

사영필터이론을 이용한 트러스 구조물의 손상 검출

서 일 교* · 임 은 지** · 은 회 창*

Damage Detection of Truss Structures Using Projection Filter Theory

Ill-Gyo Suh*, Eun-Ji RIM** and Hee-Chang Eun*

ABSTRACT

In this paper, a study of damage detection for 2-D truss structures using the Projection filter theory is presented. Many researchers are interested in inverse problems and one of solution procedures for inverse problems that are very effective is the approach using the filtering algorithm in conjunction with numerical solution methods. In filtering algorithms, the Kalman filtering algorithm is well known and have been applied to many kind of inverse problems. In this paper, the Projection filtering in conjunction with structural analysis is applied to the identification of damages in 2-D truss structures. The natural frequencies and modes of damaged truss model are adopted as the measurement data. The effectiveness of proposed method is verified through the numerical example.

Key Words : Projection filter, 2-D truss structure, inverse problem, identification

1. 서 론

최근 들어 내구성과 안전성의 측면에서 기존 구조물의 내구연한을 합리적으로 예측할 필요성이 인식됨에 따라 유지, 보수 및 교체 등을 위해 구조물의 손상위치를 추정하고, 손상정도를 평가하는 방법을 개발하는 것이 중요한 과제가 되고 있다. 이러한 기존 구조물 내부의 손상부 추정 등을 수행하는데 역문제

(inverse problem)의 해석은 매우 유용하여 최근 많은 관심을 끌고 있다[1,2].

이러한 역문제 해석법으로서 지금까지는 구하고자 하는 미지 파라메타를 유한개의 파라메타로 근사 표현하고 관측데이터나 설계사양과 가정한 파라메타에 대한 순해석에서 얻어진 값과의 오차가 최소로 되는 파라메타를 반복계산에 의해 구하는 방법이 주로 이용되어 왔다[3,4]. 그러나 이러한 방법은 관측데이터와 시스템의 잡음을 제대로 고려할 수 없는 단점이 있다.

한편 역문제를 풀 때 필요한 보조 정보량은 일반적으로 random noise를 포함하고 있는 관측량(계측량)으로서 주어지는 경우가 많기 때문에 확률적으로 취급할 필요가 있다. 여기서 역문제를 확률 dynamic

* 제주대학교 건축공학과, 첨단기술연구소
Dept. of Architectural Engineering, Research Institute of Advanced Technology, Cheju Nat'l Univ.

** 제주대학교 대학원
Graduate School, Cheju Nat'l Univ.

system으로서 수리 모델화하는 경우 추정. 동정기법으로서 시스템과 제어분야 뿐만이 아니라 많은 분야에서 응용되고 있는 필터이론을 적용할 수 있다[5.6].

역문제 해석에서 지금까지 필터 이론은 많은 관심을 받아왔고 또한 다양한 문제에 적용되어 그 유효성을 보여왔다. 특히 칼만(Kalman)필터[7]는 다양한 분야에서 적용되어 왔으며 저자 또한 구조물의 손상 추정에 대해 칼만필터를 적용하여 그 유효성을 입증해 왔다. 그러나 트러스 구조물과 같이 많은 부재로 이루어지는 경우 등 많은 문제에서 수렴속도가 늦은 문제점이 지적되었다[8.9].

따라서 본 논문에서는 화상복원 문제 등 많은 역문제에서 그 효용성을 인정받고 있는 사영(projection) 필터[10]를 비선형 시스템에 대한 필터로 확장하여 구조물의 손상추정에 적용하여 보다 효율적이고 정밀한 해석이 가능한 역해석법의 개발을 목표로 한다. 대상 역문제로서 2차원 트러스 구조의 자유진동문제를 대상으로 하고 자유진동 시 관측된 고유 진동수와 고유 모드를 관측 데이터로 채택하여 손상부재의 위치를 찾고 손상정도를 추정한다. 마지막으로 수치해석 예를 통하여 제안된 해석법의 유효성을 밝힌다.

II. 확장 사영 필터 이론

확장 사영(Extended projection) 필터 이론은 선형 시스템을 대상으로 하는 사영 필터 이론을 비선형 시스템에 적용시킨 필터 이론이며, 비선형 벡터함수를 상태벡터의 추정량의 주위에서 테일러(Taylor) 전개하고 고차항을 무시하여 선형화시킨 다음의 이산시간 확률시스템을 대상으로 한다.

상태방정식

$$z_{t+1} = \Phi_t z_t + \Gamma_t \omega_t \quad (1)$$

관측방정식

$$y_t = M_t z_t + \nu_t \quad t \geq 0 \quad (2)$$

여기서 z_t , y_t , ω_t , ν_t 는 각각 t 시간 스텝에서의 상태벡터, 관측벡터, 시스템 잡음벡터 및 관측 잡음벡터

이고, Φ_t 는 상태 遷移행렬(state transition matrix).

Γ_t 는 구동행렬 (driving matrix), M_t 는 관측행렬 (observation matrix)이라 한다. 여기서 z_t , y_t , ω_t , ν_t 는 확률변수 벡터이고, Φ_t , Γ_t , M_t 는 기지의 확정행렬로 한다. 또한 확률변수 벡터의 통계적 성질을 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} E\{z_0\} &= \bar{z}_0, \quad E\{\omega_t\} = E\{\nu_t\} = 0, \\ E\{(z_0 - \bar{z}_0)(z_0 - \bar{z}_0)^T\} &= R_0 \\ E\left\{\begin{pmatrix} \omega_t \\ \nu_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_t & \nu_t \end{pmatrix}\right\} &= \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \delta_{tt} \quad (3) \\ E\{\omega_t, z_0^T\} &= E\{\nu_t, z_t^T\} = 0 \quad (t \geq 1) \end{aligned}$$

여기서, E는 기대치 연산기호, δ_{tt} 은 kronecker 델타이며 z_0 는 상태벡터 z_t 의 초기치벡터, S, Q, R_0 는 각각 시스템잡음 공분산행렬, 관측잡음 공분산행렬 및 추정오차 공분산행렬을 나타낸다.

이상의 선형화된 이산시간 확률시스템에 대한 확장 사영 필터는 다음과 같다.

<필터방정식>

$$\hat{z}_{t|t} = \hat{z}_{t|t-1} + B_t \{y_t - M_t \hat{z}_{t|t-1}\} \quad (4)$$

$$\hat{z}_{t+1|t} = \Phi_t \hat{z}_{t|t} \quad (5)$$

<Filter Gain>

$$B_t = (M_t^T Q_t^{-1} M_t)^{-1} M_t^T Q_t^{-1} \quad (6)$$

<추정오차의 공분산 행렬방정식>

$$\begin{aligned} \hat{R}_{t|t} &= \hat{R}_{t|t-1} + B_t (M_t \hat{R}_{t|t-1} M_t^T + Q_t) B_t^T \\ &\quad - B_t M_t \hat{R}_{t|t-1} - \hat{R}_{t|t-1} M_t^T B_t^T \quad (7) \end{aligned}$$

$$\hat{R}_{t+1|t} = \Phi_t \hat{R}_{t|t} \Phi_t^T + \Gamma_t S_t \Gamma_t^T \quad (8)$$

<초기치>

$$\hat{z}_{0|-1} = \bar{z}_0 \quad (9)$$

$$\hat{R}_{0|-1} = R_0 \quad (10)$$

여기서, $\hat{z}_{t|t}$ 는 t 스텝에서의 관측벡터 y_t 에 의해

얻어지는 z_t 의 추정치이고, $\hat{R}_{t|t}$ 는 $\hat{z}_{t|t}$ 의 추정오차 공분산행렬이다. 여기서 식 (6)에서 알 수 있듯이 사영 필터에서는 칼만 필터에서와 달리 filter gain에서 공분산 행렬 $\hat{R}_{t|t}$ 가 포함되어 있지 않다.

III. 사영 필터를 이용한 손상추정법

3.1. 상태방정식 및 관측방정식

사영 필터 알고리즘을 적용하면 구조물의 손상 추정을 위한 관측데이터를 다양하게 선택할 수 있다. 본 논문에서는 구조물의 손상전과 손상후의 진동특성의 변화를 이용하여 손상을 추정한다. 따라서 트러스 구조물의 자유진동에 의해 얻어지는 고유진동수와 모드 형상 진폭을 관측데이터로 채택하고, 구조물내의 각 부재의 손상을 강성의 저하로서 평가한다. n개의 부재로 구성되는 트러스 구조물의 각 부재의 강성 (K_1, K_2, \dots, K_n)을 미지의 상태벡터 z 로 하면 관측데이터인 고유진동수 및 모드 진폭과 미지량인 강성의 관계는 비선형이기 때문에 시스템은 다음과 같이 모델화 할 수 있다.

$$y = m(z) + \nu \quad (11)$$

여기서, y 는 관측벡터로서 고유진동수 및 모드 진폭 벡터를, ν 는 관측잡음 벡터를 나타낸다. 또한 상태량 즉 부재의 강성은 정수이어서 시간적으로 변화하지 않는 파라미터이기 때문에 시간적 遷移構造를 갖지 않게 된다. 따라서 시스템 잡음 ω_t 는 고려할 필요가 없으므로 시스템의 상태방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$z_{t+1} = I z_t \quad (12)$$

여기서 아래첨자 t는 반복계산에서 각 스텝을 나타내며, I 는 단위행렬이다. 또 시스템의 관측방정식 (11)에서 $m(z)$ 는 z 에 관한 비선형 함수이며 여기서는 구조물의 고유진동수 및 모드 진폭을 나타낸다. 따라서 식(12)에서 주어진 각 스텝에서의 상태벡터로

부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y_t = m_t(z_t) + \nu, \quad t : \text{필터링 횟수} \quad (13)$$

또한 초기치 \bar{z}_0 , 추정오차 공분산 매트릭스 R_0 는 일반적으로 모르기 때문에 초기치를 가정하여 계산한다. 따라서 얻어지는 추정치는 식 (4), (5)에서 알 수 있듯이 칼만 필터를 이용한 알고리즘에서는 \bar{z}_0 와 R_0 에 의존하게 되나 사영 필터를 이용한 알고리즘에서는 \bar{z}_0 에만 의존하게 된다.

3.2. 감도행렬의 계산

선형화에 대응하는 감도행렬 M_t 는 다음과 같다.

$$M_t = \left(\frac{\partial m_t(z_t)}{\partial z_t} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial y_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial z_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial y_2}{\partial z_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial y_m}{\partial z_1}, & \frac{\partial y_m}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial y_m}{\partial z_n} \end{bmatrix} \quad (14)$$

식(14)는 각 스텝의 z_t 에 의존하기 때문에 필터링 과정에서 반복 계산되어야 한다. 본 논문에서는 감도행렬의 성분을 다음과 같이 차분근사에 의해 구하였다.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial y_i}{\partial z_j} \right)_{t|t-1} \\ & \cong \frac{1}{\Delta z_j} \{ y_i(z_1, z_2, \dots, z_j + \Delta z_j, \dots, z_n) \\ & \quad - y_i(z_1, z_2, \dots, z_j, \dots, z_n) \} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $z_j (j=1 \sim n)$ 는 미지의 상태벡터 z 의 성분을 나타낸다.

3.3. 확장 사영 필터를 이용한 해석 알고리즘

확장 사영 필터를 비선형 역문제의 반복계산과정에 이용할 때의 해석순서는 다음과 같다.

(1) 추정할 미지량의 초기치벡터 \bar{z}_0 와 추정오차

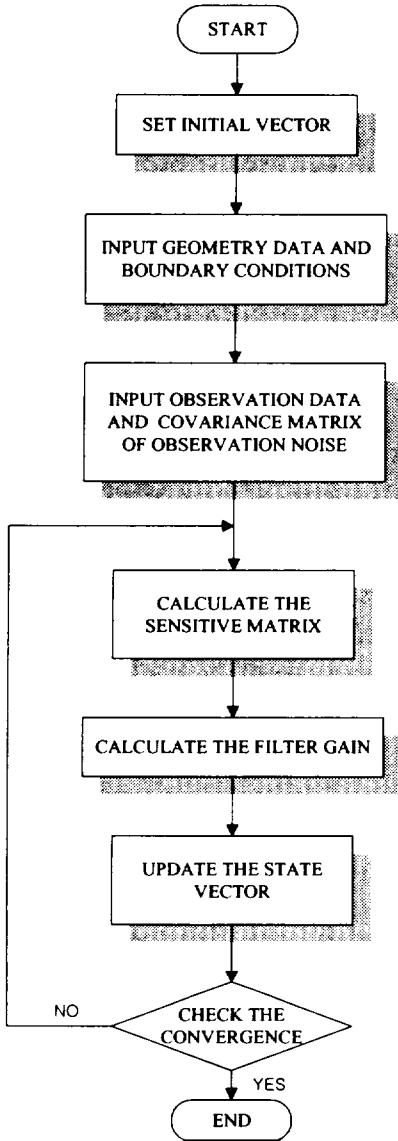


Fig. 1. Flow of computation by projection filter.

공분산매트릭스 R_0 를 가정하여 초기 확률 분포를 설정한다.

(2) 트러스 자유진동문제 해석에 필요한 데이터와 경계조건 등을 설정한다.

(3) 관측데이터 y 를 입력하고 거기에 포함되는 관측잡음에 관한 관측잡음 공분산매트릭스 Q 를 설정한다.

(4) 필터링과정에서 반복해서 갱신되는 추정치 $\hat{z}_{i/i-1}$ 을 이용하여 구조물의 고유 진동수 y_i 를 계산하고 또한 감도 매트릭스 M_i 를 계산한다.

(5) 미지량에 대해 Filter gain B_i 를 계산한다.

(6) 필터 방정식으로부터 갱신량 $\hat{z}_{i+1/i}$ 를 계산한다.

(7) 수렴판정을 하고, 수렴하지 않는 경우는 스텝 (4)로 돌아간다.

이상의 계산을 수렴조건에 만족할 때까지 반복 계산한다 (Fig. 1 참조).

IV. 수치해석 예

여기서는 Fig. 2에 나타낸 5개의 절점과 7개의 부재로 구성된 2차원 트러스 구조물의 손상 추정 문제를 수치해석 예로 다룬다. 이 수치해석 모델에서 단면적 $A = 10\text{cm}^2$, 영계수 $E = 0.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$, 밀도 $\rho = 0.00787$ 이다.

관측 데이터는 일반적으로 구조물의 진동을 모니터링해서 얻은 계측 데이터를 사용해야 하나 본 논문에서는 순해석에 의한 수치해를 측정 데이터로 사용하였다. 관측 데이터로서 고유진동수는 1차에서 6차까지의 6개의 고유진동수를 채택하였다.

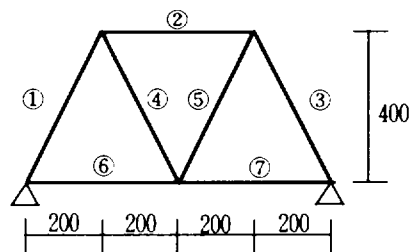


Fig. 2. Truss model.

수치해석 예제에서 Table 1에서와 같이 4가지 손상 상태를 가정하였다. CASE-1 ~ CASE-3은 단일부재 손상인 경우로서 각각 부재 번호 ②, ④, ⑥번의 부재가 50% 손상되었을 경우이고 CASE-4는 복수 부재 손상인 경우로서 부재 ②, ④가 동시에 50%씩 손상되었을 경우에 해당한다. 또한 Table 2는 CASE-1

~ CASE-4의 경우에서 부재 손상에 따른 고유 진동수의 변화와 손상되기 전의 고유 진동수를 나타낸다.

Table 1. Assumed damage rate

Damaged Member \ CASE	Member 2	Member 4	Member 6
CASE 1	50%	0	0
CASE 2	0	50%	0
CASE 3	0	0	50%
CASE 4	50%	50%	0

Table 2-1. Change of natural frequencies

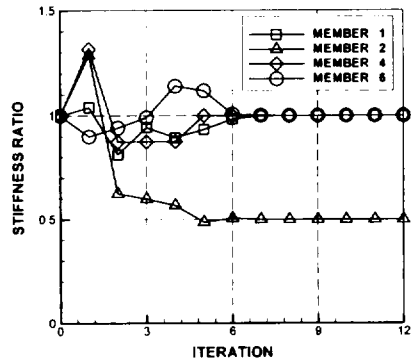
CASES \ MODE	Undamaged	CASE-1 (member 2)	CASE-2 (member 4)
1st	26.8378	24.6255	24.3335
2nd	28.3164	28.3164	27.2721
3rd	52.2663	53.2663	52.4095
4th	82.4867	77.6263	73.9276
5th	90.5185	82.4867	88.0465
6th	132.5595	119.1201	125.1420

Table 2-2. Change of natural frequencies

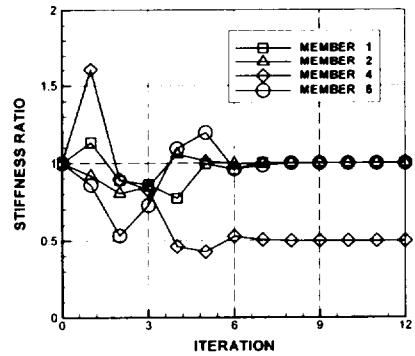
CASES \ MODE	CASE-3 (member 6)	CASE-4 (member 2&4)
1st	26.8378	24.6255
2nd	28.3164	28.3164
3rd	52.2663	53.2663
4th	82.4867	77.6263
5th	90.5185	82.4867
6th	132.5595	119.1201

먼저 확률분포로는 측정에 동반하는 잡음의 영향을 고려하기 위하여 관측잡음으로서 관측데이터의 30%를 표준편차로 하는 분포로 가정하고 상태량의 초기치로서는 정상시의 감성으로 하였다. 또한 감도행렬 계산을 위한 초기치로서는 정상시의 30%의 손상을 가정하였다.

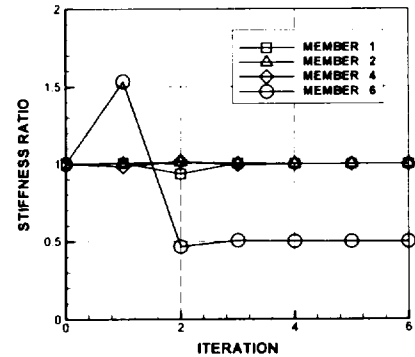
Fig. 3 (a) ~ (c) 는 CASE-1 ~ CASE-3의 단일 부재 손상인 경우의 손상추정 결과를 나타낸다. 또한



(a) Damage of member 2



(b) Damage of member 4



(c) Damage of member 6

Fig. 3. Damage identification of single member with 50% degradation of stiffness.

Fig. 4는 CASE-4의 복수 부재 손상인 경우의 손상추정 결과이다. 여기서 X축은 반복계산 수이고 Y축

은 손상 전에 대한 손상 후의 강성의 비를 나타낸다. Fig. 3과 4에서 관측 데이터로서 고유 진동수 만으로도 좋은 결과를 얻을 수 있었다. 단일 부재인 경우 뿐만 아니라 복수 부재 손상인 경우도 수렴속도가 빠르며 안정된 수렴성을 나타내었다.

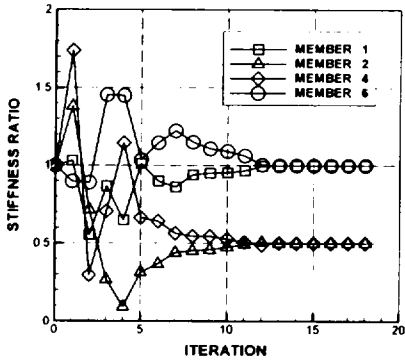


Fig. 4. Damage identification of 2 members with 50% degradation of stiffness

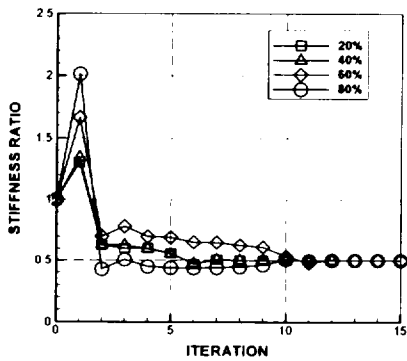


Fig. 5. Effect of initial stiffness.

Fig. 5는 초기치에 따른 해의 거동을 나타낸 것으로서 초기 손상을 정상 상태의 20%, 40%, 60%, 80%로 하였을 때의 결과이다. Fig. 5에서 알 수 있듯이 초기 가장 손상이 40% 이하일 때 그 이상인 경우에 비하여 해의 수렴속도 및 정도가 좋음을 알 수 있다.

Fig. 6은 CASE-1에서 확장 칼만 필터를 이용한 경우와 확장 사영 필터를 이용한 경우의 해의 비교를 나타낸 것이다. Fig. 6에서 알 수 있듯이 이 경우 칼만 필터를 이용한 경우는 그 수렴 속도가 매우 느리

나 사영 필터를 이용한 경우는 해의 수렴성이 안정되고 속도도 매우 빠른 것을 알 수 있다.

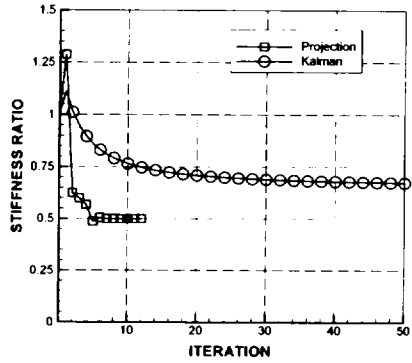


Fig. 6. Convergence of solutions by projection and Kalman filters.

V. 결론

본 논문에서는 사영 필터를 비선형 시스템에 대한 필터로 확장한 확장 사영 필터를 적용하여 구조물의 손상 추정을 위한 역해석법을 제안하였다. 먼저 선형 시스템에 대한 사영 필터에서 비선형 시스템에 대한 확장 사영 필터를 유도하였고 사영 필터를 이용한 손상 추정 역해석법 알고리즘을 제시하였다. 제안 해법의 유효성을 보이기 위하여 2차원 트러스 구조의 자유진동문제를 대상으로 하여 해석 예를 보였다. 수치 해석에서 부재 손상도를 부재 강성의 저하로 평가하였고 따라서 상태량으로서 부재강성을 채택하였다. 또한 손상 전후의 구조물의 진동 특성의 변화를 이용하여 관측 데이터로서 구조물의 고유 진동수를 채택하였다.

2차원 트러스 모델에 대하여 제안해법을 적용한 결과, 단일부재 손상인 경우 뿐만 아니라 복수개의 부재 손상인 경우도 손상 위치 및 손상 정도를 정도가 좋게 추정할 수 있었다. 또한 칼만 필터를 이용한 결과와 비교한 결과 사영 필터에 의한 해의 수렴 속도가 매우 빠른 결과를 보였다.

본 연구는 2차원 트러스 구조에 대한 결과만을 다루었으나 추후 3차원 구조물에 대한 적용성과 함께

다양한 관측 데이터의 적용에 따른 해의 거동에 대한 연구가 필요할 것으로 사료된다.

참고문헌

- 1) 登坂宣好, 1994, 逆問題入門, 有限要素法の基礎, 朝倉書店
- 2) Groetsh, C.W., 1996, 數理科學における逆問題, 數理科學, 사이エンス社
- 3) Agbabian, M.S., Masri, S.F., Miller, R.K. and Caughey, T.K., 1991, *System identification approach to detection of structural changes*, J. Engineering Mechanics, Vol.117, No.2, pp.215-227
- 4) 近藤一平, 濱本卓司, 1992, 既存構造物の局所損傷の同定に關して, 構造工學論文集, Vol. 38B, pp.189-199
- 5) 片山 徹, 1983, 應用カルマンフィルタ, 朝倉書店
- 6) Brown, R.G. and Hwang, Patrick Y.C., 1997, *Introduction to random signals and applied kalman filtering*, John wiley and sons, New York.
- 7) Kalman, R.E., 1960, *A new approach to linear filtering and prediction problems*, Trans. ASME, *J. Basic Eng.*, 82D-1, p.34
- 8) 서일교, 1999, 확장 칼만 필터를 이용한 2차원 트러스 구조물의 손상 추정, 대한건축학회 논문집, 제15권 4호, pp.3-12
- 9) 유숙경, 서일교, 권택진, 2002, 확장 칼만 필터를 이용한 3차원 트러스 구조물의 2단계 손상 추정법, 한국공간구조공학회 논문집, 제2권 제1호, pp.343-349
- 10) 小川英光 原昌 司, 1988, 部分射影filterによる畫像復元, 電子情報通信學會論文誌(A), J71-A, 2, pp. 510-526