

신경회로망에서 뉴런간의 연결도를 이용한 4색 배치 문제 해결 알고리즘

현해진*, 김덕주**, 강부식**, 이기태**, 임재윤**

Four-Coloring Problem Algorithm By using Connectivity Between Neurons in Networks

Hae-Jin Hyeon*, Deog-ju Kim**, Boo-sig Kang**,
Gi-tae Lee**, Jae-yun Lim**

ABSTRACT

In this paper we have proposed a method for solving a four-coloring problem using adjusted information transmission between adjacent neurons in neural networks. These algorithms are based on McCulloch-Pitts binary neuron model neural networks. If a map shares n regions, a $4 \times n$ neural array is used to color a map of n regions where each neuron as a processing element performs it. By programming these algorithm by a C-language in IBM PC 486 DX and adapting it to various examples, we have showed the ability of our system. If one neuron is selected among four neurons, the strength of order three neurons is wakened. So, by transmitting the information of selected neuron, adjacent neurons cannot share the same color.

I. 서 론

신경망의 연산처리에 기본을 둔 수학적 모델은 1943년에 McCulloch와 Pitts에 의해 제시되었다⁽¹⁾. 색 배치 작업은 인접 지역들간의 구분을 쉽

게 하기 위해 인접 지역들을 각기 다른 색으로 색칠하는 방법으로써 1950년대에 Francis Guthrie와 Augustus De Morgan이 관심을 보였고, Arthur Kempe, Peter Tait, Percy Heawood 등 많은 수학자들이 간단한 평면 지도를 네가지 색깔

* 한국통신*

** 제주대학교 통신공학과**

로 배치하려고 노력했다. 1976년 8월에 Appel과 Haken은 미국의 행정구역에 대해 작업을 했다⁽²⁾ 4색 배치 문제에 대해 컴퓨터를 이용하여 증명했으나 순차적 방법에 기본을 두었기 때문에 지역의 수가 n 이 되는 곳에서 계산 시간은 n^2 에 비례하여 광범위한 문제를 해결하기 위해 많은 시간이 소요되었다. 그러므로 이러한 순차적 계산법에서 탈피하여 병렬처리 및 경로해석에 대한 다중처리의 필요성이 중요시 되었다. 이후 Dahi⁽³⁾, Moopenn et al⁽⁴⁾, Thakoor et al⁽⁵⁾는 K-착색문제에 대해 최초로 신경 회로망을 이용한 방법을 제시하였다. 조합의 최대 활용 문제에 대한 첫 신경 회로망은 1985년에 Hopfield와 Tank에 의해 소개 되었다⁽⁶⁾. Yoshiyasu Takefuji와 Kuochun Lee⁽⁷⁾는 Hopfield의 에너지함수를 이용하여 문제해결 알고리즘을 제시하였다.

이러한 대부분의 병렬처리문제들은 순차적인 해결 알고리즘으로는 모든 경우의 수에 대한 추종이 시스템의 처리시간중 대부분을 차지하게 되어 전체 처리시간이 길어진다. 이에 비해 각각의 분산된 뉴런들의 처리를 이용한 신경망에서의 병렬처리문제 해결시도는 각 뉴런의 처리과정은 간단하지만 처리시간에 있어서 효율적이어서 많은 학자들의 관심을 모으고 있다.

본 논문에서는 신경회로망에서 이진 뉴런에 기초하여 인접한 뉴런들간에 조정 정보 전달에 의해 4색 배치 문제를 해결하는 효율적인 방법을 제시한다. 기존의 방법은 뉴런의 연결강도와 입력치의 변화량이 적어서 단순한 계산에 있어서도 많은 시간을 요하였다. 그러나 본 논문에서는 한지역을 나타내는 4개의 뉴런의 출력치에 대한 정보를 인접 지역의 뉴런에 연결망을 통한 전달에 의해 다음지역의 색을 지정할 뉴런결정에 효율적으로 작용한다. 색 배치 문제를 해결하기 위하여 신경회로망에

서 뉴런간의 연결도를 이용한 알고리즘을 이용하였다. 이 알고리즘을 4색 배치문제에 적용하고 대한민국의 19개 지역, 미국지도의 48개 지역에 대해 해를 구하였다.

II. 신경 회로망의 수학적 모델

인공 신경 회로망의 수학적 모델은 뉴런과 시냅스로 구성된다. 한 뉴런으로부터 전달된 출력 신호는 시냅스 연결을 통하여 다른 뉴런으로 전달된다. 한 뉴런의 입력 신호의 상태는 각각의 가중치가 시냅스연결의 세기가 되는 다른 뉴런으로부터 전달되는 가중된 입력 신호의 선형적인 합에 의해 결정된다. 본 논문에서의 병렬 알고리즘은 MaCulloch-Pitts의 2진 뉴런 모델을 사용한다.

$$U_i = \sum_k W_{ki} V_k \quad (1)$$

식(1)에서 V_k 는 k 번째 뉴런의 출력이고, U_i 는 i 번째 뉴런의 입력이다. W_{ki} 는 k -번째 뉴런으로부터 i -번째 뉴런으로 전달되는 시냅스 연결의 세기이다.

MaCulloch-Pitts의 뉴런 입/출력 함수는 식(2)와 같다.

$$V_i = f(U_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } U_i > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

여기서, V_i 와 U_i 는 각각 i -번째 뉴런의 출력과 입력이다.

Hopfield⁽⁶⁾는 미리 정의된 에너지 함수 E 를 사용하여 안정된 신경망의 산정에너지를 구하였는데 이는 식(3)과 같다.

$$E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_{ij} V_i V_j + \sum_{i=1}^n V_i I_i \quad (3)$$

여기서 G_{ij} 는 i 번째 뉴런과 j -번째 뉴런 사이의 컨덕턴스이며 I_i 는 i -번째 뉴런의 일정값의 바이어스이다.

i-번째 뉴런의 motion 방정식은 식(4)와 같다.

(6)

$$\frac{dU_i}{dt} = \frac{U_i}{\tau} - \frac{\delta E}{\delta V_i} \quad (4)$$

식(4)에서 계산된 ΔU 에 의해 입력 U 는 조정되어 출력 V 가 계산된다. 본 논문의 목적은 ΔU 를 효율적으로 조정함으로써 보다 빠른 방법으로 목적으로 출력 V 행렬을 구하는데 있다.

III. 조정정보전달에 의한 4색 배치 기법

색 배치 작업은 인접지역들을 쉽게 구분하기 위하여 서로 종류가 다른 색으로 색을 지정하는 것이다. 이때 한 지역에 지정되는 색의 수가 다양하다면 문제가 되지 않지만 한정된 종류의 색으로 표현하는 것은 어려운 문제가 된다. 또한 처리할 지역의 수가 많아지면 문제해결에 있어서 더욱 많은 시간을 요하게 된다.

4색 배치 작업의 정의는 4색을 이용하여 한 지역의 색이 지정되었을때 인접한 지역의 색은 같은 색이 배치되지 않도록 하는 것을 원칙으로 한다.

본 알고리즘에서, 4색 배치 문제는 $4 \times n$ 의 2차원 신경 배열에 의해서 구해진다. 여기서 4는 네가지 색을 나타내는 뉴런이고 n 는 착색될 지역의 수이다.

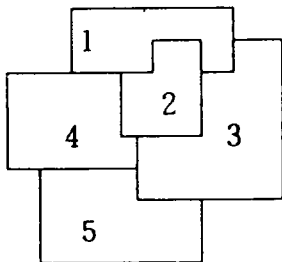


그림1. 다섯 지역의 지도

	1	2	3	4	5
1		1	1	1	
2	1		1	1	
3	1	1		1	1
4	1	1	1		1
5			1	1	

그림2. 지도에 대한 인접 매트릭스

그림1은 4색배치 작업을 해야할 다섯 지역에 대한 예이며, 각 지역에 번호를 지정하였다. 그림2는 다섯 지역들간의 인접 행렬들로서, 각 지역들간의 인접 정보를 나타낸다. 행렬에서 1의 값은 각 지역과 지역이 인접해 있음을 표현한다.

	1	-	-	-	1
	-	1	-	-	-
	-	-	1	-	-
	-	-	-	1	-

그림3. 다섯 지역 지도에 대한 뉴런 표현

그림3은 다섯 지역에 대해 착색작업을 하는데 필요한 4×5 신경 배열이다. 행은 각 지역에 지정된 색이며, 열은 각 지역의 순서이다. 여기서 행렬 값 1은 그 지역에 색이 선정된 것을 나타낸다.

하나의 지역에는 네가지 색을 표현할 수 있는 네개의 뉴런이 있다. 첫 지역의 네개의 뉴런중 하나가 선택되면 나머지 세개는 감쇠시키고 또한 선택된 뉴런의 정보를 인접 뉴런에게 전달하여 인접

한 지역에는 같은 색이 나타나지 못하도록 한다. 먼저 첫번째 지역의 네개의 뉴런중 출력값이 가장 큰 뉴런을 추출하고 나머지 세개의 뉴런은 음의 값을 갖도록 하여 우선 첫번째 지역의 색을 결정한다. 이때 첫번째 뉴런은 양의 값을 갖게 되고 나머지 세개의 뉴런은 음의 값을 갖게 된다. 1번 지역의 첫번째 뉴런이 선택되었으므로 1번 지역과 연결한 2번, 3번, 4번지역의 첫번째 뉴런은 조정정보 전달로 그 다음 선택에서 제외 되는 정보를 전달받게 된다. 그 다음의 2번 지역에서는 4개의 뉴런중 첫번째 뉴런을 제외한 나머지 3개의 뉴런중에서 색 지정이 되는 뉴런이 선택되고 같은 방법으로 3, 4, 5번 지역의 뉴런이 결정이 되면 다섯 지역의 4색배치 작업은 끝난다.

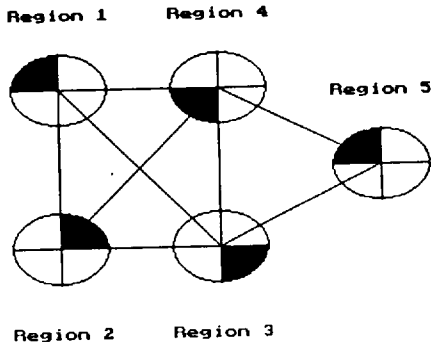


그림4. 다섯 지역의 뉴런 결선도

그림4는 다섯 지역의 뉴런배열모델이다. 각 지역들간의 결선은 인접여부에 따라 인접지역일 경우에만 결선되므로서 인접정보를 나타내었다. 각지역의 뉴런에서 좌측 상단의 뉴런이 1번색, 우측상단이 2번색, 좌측하단이 3번색, 우측하단이 4번색이면 색이 지정된 뉴런을 표시하였다. 그림 5는 4색 배치가 완료된 상태이다.

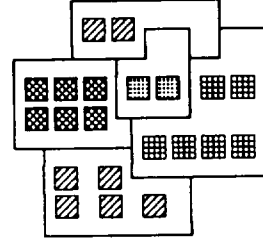


그림5. 4색 배치된 지도

IV. 알고리즘 및 시스템 순서도

1. 알고리즘

본 논문에서 제시된 4색 배치 문제에 대한 알고리즘은 다음과 같다.

[과정 1] 작업할 지역의 수는 n 이며 이를 변수 x 로 표시하고, 각 지역의 뉴런은 변수 i 로 표시 한다.

[과정 2] 인접 지역에 대한 정보를 d 행렬로 정의한다. 즉 $d(x, x)$ 의 인접행렬이 산출된다. 시스템에서는 그림 4와 같이 뉴런들간의 결선으로 인접정보는 결정된다.

[과정 3] $x=1, \dots, n, i=1, \dots, 4$ 인 곳에서 $U_{xi}(t)$ 의 초기값은 임의의 양의 값으로 한다.

[과정 4] x 번째 지역의 색을 정하기 위하여 U_{xi} 에서 4개의 뉴런중 최대치를 선택하고 나머지 값은 음의 값으로 보정 한다.

[과정 5] $x=x+1, \dots, n, i=1, \dots, 4$ 에 대해 인접 지역일 경우 인접뉴런의 i 번째 색의 U_{xi} 의 값을 음으로 보정 한다.

[과정 6] $x=1, \dots, n, i=1, \dots, 4$ 에 대해 V_{xi}
(t)의 값을 연산한다.

$$V_{xi}(t) = f(U_{xi}(t)) = \begin{cases} 1, & \text{if } U_{xi} > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

[과정 7] $x < n$ 이면 x 를 1씩 증가시키면서 과정 4로 가고 $x=n$ 일 때 모든 작업은 종료된다.

2. 순서도

본 알고리즘의 유용성을 입증하기 위하여 IBM PC 486DX상에서 C언어를 사용, 프로그래밍하여 이를 19개 지역의 대한민국 지도와 48개지역의 미국 지도에 적용하여 그 결과를 보였다. 이 시스템의 순서도는 그림 6과 같다.

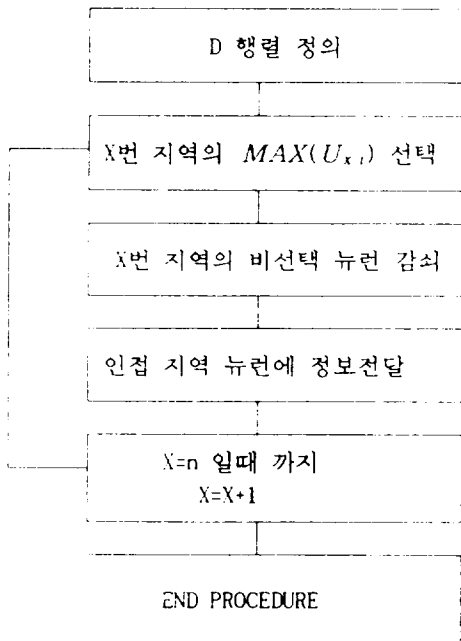


그림6. 시스템 순서도

V. 시뮬레이션 결과

1. 대한민국 지도의 19개 지역에 대한 4색 배치 문제

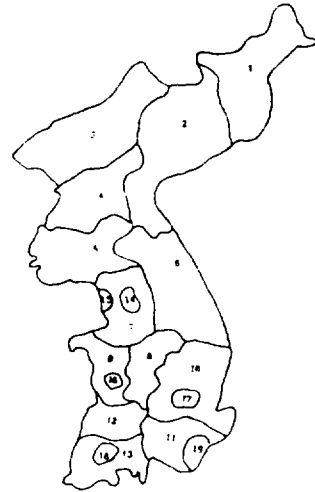


그림7. 19개-지역을 갖는 대한민국 지도

$D(X, X)$

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

그림8. 입력형태 : 인접정도행렬

그림7은 행정 구역이 19개로 구성된 대한민국 지도이고 그림8은 그림7에 대한 인접 지역에 대한 정보를 행렬화 한 것이다.

$$V(i, X) = \begin{pmatrix} 100001001010000000 \\ 010000100100100000 \\ 000100000010101000 \\ 0010100100000010111 \end{pmatrix}$$

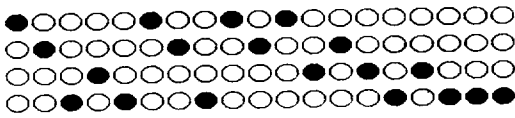


그림9. 대한민국 지도의 4색 배치 문제에 대한 해.

그림9는 그림 8과 같은 정보를 가지고 본 논문의 알고리즘을 이용하여 4색배치작업을 한 결과를 나타낸 그림이다. 여기서 행은 색을 나타내고 열은 지역번호이다.

2. 미국의 48개주 지도 문제

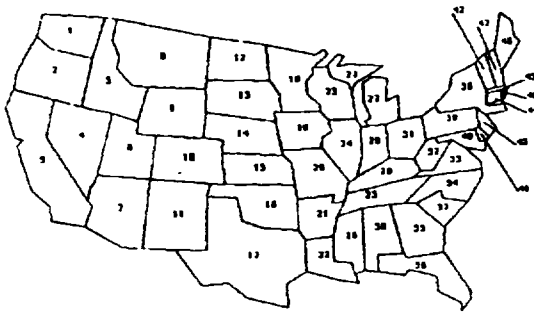


그림10. 미국의 48개주 지도 문제

$D(X, X)$

```
010010000000000000000000000000000000000000000000
10111000000000000000000000000000000000000000000
01010010000000000000000000000000000000000000000
01101110000000000000000000000000000000000000000
11010101000000000000000000000000000000000000000
00011010110000000000000000000000000000000000000
00110100001000000000000000000000000000000000000
00001000100110000000000000000000000000000000000
00001101010011000000000000000000000000000000000
00001001010011000000000000000000000000000000000
00000100100001100000000000000000000000000000000
00000010000100001000000000000000000000000000000
00000001100101000110000000000000000000000000000
00000001100101000110000000000000000000000000000
00000000100010100011000000000000000000000000000
00000000100010100010000000000000000000000000000
00000000010001010011000000000000000000000000000
00000000001000010001000000000000000000000000000
00000000000100001001000000000000000000000000000
00000000000010000100100000000000000000000000000
00000000000001000010011000000000000000000000000
00000000000000100010001000000000000000000000000
00000000000000010000001000000000000000000000000
00000000000000001000000000000000000000000000000
00000000000000000100000000000000000000000000000
00000000000000000010000000000000000000000000000
00000000000000000001000000000000000000000000000
00000000000000000000100000000000000000000000000
00000000000000000000010000000000000000000000000
00000000000000000000001000000000000000000000000
00000000000000000000000100000000000000000000000
00000000000000000000000010000000000000000000000
00000000000000000000000001000000000000000000000
00000000000000000000000000100000000000000000000
00000000000000000000000000010000000000000000000
00000000000000000000000000001000000000000000000
00000000000000000000000000000100000000000000000
00000000000000000000000000000010000000000000000
00000000000000000000000000000001000000000000000
00000000000000000000000000000000100000000000000
00000000000000000000000000000000010000000000000
00000000000000000000000000000000001000000000000
00000000000000000000000000000000000100000000000
00000000000000000000000000000000000010000000000
00000000000000000000000000000000000001000000000
00000000000000000000000000000000000000100000000
00000000000000000000000000000000000000010000000
```

그림11. 미국의 48개주 지도 문제의 인접정보 행렬

$$V(i, X) = \begin{pmatrix} 000010000101000000100000101010000001010000 \\ 1010010100100100010010010010100001010000110 \\ 00010000000010101000001010010000000110001000 \\ 0100001010000001001001000001000000000000001 \\ 0010 \end{pmatrix}$$



그림12. 미국의 48개주 지도 문제에 대한 해

그림10은 48개주의 주를 가진 미국 지도이며 미국의 48개주 지도 문제의 인접정보행렬이 그림11과 같으며 지도에 대한 4색 배치작업을 한 때는 그림12와 같이 나타나 이 시스템의 성능을 보였다.

VI. 결 론

본 논문에서는 4색 배치 문제해결 알고리즘으로 이진 뉴런에 기초하여 신경회로망에서 뉴런들간의 조정정보 전달에 의해 인접뉴런의 출력을 조정하고 결선도를 이용하여 해를 구하는 효율적인 방법을 제시하였다. 해를 구하는 방법에서 선택된 지역의 뉴런에 해당되는 인접지역의 뉴런은 선택에서 제외시켰으며 조정된 정보전달에 의한 4색 배치문제를 해결하였다. 그리고, 이를 프로그래밍화 하여 대한민국 행정지도 및 미국지역에 적용하여 본 알고리즘에 유용성을 검증하였다.

앞으로의 연구과제는 신경망의 기본연산에 적용될 보다 효율적인 알고리즘 생성과 신경망의 구현 및 더 많은 지역에 대한 효율적인 문제해결 알고리즘을 연구하는 것이다. 또한 단순하고 반복적인 처리는 신경망에 의존하면서도 복잡한 수치계산부분은 순차 컴퓨터에 의해 해결을 요구하는 보다 효율적인 알고리즘에 대한 연구이다.

* 참 고 문 헌

- [1] W. S. McCulloch and W. H. Pitts, "A logical calculus of ideas imminent in nervous activity," Bull. Math. Biophys., vol. 5, 1943.
- [2] K. Apple and W. Haken, "The solution of the four-color-map problem," Scientific American, pp. 108-121, Oct. 1977.
- [3] E. D. dahi, "Neural network algorithm for an NP-Complete problem : Map and graph coloring," in Proc. First Int. Conf. on Neural Network, vol. III, pp. 113-120, 1987.
- [4] A. Moopenn et al., "A neurocomputer based on an analog-digital hybrid architecture," in Proc. First Int. Conf. Neural Networks, vol. III, pp. 479-486, 1987.
- [5] A. P. Thakoor et al., "Electronic hardware implementations of neural networks," Appl. Oct., vol 26, pp. 5058-5092, 1987.
- [6] J. J. Hopfield and D. W. Tank, "Neural computation of decisions in optimization problems," Bio. Cybern., vol. 52, 141-152, 1985.
- [7] Yoshiyasu Takefuji and Kuo Chun Lee, "Artificial Neural Networks for Four-Coloring Map Problems and K-Colorability Problem," IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 38, pp 326-333, March 1991.