제주교육대학교 논문집 (2006)
제35집 pp. 57~63

Euclid의 Stoicheia 결합에 관한 고찰

현 종 익*

〈목 차〉

Ⅰ. 문제의 제기

Euclid(330?~275? BC)의 본명은 '에우클레이데스(Eukleides)' 인데, 영어표기로 간단히 Euclid라 칭한다. Euclid가 지은 책 이름은「Stoicheia」이고, 이것 역시 영어로 표기하면 「Elements」가 되어 원본, 원론 등으로 번역하고 있다. 그러나 13권의 책 중에서 제5권, 7권, 8권, 9권, 10권 등 다섯 권이 대수(Algebra)에 해당되고 나머지 여덟권이 기하(Geometry)에 관한 것이어서 「기하학원본」이라고도 한다.

이 기하학원본은 Euclid가 자기 앞에 있었던 수학자들의 모든 수학적인 지식을 총정

* 제주교육대학교 수학교육과 교수

리한 것인 만큼, 그때부터 지금까지 2300년 동안 세계 모든 초·중·고·대학교에서 교재로 다루었다고 보면, 기독교인과 그 외 종교를 연구하는 사람들만이 읽고 있는 「성서」와 비교해 볼 때, 그 부수의 많고 적음을 짐작할 수 있을 것이다. 성서가 하나님 말씀의 보고라 하면 기하학원본은 인간의 이성에 의하여 이룩한 이론적 사고와 합리주의 정신의 결정체라 하겠다.

그러나 이것을 공부하기에는 너무나 방대하기 때문에 Euclid는 Egypt의 왕인 Ptolemy(3세기경 BC)로부터 다음과 같은 질문을 받았다고 한다.

"Euclid, 당신의 기하학원본으로 기하를 공부하는 것보다 더 빠른 방법이 있는가?"

그랬더니 Euclid는 다음과 같이 멋진 답을 했다고 한다.

"기하에는 왕도가 없다."(There was no royal road to Geometry).

한편, Shakespeare가 극찬했듯이 Euclid의 학문적인 업적은 그 누구도 의심할 바 없지만, 2300년이란 세월이 흐른 후에 보면 그래도 군데군데 결함이 발견되고 있다. 그것은 어떻게 보면 당연한 것이고, 그러한 흠결이 있다고 해서 Euclid의 공적에 금이 갈 수야 없지 않은가? 그것은

"어떠한 사람도 완전하지 못하기 때문이다."

그러나 학문에는 어디까지나 냉철한 이성적인 판단이 앞서야 하기 때문에 기하학원본에도 어떤 결함이 있는가를 살펴보는 것이 학문하는 사람의 바람직한 태도라 생각하여 연구를 시작하였다.

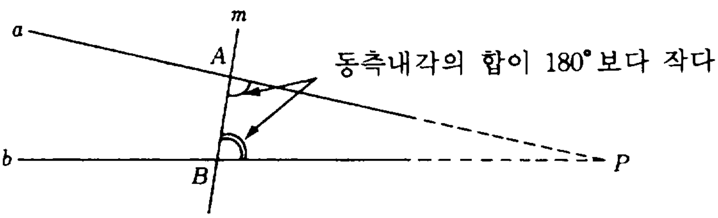
Ⅱ. 연구의 실제

[결함 1] 〈제1권〉의 정의 ①과 ②에서 보면 "점은 부분이 없는 것이다", "선은 폭이 없는 길이다"라고 했는데, 이것은 점과 선의 정의라기보다는 '성질'인 것이다. 현재 우리는 점, 직선, 평면을 다른 기하학적인 도형을 정의하는데 가장 기초되는 무정의원소(undefined elements)로 규정짓고 있다.

[결함 2] 〈제1권〉의 정의 ⑮에서 보면 "원이라는 것은 그 도형의 내부에 있는 한 점으로부터 그 선에 이르는 모든 직선이 같게 되는 한 선으로 둘러싸인 평면도형이다"라고 정의하였는데, 여기서 보면 원 둘레와 그 내부를 모두 합한 도형인 '원판(disk)'

을 말하고 있다. 그래서 이것을 수정 · 보완하면 '원이란 평면도형으로서 그 평면 위의 한 점에서 같은 거리에 있는 점의 자취이다'라고 할 수 있겠다.

[결함 3] 〈제1권〉의 공준 ⑤는 "한 직선이 두 개의 직선과 만나고 같은 쪽에서 두 직각보다 작은 내각을 이루면 이들 두 직선을 한없이 연장할 때 두 직각보다 작은 내각을 이루는 쪽에서 만난다."인데, 이것은 "한 직선 밖의 한 점을 지나고 이 직선에 평행인 직선은 존재하고 단 하나 존재한다."로 표현되는 '평행선의 공리'를 아주 어렵게 말한 것이다. 더군다나 〈그림 1〉에서 점 A를 지나고 직선 b에 평행인 직선이 단 하나 존재한다는 언급이 명확하게 나타나 있지 않다.



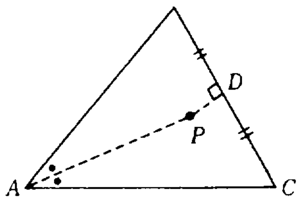
〈그림 1〉

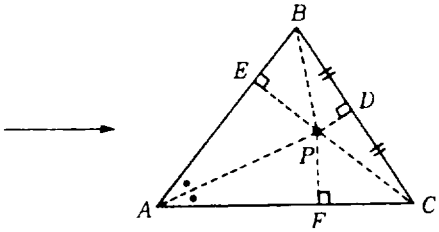
[결함 4] Euclid의 공리군의 결함은 그 외에도 여러 군데에서 지적할 수 있으나, 결정적인 결함은 '순서의 공리'를 무시한 점이다. 이것은 다음의 역설(paradox)에서 짐작할 수 있다.

〈그림 2〉에 있는 부등변 삼각형 ABC에서의 $\angle A$이등분선과 변 BC의 중점 D에서의 수직이등분선과의 교점을 P라 하고, P에서 변 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자.

(i) 교점 P가 $\triangle ABC$의 내부에 있는 경우

〈그림 3〉에 있는 $\triangle APE$와 $\triangle APF$에서 $\angle PAE = \angle PAF$이고





〈그림 2〉 〈그림 3〉

$\angle PEA=\angle PFA=\angle R$, 또 AP는 공통변이므로

$\triangle APE\equiv\triangle APF$이다. 그래서

$$AE=AF \qquad \cdots\cdots ①$$

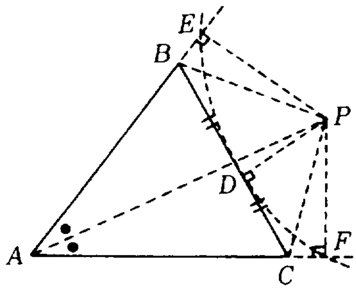
이고

$$PE=PF \qquad \cdots\cdots ②$$

그리고 $\triangle BPD$와 $\triangle CPD$에서, $BD=CD$, $\angle PDB=\angle PDC=\angle R$이고 PD는 공통변이므로 $\triangle BPD\equiv\triangle CPD$이다. 그래서

$$PB=PC \qquad \cdots\cdots ③$$

다음 $\triangle BPE$와 $\triangle CPF$에서 $\angle PEB=\angle PFC=\angle R$이고 ②에서 $PE=PF$, 또 ③에서 $PB=PC$이므로 $\triangle BPE\equiv\triangle CPF$이다. 그래서



〈그림 4〉

$$EB=FC \qquad \cdots\cdots ④$$

그러면 ①과 ④를 변변끼리 더하면

$$AE+EB=AF+FC, \text{ 즉}$$

$$AB=AC \qquad \cdots\cdots ⑤$$

(ii) 교점 P가 $\triangle ABC$의 외부에 있는 경우,

앞의 (i)과 마찬가지로 하면 $\triangle APE\equiv\triangle APF$ 그래서

$$AE=AF \qquad \cdots\cdots ⑥$$

그리고

$$PE=PF \qquad \cdots\cdots ⑦$$

그리고 $\triangle BPD\equiv\triangle CPD$이므로

$$PB=PC \qquad \cdots\cdots ⑧$$

끝으로 두 직각삼각형 BPE와 CPF에서 ⑦과 ⑧에 의하여 $\triangle BPE = \triangle CPF$.

그래서

$$BE = CF \qquad \cdots\cdots ⑨$$

그러면 ⑥에서 ⑨를 변변끼리 빼면

$$AE - BE = AF - CF, \text{ 즉}$$

$$AB = AC \qquad \cdots\cdots ⑩$$

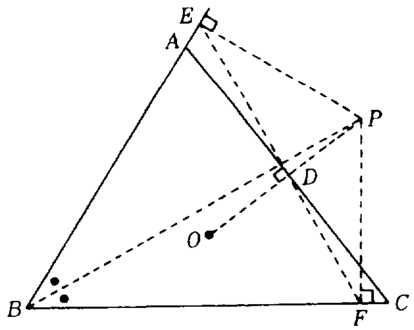
따라서 ⑤와 ⑩에서 보면 교점 P가 삼각형의 내부에 있든, 외부에 있든 두 변 AB와 AC는 같다. 그래서

"모든 삼각형은 이등변삼각형이다."

라는 역설적인 결론을 얻게 된다.

그러면 왜 이러한 역설이 나왔는지 차례로 음미해 보자.

〈첫째〉 〈그림 4〉에서 보면 $\angle B$의 이등분선과 변 CA의 수직 이등선의 교점은 $\triangle ABC$의 외접원상에 있다. 그런데 〈그림 2〉에서는 교점 P가 $\triangle ABC$의 내부에 있다고 했다. 따라서 이 경우는 우선 생각 밖으로 밀어내자.

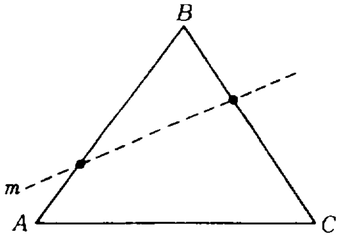


〈그림 5〉

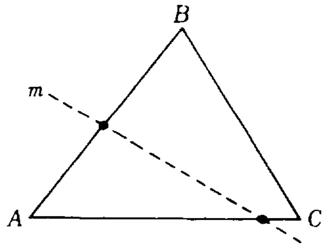
〈둘째〉 그러면 교점 P가 $\triangle ABC$가 외부에 있는 경우인 〈그림 4〉에서 생각해 보자. "$\triangle ABC$의 외접원상의 임의의 한 점에서 삼각형의 세 변에 내린 수선의 발 D, E, F는 한 직선(Simson선) 위에 있다"는 Simson의 정리에 의하면, 〈그림 4〉에 있는 3점 D, E, F는 일직선상에 놓이는 셈이다.

〈셋째〉 Moritz Pasch(1843~1930)는 1882년에 '순서의 공리'에서 다음과 같은 공리를 설정하였다.

"A, B, C가 동일직선상에 있지 않는 세 점이고, m은 A, B, C의 어느 것도 지나지 않고 또한 m은 평면 ABC상의 직선이라 한다. 이때 직선 m이 선분 AB상의 한 점을 지나면 m은 반드시 선분 BC상의 한 점을 지나거나 아니면 선분 AC상의 한 점을 지난다."라고 했다.



〈그림 6〉



〈그림 7〉

그런데 〈그림 4〉에서 보면 점 D를 지나는 $\triangle ABC$의 두 변 AB와 AC의 연장 위의 점 E, F에서 만나는 것은 있을 수 없다.

Euclid의 공리군에는 '순서의 공리'가 없기 때문에 특별한 관심을 갖지 않으면 위와 같이 「모든 삼각형은 이등변삼각형이다」는 역설을 얻게 된다.

Ⅲ. 결 론

Euclid 원론에서 제시하고 있는 정의(Definitions)를 현대적인 용어를 사용하여 정의하고 실제 현장 적용하는데 발생하는 문제점들을 해결하기 위해서 Euclid 원론 13권 중 1권의 내용을 재해석하는데 나타난 결함들을 제시하였다.

앞으로 연구를 계속해서 현장학습에 필요한 용어를 사용할 수 있도록 수정·보완을 할 방안을 제시하려고 한다.

《참 고 문 헌》

유클리드 저(이무현 옮김)(2005), 기하학원론(제1권), 교우사
유클리드 저(이무현 옮김)(2005), 기하학원론(제1권 해설서), 교우사
현종익(2004), 초등수학교육기초론, 경문사
현종익(2005), 교사를 위한 수학사, 교우사
현종익(2006), 기하학과 도형교육(4학년 1학기) 강의 노트