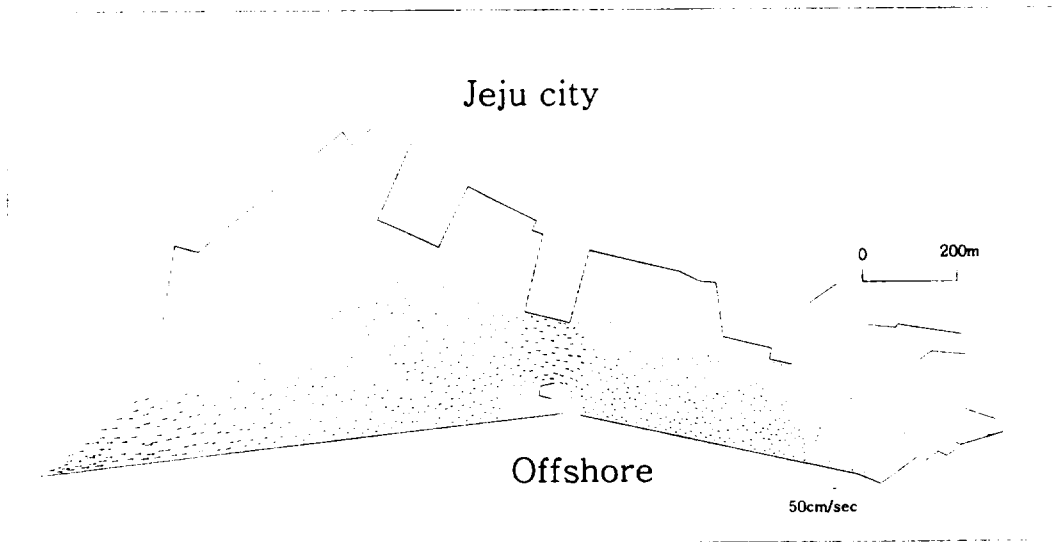


Fig.6. Computed current velocity at flood tide plus 2 hours (M_2)

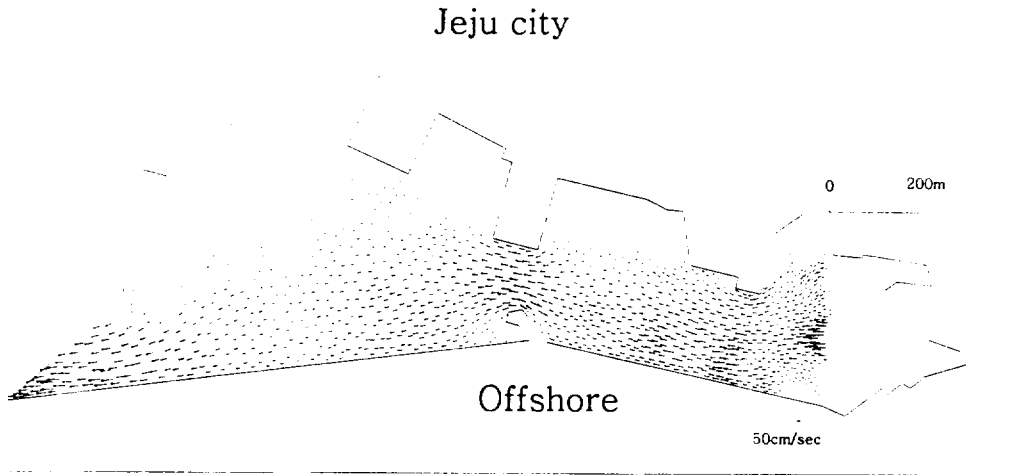


Fig.7. Computed current velocity at ebb tide plus 2 hours(M_2)

부분이 들어날 때의 유동현상을 나타낸 것으로 수심 1.7m이하인 부분이 노출됨을 볼 수 있다. 경계부근에서 유속이 조금 커지는 경향이 있으나, 흐름의 상태를 정성적으로 파악할 수 있다.

VII. 결 론

이동경계조건의 조간대처리방법으로서, Kawahara and Umetsu[4-5]의 방법을 이용하여 연안역에서의 변동수심을 수치시물레이션 하였다. 본 모델의 타당성을 검토하기 위하여 가상의 수조에서 이동경계조건을 이용하여 수치시물레이션 한 결과를 보면, 본 기법의 타당성을 검증할 수 있었고, 또한 본 모델을 실제 해역인 제주항에 적용하여 유동현상을 수행하였다. 제주항의 유동해석의 결과를 보면 이동경계조건의 처리가 명확하게 나타나고 있는 것을 알 수 있다. 따라서 유동해석을 하는 경우에는 본 연구에서 개발된 이동경계조건을 이용하여 연안역에서 수치시물레이션을 행하는 것이 보다 현상을 정확하게 재현할 수 있겠다.

참고문헌

- 1) 김남형, 양성기, 1993, 유한요소법에 의한 조석류의 수치해석, 제주대학교논문집, 제36권(자연), pp. 223-230.
- 2) 김남형, Mustuto Kawahara, 1994, 유한요소법에 의한 제주항의 유동해석, 제주대학교논문집, 제38권(자연), pp.335-342.
- 3) 김남형, 1995, 2단계 양해 유한요소스킴에 의한 천해흐름의 해석, 대한토목학회논문집, 제15권, pp. 1669-1677
- 4) Kawahara M.,and Umetsu T., 1986, Finite element Element Method for Moving Boundary Problems in River Flow, Int. J.for Num. Meth.in Fluids, Vol.6, pp.365-389
- 5) Kawahara M.,and Umetsu T.,1988, Tow-step explicit finite element method for the spill-way flow using moving boundary technique, Computer Modelling in Ocean Engineering, pp.597-608
- 6) 김남형 역, 1995. 유한요소법유체해석, 원창출판사, p.268

- 7) 김남형.박제선 공역, 1995. 유한요소시스템입문, 원
창출판사, p.166
- 8) 김남형.박제선 공역, 1996. 유한요소법, 원창출판
사, p.273
- 9) 김남형 역, 2002. 수치유체역학, 원기술, p.854