

# 신경회로망의 최적화개념을 이용한 선형방정식회로

강민제\*

## Linear Equation Circuits using the Neural Optimization Concept

Min-Jae Kang\*

### ABSTRACT

A neural network structure able to perform the operations of linear equation problem is proposed. The network employs Hopfield's model of a neuron with the connection elements specified on the basis of an analysis of the energy function. Simulation using Pspice has shown convergence predominantly to the correct global minima.

**Key Words** : Linear equation, Hopfield, Neural Networks, Energy function, Convergence, Global minima.

### 1. 서론

시그모이달 전압특성곡선을 갖는 뉴런들이 연결된 회로망이 계산에너지, 즉 회로망의 Lyapunov 함수의 극소점으로 수렴한다는 내용이 발표되었으며<sup>1)</sup>, 이 개념을 이용한 다양한 응용회로들, 다시 말하면, 아날로그 최적화회로망들이 제안되었다<sup>2)</sup>. Tank과 Hopfield의 논문들에서 알려진 바와 같이 회로망은 뉴런, 연결강도, 그리고 외부입력으로 구성이 된다. 뉴런은 단일 프로세서로서 보통 연산증폭기를 사용하며, 뉴런의 입출력 전압특성곡선은 응용회로에 따라 시그모이드 이외의 다른 형태가 사용될 수 있다. 연결강도는 즉, 생물학적 용어로 시냅스라 부르며, 이 곳을 통해 뉴런들이 연결되며, 뉴런간의 정보가 교환된다. 연결

강도의 값에 따라 전하는 정보의 양이 결정된다. 그리고 전기적으로는 컨덕턴스로 표현되는 데, 실제로는 저항이 사용되며, 그 값은 컨덕턴스의 역수가 된다. 외부에서 유입되는 정보는 인간의 감지시스템에서 받아들여지는 신호로 비유될 수 있는 데, 전기적으로 구성할 때는 전류원을 사용한다. 회로망은 시간이 흐름에 따라 계산에너지함수의 극소점으로 수렴하는 데, 이는 내린 빗물이 높은 곳에서 위치에너지가 낮은 쪽을 따라 흘러내리며 안정된 곳에 이르는 이치와 같다. 연결강도와 외부입력의 값들이 바뀌면 회로망의 수렴점이 바뀌는 데, 이는 계산에너지의 형태가 바뀌어서 수렴하는 경로가 바뀔을 뜻한다.

이 논문에서는 계산에너지함수를 분석하고, 선형프로그래밍의 개념을 확장하여 다양한 방정식을 풀 수 있는 신경회로망을 소개한다. 이 신경망은 선형방정식을 풀 수 있으며, 또한 직교함수로 변환된 정보들을 추출해 낼 수 있다. 논문의 전개내용을 요약해 보면 3장에서는 계산에너지함수를 이용하여 신경회로망

\* 제주대학교 전기전자공학부, 첨단기술연구소  
Faculty of Electrical & Electronic Engineering, Research  
Institute of Advanced Technology, Cheju Nat'l Univ.

의 연결강도 및 외부입력의 값들을 구하는 방법을 소개하며, 4 장에서는 Pspice을 이용한 시뮬레이션결과들을 보여주는 데, 모두 안정되게 옳은 곳으로 수렴함을 나타낸다. 5 장에서는 논문을 다시 요약하고 결론을 내리며, 향후의 연구과제를 고려해 본다.

## II. 선형프로그래밍 신경망

그림 1은 흠필드가 제안한 선형프로그래밍을 위한 신경망이다. 신경망은 두 부분으로 크게 나눌 수 있는데, 비용함수와 제한조건들을 표현하는 부분이다. 그래서 두 종류의 뉴런 입력력 특성곡선을 사용한다. 그림 1에서 보면,  $g$ 로 표시된 뉴런들은 비용함수와 관련된 것이고,  $f$ 로 표시된 뉴런들은 제한조건과 관련된 것이다. 고로 바이어스 전류  $a_i$ 는 비용함수에 따라 결정되는 것이고,  $D_{ji}$ 와 바이어스전류  $b_i$ 는 제한조건함수에 따라 결정되는 값들이다. 비용함수와 관련된 뉴런의 입력단에서 키르히호프의 전류법칙을 이용하면 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다<sup>1)</sup>.

$$c_i \frac{du_i}{dt} = -a_i - \sum_j D_{ji} (Y_j - u_j) - \frac{1}{r_i} u_i \quad (1)$$

$$= -a_i - \sum_j D_{ji} Y_j - \left( \frac{1}{r_i} - \sum_j D_{ji} \right) u_i$$

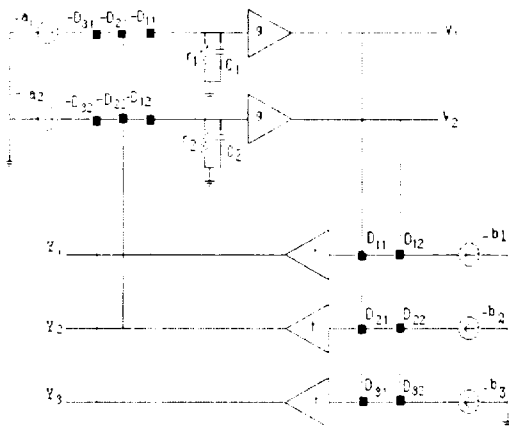


Fig. 1. Linear programming Neural Networks (n=2, m=3).

$c_i$ 는  $i$  번째 뉴런의 입력단에 연결된 커패시터를 나

타내고,  $r_i$  또한  $i$  번째 뉴런의 입력단에  $c_i$ 와 병렬로 연결된 저항을 나타낸다. 컨덕턴스  $D_{ji}$ 는 출력  $Y_j$ 와 뉴런  $i$ 의 입력을 연결하며, 전류  $a_i$ 는  $i$  번째 뉴런으로 들어오는 바이어스 전류를 말한다. 그리고 뉴런들은 활성화함수  $g$ 를 통해 뉴런의 입력전압  $u_i$  출력전압  $v_i$  매핑시킨다. 여기서  $j$  번째 뉴런의 입력단에서 본 총 컨덕턴스,  $G_i$ 를 다음과 같이 정의하면

$$G_i = \frac{1}{r_i} - \sum_j D_{ji} \quad (2)$$

식(1)은 다음과 같이 간략히 나타내어진다.

$$c_i \frac{du_i}{dt} = -a_i - \sum_j D_{ji} Y_j - G_i u_i \quad (3)$$

흠필드는 다음과 같은 Lyapunov형태의 계산에너지함수를 소개하였다<sup>1),4)</sup>.

$$E = \sum_i a_i v_i + \sum_j F(\sum_i D_{ji} v_i - b_j) + \sum_i G_i \int_0^{v_i} g_i^{(-1)}(z) dz \quad (4)$$

여기서, 함수  $f, g$ 는 각각  $f$ 와  $g$ 로 표시된 뉴런들의 매핑함수를 말하며,  $F$ 는  $f$ 의 적분값을 뜻한다. 그림 1의 시스템에서 뉴런의 출력  $v$ 는 이 계산에너지함수가 감소하는 방향으로 변하면서 안정되게 수렴해간다. 식(4)의 세 번째 항은 뉴런의 매핑함수의 역함수를 적분한 것으로 이것을 미분하면 다음의 관계가 성립한다.

$$\frac{d}{dv_i} G_i \int_0^{v_i} g_i^{(-1)}(z) dz = G_i u_i \quad (5)$$

식(4)를 음방향으로 미분하면, 즉 에너지가 감소하는 방향으로 미분하고,  $f$ 로 표시된 뉴런의 출력이  $Y$ 임을 이용하면 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$-\frac{dE}{dv_i} = -a_i - \sum_j D_{ji} f(D_{ji} v_j - b_j) - G_i u_i \quad (6)$$

$$= -a_i - \sum_{j=1}^m D_{ji} Y_j - G_i u_i$$

여기서, 흥미로운 사실은 식(3)과 (6)을 비교해보면, 에너지함수의 음방향미분은 뉴런의 입력단 캐패시터  $c$ 로 유입하는 전류량과 같다는 것이다.

$$-\frac{dE}{dv_i} = c_i \frac{du_i}{dt} \quad (7)$$

고로, 이런 계산에너지함수를 갖는 신경망은 시간이 흐름에 따라 에너지가 감소하는 방향으로 수렴해가는 안정된 시스템임을 다음과 같이 쉽게 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{dE}{dv} \frac{dv}{dt} = -c \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} \\ &= -c \left( \frac{du}{dt} \right)^2 g'(u) \\ &= -kc \left( \frac{du}{dt} \right)^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

### III. 선형방정식 신경망의 설계

#### 3.1. 선형방정식의 계산에너지함수

선형프로그래밍을 위한 신경망을 이용하여 선형방정식을 풀 수 있는 신경망을 제안하려한다. 우선 선형프로그래밍 신경망의 계산에너지를 분석하기로 하자. 식(4)의 첫째 항은 비용함수를 표현하고, 둘째 항은 제한조건들을 표현하기 위한 항이며, 셋째 항은 뉴런의 입출력특성곡선을 조절하여 아주 작게 만들어야 하는 항이다. 여기서 선형방정식을 풀기 위하여 우리가 관심을 갖는 항은 둘째 항이다. 즉, 벡터  $Dv - b$ 의 norm인 데, 이 회로망은 이 벡터의 norm을 가능한 영에 가깝게 최소화하도록 노력하면서 다음의 행렬식을 푼다.

$$Dv = b \quad (9)$$

그래서 만약  $D^{-1}$ 가 존재하면 유일한 해가 존재한다. 이는 우리가 만약 나머지 두 항 즉, 첫째 항과 셋째 항을 영으로 또는 무시할 수 있을 정도로 작게 만들 수 있으면 신경망은 선형방정식을 풀 수 있음을 뜻한다.

선형방정식을 풀 수 있는 신경망을 만들기 위해 우선 휴필드의 선형프로그래밍 신경망에서 시작하고자 한다. 벡터  $Dv - b$ 의 norm이 영에서 최소값을 갖고 이 벡터의 norm이 클수록 더욱 더 큰 값으로 표현되는 계산에너지함수는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\sum F(u(v)) = \sum \int_0^u f(w) dw = \begin{cases} 0, & u(v) = 0 \\ \text{양의 값}, & u(v) \neq 0 \end{cases} \quad (10)$$

여기서,  $u(v) = Dv - b$

그리고, 식(10)을 만족하는 제한조건 연산증폭기의 입출력함수  $f$ 를 찾아야 한다. 이런 조건을 만족하는 함수 중의 하나는 다음과 같고,

$$f(z) = kz \quad (11)$$

그 적분값은 다음과 같다.

$$F(z) = \int_0^z kz dz = \frac{k}{2} z^2 \quad (12)$$

고로, 우리의 목표가 식(9) 형태의 선형방정식을 푸는 것이면, 벡터  $b$ 를 제한조건을 위한 연산증폭기의 입력전류로 사용하고 식(4)의 첫째 항을 영으로 만들기 위해  $a$ 를 영으로 정하면, 식(4)는 다음과 같이 표현된다.

$$E = \sum_j F\left(\sum_i D_{ij}v - b_j\right) + \sum_i G_i \int_0^{v_i} g_i^{-1}(z) dz \quad (13)$$

또한 변수를 위한 연산증폭기의 입출력함수로 다음과 같은 식을 사용하고,

$$g(u) = \beta u \quad (14)$$

식(12)를 이용하여 식(13)을 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$\begin{aligned} E &= \sum_j \frac{k}{2} (\sum_i D_{ij}v - b_j)^2 + \sum_i G_i \int_0^{v_i} \frac{1}{\beta} v dv \\ &= \frac{k}{2} \|Dv - b\|^2 + \frac{G}{\beta} \|v\|^2 \end{aligned} \quad (15)$$

신경망은 시간의 흐름에 따라 계산에너지함수를 최소화하는 방향으로 수렴해 감으로, 즉 식(15)의 첫째 항이 최소화 되면서 연산증폭기의 출력  $v$ 는 선형방정식의 해인  $Dv = b$ 에 접근하게 된다. 그런데, 둘째 항이 최소화 되려면 출력  $v$ 가 선형방정식의 해와 관계없이 영에 가까운 값으로 변하므로 이 것이 문제가 된다. 그래서 출력값  $v$ 와 관계없이 둘째 항을 최소화 할 수 있는 방법을 찾아야 한다.

### 3.2. 계산에너지함수 둘째 항의 최소화 방법

식(15)의 둘째 항은 선형방정식문제에는 불필요한 항으로 가능한 최소화 시켜야 한다. 이를 위해 보통의 방법은 식(15)에서 알 수 있듯이 뉴런의 입출력 함수에서 기울기  $\beta$ 를 아주 큰 값으로 선택하여 그 값을 최소화하는 방법이다. 이 논문에서는 위의 방법과 더불어 효과적으로 에너지함수의 둘째 항을 최소화하기 위하여 다음과 같은 방법을 사용하였다. 즉,  $i$ 번째 뉴런 입력단의 총 컨덕턴스  $G_i$ 를 조절하여 에너지함수의 둘째 항을 최소화하는 방법이다.  $i$ 번째 뉴런 입력단의 총 컨덕턴스  $G_i$ 는 식(2)에 정의되어 있고, 이 식에서  $r_i$ 는 뉴런 입력단에 부수적으로 첨가되는 저항이며,  $D_n$ 는 선형방정식의 상수 계수에 해당하는 값이다. 그런데, 총 컨덕턴스의 둘째 항은 선형방정식 문제와 관련된 항이므로 변경이 불가능하나 첫째 항은 시스템의 안정된 수렴을 위해 존재하는 것으로 그 값을 변경하는 것은 가능하다. 고로, 총컨덕턴스를 영에 근접한 아주 작은 값으로 하기 위하여, 다음과 같이 부수적으로 입력단에 첨가되는 컨덕턴스의 값을 다음과 같이 조절하면 둘째 항을 무시할 수 있다.

$$\frac{1}{r_i} = \sum_{j=1}^n D_{ij} \quad (16)$$

부수적으로 연결하는 컨덕턴스의 값은 시스템의 성능을 좌우하는 매우 결정적인 역할을 하므로 주의하여 선택하여야 한다. 그러나, 총 컨덕턴스의 값을 영으로 하면 계산에너지의 둘째 항을 완전히 제거할 수 있으나, 입력단이 선형적으로 발산하는 경우가 생긴다<sup>[2]</sup>. 고로 이를 막기 위해서는 총 컨덕턴스는 영에 근사할수록 좋으나 영보다는 큰 값이 되도록 부수적으로 연결하는 컨덕턴스를 정해야 한다.

## IV. 시뮬레이션 및 결과

선형방정식을 위한 신경망회로를 위해 다음과 같은 방정식을 예로서 선택하였다.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix} \quad (17)$$

고로, 연결강도  $D$ 는 다음과 같고,

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & -4 \end{bmatrix} \quad (18)$$

제한조건 연산증폭기의 외부입력  $b$ 는 다음과 같으며, 그림 2는 회로도도를 보여준다.

$$b = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix} \quad (19)$$

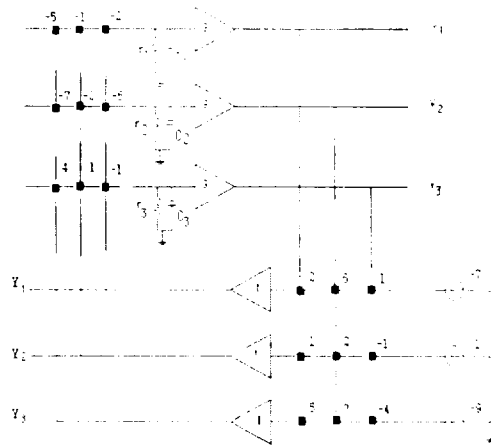


Fig. 2. Neural Networks for case study.

그림 3은 Pspice 시뮬레이션을 위한 schematic diagram이며, 연결강도들은 저항을 사용하여 표현되었다. 그리고, 그 값들은 연결강도의 역수를 취한 것이다. 변수를 위한 연산증폭기의 기울기  $\beta=10000$ . 제한조건 연산증폭기의 기울기  $k=10000$ . 입력단의 캐패시턴스  $c=1\mu$ 를 사용하였다. 그리고 입력단에 연결된 저항  $r$ 들은 식(16)을 이용하여 총 컨덕턴스  $G$ 가 영에 근접하도록 계산된 값들이다. 그림 2에서는 외부입력  $b$ 는 전류원으로 표현되어있으나, 그림 3에서는 전압원과 저항을 이용하여 입력되는 전류를 만들고 있다. 여기에서 주의해야 하는 점은 뉴런의 입

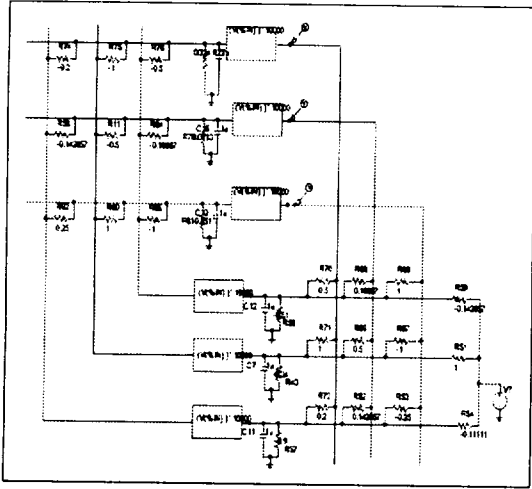


Fig. 3. Pspice schematic diagram for case study.

력단의 전압은 거의 영으로 간주하고 저항을 계산한다. 여기서 그림 2에서처럼 전류원을 그대로 사용해도 되나, 실제로 전압원을 사용하는 것이 용이하기 때문이다. 그림 4a는 Pspice 시뮬레이션 결과들을 보여주고 있으며, 약 5us에서 오차의 범위가 0.001v미만이며, 시간이 지남에 따라 오차는 점점 줄어서 해석적인 해와 거의 일치함을 보여 주고 있다. 그림 4b는 변수를 위한 연산증폭기의 기율기  $\beta$ 를 1로 하여 계산 에너지함수의 둘째 항이 증가한 경우의 시뮬레이션

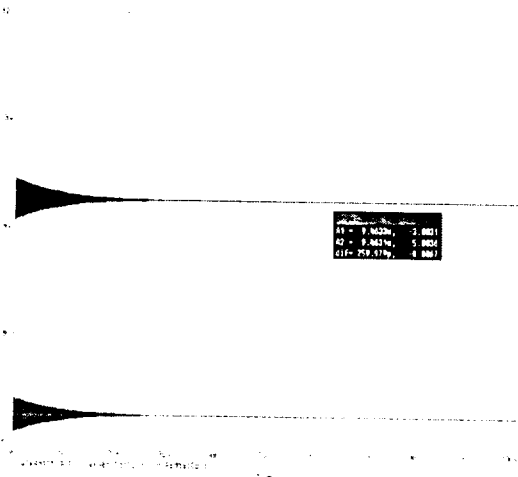


Fig. 4a. Simulation Result where  $\beta = 10000$ ,  $k = 10000$ ,  $G \approx 0$ .

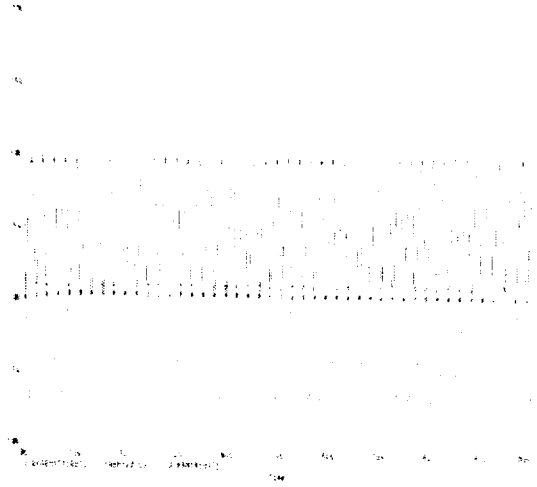


Fig. 4b. Simulation Result where  $\beta = 1$ ,  $k = 10000$ ,  $G \approx 0$ .

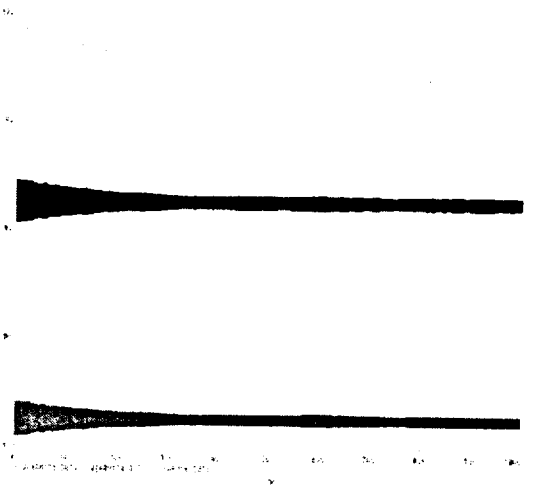


Fig. 4c. Simulation Result where  $\beta = 10000$ ,  $k = 10000$ ,  $r_1 = 1$

결과이며, 수렴하지 못하고 진동하고 있음을 보여주고 있다. 둘째 항의 증가로 선형방정식의 해와 거리가 있으리라 예상은 했으나 진동하는 이유는 차후의 연구과제로 남아있다. 그림 4c는 입력단에 연결된 저항  $r$ 를 임의 값 1로 선택한 경우의 시뮬레이션 결과이다.  $G$ 의 값이 영에 근접하지 못해서 신경망의 성능이 많이 떨어짐을 알 수 있다.

## V. 결론

이 논문에서는 홉필드신경망을 이용하여 일반적인 선형방정식 문제를 풀 수 있는 신경망을 제안하였다. 홉필드는 선형프로그래밍 문제를 풀 수 있는 신경망을 발표한 이후로 이에 관한 많은 논문들이 발표되었다. 이 논문에서는 홉필드의 계산에너지함수를 수정하여 선형방정식을 풀 수 있는 신경망을 제안하였다.

이 논문에서는 우선 확장된 신경망이 항상 안정되게 수렴함을 증명하기 위하여 회로레벨의 시뮬레이션 프로그램 Pspice를 이용하여 항상 안정되게 수렴함을 확인하였으며, 또한 시뮬레이션결과는 계산에너지함수의 둘째 항을 최소화하면  $5\mu s$  정도가 지나서 해석적인 해와 거의 일치함을 보였다. 즉, 해석적인 해와 시뮬레이션결과는 약  $0.001v$ 의 오차를 보였고, 시간이 더 지남에 따라 오차는 더 좁혀지는 것을 알 수 있었다.

## 참고문헌

- 1) Hopfield, J. J., and D. W. Tank. "Neural Computation of Decisions in Optimization Problems." *Biolog. Cybern.* 52: 141-154. 1985
- 2) Hopfield, J. J., and D. W. Tank. "Computing with Neural Circuits: A Model". *Science* Vol 233. 625-633. 1986
- 3) Park, S. "Signal Space Interpretation of Hopfield Circuit and a Linear Programming Circuit." *IEEE Trans. Circuits and Systems CAS-33(5)*: 533-541. 1989
- 4) Bernard C. Levy. "Global optimization with Stochastic Neural Networks". *IEEE. Int. Conf. on NN.* Sandiego, CA. USA. 1987
- 5) Anthony N. Michel, Jay A. Farrel and Wolfgang Porod. 1989. "Qualitative Analysis of Neural Networks." *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol 36. pp. 229-243. February 1989.
- 6) Mengkang Peng, Narebdra K. Gupta and6 Alistair F. Armitage. "An investigation into the Improvement of Local Minima of the Hopfield Network" *Neural Networks* .Vol. 9. pp. 1241-1253. 1996.
- 7) Anthony N. Michel, Jay A. Farrel and Wolfgang Porod. 1989. "Qualitative Analysis of Neural Networks." *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol 36. pp. 229-243. February 1989.
- 8) Takeshi Kamio, Hiroshi Ninomiya and Hideki Asai. "A Neural Net Approach to Discrete Walsh Transformation." *IEICE Trans. Fundamentals.* vol. E77-A. No994.
- 9) Mengkang Peng, Narebdra K. Gupta and Alistair F. Armitage. "An investigation into the Improvement of Local Minima of the Hopfield Network" *Neural Networks* .Vol. 9. pp. 1241-1253. 1996.
- 10) Naoki Kurita and Ken-ichi Funahashi. "On the Hopfield Neural Networks and Mean Field Theory" *Neural Networks*. Vol. 9. pp. 1531-1540. 1996.
- 11) Gene H. Golub, Charles F. Van Loan. *Matrix Computations*. Third Edition. John Hopkins Univ. Press. 1996.
- 12) L. O. Chua and G. N. Lin. "Nonlinear programming without computation." *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-32. p. 736. July 1985.
- 13) J.L. Huertas and A. Rueda. "Synthesis of resistive n-port section-wise piecewise-linear networks." *IEEE Trans. Circuits and Syst.*, vol. CAS-29. pp.6-14. Jan. 1982.