

로봇 매니플레이터의 선형모델을 이용한 다변수 제어기 설계

이 준 형* · 김 정 주* · 강 진 식**

Design of a Multivariable Controller for the Robot Manipulator Using Linearized Model

Jun-Hyoung Lee*, Jeong-Ju Kim* and Jin-Shig Kang**

ABSTRACT

In this paper, we present a multivariable controller for the robot manipulator. By using the linearized model, calculation time is reduced because of the linearized model could relax the nonlinear property. Since the linearized model improve the influence of the modification of the robot dynamic parameters, errors, caused by the variation of dynamics such as the unknown load of a manipulator, nonlinear properties are compensated. By this reason, the presented controller can be adopted in the industrial application. An usual multivariable controller, using pole placement, has relatively a large tracking errors. In order to obtain small tracking errors, rapid response, and stabilize the robot manipulator, the linearized dynamics of the manipulator and PID controller structure are used in the presented controller which is designed via pole placement algorism. To show the suggested controller have rapid trajectory tracking property, and it is not affected by the unknown load and load variation, the simulation results of the 2-link robot manipulator are presented.

Key words : Multivariable control, Linearized model, Dynamics, PID control,
Pole placement, Trajectory tracking

1. 서 론

* 제주대학교 대학원

Graduate School, Cheju Nat'l Univ.

** 제주대학교 통신공학과 · 산업기술 연구소

Dept, Telecommunication Eng., Res. Insti. Ind. Tech.,
Cheju Nat'l Univ.

현재 각종 산업현장에서 사용하고 있는 산업용 로봇 매니플레이터는 높은 정밀도가 요구되지 않는 비교적 간단한 반복작업을 주로 수행하고 있다. 이것은 로봇이 적용될 수 있는 환경에 여러 제약이 존재

하고 있기 때문이다. 실제로 비전 시스템, 접촉 센서, 초음파 센서, 힘/토크 센서 등과 같이 로봇이 보다 개량된 형태의 성능을 갖는데 필요한 주변장치의 발전 및 인공지능, 퍼지제어, 신경망 이론, 적응제어 등 로봇을 제어하기 위한 제어이론에 대한 연구와 그의 실제적인 적용을 위한 전자 제어기 구현에 관한 기술 수준은 괄목할 만큼 성장하였다. 특히, 로봇은 산업 용에 그치지 않고 다양한 분야에서 폭 넓게 이용되고 있다. 보행 로봇과 같이 사람이나 다른 동물의 복잡한 운동을 하는 로봇 및 지능을 갖고 환경에 대처할 수 있는 능력을 갖춘 로봇에 관한 연구가 진행중이다. 그러나 이러한 연구는 아직 초보단계에서 벗어나지 못하고 있다. 이와 같은 중요한 이유는 로봇 공학이 물리학, 수학, 제어이론, 전기전자공학, 컴퓨터 공학 등 다양한 분야의 이론이 필요하기 때문이다. 특히, 산업 현장에서 로봇이 성공적으로 사용되기 위해서는 단순히 기존의 공장에 로봇을 설치하는 것만으로는 부족하며, 원활한 자동화를 위한 모든 공정과 작업환경을 새롭게 배치하거나 재 설계해야 한다.^{1,2)}

산업용 로봇 매니플레이터는 비선형 특성을 갖고 있으므로 고전적인 간단한 제어법칙만을 적용해서는 제어가 힘들다. 따라서 현대 제어이론에서는 보다 손쉽고, 정밀한 제어방법을 만들기 위해 많은 연구가 활발히 진행되고 있으며, 특히 '적응제어 기법'이 가장 활발한 연구가 진행되고 있다. '적응제어 기법'은 적당한 제어법칙을 세우고 안정성을 보이는 것이 중요하다.^{3,4)} 기타 제어 방법으로는 '강인한 제어 (Robust control) 기법', '선형화 제어기법', '다변수 제어 기법' 등이 있으며, 이들 기법을 서로 병행하여 적용한 연구가 일반적이다.^{5,6)}

본 논문에서는 선형화 및 선형모델을 이용하여 비선형 특성을 완화시킴으로써 계산 시간을 줄이고, 제어기 설계가 쉬워져 산업 현장에 응용이 가능하도록 하는 제어방법을 제시하였다. 제시된 제어 방법은 선형모델을 이용하여 로봇의 질량변화 등과 같은 동역학 방정식의 변화에 의해 발생하는 오차를 줄이고 불안정성을 개선하였다. 기존의 극배치 방법을 이용한 다변수 제어기에서는 궤적 추적이 느리다는 단점이 있으며 이를 보완하기 위해 선형 동역학식을 입력에 추가하여 빠른 궤적 추적이 가능하도록 하며 또한

선형 동역학식에 대한 안정성을 확보하기 위해 PID 제어기를 이용하였다. 제시된 방법의 타당성을 보이기 위하여 2개 링크를 갖는 로봇 매니플레이터를 이용하여 시뮬레이션을 행하였다. 기존의 방법과 비교 분석하여 제시된 방법의 우수함을 보였으며 질량 변화에도 영향을 받지 않음을 확인하였다.

II. 로봇 매니플레이터의 동역학 방정식 및 선형화

2.1. 동역학 방정식

마찰력과 외란(disturbance)을 고려하지 않은 일반적인 로봇 매니플레이터의 동역학식은 다음과 같이 일반적으로 알려져 있다.

$$T = M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) + G(q) \quad (1)$$

여기서, q , \dot{q} , \ddot{q} 는 각각 관절의 $n \times 1$ 각도, 각속도 및 각가속도 벡터, T 는 관절의 $n \times 1$ 토크 벡터, $M(q)$ 는 매니플레이터의 $n \times n$ 질량행렬(관성행렬), $N(q, \dot{q})$ 는 $n \times 1$ 원심력 및 구심력 벡터, $G(q)$ 는 $n \times 1$ 중력 가속도 벡터이다. $M(q)$ 와 $G(q)$ 는 각 요소는 매니플레이터의 각 관절의 위치인 q 에 의해 결정되고, $N(q, \dot{q})$ 는 q 와 \dot{q} 에 의해 결정되는 복잡한 함수들로서 서로 심하게 간섭된 비선형 방정식이다.

2.2. 동역학 방정식의 선형화

로봇 동역학 모델은 임의의 동작점을 $P = [q_p, \dot{q}_p, \ddot{q}_p, T_p]$ 라 가정하고, P 의 미소 변위 (small perturbation)에 대하여 Jacobian 선형화 방법에 의해 선형화할 수 있다.^{1,2)} 동작점 P 에서 n 관절 로봇 매니플레이터의 초기 제어 토크 T_p 라 하고, 관절의 초기 위치, 속도 및 가속도 벡터를 각각 q_p , \dot{q}_p , \ddot{q}_p 라 하면 동작점 P 에서 로봇의 동역학 방정식은 다음과 같다.

$$T_p = M(q_p)\ddot{q}_p + N(q_p, \dot{q}_p) + G(q_p) \quad (2)$$

이때 제어 토크 벡터, 관절의 위치, 속도 및 가속

도 벡터의 미세 섭동을 $\tau \triangleq \Delta T = T - T_p$,
 $\theta \triangleq \Delta q = q - q_p$, $\dot{\theta} \triangleq \Delta \dot{q} = \dot{q} - \dot{q}_p$ 및
 $\ddot{\theta} \triangleq \Delta \ddot{q} = \ddot{q} - \ddot{q}_p$ 로 정의하면, (2)로부터 다음을 얻
 을 수 있다.

$$T_p + \Delta T = M(q_p + \Delta q)[\ddot{q}_p + \Delta \ddot{q}] + N(q_p + \Delta q, \dot{q}_p + \Delta \dot{q}) + G(q_p + \Delta q) \quad (3)$$

행렬 $M(q)$ 은 질량에 관한 행렬로 다음과 같이 근사
 화 된다.

$$M(q_p + \Delta q) \approx M(q_p) \quad (4)$$

식(3)을 동작점 P에서 벡터 N과 G에 대하여 테일러
 급수를 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$M(q_p + \Delta q, \dot{q}_p + \Delta \dot{q}) = M(q_p, \dot{q}_p) + \left[\frac{\partial N}{\partial q} \right]_p \Delta q + \left[\frac{\partial N}{\partial \dot{q}} \right]_p \Delta \dot{q} + \dots \quad (5)$$

$$G(q_p + \Delta q) = G(q_p) + \left[\frac{\partial G}{\partial q} \right]_p \Delta q + \dots \quad (6)$$

여기서 $\left[\frac{\partial N}{\partial q} \right]_p$, $\left[\frac{\partial N}{\partial \dot{q}} \right]_p$ 및 $\left[\frac{\partial G}{\partial q} \right]_p$ 는 $n \times n$ 행렬
 이 된다.

(5)와 (6)에서 2차 이상의 고차항을 무시하여 정리
 하면 다음과 같다.

$$T_p + \Delta T = A_1(\ddot{q}_p + \Delta \ddot{q}) + N(q_p, \dot{q}_p) + B_1 \Delta \ddot{q} + G(q_p) + (C_1 + C_2) \Delta q = T_p + A_1 \Delta \ddot{q} + B_1 \Delta \dot{q} + (C_1 + C_2) \Delta q \quad (7)$$

따라서, 다음과 같은 선형화 된 모델식을 구할 수 있다.

$$\tau(t) = \Delta T = A_1 \Delta \ddot{q} + B_1 \Delta \dot{q} + (C_1 + C_2) \Delta q = A_1 \ddot{\theta}(t) + B_1 \dot{\theta}(t) + C_1 \theta(t) \quad (8)$$

여기서, $n \times n$ 행렬 A_i , B_i 및 C_i 은 다음과 같다.

$$A_i = \left[\frac{\partial T}{\partial \ddot{q}} \right]_p = M$$

$$B_i = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right]_p = \left[\frac{\partial N}{\partial \dot{q}} \right]_p \quad (9)$$

$$C_i = \left[\frac{\partial T}{\partial q} \right]_p = \left[\frac{\partial (N+G)}{\partial q} \right]_p$$

실제로 행렬 A_i , B_i 및 C_i 은 로봇 파라미터와 측
 정된 관절의 변수들을 사용하여 온라인으로 계산할
 수 있으며, (8)은 임의의 동작점 P에서의 미소변위
 에 대한 로봇 동력학을 나타내는 선형 시불변 미분방
 정식으로 $x_1(t) = \theta(t)$, $x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{\theta}(t)$ 및
 $\ddot{x}_2(t) = \ddot{x}_1(t) = \ddot{\theta}(t)$ 를 상태 변수로 정의함으로
 써 다음과 같은 2n 차 상태변수 로봇 동력학 선형
 모델 식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -A_i^{-1}C_i & -A_i^{-1}B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ A_i^{-1} \end{bmatrix} \tau(t)$$

$$\theta(t) = [I_n \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

식(11)은 다음과 같이 선형화된다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\tau(t)$$

$$\theta(t) = Cx(t)$$

선형화된 로봇 시스템의 전달함수 모델은 (8)를 라
 플라스 변환하여 얻을 수 있다.

$$\theta(s) = (A_i s^2 + B_i s + C_i)^{-1} \tau(s) = W_0(s) \tau(s) \quad (11)$$

여기서, $W_0(s) = (A_i s^2 + B_i s + C_i)^{-1}$ 는 $n \times n$ 개
 루프 전달 함수 행렬이고, $\tau(s)$ 와 $\theta(s)$ 는 $\tau(t)$ 와
 $\theta(t)$ 의 라플라스 변환이다.¹⁾

2.3. 2-link 로봇 매니플레이터

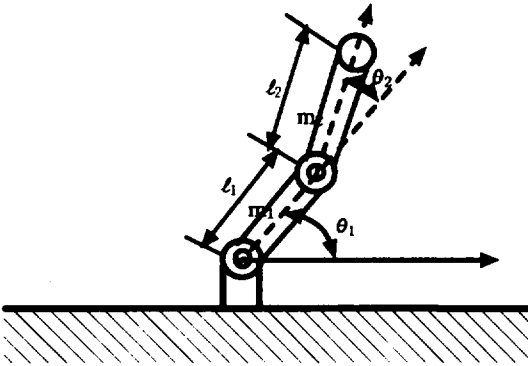


Fig. 1 2-link robot manipulator

Fig. 1과 같은 2링크 평면형 로봇 매니플레이터의 수직면 내에서 링크 1과 링크 2를 초기위치에서 최종위치로 θ_1 과 θ_2 만큼 회전시키는데 필요한 관절의 토크는 T_1 과 T_2 이다. 이들 관절각 벡터 $\theta = [\theta_1 \ \theta_2]^T$ 에 대한 관절의 토크 벡터 $T = [T_1 \ T_2]^T$ 에 관계하는 매니플레이터의 동역학 방정식의 일반식은 다음과 같다.

$$M(\theta)\ddot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) = T$$

Fig. 1의 2축 로봇을 대상으로 할 때, 동역학 방정식의 각 파라미터는 라그랑지안과 뉴턴-오일러식에서 다음과 같이 구하여 진다.^{2,3)}

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} l_1^2 m_2 + 2l_1 l_2 m_2 \cos \theta_2 + l_1^2 (m_1 + m_2) & l_1 l_2 m_2 + l_1 l_2 m_2 \cos \theta_2 \\ l_1 l_2 m_2 + l_1 l_2 m_2 \cos \theta_2 & l_2^2 m_2 \end{bmatrix}$$

$$N(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 - 2m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} m_2 l_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2) + (m_1 + m_2) l_1 g \cos \theta_1 \\ m_2 l_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (12)$$

이를 2-2에서 제시한 선형화 방법에 적용하여 정리

하면 다음과 같다.

$$A_l = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \cos \theta_2 & a_3 + \frac{1}{2} a_2 \cos \theta_2 \\ a_3 + \frac{1}{2} a_2 \cos \theta_2 & a_3 \end{bmatrix}_p$$

$$B_l = \begin{bmatrix} -a_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 & -a_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 \\ -a_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 & 0 \end{bmatrix}_p \quad (13)$$

$$C_l = \begin{bmatrix} -a_4 \sin \theta_1 - a_5 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -a_2 \dot{\theta}_K \cos \theta_2 - a_5 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -a_5 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -a_5 \sin(\theta_1 + \theta_2) + \frac{1}{2} a_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix}_p$$

여기서 $a_1 = l_1^2(m_1 + m_2) + l_2^2 m_2$, $a_2 = 2l_1 l_2 m_2$, $a_3 = l_2^2 m_2$, $a_4 = (m_1 + m_2) l_1 g$, $a_5 = m_2 l_2 g$ 이고, $\dot{\theta}_K = \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$ 이다. p는 선택된 로봇의 초기 동작점이다.

III. 제어기 설계

다변수 제어 기법은 상태방정식 표현에 기초한 현대 제어 이론으로 제어시스템의 성능에 대한 엄밀한 해석을 행하고, 임의의 궤적을 잘 추종하도록 하며, 전체적인 안정도를 보장하는 견실한 비선형 제어 법칙을 설계하는 제어기법이다. 본 절에서는 로봇 매니플레이터의 선형화된 모델에 대한 다변수 제어기를 설계한다.¹⁾

3.1. 극배치와 비간섭화

본 절에서는 다변수 제어기의 구조에 대하여 알아본다. 다변수 제어기의 구조는 Fig. 2와 같이 극배치 제어기 K(s)와 입출력 비간섭화 제어기 Q(s)로 구성된다. 내부루프 제어기 K(s)는 로봇 전달함수의 페루프 극점을 임의로 배치함으로써 시스템을 안정시키기 위한 제어기이고, 외부루프 제어기 Q(s)는 입·출력 사이의 비간섭화(decoupling)와 궤적추적(trjectory tracking)을 수행한다.

3.1.1. 극배치

본 절에서는 시스템의 안정성을 확보하고 원하는

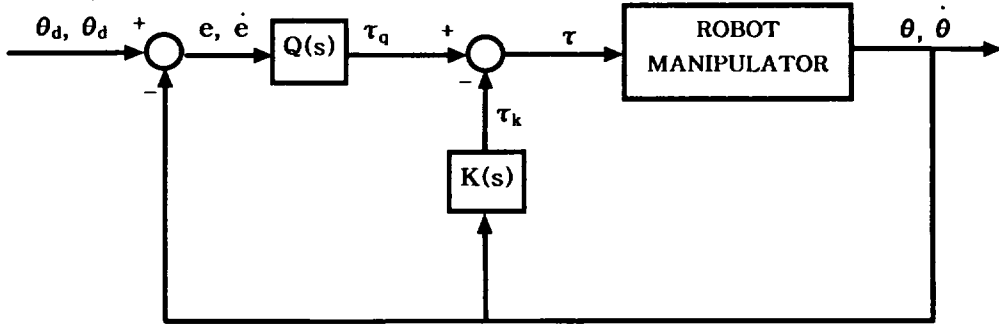


Fig. 2 Block diagram of multivariable controller

동작 특성을 갖도록 하는 임의의 극배치 제어기를 설계한다. 시스템의 개루프 전달함수 행렬과 출력 궤환 값으로부터 극배치를 위한 적절한 관계식을 도출하기 위하여 PD 제어기가 사용되었다. 따라서 시스템의 궤환 제어법칙은 다음과 같다.

$$\tau(t) = \tau_q(t) - K_P \theta(t) - K_D \dot{\theta}(t) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \tau_q(s) - [K_P + K_D s] \theta(s) \\ &= \tau_q(s) - K(s) \theta(s) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서, τ_q 는 추종제어기에 의한 토크이고, K_P 와 K_D 는 일정한 $n \times n$ 위치 및 속도 궤환 이득 행렬이며, $K(s) = K_P + K_D s$ 는 다변수 PD 제어기의 $n \times n$ 전달함수 행렬이다. 이 제어법칙은 선형화된 시스템 (11)에 대하여 전 상태 궤환임을 의미하며, 복소수 평면에 $2n$ 개의 극을 임의로 배치시킬 수 있다. 제어법칙 (14)를 적용하기 위한 $2n$ 차 페루프 특정방정식은 (12)에 (14)를 대입함으로써 구하여 진다.

$$\Delta_1(s) = |I_n s^2 + A_I^{-1}(B_I + K_D)s + A_I^{-1}(C_I + K_P)| \quad (16)$$

로봇을 안정화하고, 만족스러운 특성을 얻기 위하여, 궤환 이득 K_P 와 K_D 는 복소수 평면의 좌 평면상에 원하는 극점이 위치하도록 선정한다. 이 때의 특성다항식을 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} \Delta_1(s) &= (s^2 + e_1 s + f_1)(s^2 + e_2 s + f_2) \\ &\quad \dots (s^2 + e_n s + f_n) \end{aligned} \quad (17)$$

여기서, $-\lambda_{i1}$ 과 $-\lambda_{i2}$ 인 실수 극에 대하여 $e_i = (\lambda_{i1} + \lambda_{i2})$ 이고, $f_i = \lambda_{i1} \lambda_{i2}$ 이다. 위치와 속도의 궤환 이득들은 (15)을 $\Delta_1(s) = |I_n s^2 + E s + F|$ 로 놓음으로써 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} K_P &= A_I F - C_I \\ K_D &= A_I E - B_I \end{aligned} \quad (18)$$

여기서, $F = \text{diag}_i(f_i)$ 와 $E = \text{diag}_i(e_i)$ 는 상수 $n \times n$ 행렬이다. 내부 제어법칙 (14)를 적용하면, 다음과 같은 전달함수 모델과 상태공간 모델을 얻는다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -A_I^{-1}(C_I + K_P) & -A_I^{-1}(B_I + K_D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ A_I^{-1} \end{bmatrix} \tau_q(t) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \theta(s) &= (A_I s^2 + (B_I + K_D) s + (C_I + K_P))^{-1} \tau_q(s) \\ &= W_1(s) \tau_q(s) \end{aligned} \quad (20)$$

$$W_1(s) = [A_I s + (B_I + K_D) s + (C_I + K_P)]^{-1} \quad (21)$$

여기서 $W_1(s)$ 는 $n \times n$ 극배치 제어 루프의 전달함수

행렬이다.¹⁾

3.1.2. 비간섭화(Decoupling)

입·출력 사이의 비간섭화와 목표궤적 추종 성능을 갖기 위하여 PID 제어기를 설계한다. 입·출력이 비간섭된 형태의 선행 전달함수(forward transfer function) 행렬을 얻기 위한 비간섭화 제어기 $Q(s)$ 를 설계할 때, 각 목표 궤적은 오직 관절의 각도로 나타내져야 하고, 강인한 정상상태 추종은 목표궤적과 토오크 외란에 의해 결정된다. 이러한 목적을 달성하기 위한 가장 간단한 선행 전달함수 행렬은 다음과 같다.^{1,8)}

$$W_1(s)Q(s) = \frac{K}{s} \quad (22)$$

여기서, $K = \text{diag}\{k_i\}$ 는 상수 $n \times n$ 행렬이다. (19)에서 정의한 $W_1(s)$ 에 의하여 $Q(s)$ 는 다음과 같이 된다.

$$Q(s) = W_1^{-1}(s) \cdot \frac{K}{s} \\ = [A_1s^2 + (B_1 + K_D)s + (C_1 + K_P)] \cdot \frac{K}{s} \quad (23)$$

원하는 비간섭화 추종제어기는 다음과 같이 구해진다.

$$Q(s) = [(B_1 + K_D)K] + \frac{[C_1 + K_P] \cdot K}{s} \\ + [A_1K]s = Q_P + \frac{Q_I}{s} + Q_Ds \quad (24)$$

여기서, $Q_P = A_1EK$, $Q_I = A_1FK$, $Q_D = A_1K$ 이다. 비간섭화 제어기의 제어법칙은 다음과 같다.

$$\tau_q(s) = Q(s)e(s) = [Q_P + \frac{Q_I}{s} + Q_Ds]e(s) \quad (25)$$

$$\tau_q(t) = Q_P e(t) + Q_I \int_0^t e(t)dt \\ + Q_D \dot{e}(t) \quad (26)$$

여기서, $e(t) = \theta_d(t) - \theta(t)$ 는 $n \times 1$ 관절 각도오차

벡터, $\theta_d(t)$ 는 $n \times 1$ 목표궤적 벡터이다. $\gamma(t) =$

$$\int_0^t [\dot{\theta}_d(t) - \dot{\theta}(t)]dt. \text{ 혹은 } \gamma(t) = \theta_d(t) - \theta(t) \text{라 하면.}$$

로봇 전체 시스템이 3차 상태모델 안정화 추종 제어기는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{\gamma}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ -A_{21} & -A_{22} & A_{23} \\ -I_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_1^{-1}Q_P & A_1^{-1}Q_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_d(t) \\ \dot{\theta}_d(t) \end{bmatrix} \\ \theta(t) = [I_n \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix} \quad (27)$$

여기서, $A_{21} = A_1^{-1}(C_1 + K_P + Q_P)$, $A_{22} = A_1^{-1}(B_1 + K_D + Q_D)$, $A_{23} = A_1^{-1}Q_I$ 이고, 전체 시스템의 3차 특성방정식은 (27)로부터 다음과 같이 된다.

$$\Delta_2(s) = |I_n s^3 + A_{22}s^2 + A_{21}s + A_{23}| \quad (28)$$

(24)의 Q_P , Q_I , Q_D 를 대입하여 다음과 같이 정리된다.

$$\Delta_2(s) = |I_n s^2 + A_1^{-1}(B_1 + K_D)s \\ + A_1^{-1}(C_1 + K_P) \cdot |I_n s + K| \\ = \Delta_1(s) \cdot \Delta(s) \quad (29)$$

여기서, $\Delta_1(s)$ 는 3-1.1 단계에서 구한 2차 특성다항식이고, n 차 다항식은 다음과 같다.

$$\Delta(s) = |I_n s + K| \\ = (s + k_1)(s + k_2) \cdots (s + k_n) \quad (30)$$

그러므로, 추종 제어기 $Q(s)$ 가 (22)에 의하여 설계되었을 때 전체 3차 페루프 시스템은 안정화 제어기 $K(s)$ 에 의해 할당된 2n개의 극을 갖고, $-k_i$,

$i = 1, 2, \dots, n$ 일 때 n 개의 추가 극을 갖는다. 이들 추가된 극은 이득 행렬 K 를 적절하게 설정함으로써 원하는 위치에 배치된다. 전체 제어법칙은 다음이 된다.

$$\begin{aligned} \tau(s) &= -\tau_k(s) + \tau_q(s) \\ &= -K(s)\theta(s) + Q(s)e(s) \\ &= -[K_P + K_{DS}]\theta(s) \\ &\quad + [Q_P + \frac{Q_I}{s} + Q_{DS}]e(s) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \tau(t) &= -K_P\theta(t) - K_D\dot{\theta}(t) + Q_Pe(t) \\ &\quad + Q_I \int_0^t e(t)dt + Q_D\dot{e}(t) \end{aligned} \quad (32)$$

관절의 전체 토크 $T(t)$ 는 동작점 토크 T_P 와 제어기에 의해 발생하는 제어 토크 $\tau(t)$ 의 합이다.

$$\begin{aligned} T(t) &= T_P - K_P\theta(t) - K_D\dot{\theta}(t) + Q_Pe(t) \\ &\quad + Q_I \int_0^t e(t)dt + Q_D\dot{e}(t) \end{aligned} \quad (33)$$

여기서, T_P 는 정규 동작점에서 초기에 축의 각도 유지를 위해 로봇에 가하는 피드포워드 토크이다.

3.2. 수정된 제어기

앞에서 설명한 제어기는 동력학식을 선형화하여 PID 및 극배치 방법을 이용하기 때문에 실제 제어시 로봇의 불완전한 모델링에 의한 오차, 로봇의 작업을 수행하는 과정에서 질량의 변화 및 외란에 의한 오차

를 신속하게 보정할 수 없게 된다. 따라서 이러한 오차를 줄이기 위해 로봇 선형 모델을 이용한다.

Fig. 3의 수정된 제어기는 실제 매니플레이터에서 나온 실제 출력과 선형 모델사이의 오차를 온라인으로 계산한다. 그리고 이를 선형 동학식에 원하는 각도, 각속도, 각가속도를 대입하여 선형적으로 원하는 토크를 입력하고 PID 제어기에서 극배치를 실시하여 전체적으로 오차를 신속하고 안정되게 보정한다. 모델오차를 보정하기 위한 선형 역 동력학 식은 다음과 같다.

$$A_i \ddot{\theta}_\alpha(t) + B_i \dot{\theta}_\alpha(t) + C_i \theta_\alpha(t) = \tau_\alpha(t) \quad (34)$$

여기서, $\tau_\alpha(t)$ 는 모델오차 및 외란에 의한 토크 오차이고, $\ddot{\theta}_\alpha(t) = \ddot{\theta} - \ddot{\theta}_m$, $\dot{\theta}_\alpha(t) = \dot{\theta} - \dot{\theta}_m$, $\theta_\alpha(t) = \theta - \theta_m$ 는 각각 가속도, 속도, 그리고 위치오차이다. 목표 각도, 각속도, 각가속도에 대한 선형 토크오차를 다음과 같다.

$$A_i \ddot{\theta}_d + B_i \dot{\theta}_d + C_i \theta_d = \tau_i \quad (35)$$

실제 로봇 매니플레이터에 입력되는 토크는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \tau(t) &= A_i \ddot{\theta}_m + B_i \dot{\theta}_m + C_i \theta_m \\ &= \tau_q(t) - \tau_{id} \end{aligned} \quad (36)$$

여기서 $\tau_q(t)$ 는 PID 제어기의 토크, $\tau_{id} = \tau_c - \tau_i$ 이다. (36)을 정리하면 다음과 같다.

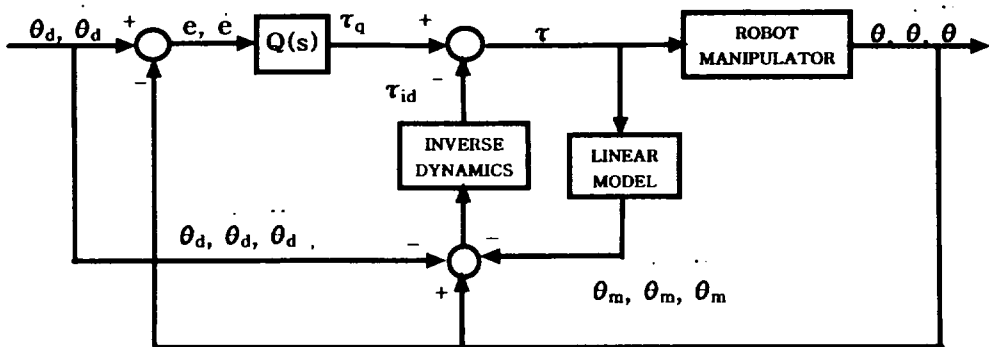


Fig. 3 Multivariable controller using linearized model

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \tau_q(t) + [A_1 \ddot{\theta}_d(t) + B_1 \dot{\theta}_d(t) + C_1 \theta_d(t)] \\ &\quad - [A_1 (\ddot{\theta}(t) - \ddot{\theta}_m(t)) + B_1 (\dot{\theta}(t) \\ &\quad - \dot{\theta}_m(t)) + C_1 (\theta(t) - \theta_m(t))] \\ &= \tau_q(t) + [A_1 \dot{e}(t) + B_1 e(t) + C_1 e(t)] \\ &\quad + [A_1 \ddot{\theta}_m(t) + B_1 \dot{\theta}_m(t) + C_1 \theta_m(t)] \end{aligned}$$

따라서, 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다..

$$[A_1 \dot{e}(t) + B_1 e(t) + C_1 e(t)] + \tau_q(t) = 0 \quad (37)$$

여기서, $\tau_q(t)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\tau_q(t) = \widehat{Q}_p e(t) + \widehat{Q}_I \int_0^t e(t) dt + \widehat{Q}_D \dot{e}(t) \quad (38)$$

따라서, 식(37)는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} [A_1 \dot{e}(t) + (B_1 + \widehat{Q}_D) \dot{e}(t) + (C_1 + \widehat{Q}_p) e(t) \\ + \widehat{Q}_I \int_0^t e(t) dt] = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

위 식에서 \widehat{Q}_D , \widehat{Q}_p , \widehat{Q}_I 를 다음과 같이 선택한다.

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_p &= A_1 EK - C_1, & \widehat{Q}_I &= A_1 FK, \\ \widehat{Q}_D &= A_1 K - B_1 \end{aligned} \quad (40)$$

(39)로부터 다음과 같은 로봇 전체 시스템에 대한 상태 모델식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{\chi}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ -B_{21} & -B_{22} & B_{23} \\ -I_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \chi(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & I_n \\ I_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_d(t) \\ \dot{\theta}_d(t) \\ \ddot{\theta}_d(t) \end{bmatrix} \\ \theta(t) &= [I_n \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \chi(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$

여기서, $B_{21} = A_1^{-1}(C_1 + \widehat{Q}_p)$, $B_{22} = A_1^{-1}(B_1 + \widehat{Q}_D)$, $B_{23} = A_1^{-1} \widehat{Q}_I$ 이다. 전체 시스템의 3차 특성방정식은 (41)으로부터 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \Delta &= |I_n s^3 + A_1^{-1}(B_1 + \widehat{Q}_D) s^2 \\ &\quad + A_1^{-1}(C_1 + \widehat{Q}_p) s + A_1^{-1} \widehat{Q}_I| \\ &= |I_n s^3 + Ks^2 + EKs + FK| \\ 0 &= |(s+k_1)(s+k_2) \cdots (s+k_n) \\ &\quad (s+ek_1)(s+ek_2) \cdots (s+ek_n) \\ &\quad (s+fk_1)(s+fk_2) \cdots (s+fk_n)| \end{aligned} \quad (42)$$

여기서, E, F, K를 복소수 평면 좌반부의 원하는 곳에 페루프 극을 배치하도록 선정하며, E, F, K는 각각 대각 양 한정 행렬(diagonal positive definite matrix)이다. 수정된 제어기의 전체적인 제어법칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \widehat{Q}_p e(t) + \widehat{Q}_I \int_0^t e(t) dt + \widehat{Q}_D \dot{e}(t) \\ &\quad + A_1 \ddot{\theta}_d(t) + B_1 \dot{\theta}_d(t) + C_1 \theta_d(t) \\ &\quad - [A_1 (\ddot{\theta}(t) - \ddot{\theta}_m(t)) + B_1 (\dot{\theta}(t) \\ &\quad - \dot{\theta}_m(t)) + C_1 (\theta(t) - \theta_m(t))] \end{aligned} \quad (43)$$

이를 식 (33)과 같이 표현하면 관절의 전체 토크 T(t)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T(t) &= T_p + \widehat{Q}_p e(t) + \widehat{Q}_I \int_0^t e(t) dt + \widehat{Q}_D \dot{e}(t) \\ &\quad + A_1 \ddot{\theta}_d(t) + B_1 \dot{\theta}_d(t) + C_1 \theta_d(t) \\ &\quad - [A_1 (\ddot{\theta}(t) - \ddot{\theta}_m(t)) + B_1 (\dot{\theta}(t) \\ &\quad - \dot{\theta}_m(t)) + C_1 (\theta(t) - \theta_m(t))] \end{aligned} \quad (44)$$

IV. 시뮬레이션

4.1. 시뮬레이션 방법

2-3절의 2-link 로봇 매니플레이터에 대해 초기 p를 $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0^\circ$, $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0^\circ$ 로

선택된 로봇의 동작점이라 하고, 실험에 필요한 제원을 각각 $m_1 = 15.91\text{kg}$, $m_2 = 11.36\text{kg}$, $l_1 = l_2 = 0.432\text{m}$, g 는 중력 가속도(9.8 m/s^2)로 하였다. 극배치를 위한 PD 제어기와 비간섭화를 위한 PID 제어기에서 $K_P = A_1F - C_1$, $K_D = A_1E - B_1$ 와 $Q_P = A_1EK$, $Q_I = A_1FK$, $Q_D = A_1K$ 는 각각 식(17)과 (31)를 이용하여 계산하여야 하지만 본 연구에서는 다음과 같은 값을 이용하였다.

$$E = \begin{bmatrix} 144 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$$

또한 수정된 제어기에서 $\widehat{Q}_P = A_1F - C_1$, $\widehat{Q}_I = A_1K$, $\widehat{Q}_D = A_1E - B_1$ 의 E, F, K도 식(42)을 이용해야 하지만 위의 값을 그대로 이용하였다.

본 연구의 시뮬레이션은 MATLAB SIMULINK를 이용하였고, 로봇이 물체를 이동시킬 때를 고려하여 m_2 에 5kg의 중량을 더 해졌을 경우도 실험하였다.

4.2. 시뮬레이션 결과

Fig. 4에서 극배치에 의한 다변수 제어기는 질량의 변화가 없을 때 최종 위치는 1축은 0.378° 이고, 2축은 0.01° 로 1축이 오차가 크게 나타나고, 2축은 목표값에 근접한 결과를 얻을 수 있다. 2축에 5Kg의 물체를 더해졌을 때 1축은 0.375° 로 질량의 변화가 없을 때와 거의 동일한 위치에 있게 되고, 2축은 -0.23° 로 질량의 변화에 크게 영향을 받고 있음을 알 수 있다.

Fig. 5에서 알 수 있듯이 속도가 변화하는 부분에서 극배치에 의한 다변수 제어기는 목표속도에 대해 느리게 추종하고 있다. 이러한 영향은 Fig. 4에서 볼 수 있었던 것과 같이 위치 궤적 추종에 영향을 미쳐 신속한 궤적추종이 안되고 있다. 또한 2축에 5Kg의 물체를 더했을 때의 1축의 속도는 큰 영향이 없지만 2축은 매우 큰 영향을 받고 있음을 알 수 있다. Fig. 4와 Fig. 5에서 극배치에 의한 다변수 제어기는 실제 산업현장에서 로봇이 물체를 이동시킬 경우 정밀한 작업을 할 수 없게 된다.

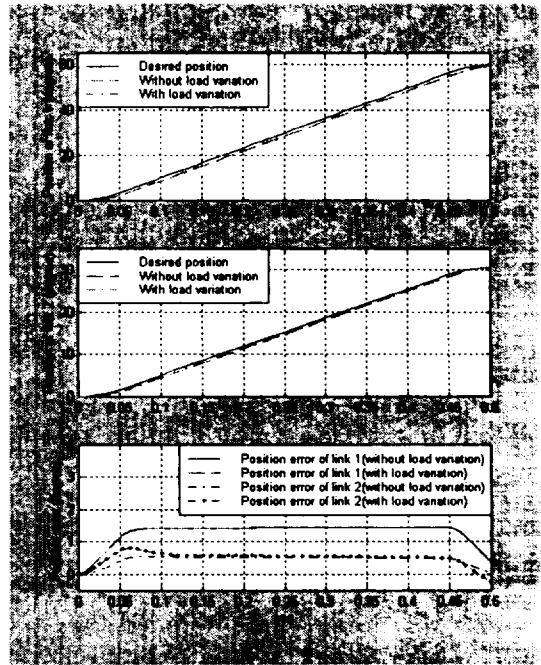


Fig. 4 Position and error of multivariable controller using pole placement

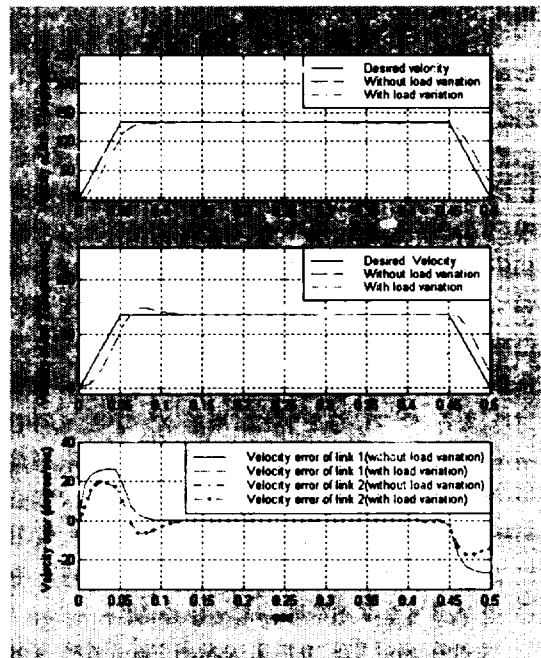


Fig. 5 Velocity and error of multivariable controller using pole placement

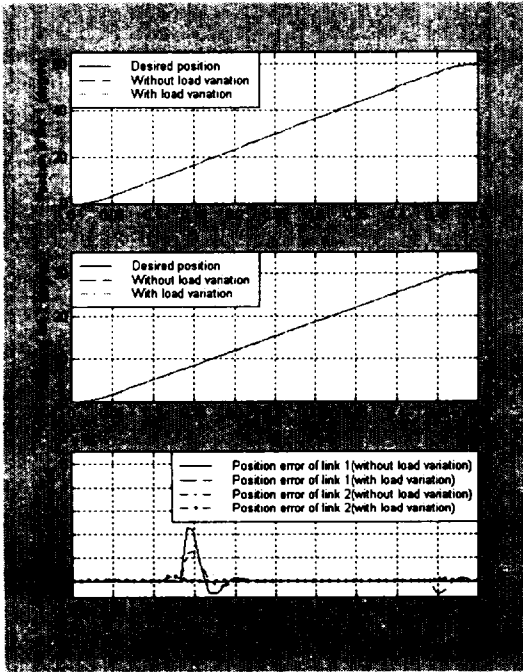


Fig. 6 Position and error of multivariable controller using linearized model

수정된 제어기의 물체가 없을 때와 물체가 있을 때의 위치 및 오차는 Fig. 6에서 보는 바와 같다. Fig. 6에서 0.15sec에서 질량변화가 없을 때 상대적으로 큰 리플이 생기며, 질량변화가 있을 때에는 0.45sec에서 리플이 생기는 것을 볼 수 있다. 이처럼 질량변화가 없을 때가 큰 리플이 발생하는 것처럼 PID를 통해 극점을 선택하는 과정에서 질량변화에 의해 실제 시스템이 변하게 되어 선택된 극점에 대해 오히려 정밀한 특성을 보일 수 있다. 하지만 이러한 특성은 일반적인 것이 아니기 때문에 반드시 질량변화가 있을 때 더 양호하다고 말할 수 없다. 이러한 위치 오차에도 불구하고 수정된 제어기는 질량 변화가 없을 때나 질량변화가 있을 때나 전체적인 위치오차는 Fig. 4와 비교하면 크게 감소됨을 알 수 있다. 따라서 극배치에 의한 제어기보다 빠른 위치 궤적 추종 및 목표지점에 정확히 위치시킬 수 있다.

수정된 제어기의 속도와 오차는 Fig 7에서 보여주는 것과 같다. Fig. 7은 Fig. 6과 마찬가지로 질량이 없을 때 0.15sec, 질량이 있을 때 0.45sec에서

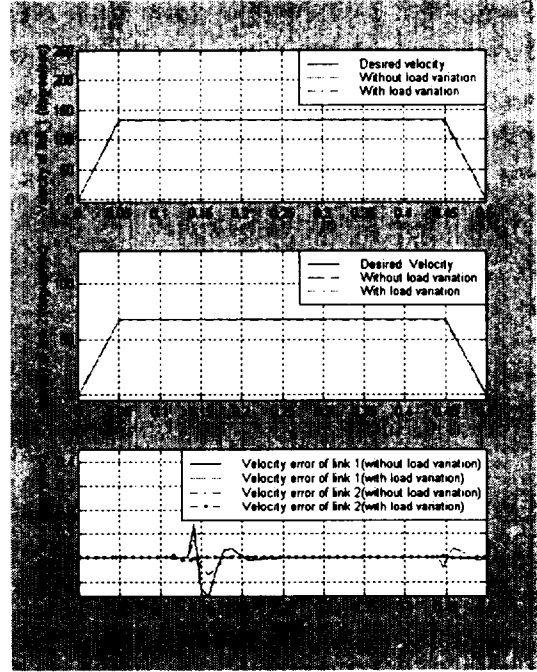


Fig. 7 Velocity and error of multivariable controller using linearized model

리플이 생기고 있다. Fig. 5와 Fig. 7에서 비교할 수 있듯이 제안된 제어기가 속도오차가 매우 크게 개선되고 있음을 알 수 있다.

Fig. 4-7에서 극배치에 의한 다변수 제어기와 수정된 제어기의 속도와 위치에 대한 결과에서 알 수 있듯이 수정된 제어기에서 궤적 추종이 개선되었으며, 또한 물체를 이동시키는 실제 산업에서 이용할 경우 보다 정밀한 작업이 가능하다는 것을 알 수 있다.

IV. 결 론

본 논문에서는 선형 모델을 이용하여 극 배치에 의한 다변수 제어기를 제시하였다. 제시된 제어기는 선형 동력학을 입력 토크에 추가하고 일반적인 PID 제어기를 이용하여 로봇 시스템을 안정화시키고, 오차를 줄여 정확한 궤적 추종이 가능함을 보였다.

제안한 제어기를 실제 로봇에 적용할 경우 마찰 및 외란을 고려해야 하며 이에 맞는 동력학을 구하

고 선형화해야 하는 것과 시스템을 안정시키고 빠른 궤적 추종을 위한 보다 정확한 극점을 찾아야 한다는 문제점을 갖고 있지만, 선형화 방법을 이용하여 다른 비선형 제어방법에 비해 계산 시간을 단축시켜 현재 산업 로봇 제어에 이용되고 있는 기존의 다변수 제어기를 보완하여 산업현장에서 이용할 수 있다. 또한 물체를 이동시킬 때 발생 의한 오차를 줄여 보다 정밀한 작업을 필요로 하는데 적용할 수 있다.

향후 연구과제로는 제안한 제어기법이 실제 로봇 매니플레이터에 적용 가능하지 확인하고, 또한 빠른 궤적 추종을 위해 정확한 극점을 찾기 위한 연구가 필요하다.

참고문헌

- 1) 한상완, 홍석교, 1998.10, 산업용 로봇 매니플레이터의 다변수 제어기 설계, 제어·자동화·시스템공학 논문집 vol. 4, No. 1, pp. 636~643.
- 2) Craig, J. J., 1986, Introduction to robotics mechanics & control, Addison wesley, 303pp.
- 3) Slotine, J. E. and Li, W., 1991, Applied nonlinear control, Prentice hall, pp. 207~416.
- 4) Astrom, K. J. and Wittenmark, B., 1995, Adaptive control - second edition, Addison wesley, pp. 1~262.
- 5) Rowland, J. R., 1986, Linear control systems, John wiley & sons Inc, pp. 488~489.
- 6) Lin, F. and Brandt, R. D., 1998, An optimal control approach to robust control of robot manipulator, *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, pp. 69~77.
- 7) Rocco, P., 1996, Stability of PID control for industrial robot arms, *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, pp. 606~614.
- 8) 김종식, 1998, 선형 제어 시스템 공학, 청문각, pp. 221~270.