미분성질과 수학적 귀납법을 활용한 차분방정식의 안정성과 수열의 수렴성 연구

고 윤 희*

목 차

Ⅰ. 서 론

여러 가지 변화현상들을 수학적 모형화 과정을 통해서 차분이 포함된 차분방정식(difference equation) 형태(미분방정식의 특수한 형태)로 표현되었을 때, 차분방정식의 해를 직접 구하는 것이 거의 불가능하다. 이와 같은 경우에 차분방정식에 관하여 직접 해를 구하지 않고 전체적인 해의 성질들을 분석하는 정성분석방법(qualitative method)을 연구하는 것은 중요한 연구대상일 될 수 있다.

차분방정식의 안정성과 수렴성 연구과정에서 필요한 실수의 체계, 수열과 극한의 성질, 연속성질, 미분의 성질 등을 선행 연구하였다. 특히 미분성질 연구에서는 극한개념을 이용하지 않고 곡선과 직선이 접하는 접점에서 중근을 갖는 개념을 이용하여 도함수를 구하는 과정을 연구하였으며, 접근속도의 비교과정을 통해 기하학적으로 미분개념을 학습함으로써 미분개념을 체계적이고 효율적으로 이해할 수 있었다.

본 논문에서는 그러한 선행연구 결과를 활용하여 차분방정식의 해의 성질들을 분석하는 정성분석방법을 다음과 같이 진행하였다. 우선 연구자료들을 참고하여 1계 자동차분방정식의 기본 내용과 정의들을 체계적으로 연구하였다. 선행연구를 통해 임상수해(균형점)의 존재성에 관한 충분조건을 구했다. 충분조건을 구하는 과정에서는 미분에 관한 평균치 정리, 실수집합에서의 코쉬수열의 수렴성, 그리고 함수의 연속성 등이 핵심역할을 했다. 그리고 1계자동 차분미분방정식의 상수해(equilibrium)의 안정성(stability)과 점근적 안정성(asymptotic stability)을 보장

* 제주대학교 수학교육과 교수

하는 충분조건들을 구했다. 충분조건들을 구하는 과정에도 평균값의 반복적용과 함수의 연속성, 그리고 수열의 수렴성 등이 중요한 역할을 했다. 그리고 연구과정에서 얻어진 결과들을 적용시키기 위해서 여러 가지 형태의 1계 자동차분방정식들이 보기로 제시되었다.

특히 연구과정에서 얻어진 차분방정식의 상수해의 점근적 안정성 결과를 고등학교와 대학교 1,2학년 과정에서 문제로 제시되는 1계 자동차분방정식 형태의 수열들에 적용시킬 경우에는 수열의 일반항을 구하지 않고도 일반항의 수렴, 발산에 대한 조건들을 효과적으로 얻을 수 있었으며 수렴하는 경우의 수렴값을 효과적으로 찾을 수 있었다. 연구과정에서 제시된 1계자동차분방정식 형태의 보기들은 여러 참고 문헌을 통해 수집하였다. 그리고 차분방정식 $x_{n+1}=f(x_n)$ 에서 함수 f 그래프의 phase diagram을 통해 보기로 제시된 여러 가지 수열들의 수렴과정을 구체적으로 관찰할 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다

제 1 절에서는 논문의 주요 정리들 증명에 이용할 내용들 즉, 실수의 완비성 공리, 수열과 극한의 성질, 연속의 성질, 미분의 성질, 일반화된 평균치의 정리 등을 소개하였다.

제 2 절에서는 차분방정식, 1계 자동차분방정식, 선형 1계 자동차분방정식, 비선형 1계 자동차분방정식, 차분방정식의 균형점, 균형점의 안정성과, 균형점의 점근적 안정성, 균형점의 전체적 점근적 안정성들을 정의했다.

제 3 절에서는 차분방정식에 관한 정리들을 증명하고 예를 들어 적용한다. 특히, 정리들의 응용과정에서 다양한 차분방정식 형태의 수열들이 제시되었다. 그리고 주어진 수열들의 수렴값을 직접 구하는 과정과 연구과정에서 얻어진 정리를 활용하여 구하는 과정을 구체적으로 비교 분석하였으며, 연구과정에서 얻어진 결과를 이용하는 경우 수열의 수렴값을 효과적으로 구하는 것을 보였다.

Ⅱ. 본 론

1 기본 정의 및 정리

여기에 제시되는 내용은 주로 대학교 1,2학년 수준의 미분적분학과 해석학 수준에서 제시되는 내용들이다. 모든 정리의 증명과정은 참고문헌에 자세히 증명되어 있기 때문에 생략하기로 한다.

[정의 1.1] 실수의 집합 R 의 공집합이 아닌 부분집합 A에 대하여, 명제 "모든 $x\in A$에

대하여, $x \le a$ $(a \le x)$인 $a \in R$에 존재한다" 를 만족할 때, 집합 A는 위로 유계(아래로 유계)라고 한다. 이 때, a를 A의 상계(하계)라고 한다. 또한, A가 위로 유계인 동시에 아래로 유계일 때는 집합 A는 유계(bounded)라고 한다.

[정의 1.2] R의 부분집합 A가 위로 유계라고 하자. 다음의 두 조건을 만족하는 $\alpha \in R$가 존재할 때, α를 A의 상항(supremum) 또는 최소상계(least upper bound)라고 한다. (i) α는 A의 상계이다. (ii) $\beta \in R$이고 $\beta < \alpha$이면 β는 A의 상계가 될 수 없다. 최대하계(greatest lower bound)에 대한 정의도 비슷하게 정의될 수 있다.

[완비성 공리] R의 부분집합 A가 위로 유계이면, 반드시 A의 최소상계가 존재한다.

[정리 1.3] 완비성 공리는 다음 명제와 서로 동치이다. " R의 부분집합 A가 아래로 유계이면, A의 최대하계가 존재한다."

[정의 1.4] 실수열 $\{a_n\}$에 대하여 적당한 실수 L이 존재하여 조건"임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 자연수 N_ϵ이 존재하여 $n \ge N_\epsilon$인 모든 자연수 $n \in N$에 대하여 $|a_n - L| < \epsilon$ 이다>"를 만족할 때 $\{a_n\}$은 L에 수렴한다(converge)고 하고, L은 $\{a_n\}$의 극한(limit)이라고 한다. 기호로는 $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ 로 나타낸다.

[정리 1.5] 유계인 실수열은 수렴하는 부분수열을 갖는다.

[정의 1.6] 실수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족하면 $\{a_n\}$을 코시수열(Cauchy Sequence)이라고 한다. "임의의 주어진 $\epsilon > 0$ 에 대하여 적당한 자연수 N이 존재하여 $m,\ n \ge N$이면 $|a_m - a_n| < \epsilon$ 이다."

[정리 1.7] R에서 Cauchy 수열은 수렴한다.

[정의 1.8] $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots$인 수열 $\{a_n\}$을 단조증가 수열(monotone increasing sequence)이라 하고, $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots$인 수열 $\{a_n\}$을 단조감소수열(monotone decreasing sequence)이라고 한다. 단조증가이거나 단조감소인 수열을 단조수열(monotone sequence)이라고 한다.

[정리 1.9] 단조수열 $\{a_n\}$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 이 수열이 유계이다.

[정의 1.10] 함수 $f:(a,\ b)\to R$는 다음 조건을 만족할 때, $x=c\in(a,\ b)$에서 연속이다. 조건: 임의의 양수 ε에 대하여 $\delta=\delta(\varepsilon)$가 존재하여, $0\le|x-d|<\delta$이면 $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$을 만족한다.

[참고] 함수 f가 $x=c$에서 연속이기 위한 필요충분조건은, $\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$이다.

[정리 1.11] 함수 $f:A\to R,\ A\subset R,\ a\in A$에서 다음 명제들은 서로 동치이다. (i) f가 a에서 연속이다. (ii) 수열 $\{x_n\}\subset A$이 a에 수렴하는 임의의 수열이라면 수열 $\{f(x_n)\}$은 $f(a)$에 수렴한다.

[정리 1.12] 함수 f 가 $[a,\ b]$에서 연속이면, $\alpha,\ \beta\in[a,\ b]$가 존재하여 임의의 $x\in[a,\ b]$에 대하여 $f(\alpha)\le f(x)\le f(\beta)$를 만족한다.

[정의 1.13] 함수 $f:(a,\ b)\to R$가 다음 조건을 만족할 때 함수 f는 $x=c\in(a,\ b)$에서 미분가능이다: 극한값 $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$가 존재한다. 이 경우 $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)$를 $x=c$에서 함수 f의 미분계수라 한다.

[정리 1.14] 함수 $f:(a,\ b)\to R$가 점 $x=c\in(a,\ b)$에서 미분가능할 필요충분조건은 적당한 실수 L과 함수 $\gamma:(a,\ b)\to R$이 존재하여 $\lim_{x\to c}\dfrac{\gamma(x)}{x-c}=0$를 만족하고, 모든 $x\in(a,\ b)$에 대하여 $f(x)=f(c)+L\cdot(x-c)+\gamma(x)$를 만족하는 것이다. 이경우 $f'(c)=L$이 된다.

[정리 1.15] (평균치의 정리) 함수 $f(x)$, $g(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 개구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면 $\{f(b)-f(a)\}g'(x_1)=\{g(b)-g(a)\}f'(x_1)$ 를 만족하는 x의 값 x_1이 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다.

2 차분방정식에 관한 기본 정의

연속적인 시간의 경우에 시간 t에 대한 함수 $x(t)$의 변화유형은 도함수 $\dfrac{dx(t)}{dt}\equiv x'(t)$.

$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \equiv x''(t)$ 등으로 구체화 된다. 반면에 시간이 이산적 변수(discrete variable)이어서 변수 t가 정수값만을 가진다고 볼 때는 시간에 대한 함수 $x(t)$의 변화는 $x(t)$의 도함수보다 차분(difference)으로 표현해야 한다.

[정의 2.1] 차분방정식의 일반적인 정의는 다음과 같다.

이산적인 시간 변수의 경우에 시간에 대한 함수 $x(t)$의 변화유형은 차분몫 $\Delta x/\Delta t$로 표시되어야 한다. 이것은 도함수 dx/dt의 이산적 시간에 대응하는 개념이다. 이산 시간 t는 정수값만을 가지므로 두 개의 인접한 기간의 x값을 비교할 때 $\Delta t=(n+1)-n=1$이 된다. 이와같은 이유로 차분들의 비 $\Delta x/\Delta t$를 Δx로 간단히 표현할 수 있다. 특히 앞으로 본 논문에서는 이산 시간 t는 0을 포함하는 자연수의 집합 N에 속하는 것으로 약속하며 t 대신 변수 n을 사용하기로 한다.

1계 차분방정식을 다음과 같이 정의하도록 한다.

$$(1) \quad \Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

또는

$$(1') \quad x(n+1) = f(n,\ x(n))$$

여기에서 x는 집합 $N^0=\{0\}\cup N$에서 실수집합 R로 대응되는 함수이고 f는 집합 $N^0 \times R$에서 실수집합 R로 대응되는 함수이다. 그리고 Δ를 차분연산자라 부른다.
한편 (1)식에서와 같은 방법으로 2계 차분연산자를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}\Delta^2 x(n) &= \Delta(\Delta x(n)) = \Delta(x(n+1) - x(n)) \\ &= \Delta x(n+1) - \Delta x(n) \\ &= x(n+2) - x(n+1) - (x(n+1) - x(n)) \\ &= x(n+2) - 2x(n+1) + x(n)\end{aligned}$$

같은 방법으로 3계 이상의 차분연산자들을 정의할 수 있으며 1계 차분연산자만 포함하는 차분방정식을 1계 차분방정식(first order difference equation)이라 부른다.

그리고 (1')에서 f가 $x(n)$에 관하여만 영향을 받을 때, 즉 $f(n,\ x(n))=f(x(n))$인 경우에 (1')식을 "자동차분방정식(autonomous diffe-rence equation)"이라고 부르며 1계 차분연산자만을 포함하는 자동차분방정식을 "1계 자동차분방정식(first order autonomous difference equation)"이라 부른다. 특히 $f(x(n))=ax(n)+b$인 경우에 1계 자동차분방정식 $x(n+1)=f(x(n))$를 "선형 1계 자동차분방정식"이라 하고 선형이 아닌 1계 자동차분방정식을 "비선형 1계 자동차분방정식"이라고 한다.

앞으로 본 논문에서는

(2) $x(n+1)=f(x(n))$를 1계 자동차분방정식이라고 약속한다.

만약, $x=\varphi(n)$으로 놓았을 때

모든 $n\in N^0$에 대하여 $\varphi(n)$이 (2)를 만족하면 $\varphi(n)$을 (2)의 해라고 하며 초기조건을 강조하기 위해 $\varphi(n)=\varphi(n,\ q)$로 표시하기로 하는데 이 때 $\varphi(n,\ q)$는 (2)의 해로서 $\varphi(0)=q$를 만족하는 것을 의미한다.

그리고, $\varphi(1)=f(\varphi(0))=f(q)$, $\varphi(2)=f(\varphi(1))=(f\circ f)(q)=f^2(q)$, $\varphi(3)=f^3(q)$, ……, $\varphi(n)=f^n(q)$ 등으로 표시될 수 있다.

[정의 2.2] 차분방정식의 균형점(균형수준)의 정의는 다음과 같다.

차분방정식

$$x(n+1)=f\{x(n)\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

에서 f가 실수 R에서 연속함수이고 $f(p)=p$이면 p를 차분방정식 (*)의 상수해라 하고 p를 차분방정식 (*)의 균형점 또는 균형수준이라고 한다.

이 때 $\varphi(n)=\varphi(n,\ p)$라 하면

$\varphi(1)=f(\varphi(0))=f(p)=p$, $\varphi(2)=f^2(p)=p$, …… 즉, $\varphi(n)=p$인 상수해가 되는 것이다.

[정의 2.3] 차분방정식

$$x(n+1)=f\{x(n)\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

에서 함수 f가 실수 R에서 연속이고 p가 차분방정식 (*)의 균형점일 때 임의의 주어진

$\varepsilon > 0$ 에 대하여 적당한 양수 $\delta = \delta(\varepsilon)$가 존재하여 $|p-q| < \delta$ 이고 $\varphi(n) = \varphi(n, q)$가 차분방정식 (*)의 해일때 $|\varphi(n) - p| < \varepsilon$ 을 만족하는 경우에 균형점 p는 안정적이라고 말한다.

[정의 2.4] 균형점 p가 안정적이 아니면 불안정하다고 말한다.

[정의 2.5] 차분방정식

$$x(n+1) = f\{x(n)\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

에서 함수 f가 실수 R에서 연속이고 p가 차분방정식 (*)의 균형점일 때

(1) p : 안정적이고

(2) 적당한 양수 δ_o가 존재하여 $|p-q| < \delta_o$ 이고 $\varphi(n) = \varphi(n, q)$가 차분방정식 (*)의 해일때 $\lim_{n \to \infty} |\varphi(n) - p| = 0$ 를 만족하면 균형점 p는 점근적으로 안정적이라고 말한다.

[정의 2.6] 차분방정식

$$x(n+1) = f\{x(n)\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

에서 함수 f가 실수 R에서 연속이고 p가 차분방정식 (*)의 균형점일 때

(1) p : 안정적이고

(2) 임의의 실수 q에 대하여

$\varphi(n) = \varphi(n, q)$가 차분방정식 (*)의 해일때 $\lim_{n \to \infty} \varphi(n, q) = p$ 이면 균형점 p는 전체적 점근적으로 안정적이라고 말한다.

3 차분방정식에 관한 정리

[정리 3.1] 차분방정식

$$x(n+1) = f\{x(n)\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

에서 함수 f가 실수 R에서 연속이고 $\varphi(n)$ 이 차분방정식 (*)의 해일 때, $\lim_{n \to \infty} \varphi(n) = p$

이면 p는 차분방정식 (*)의 균형점이 된다.

(증명) $\varphi(n)$ 이 차분방정식 (*)의 해이므로

$$f\{\varphi(n)\}=\varphi(n+1)$$

또, 함수 f가 실수 R에서 연속이고 $\lim_{n\to\infty}\varphi(n)=p$ 이므로 [정리 1.11]에 의하여 $\lim_{n\to\infty} f\{\varphi(n)\}=\lim_{n\to\infty}\varphi(n+1)$, 즉 $f\{\lim_{n\to\infty}\varphi(n)\}=\lim_{n\to\infty}\varphi(n+1)$이 된다.

$$\therefore\ f(p)=p$$

따라서, p는 차분방정식 (*)의 균형점이다.

[보기 3.2] 차분방정식

$$x(n+1)+ax(n)=b(a,\ b\text{는 상수})\ \cdots\cdots\cdots(3.\ 1)$$

의 해를 구하고 [정리 3. 1]에 의해서 균형점을 찾아 보자.

미분방정식의 해법에 의하여

(3. 1)의 해는 (3. 1)의 특수해(특수적분)인 x_p와 (3. 1)의 축약방정식

$$x(n+1)+ax(n)=0\ \cdots\cdots\cdots(3.\ 2)$$

의 보조함수 x_c의 합이다.

우선 보조함수를 다루도록 하자.

$x(n)=Ab^n$이라 하면 $x(n+1)=Ab^{n+1}$. 이것을 (3. 2)에 대입하면

$$Ab^{n+1}+aAb^n=0$$
$$b+a=0\ \text{즉}\ b=-a$$
$$\therefore x_c(=Ab^n)=A(-a)^n$$

이제 (3. 1)의 특수해(특수적분)을 구해 보자. $x(n)=k$ 이라 하면 $x(n+1)=k$

이것을 (3. 1)에 대입하면

$$k+ak=b \quad \text{즉} \quad k=\frac{b}{1+a} \; (a\neq -1)$$

따라서, $a\neq -1$인 경우의 일반해는

$$\varphi(n)=A(-a)^n+\frac{b}{1+a} \quad \cdots\cdots\cdots (3.\ 3)$$

이다.

$n=0$일 때 $\varphi(0)=x_0$ 을 (3. 3)식에 대입하면

$$x_0=A+\frac{b}{1+a} \quad \therefore A=x_0-\frac{b}{1+a}$$

따라서, $a\neq -1$인 경우의 확정해는

$$\varphi(n)=(x_0-\frac{b}{1+a})(-a)^n+\frac{b}{1+a}$$

이다.

다음은 [정리 3. 1]을 적용해서 균형점을 구해 보자

$|a|<1$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(n)=\frac{b}{1+a}$$

이므로 차분방정식 (3. 1)의 균형점은 $\frac{b}{1+a}$가 된다.

[정리 3.3] 차분방정식

$$x(n+1)=f\{x(n)\}$$

에서 함수 f가 실수 R에서 미분가능하고 $\forall r \in R$. $f'(r) \neq 1$이면 기껏해야 하나의 균형점이 존재한다.

(증명) 결론을 부정하면 즉.
$f(x)$의 균형점 p, $q(p \neq q)$가 존재한다고 하면
$f(p)=p$, $f(q)=q$ 이다.
그런데. 평균치의 정리에 의해서

$$\frac{f(p)-f(q)}{p-q}=f'(r)$$

인 r이 (p, q)안에 적어도 하나 존재한다.

즉. $f'(r)=\frac{p-q}{p-q}(p \neq q)=1$ 이므로 $f'(r)=1$인 r이 (p, q)안에 적어도 하나 존재한다. 이것은 가정에 모순이다. 따라서. 위 정리는 성립한다.

[정리 3.4] (균형점의 존재성)

차분방정식

$$x(n+1)=f\{x(n)\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

에서 함수 f와 f'가 실수 R에서 연속이고

$$|f'(x)| < a, \ \forall x \in R \ (0 \leq a < 1)$$

이면 균형점 p는 유일하게 존재한다.

(증명) 평균치의 정리와 가정인 $|f'(x)| < a$, $\forall x \in R$ $(0 \leq a < 1)$에 의해서
$\varphi(n)=\varphi(n, q)=\varphi_n$가 차분방정식 (*)의 해이고 $q=\varphi(0)$ 라 할 때. 먼저 수열 $\langle \varphi_n \rangle$이 cauchy 수열임을 보이자.

$$\begin{aligned} |\varphi_n-\varphi_{n-1}| &= |f^n(q)-f^{n-1}(q)| \\ &= |f\{f^{n-1}(q)\}-f\{f^{n-2}(q)\}| \\ &< a|f^{n-1}(q)-f^{n-2}(q)| \end{aligned}$$

$$\langle a^2|f^{n-2}(q)-f^{n-3}(q)|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\langle a^{n-2}|f^2(q)-f(q)|=a^{n-2}|\varphi_2-\varphi_1|$$ 이므로

$m \geq n$일 때 삼각부등식에 의해 다음을 얻게 된다.

$$\begin{aligned}
&|\varphi_m-\varphi_n| \\
&\leq|\varphi_m-\varphi_{m-1}|+|\varphi_{m-1}-\varphi_{m-2}|+\cdots+|\varphi_{n+2}-\varphi_{n+1}|+|\varphi_{n+1}-\varphi_n| \\
&\leq a^{m-2}|\varphi_2-\varphi_1|+a^{m-3}|\varphi_2-\varphi_1|+\cdots+a^n|\varphi_2-\varphi_1|+a^{n-1}|\varphi_2-\varphi_1| \\
&=a^{n-1}\times\frac{1-a^{m-n}}{1-a}|\varphi_2-\varphi_1| \\
&\langle a^{n-1}\times\frac{1}{1-a}|\varphi_2-\varphi_1|\to 0 \ \ as\ \ n\to\infty \ \ (\because\ 0\leq a\langle 1)
\end{aligned}$$

∴ 수열 $\langle \varphi_n \rangle$ 은 코쉬수열이 된다. 따라서 [정리 1.7]에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\varphi_n=p$ 이다. 여기서, φ_n은 차분방정식의 해이므로

$$f\{x(n)\}=x(n+1)$$

을 만족한다. 또한, 함수 f가 모든 실수에서 연속이므로 [정리 1.11]에 의하여 $\lim_{n\to\infty}f\{\varphi(n)\}=\lim_{n\to\infty}\varphi(n+1)$와 $f\{\lim_{n\to\infty}\varphi(n)\}=\lim_{n\to\infty}\varphi(n+1)$이 된다.

$$\therefore f(p)=p$$

따라서, 균형점 p가 존재한다. 또한, [정리 3. 3]에 의해서 균형점 p는 유일하다.

[참고] 차분방정식

$$x(n+1)=x(n)+(1+e^{x(n)})^{-1}$$

에서 $x(n)=x$ 라 두면

$$f(x) = x + (1+e^x)^{-1}$$

이고

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{(1+e^x)^2} < 1 \quad 즉, \quad |f'(x)| < 1$$

이지만

균형점 p는 존재하지 않는다.

($\because$ $f(p) = p + (1+e^p)^{-1} > p$ 이므로 $f(p) \neq p$ 즉, 균형점의 정의에 위배된다.)

[정리 3.5] 차분방정식

$$x(n+1) = f\{x(n)\}$$

에서 함수 f와 f'가 실수 R에서 연속이고, $|f'(x)| < a, \ \forall x \in R \ (0 \leq a < 1)$

이면 균형점 p는 전체적 점근적으로 안정적이다.

(증명) (1) 임의의 실수 $q \ (q \neq p)$를 생각하면 평균치 정리에 의해 r가 p와 q사이에 존재하여

$$|f(p) - f(q)| = |f'(r)||p-q| < |p-q| \cdots\cdots\cdots (A)$$

를 만족한다.

임의의 양의 수 $\varepsilon > 0$에 대하여 δ를 $\delta \equiv \varepsilon$라 놓는다.

주어진 차분방정식의 해 $\varphi(n, \ q)$, $\varphi(0) = q$를 생각하고 $0 \leq |q-p| < \delta$ 라고 가정하면 위의 결과 (A)에 의하여

$$\begin{aligned} |\varphi(n) - p| &= |f^n(q) - f^n(p)| \\ &= |f\{f^{n-1}(q)\} - f\{f^{n-1}(p)\}| \\ &\leq |f^{n-1}(q) - f^{n-1}(p)| \\ &\leq |f^{n-2}(q) - f^{n-2}(p)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\le |f^2(q)-f^2(p)|\\ &\le |f(q)-f(p)|\\ &\le |q-p| < \delta \equiv \varepsilon\end{aligned}$$

를 만족한다. 따라서, 균형점 p는 안정적이다.

(2) 임의의 실수 $q(p \neq q,\ p < q)$ 에 대하여

함수 f가 $[p,\ q]$에서 연속이고, $(p,\ q)$에서 미분 가능함으로 평균치의 정리에 의하여

$$\frac{f(q)-f(p)}{q-p} = f'(r)$$

인 r이 $(p,\ q)$안에 적어도 하나 존재한다. 즉

$$\frac{|f(q)-f(p)|}{|q-p|} = |f'(r)| \le a < 1$$

이므로 $|f(q)-f(p)| \le a|q-p|$이 된다.

그러므로 $\varphi(n)=\varphi(n,\ q)$, $q=\varphi(0)$라 하면

$$\begin{aligned}|\Phi(n)-p| &= |f^n(q)-f^n(p)|\\ &= |f\{f^{n-1}(q)\}-f\{f^{n-1}(p)\}|\\ &\le a|f^{n-1}(q)-f^{n-1}(p)|\\ &\le a^2|f^{n-2}(q)-f^{n-2}(p)|\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\le a^{n-1}|f(q)-f(p)|\\ &\le a^n|q-p| \to 0 \ as\ n\to\infty\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}|\varphi(n)-p|=0 \text{ 즉, } \lim_{n\to\infty}\varphi(n,\ q)=p$$

따라서, 균형점 p는 전체적 점근적으로 안정적이다.

[참고] 고등학교 수학과정의 1계 자동차분방정식의 수열 $\{x(n)\}$에 대하여 점화식이

$$ax(n+1)-bx(n)=c\ (a\neq 0)$$

으로 주어질 때 극한값을 일반항을 이용하지 않고도 구할 수 있음을 보이자. 점화식을 정리하면, $x(n+1)=\frac{b}{a}x(n)+\frac{c}{a}$ 이 된다.

$x(n)=x$ 라 놓으면

$$f(x)=\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$$

균형점의 정의에 의하여

$$f(p)=\frac{b}{a}p+\frac{c}{a}=p$$

따라서 $p\left(1-\frac{b}{a}\right)=\frac{c}{a}$ 와 $p\left(\frac{a-b}{a}\right)=\frac{c}{a}$ 이 된다. 그러므로 $p=\frac{c}{a-b}$ 이다.

따라서, $\left|\frac{b}{a}\right|< k\ (0\leq k<1)$이면 [정리 3. 5]에 의하여 $\lim_{n\to\infty}x(n)=\frac{c}{a-b}$ 로 수렴한다.

[보기 3.6] 차분방정식

$$ax(n+1)-bx(n)=c\ (a\neq 0)$$

에 대하여 균형점 p의 전체적 점근적으로 안정적인 충분조건을 구해보자.

차분방정식

$$ax(n+1)-bx(n)=c\ (a\neq 0)$$

을 정리하면

$$x(n+1)=\frac{b}{a}x(n)+\frac{c}{a}$$ 즉, $f\{x(n)\}=\frac{b}{a}x(n)+\frac{c}{a}$이 된다.

$x(n)=x$ 라 놓으면. $f(x)=\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ 이 된다.

여기서 $f'(x)=\frac{b}{a}$ 이므로 적당히 $\frac{|b|}{|a|}=\frac{1}{2}<1$ 즉. $|a|=2|b|$으로 잡으면

[정리 3. 5]에 의해서 전체적 점근적으로 안정적이다.

[참고] [보기 3.6]에서 $a=3,\ b=2,\ c=3$이라 놓으면 주어진 차분방정식은 $x_{n+1}=\frac{2}{3}x_n+1$이 되어서 균형점 $p=3$은 전체적으로 점근적으로 안정하며 **【그림 1】** 그래프의 phase diagram을 통해 직관적으로 수렴과정을 관찰할 수 있다.

[정리 3.7] 차분방정식

$$x(n+1)=f\{x(n)\}$$

에서 함수 f와 f'가 p근방에서 연속이고 $f(p)=p,\ |f'(p)|<1$을 만족하는 $p\in R$이 존재하면 균형점 p는 점근적으로 안정적이다.

(증명) (1) 함수 $f'(x)$가 점 p에서 연속이므로 양수 $\varepsilon_0=1-|f'(p)|$에 대하여 적당한 양수 δ^*가 존재하여 $|p-x|<\delta^*$ 이면 $|f'(p)-f'(x)|<1-|f'(x)|$ 을 만족한다.

그런데

$$|f'(x)|-|f'(p)|<|f'(x)-f'(p)|$$

이므로

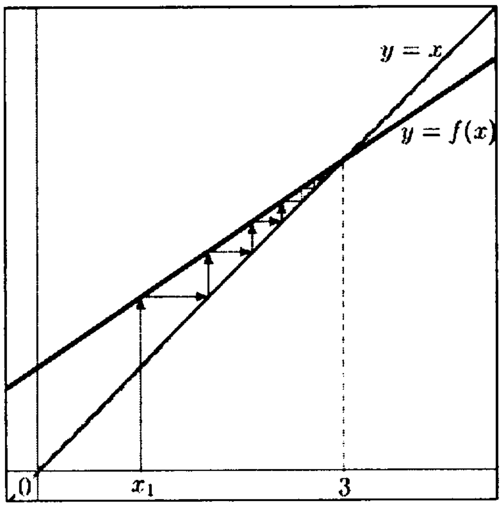
$$|f'(x)|-|f'(p)|<1-|f'(p)|$$
$$\therefore\ |f'(x)|<1$$

임의의 양의 수 $\varepsilon>0$ 에 대하여 δ를 $\delta=\min\{\delta^*,\ \varepsilon\}$라 놓는다. 주어진 차분방정식의 해 $\varphi(n,\ q),\ \varphi(0)=q$를 생각하고 $0\le|p-q|<\delta$라고 가정하면 평균치의 정리에 의해서

$$|\varphi(n)-p|=|f^n(q)-f^n(p)|$$

$$= |f\{f^{n-1}(q)\} - f\{f^{n-1}(p)\}|$$
$$\le |f^{n-1}(q) - f^{n-1}(p)|$$
$$\le |f^{n-2}(q) - f^{n-2}(p)|$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\le |f(q) - f(p)|$$
$$\le |q-p| < \delta \le \varepsilon$$

를 만족한다. 따라서, 균형점 p는 안정적이다.



〈그림 1〉

(2) $\delta_0 = \frac{1}{2}\delta^*$라 놓는다. 이 때 $f'(x)$는 폐구간 $[p-\delta_0,\ p+\delta_0]$에서 연속이므로 [정리 1.12]에 의하여 양수 $M<1$이 존재하여 모든 실수 $x \in [p-\delta_0,\ p+\delta_0]$에 대하여 $0 \le |f'(x)| \le M$를 만족한다.

주어진 차분방정식의 해 $\varphi(n,\ q)$, $\varphi(0) = q$를 생각하고 $0 \le |p-q| < \delta_0$라 가정하면 평균치의 정리에 의해서

$$|\varphi(n) - p| = |f^n(q) - f^n(p)|$$
$$= |f\{f^{n-1}(q)\} - f\{f^{n-1}(p)\}|$$

$$\le M|f^{n-1}(q)-f^{n-1}(p)|$$
$$\le M^2|f^{n-2}(q)-f^{n-2}(p)|$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\le M^{n-1}|f(q)-f(p)|$$
$$\le M^n|q-p|\to 0 \ as \ n\to\infty$$
$$\therefore \ \lim_{n\to\infty}|\varphi(n)-p|=0$$

따라서, 균형점 p는 점근적으로 안정적이다.

[참고] "차분방정식 $x(n+1)=f(x(n))$의 균형점 p가 점근적으로 안정적이다"는 것은 $x(n+1)=x_{n+1}$로 놓고 적절한 범위에서 초항 x_1을 택하는 경우 수열 $\{x_n\}$이 p로 수렴한다는 것을 의미한다.

[보기 3.8] 차분방정식

$$x(n+1)-x(n)\left\{x(n)-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$$

의 해는 직접해법으로 찾기는 불가능하지만 위 [정리 3.7]의 조건을 만족하는 균형점 p가 존재하고 점근적으로 안정적임을 살펴보자.

차분방정식

$$x(n+1)-x(n)\left\{x(n)-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$$

을 정리하면

$$x(n+1)=x(n)\left\{x(n)-\frac{1}{2}\right\}+\frac{1}{2}$$

즉

$$f\{x(n)\}=x(n)\left\{x(n)-\frac{1}{2}\right\}+\frac{1}{2}$$

$x(n)=x$ 라 두면

$$f(x)=x\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2} \text{ 이고 } f'(x)=2x-\frac{1}{2}$$

균형점 p는 $f(p)=p$을 만족하므로

$$p(p-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=p$$

이것을 정리하면

$$p^2-\frac{3}{2}p+\frac{1}{2}=0 \text{ 즉, } (p-\frac{1}{2})(p-1)=0$$

$$\therefore\ p=\frac{1}{2},\ 1$$

여기서

$p=\frac{1}{2}$ 일 때 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ 즉, $\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right|<1$ 을 만족한다.

따라서, 균형점 $p=\frac{1}{2}$은 [정리 3. 7]에 의해서 점근적으로 안정적이다.

[보기 3.9] $1<x<2$범위에서 수열 $x_{n+1}=1+x_n-\frac{1}{2}x_n^2$의 수렴값을 구하여라.

(풀이)

$$\begin{aligned} x_{n+1}-\sqrt{2} &= \left(1+x_n-\frac{1}{2}x_n^2\right)-\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2}(2-2\sqrt{2}+2x_n-x_n^2) \\ &= \frac{1}{2}((\sqrt{2}-2)+2x_n-x_n^2) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2}-x_n)(\sqrt{2}-2+x_n). \end{aligned}$$

따라서

$$\left|x_{n+1}-\sqrt{2}\right|=\frac{1}{2}|x_n-\sqrt{2}|\,|\sqrt{2}-2+x_n|$$

이 된다. 그러므로 $n\geq n_0$일 때 $|\sqrt{2}-2+x_n|\leq 1$이라고 가정하면

$$\begin{aligned} |x_{n+1}-\sqrt{2}| &\leq \frac{1}{2}|x_n-\sqrt{2}| \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0+1}|x_{n_0}-\sqrt{2}| \end{aligned}$$

이 된다. 만약 $1<x_1<2$이면, $1<x_2<\frac{3}{2}$이 된다. 계속하여 $\frac{3}{2}<x_3<\frac{11}{8}$이 된다. 따라서

$$|x_3-\sqrt{2}|<0.1<0.125=\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$$

또한 $\sqrt{2}-2+1<\sqrt{2}-2+x_n<\sqrt{2}-2+\frac{3}{2}$이 된다. 따라서

$$|\sqrt{2}-2+x_n|\le 1,\ \ n=1,2,3,\cdots$$

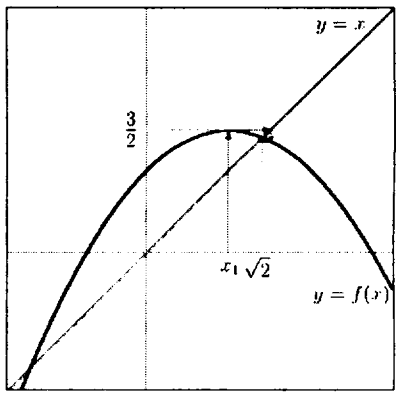
결국

$$\begin{aligned}|x_n-\sqrt{2}| &\le \frac{1}{2}|x_{n-1}-\sqrt{2}| \\ &\le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}|x_3-\sqrt{2}| \\ &< \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\end{aligned}$$

이 된다. 그러므로 $\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$ 가 된다.

[참고] [보기 3.9]을 [정리 3.7]을 이용하여 풀어보자. $f(x)=1+x-\frac{1}{2}x^2$이라 두면 $f(p)=p$에서 $p=1+p-\frac{1}{2}p^2$가 된다. 그러므로 $p=\pm\sqrt{2}$가 된다. $1<x<2$ 이므로 $p=\sqrt{2}$가 균형점이 된다. 그리고

$$|f'(\sqrt{2})|=|1-\sqrt{2}|<1$$



〈그림 2〉

이 된다. 초기값 $x_1\in(1,\ 2)$에서 택하면 [정리 3.7]에 의해

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$$

이 된다. 즉, [보기 3.9] 풀이 과정은 복잡하다. 그러나 [정리 3.7]를 이용하면 효과적으로 주어

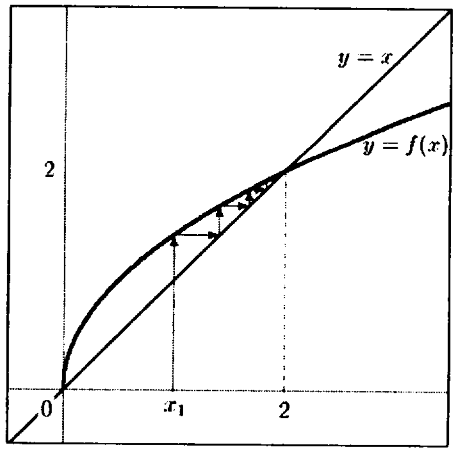
진 수열의 수렴값을 구할 수가 있다. 〈그림 2〉로 제시되는 그래프의 phase diagram을 통해 주어진 수열의 수렴과정을 직관적으로 관찰할 수 있다.

[보기 3.10] $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의된 실수열이라고 하자.

$$a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = \sqrt{2a_n},\ \ \ n \in N$$

이때 $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$임을 증명하여라.

(증명) $a_1 = 1$이고 $a_2 = \sqrt{2}$이므로 $1 \le a_1 < a_2 < 2$이다. 수열 $\{a_n\}$은 증가수열이고, 유계수열이 됨을 보일 것이다. 이를 보이기 위하여 귀납법을 써서 모든 자연수 $n \in N$에 대하여 $1 \le a_n < a_{n+1} < 2$임을 보이고자 한다. $n=1$일 때는 이미 앞에서 보였다. 이제 $n=k$일 때 성립한다고 가정하자. 그러면 $2 \le 2a_k < 4$이고, 따라서



$$1 < \sqrt{2} \le a_{k+1} = \sqrt{2a_k} < a_{k+2} = \sqrt{2a_{k+1}} < \sqrt{4} = 2$$

〈그림 3〉

그러므로 모든 $n \in N$에 대하여 $1 \le a_n < a_{n+1} < 2$이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$은 유계증가수열이므로 [정리 1.9]에 의하여 수렴한다. 즉

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} 2a_n}$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$라 놓으면 $a = \sqrt{2a}$를 만족한다. 따라서 $a^2 = 2a$를 만족하고 모든 자연수 $n \in N$에 대하여 $1 \le a_n \le 2$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = a = 2$가 된다.

[참고] [보기 3.10]을 [정리 3.7]를 이용하여 풀어보자. [보기 3.10]은 $x \ge 1$에서 $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$의 차분방정식으로 생각할 수 있다. 따라서 $f(x) = \sqrt{2x}$로 놓을 수 있으며 $p = f(p) = \sqrt{2p}$에서 $p = 2$ $(\because x \ge 1)$이 균형점이 된다. 그리고 $|f'(2)| = \frac{1}{2} < 1$이 된다. 따라서 [정리 3.7]에 의해 $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$가 된다. 즉 [정리 3.7]에 의

하여 수렴값을 효과적으로 구할 수 있다. 그리고 【그림 3】에 제시되는 그래프의 phase diagram을 통해 주어진 수열의 수렴과정을 직관적으로 관찰할 수 있다.

[보기 3. 11] $c>0$, $a_1>0$이고 $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)$, $n\in N$ 으로 정의하자. 이때, 수열 $\{a_n\}$의 수렴발산을 조사하고 수렴하는 경우 수렴값을 구하여라.

(풀이) 먼저 $n\geq 2$이면, $a_n^2\geq c$임을 보이자. 모든 자연수 $n\in N$에 대하여 $a_n>0$이므로

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)\geq\sqrt{a_n\cdot\frac{c}{a_n}}=\sqrt{c},\quad n\in N$$

이 된다. 따라서 $n\geq 2$이면 $a_n^2\geq c$이다.

마지막으로 수열 $\{a_n\}$이 단조감소수열임을 보이자. $n\geq 2$에 대하여

$$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)=\frac{a_n^2-c}{2a_n}\geq 0$$

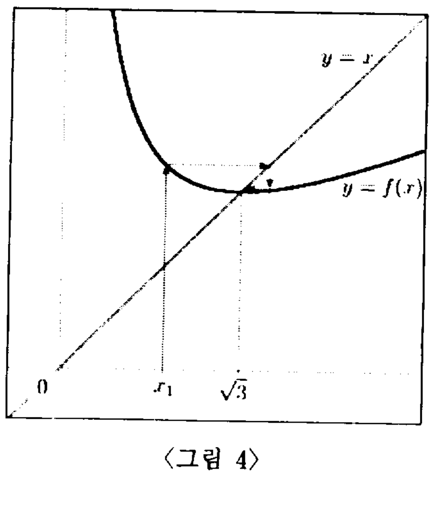
이 된다. 따라서 모든 $n\geq 2$에 대하여 $a_{n+1}\leq a_n$이다. 수열 $\{a_n\}$은 단조감소하고 아래로 유계되어 있어서 [정리 1.9]에 의하여 수렴한다. $\lim_{n\to\infty}a_n=a$라 하면

$$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{c}{a}\right)$$ 를 만족한다. 그러므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=a=\sqrt{c}$가 된다.

[참고] [보기 3.11]를 [정리 3.7]를 이용하여 풀어보자. [보기 3.11]는 $x>0$에서

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{c}{x_n}\right),\quad (n\in N,\ c>0)$$

의 차분방정식으로 생각할 수 있다. 우선 [보기 3.11]에서와 마찬가지로 $n\geq 2$이면 $x_n\geq\sqrt{c}$임을 알 수 있다. $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{c}{x}\right)$에서 균형점 p를 찾아보자.



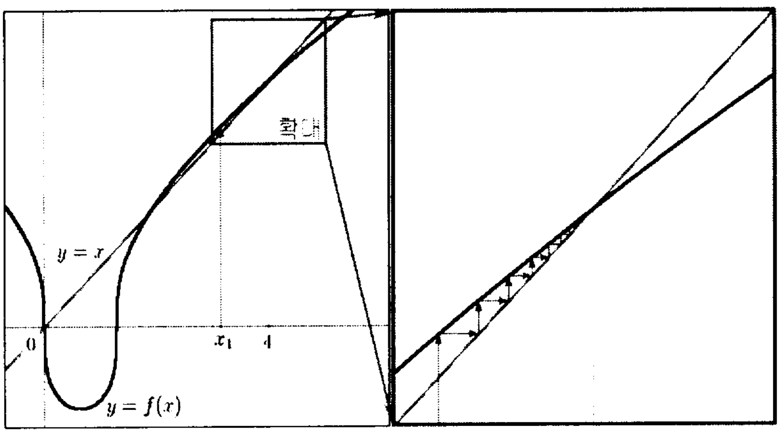
〈그림 4〉

$f(p)=\frac{1}{2}\left(p+\frac{c}{p}\right)=p$에서 $p=\sqrt{c}$가 된다. 그리고 $|f'(\sqrt{c})|=\frac{1}{2}\left(1-\frac{c}{c}\right)=0<1$

이 되어서 [정리 3.7]에 의하여 $\lim_{n\to\infty}x_n=p=\sqrt{c}$가 된다. 즉, [정리 3.7]에 의하여 수렴값을 효과적으로 구할 수 있다. 그리고 〈그림 4〉에 제시되는 그래프 phase diagram을 통해 주어진 수열의 수렴과정을 직관적으로 관찰할 수 있다.

[보기 3.12] $a_1=3$이고 $(a_{n+1})^3=6(a_n)^2-8a_n$일 때, 수열의 수렴값을 구하여라.

(풀이) [정리 3.7]결과를 이용하지 않고 제시된 문제를 풀기 위해서는 단조증가 및 위로유계 등을 보이는 과정에서 복잡한 풀이과정이 필요하다. 그러나 [정리 3.7] 결과를 활용하는 경우 매우 효과적으로 수열의 수렴값을 구할 수 있다. 우선 $f(x)=(6x^2-8x)^{\frac{1}{3}}$이라 놓고 균형점을 구하기 위해 $p^3=6p^2-8p$을 풀면, 균형점 $p=0, 2, 4$를 얻는다. 그리고 $f'(o)=-\infty$, $f'(2)>1$, $0<f'(4)<1$이 되어서, [정리 3.7]에 의하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=4$가 됨을 알 수 있다. 특히 〈그림 5〉에 제시된고 있는 f의 phase diagram을 통해 수렴과정을 직관적으로 관찰할 수 있다.



〈그림 5〉

지금부터는 제시되는 차분방정식은 균형점에서 미분불능이거나 균형점에서 미분계수가 1이 되는 경우이다. 이때, 주어진 차분방정식 형태의 수열이 균형점으로 수렴하는 것을 수학적 귀납법으로 보일 수 있다.

[보기 3.13] 차분방정식

$$x(n+1) = f\{x(n)\}$$

에 대하여

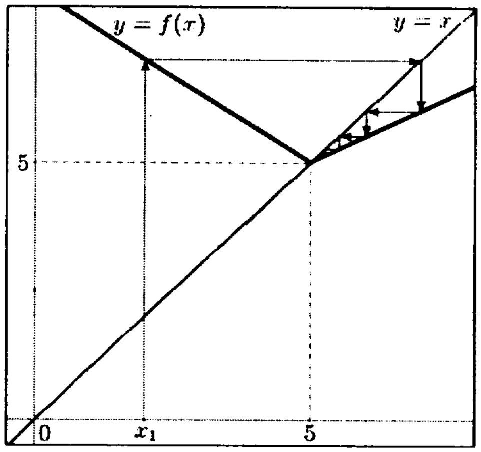
$$x(n+1) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{x(n)-5\}+5 & \text{만약 } x \geq 5 \\ -\frac{2}{3}\{x(n)-5\}+5 & \text{만약 } x < 5 \end{cases}$$

로 주어질 때 미분불능인 균형점 $p=5$로 수렴함을 보이자.

$x(n)=x$라 놓으면

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-5)+5 & \text{만약 } x \geq 5 \\ -\frac{2}{3}(x-5)+5 & \text{만약 } x < 5 \end{cases}$$

이 된다. 이 경우에는 수학적 귀납법을 이용하여 균형점이 주어진 차분방정식 형태의 수열의 수렴점이 된다는 사실을 보일 수 있다. 즉 초기값 x_0을 $(-\infty, 5)$의 범위에서 택하면 수열 $\{x_n\}$은 수학적 귀납법에 의해 단조감소 수열이며 $x=5$이 수열의 하계임을 알 수 있다. 그리므로 주어진 수열은 수렴하고 수렴값은 균형점이 됨을 알 수 있으며, 초기값을 $(5, \infty)$에서 택하는 경우도 수열 $\{x_n\}$은 단조감소 수열일 되어 균형점 5로 수렴한다.



〈그림 6〉

〈그림 6〉을 참고할 수 있다.

[보기 3.14] 수열

$$x_{n+1} = \frac{1}{2-x_n}, \quad -\infty < x < 1$$

에서 $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$이 됨을 보이자.

$f(x) = \frac{1}{2-x}$라 놓고 $p=f(p)$라 놓으면 $(p-1)^2=0$가 된다. 그러므로 균형점은 $p=1$이 된다. 그리고 초기값을 $(-\infty, 1)$ 범위에서 택하면 수열 $\{x_n\}$은 수학적 귀납법에 의해 단조증가 수열이고 위로 유계됨을 알 수 있다. 그러므로 주어진 수열은 균형점 $p=1$로 수렴한다. 그리고 초기값을 $(1, \infty)$범위에서 택하면 수열 $\{x_n\}$은 발산함을 알 수 있다.

Ⅲ. 결론 및 제언

본 논문의 주요 연구 내용은 차분방정식의 안정성과 수열의 수렴성 연구에서 필요한 실수의 체계, 수열과 극한의 성질, 연속성질, 미분의 성질을 체계적으로 선행연구 하였다.

본 연구에서는 차분방정식

$$x(n+1)=f\{x(n)\},\ \ f:R\rightarrow R$$

에 대하여

(1) 연구 예비단계로 실수의 체계, 수열과 극한의 성질, 연속함수의 성질, 미분가능 함수의 성질 등을 선행 연구하였다.

(2) 차분방정식의 기본정의와 표현방법들을 제시하였다.

(3) 상수해(균형점)의 존재성에 관한 충분조건들을 제시하고 이러한 충분조건들을 응용하는 보기들을 제시하였다.

(4) 차분방정식의 상수해(균형점)의 안정성에 관한 충분조건들을 제시하고 그러한 충분조건들을 응용하는 보기들을 제시하였다.

(5) 차분방정식의 상수해(균형점)의 점근적 안정성에 관한 충분조건들을 제시하고 그러한 충분조건들을 응용하는 다양한 보기들을 제시하였다. 특히 점근적 안정성을 수열의 수렴성과 관련시켜 설명할 수 있으며, 수열의 수렴값을 구하는 과정에서 점근적 안정성에 관한 정리를 이용하는 경우 수렴값을 효과적으로 구하는 과정을 제시하였다.

(6) 고등학교와 대학 1,2학년 수준에서 제시될 수 있는 여러 가지 수열의 수렴값을 구하는 문제들을 직접 풀고, 그 풀이과정과 연구과정에서 얻어진 주요정리들을 이용하여 수렴값을 구하는 과정을 비교분석 하였다. 그리고 phase diagram을 통해 다양한 수열들의 수렴하는 과정을 구체적으로 제시하 였다.

연구과정에서 얻어진 연구결과들을 차분방정식계

$$x(n+1)=f\{x(n)\},\ \ f:R^n\rightarrow R^n$$

에 적용시킬 경우 확장되고 일반화된 결과들을 얻을 수 있을 것으로 기대된다. 그리고 차분방정식 형태로 제시되는 경제학 관련 문제, 생물들의 개체수 변화 문제 등의 해의 정성적 분석에 연구결과들을 적용시킬 수 있을 것으로 기대된다. 또한 연구결과들을 확장하는 경우 보다 복잡한 수열의 수렴값을 구하는 과정에 활용될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1]. 김근수, "함수의 미분가능성과 볼록성에 관한 연구", 1998, 제주대학교 교육대학원.

[2]. 김종석, "고등학교 수학교실에서 유한차분방정식의 연구", 1994, 제주대학교 교육대학원.

[3]. 양영오, "해석학", 2003, 청문각.

[4]. 홍성규, "극한개념을 사용하지 않은 도함수의 정의에서 유리함수의 도함수", 1993, 제주대학교 교육대학원.

[5]. A.C. Chiang(정기준,이성준 역) , "경제수학입문", 1985, 비봉출판사.

[6] Y. Ko, An Asymptotic Stability and a Uniform Asymptotic Stability for FDEs, 1993, Proc. Amer. Math. Soc., 119, 535-545.

[7] Y. Ko, The Instability for Delay Differential Equations, 2001, Nonlinear Anal., 47, 4049-4057.

[6]. R. K. Miller and A. N. Michel ordinary Differtial Equations, 1982, Academic Press.

[7] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 1976, McGRAW-HILL

[8]. J. Stewart(수학교재편찬위원회 역), "미분적분학", 2003, 청문각.