濟州大學校 産業技術硏究所 論文集, 第12卷, 1號, pp.99-105, 2001. 6
Cheju Nat'l Univ. Res. Insti. Ind. Tech. Jour., Vol.12, No.1, pp.99-105, 2001. 6

궤환성을 갖는 신경회로망의 수렴조건

강 민 제*

Global Convergence of Feedback Neural Networks

Min-Je Kang*

ABSTRACT

This paper discusses the influence of input conductance on the convergece of the continuous feedback neural networks. The convergence has been analyzed for the input and output nodes of neurons. Also, the characteristics of equilibrium points has been analyzed depending on different values of the input conductance.

Key words : Convergence, hopfield, neural networks, input conductance, equilibrium point.

Ⅰ. 서 론

시그모이드 형태의 특성곡선을 갖는 다수의 뉴런들이 연결된 호프필드 신경망은 시간이 지남에 따라 계산에너지 함수가 감소하는 방향으로 수렴하며, 이런 계산에너지함수는 Lyapunov함수라 알려져 있다.[1,2]

호프필드 신경회로망이 발표된 이 후로 많은 분야, 즉 연상기억장치, 패턴인식, 그리고 최적화문제 등에 이용되고 있다. 그런데, 이러한 응용회로를 하드웨어로 구성함에 있어서 자주 봉착하는 문제가 있는 데, 그 것은 뉴런의 입력단과 접지 사이에 캐패시터와 병렬로 연결된 컨덕턴스의 값을 결정하는 일이라 할 수 있다. 왜냐하면, 이 값은 단지 시스템의 안정도와 수렴시간에 부분적으로 영향을 끼친다는 정도로 언급이 되어있을 뿐 자세히 알려져 있는 것이 없기 때문이다. 그러나 회로레벨의 시뮬레이션을 해보면 이 컨덕턴스는 시스템의 성능에도 상당한 영향을 미칠 뿐만 아니라, 시스템의 수렴 여부에도 영향을 미침을 알 수 있다. 여기에서는 이 컨덕턴스가 시스템의 수렴에 어떠한 영향을 미치는 가에 대한 분석을 하려한다.

즉, 궤환성을 갖는 신경망은 시간이 지남에 따라 항상 계산에너지 함수를 감소시키는 방향으로 수렴한다고 하며, 고로 시스템은 항상 안정하다고 할 수 있는 데, 왜 시뮬레이션 도중 수렴문제로 인하여 에러를 유발하는 지에 대해 분석하려 한다. 이 논문에서는 뉴런의 입력단과 출력단에서 수렴성 여부, 그리고 수렴점의 특성에 대해 분석하고자 한다.

Fig. 1은 궤환성을 갖는 신경회로망의 전기적 모델을 보여준다. 뉴런의 입력단에서 세운 KCL(Kirchhoff Current Law)을 이용하면 다음의 식을 얻을 수 있다.[3]

$$c_i \frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} v_j + i_i - \left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} + g_i \right) u_i, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (1)$$

* 제주대학교 전기전자공학부, 산업기술연구소
Faculty of Electrical & Electronic Engineering, Res. Insti. Ind. Tech., Cheju Nat'l Univ.

c_i는 i번째 뉴런의 입력단과 접지 사이에 연결된 캐패시턴스를 나타내고, g_i는 이 캐패시터와 병렬로 연결된 컨덕턴스를 나타낸다. 컨덕턴스 w_{ij}는 j번째 뉴런의 출력과 i번째 뉴런의 입력을 연결하는 연결강도를 나타내고, 전류 i_i는 i번째 뉴런의 외부 바이어스 전류를 나타낸다. 그리고, 뉴런의 출력은 매핑함수로 주로 다음과 같은 시그모이드 함수가 주로 쓰인다.

$$f(u_i)=\frac{1}{1+e^{-\lambda u_i}} \tag{2}$$

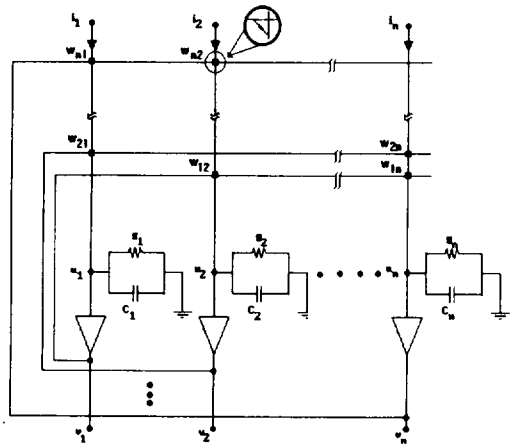

Fig. 1. The Electrical model of Continuous type Hopfield Neural networks.

i번째 뉴런의 입력단에 연결된 전체 컨덕턴스를 G_i로 다음과 같이 나타내면

$$G_i=\sum_{j=1}^{n} w_{ij}+g_i \tag{3}$$

식(1)을 단수의 상태방정식 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$c_i\frac{du_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} w_{ij}v_j+i_i-G_iu_i,\quad i=1,\ldots,n \tag{4}$$

호프필드는 1984년에 다음과 같은 에너지함수를 발표하였다.[3]

$$E(v)=-\frac{1}{2}v^twv\ -i^tv+G\int_{0.5}^{v} f^{-1}(z)dz \tag{5}$$

II. 입력단의 수렴성 분석

뉴런의 입력단과 접지 사이에 캐패시터와 병렬로 연결된 컨덕턴스 g_i는 시스템의 안정도와 수렴의 속도에 부분적으로 기여하는 정도로 알려져 있다. 그러나, 회로레벨의 시뮬레이션을 해보면 이 컨덕턴스의 값에 따라 시스템의 수행성능에 많은 영향을 미치며, 또한 수렴에도 문제를 일으켜 시뮬레이션도중 에러가 발생하는 경우를 빈번히 겪어왔다. 이 장에서는 입력단의 컨덕턴스가 어떻게 입력단의 수렴성 여부에 영향을 미치는 가에 대해 분석 하려한다.

정리 1: 연속성 호프필드 신경회로망에서 입력단의 수렴성에 관한 다음 사항들은 사실이다:

(1) 만약 $G_i > 0$ 이면, 뉴런의 입력단은 지수함수적으로 수렴한다.

(2) 만약 $G_i = 0$, 뉴런의 입력단은 선형적으로 발산한다.

(3) 만약 $G_i \le 0$, 이면, 뉴런의 입력단은 지수함수적으로 발산한다.

증명 (1.1):

i번째 뉴런의 입력단으로 들어오는 전체전류를 표시하면

$$I_i=i_i+\sum_{j=1}^{n} w_{ij}v_j \tag{6}$$

여기서 i_i 는 외부 입력전류이다.

Fig. 2는 i번째 뉴런의 입력단에서 본 등가회로를 나타낸다. 식 (4)는 식 (6)을 이용하여 다음과 같은 상태방정식으로 간략히 표현할 수 있다.

$$C_i\frac{du_i}{dt}=-G_iu_i+I_i \tag{7}$$

호프필드 신경회로망의 출력은 시간이 지남에 따

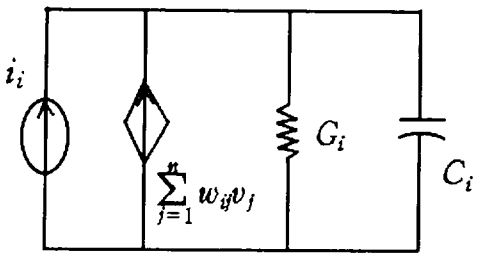

Fig. 2. The Equivalent circuit seen from input node I.

라 에너지 함수를 감소시키면서 점근적으로 안정되게 수렴해간다. 따라서 일정한 시간이 지난 후 출력은 안정되므로 궤환되어 오는 전류 $\sum_{j=1}^{n} w_{ij}v_j$는 상수로 취급할 수 있다. 따라서 출력이 안정된 후에는 $\sum_{j=1}^{n} w_{ij}v_j$도 상수로 간주할 수 있고, 또한 외부 입력 전류 i_i도 상수이므로, 전체 전류 I_i는 상수로 취급할 수 있다.

식 (7)은 다음과 같이 행렬 형태로 표시될 수 있다.

$$c\frac{du}{dt} = -Gu + I \tag{8}$$

리플라스변환을 취해서 U(s)를 구하면 다음과 같다.

$$U(s) = [s+\frac{G}{c}]^{-1}u(0) + [s+\frac{G}{c}]^{-1}\frac{I}{cs}$$
$$= \begin{bmatrix} s+\frac{G_1}{c_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s+\frac{G_2}{c_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s+\frac{G_n}{c_n} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ \vdots \\ u_n(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{I_1}{c_1 S} \\ \frac{I_2}{c_2 S} \\ \vdots \\ \frac{I_n}{c_n S} \end{bmatrix} \right\} \tag{9}$$

여기서, u(0)는 출력이 안정된 후의 입력전압이다. 식(9)를 다시 정리하면

$$U(s) = \begin{bmatrix} s+\frac{G_1}{c_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s+\frac{G_2}{c_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s+\frac{G_n}{c_n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1(0)-\frac{I_1}{G_1} \\ u_2(0)-\frac{I_2}{G_2} \\ \vdots \\ u_n(0)-\frac{I_n}{G_n} \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{s_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{s_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{I_1}{G_1} \\ \frac{I_2}{G_2} \\ \vdots \\ \frac{I_n}{G_n} \end{bmatrix} \tag{10}$$

식 (10)를 역 라플라스 변환을 취하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$u_i(t) = (u_i(0) - \frac{I_i}{G_i})e^{-\frac{G_i t}{c_i}} + \frac{I_i}{G_i} \tag{11}$$

만약 G_i가 영보다 크다면, 식 (11)의 첫째 항은 지수함수적으로 감소하므로 입력단의 전압은 다음과 같이 수렴한다.

$$\lim_{t\to\infty} u_i(t) = \frac{I_i}{G_i} \tag{12}$$

<u>증명 (1.2)</u>:

만약 $G_i = 0$이면 식 (9)는 다음과 같이 재정리 할 수 있다.

$$U(s) = [sI]^{-1}u(0) + [sI]^{-1}\frac{I}{cs} \tag{13}$$
$$= \begin{bmatrix} s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ \vdots \\ u_n(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{I_1}{c_1 s} \\ \frac{I_2}{c_2 s} \\ \vdots \\ \frac{I_n}{c_n s} \end{bmatrix} \right\}$$

식 (13)을 i 번째 뉴런의 입력단에 대하여 재정리 하면

$$U_i(s) = u_i(0)\frac{1}{s} + \frac{I_i}{c_i}\frac{1}{s^2} \tag{14}$$

식 (14)를 역라플라스 변환을 취하여 해를 구하면 다음과 같다.

$$u_i(t) = u_i(0) + \frac{I_i}{c_i}t \tag{15}$$

식 (15)에서 보는 바와 같이 시간이 지남에 따라 입력단의 전압은 선형적으로 발산함을 알 수 있다.

증명 (1.3):

$G_i < 0$인 경우는 식 (11)의 첫째 항이 시간이 지남에 따라 지수함수적으로 증가하므로 입력단의 전압은 지수함수적으로 발산함을 알 수 있다.

Ⅲ. 출력단의 평형점과 수렴

연속형 신경회로망에서 뉴런의 입력 단에 부수적으로 연결된 컨덕턴스의 값에 따라 입력단의 수렴여부가 결정됨을 알았다. 이 장에서는 계산에너지함수의 평형점이 컨덕턴스의 값에 따라 극대, 극소, 또는 변곡점으로 변함을 분석하고 전체 수렴점이 극소점으로 수렴하는 지 여부를 분석한다.

정리 2: 연속형 신경회로망에서는 평형점의 극성들에 관하여 다음의 항들은 사실이다.

(1) 총 컨덕턴스, $G > 0$이면 hypercube의 모서리부근에 위치한 평형점은 극소점이다.

(2) 총 컨덕턴스, $G = 0$이면 평형점의 위치에 상관없이 변곡점이다.

(3) 총 컨덕턴스, $G < 0$이면 hypercube의 모서리부근에 위치한 평형점은 극대점이다.

증명 (2.1):

평형점의 극소, 극대, 또는 변곡점인가를 판별하기 위하여 식 (5)의 Hessian 행렬을 이용하면 다음과 같다.

$$H = \nabla^2 E(v) = -W + G\frac{\partial u}{\partial v} \tag{16}$$

식(2)에서 뉴런의 활성화함수를 입력 u에 대해 미분하여, 뉴런의 출력 v의 함수로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{dv}{du} &= \frac{ae^{-au}}{(1+e^{-au})^2} \\ &= a\frac{1}{1+e^{-au}}\left(1-\frac{1}{1+e^{-au}}\right) \\ &= a v(1-v)\end{aligned} \tag{17}$$

식(17)를 이용하여 식(16)를 재정리하면 다음과 같다.

$$H = \nabla^2 E(v) = -W + G\frac{1}{a(v-v^2)}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{G_1}{a(v_1 - v_1^2)} & -w_{12} & \cdots & -w_{1n} \\ -w_{21} & \frac{G_1}{a(v_2 - v_2^2)} & \cdots & -w_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -w_{n1} & -w_{n2} & \cdots & \frac{G_1}{a(v_n - v_n^2)} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Gerchgorin의 Circle이론에 의하면[9], $\exists\lambda_i$(고유치) s.t

$$\frac{G_i}{a(v_i - v_i^2)} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n}|w_{ij}| \le \lambda_i \le \frac{G_i}{a(v_i - v_i^2)} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n}|w_{ij}| \qquad i = 1, \cdots, n \tag{19}$$

고유치들을 좀 더 자세히 알아보기 위하여 대각행렬요소를 다음과 같이 정의하자.

$$D(v_i) = \frac{G_i}{a(v_i - v_i^2)} \tag{20}$$

총 컨덕턴스 $G_i > 0$이면 hypercube의 모서리부근에서 $D(v_i)$는 양의 무한대 값으로 변하므로 즉, $\forall v_i$, $\lim_{v_i \to 0} D(v_i) = \infty$, $\lim_{v_i \to 1} D(v_i) = \infty$이며, $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} w_{ij}$는 유한한 값이므로, hypercube의 모서리부근

($v_i \to 0^+, v_i \to 1^-$)에서는 식(19)에서 알 수 있듯이 Hessian행렬의 모든 고유치들은 양의 값을 갖게 된다. 즉, Hypercube의 모서리부근에서 H는 positive definite이다. 고로 모서리부근에 위치한 평형점은 극소점이 된다.

〈사례연구〉

2-비트 A/D 변환기의 경우, 식(21)을 이용하여 Hessian 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$H = \nabla^2 E(v) = \begin{bmatrix} \dfrac{G_1}{\alpha(v_1 - v_1^2)} & 2 \\ 2 & \dfrac{G_2}{\alpha(v_2 - v_2^2)} \end{bmatrix} \quad (21)$$

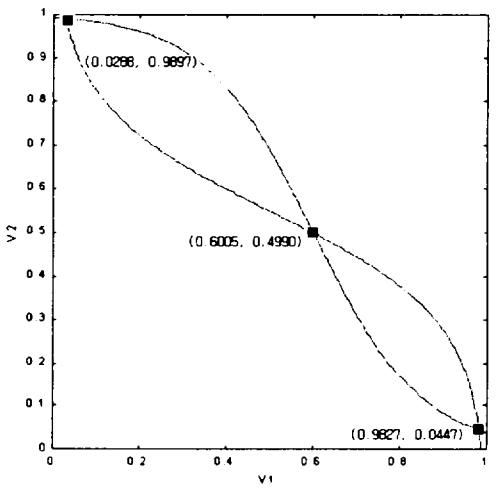

Fig. 3. Location of the equilibrium point in case x = 1.6, α = 2, $G_1 = G_2 = 0.5$.

그림 3은 x = 1.6, α = 2, $G_1 = G_2 = 0.5$인 경우, 비선형 연립방정식을 그래프를 이용하여 평형점을 구한 결과이며, 평형점은 다음과 같이 $v^{eq1} = (0.0288, 0.9897)$, $v^{eq2} = (0.6005, 0.4990)$, $v^{eq3} = (0.9827, 0.0447)$ 3곳이었다. 그리고, 모든 평형점들은 항상 hypercube $= (0,1)^n$ 안에 존재하고 있음을 알 수 있다. 평형점에서 특성들을 알아보기 위해 hessian행렬의 고유치 값들을 조사해 보면, hypercube의 중심부근의 평형점 v^{eq2}에서의 고유치들은 각각 3.0212, -0.9781로 평형점 v^{eq2}는 변곡점임을 알 수 있었다. 그러나, 예측한대로 모서리부근의 평형점들 즉, v^{eq1}에서 고유치들은 8.6854와 24.777 그리고, v^{eq3}에서 고유치들은 15.1362와 5.4236으로 모두 양의 값들이었다. 고로 모서리부근의 평형점들은 극소점임을 알 수 있다.

증명 (2.2):

$G_i = 0$인 경우 는 식(16)에서 우변의 둘째 항이 없어지므로 H는 다음과 같이 되고,

$$H = \nabla^2 E(v) = -W \quad (22)$$

여기서 $W = W^T$, $W_{ii} = 0$, $i = 1.2.....n$이다.

임의 행렬의 trace는 그 행렬의 모든 고유치들의 합과 같으므로 H의 trace는 다음과 같이 표현 가능하고[9].

$$T_r(H) = -\sum_{i=1}^{n} W_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad (23)$$

여기서 λ_i는 H의 고유치들이다.

그런데, H의 대각행렬 요소들은 0이므로 ($W_{ii} = 0$, $i = 1.2.....n$), 식(23)를 재정리하면 다음과 같다.

$$T_r(H) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \quad (24)$$

식(24)의 뜻은 모든 고유치들이 0이거나, 고유치들의 합이 0임을 뜻한다. 그런데, 모든 고유치들이 0이면, 0행렬을 뜻하므로 이 경우는 의미가 없다. 고로, H의 고유치들은 양수와 음수들이 섞여있음을 뜻하며, 고로 H는 항상 indefinite이다. 즉, 이경우의 평형점은 항상 변곡점이다. 그리고 앞에서 보였듯이 이 경우의 평형점은 전 공간에 오직 하나 존재한다.

〈사례연구〉

$G_1 = G_2 = 0$인 경우의 Hessian 행렬은 식 (22)을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$H = \nabla^2 E(v) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

이 경우는 평형점의 위치에 상관없이 H의 고유치들은 항상 2, -2로 평형점은 변곡점이 됨을 알 수 있다. $G_1 = G_2 = 0$인 경우, 평형점은 1개만이 존재하며, x=1.6인 경우, 그 점은 다음과 같이 $v^{eq1} = (0.6, 0.55)$이다. 그리고 그림 4는 x=1.6, $\alpha = 2$, $G_1 = G_2 = 0$인 경우의 에너지 맵을 보여주는 데, 그림에서 평형점은 변곡점임을 알 수 있다.

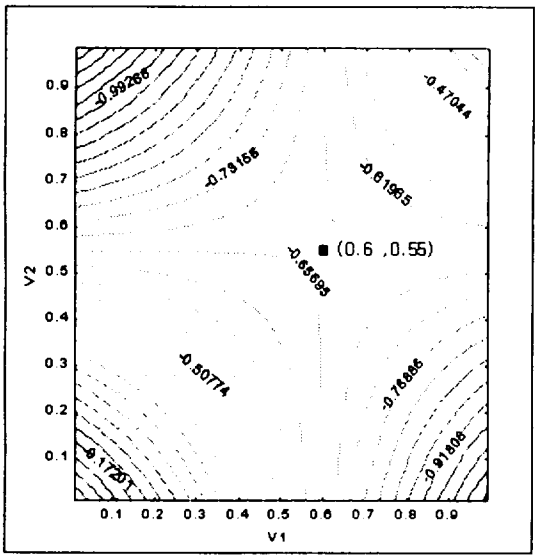

Fig. 4. The Energy map in case x=1.6, $\alpha = 2$, $G_1 = G_2 = 0$.

증명 (2.3):

$G_i < 0$인 경우는 hypercube의 모서리부근에서 $D(v_i)$는 음의 무한대 값으로 변하므로 즉, $\forall v_i$, $\lim_{v_i \to 0^+} D(v_i) = -\infty$, $\lim_{v_i \to 1^-} D(v_i) = -\infty$하고, $\sum_{j=1, j \neq i}^{n} w_{ij}$는 유한한 값이므로, 식(19)에서 알 수 있듯이 모서리부근($v_i \to 0^+, v_i \to 1^-$)에서 H의 모든 고유치들은 음의 값을 갖게 된다. 즉, 모서리 부근에서 H는 항상 negative definite이며, 꼭지점 부근에서의 평형점은 극대점이다.

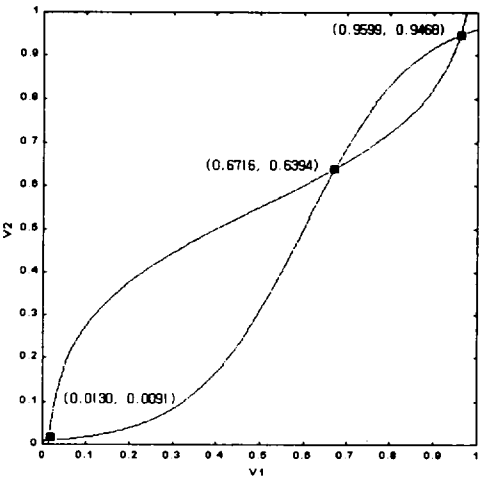

Fig. 5. The location of equilibrium point in case x=1.6, $\alpha = 2$, $G_1 = G_2 = -0.5$.

〈사례연구〉

Fig. 5는 평형점을 그래프를 이용하여 구한 결과이며, 평형점은 다음과 같이 $v^{eq1} = (0.0130, 0.0091)$, $v^{eq2} = (0.6716, 0.6394)$, $v^{eq3} = (0.9599, 0.9468)$ 3곳이었다. 그리고, 역시 모든 평형점들은 항상 hypercube $= (0,1)^n$ 안에 존재하고 있다. 그리고 모서리부근의 평형점들 즉, v^{eq1}에서 고유치들은 -19.0412, -28.1855, 그리고 v^{eq3}에서 고유치들은 -7.8707, -3.5875으로 예측한대로 모두 음의 값이다. 고로, 모서리부근의 평형점들은 극대점임을 알 수 있다.

Ⅳ. 결 론

뉴런의 입력단과 접지사이에 부수적으로 컨덕턴스와 캐패시턴스가 병렬로 연결되어있다. 부수적으로 연결된 컨덕턴스와 캐패시턴스는 시스템의 수렴속도와 안정도에 부분적으로 영향을 미치는 것으로 알려져 있으나, 자세히 어떻게 영향을 미치는 가에 대한 것은 알려진 것이 없다.

이 논문에서는 부수적으로 연결된 컨덕턴스의 값에 따라 입력단의 수렴여부가 결정되며, 출력공간상의 즉, 시스템의 평형점이 극성이 변함을 분석하였다.

즉, 컨덕턴스의 값이 영보다 큰 경우는 경계안의 극소점으로 수렴하고, 그 외의 경우에는 경계선상에 수렴함을 알 수 있었다.

V. 참고문헌

1) Hopfield, J. J., and D. W. Tank, "Neural Computation of Decisions in Optimization Problems," Biolog. Cybern. 52: 141-154, 1985

2) Hopfield, J. J., and D. W. Tank, "Computing with Neural Circuits: A Model", Science Vol 233, 625-633, 1986

3) Park, S. "Signal Space Interpretation of Hopfield Circuit and a Linear Programming Circuit," IEEE Trans. Circuits and Systems CAS-33(5): 533-541, 1989

4) Bernard C. Levy, "Global optimization with Stochastic Neural Networks", IEEE, Int. Conf. on NN, Sandiego, CA, USA, 1987

5) Anthony N. Michel, Jay A. Farrel and Wolfgang Porod, 1989, "Qualtative Analysis of Neural Networks," IEEE Trans. Circuits Syst., Vol.36, pp.229-243, February 1989.

6) Mengkang Peng, Narebdra K. Gupta and Alistair F. Armitage, "An investigation into the Improvement of Local Minima of the Hopfield Network" Neural Networks, Vol.9, pp.1241-1253, 1996.

7) Naoki Kurita and Ken-ichi Funahashi, "On the Hopfield Neural Networks and Mean Field Theory" Neural Networks, Vol.9, pp.1531-1540, 1996.

8) Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, Third Edition, John Hopkins Univ. Press, 1996.

9) Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, Matrix Computations, Third Edition, John Hopkins Univ. Press, 1996.

10) J. M. Zurada, "Gradient-type Neural Systems for Computation and Decision-Making", Progress in Neural Networks, Vol.2, Ablex Publishing Corp., O. M. Omidvar, Editor, April, 1991.

11) John J D'Azzo, *Linear Control System Analysis & Design*, McGraw-Hill, New York, 1988