

하부가열 수평유체층에서 자연대류 유동에 관한 수치해석

양종훈* · 이동원* · 김양훈* · 현명택** · 김 신**

Numerical Study on Natural Convection in a Horizontal Fluid Layer Heated from Below

Jong-Hoon Yang*, Dong-Won Lee*, Yang-Hoon Kim*, Myung-Taek Hyun** and Sin Kim**

ABSTRACT

The natural convection driven by a thermal buoyancy force was investigated in a square cavity. The top and bottom walls are cold and hot, respectively, while the vertical boundaries are adiabatic. A control volume approach with a power-law scheme was used to formulate the finite difference equations. The results are presented isotherms, velocity vectors, Nusselt numbers and critical Rayleigh numbers for the ranges of $Ra = 1750 \sim 20000$ and $Pr = 0.05 \sim 10.0$. The critical Rayleigh number increases as Prandtl number decreases. There exists a clockwise unicell flow near critical Rayleigh number, while two cells appear for large Rayleigh number.

Key words : Natural convection, Critical Rayleigh number, Prandtl number, Nusselt number

1. 서 론

자연대류는 온도 또는 농도차에 의하여 유발되는 부력 및 표면장력의 변화가 점성 및 확산을 극복할 때 일어난다. 자연대류는 맨틀의 대류, 대기의 거동 및 난류의 근원을 밝히려는 학문적인 면 뿐만 아니라 기술의 발달에 따라 재료의 균질화, 순수화를 위하여 엄밀한 유동환경의 제어가 필요한 결정 성장 및 화학 증착 반응기 등을 비롯하여 전자소재 가공, 전산기 내부에서의 냉각, 핵 반응기의 안정성, 태양열 집열판

에서의 열전달, 그리고 정교한 열전달 장치의 설계 등 실용적인 면에서 그 중요성이 최근 강조되고 있다. 이와 같은 배경에서 자연대류의 발생요건 및 자연대류가 전달현상에 미치는 영향에 대한 연구가 계속되고 있다.

밀폐용기내에서의 자연대류는 경계층내의 유동과 내부중심에서의 유동의 상관관계에 의해 복잡한 현상이 발생하며 경계조건 및 기하학적 조건에 따라 유동형태가 달라지므로 유동형태를 예측하기가 매우 어렵다. 즉, 기하학적 형상 및 경계조건등의 변화에 따라 용기내의 유동이 여러 개의 셀(cell)이나 층을 갖는 유동형태를 나타낸다. Chandrasekhar등¹⁾에 의해 무한 평판 사이에 하부면을 가열하고 상부면을 냉각할 때 발생하는 셀의 크기에 대한 연구는 많이 진행되어

* 제주대학교 대학원

Graduate School, Cheju Nat'l Univ.

** 제주대학교 기계·에너지·생산공학부

Faculty of Mechanical, Energy and Manufacture Eng., Cheju Nat'l Univ.

왔다. 그러나 셀의 크기나 셀의 수에 대한 연구자들의 견해는 각기 다르다. Ozoe등²⁾은 수치해석을 통해 여러 가지 셀의 크기를 제안하였으나 안정된 셀의 크기는 제시하지는 못하였다. Koshmieder³⁾는 실험을 통하여 임계상태 이상에서 여러 개의 사각형 셀이 발생함을 보고하였으며 자연대류가 발생하는 임계 Rayleigh수($Ra_c = 1707.8$)를 구하였다.

일반적으로 부력에 의한 자연대류의 유동형태 및 열전달 특성은 Rayleigh수에 크게 영향을 받으며 Prandtl수의 영향은 매우 적어 무시되어 왔다. 그러나 Prandtl수가 0.1이하일 경우 관성항의 비선형성이 증가하게 되어 Prandtl수의 영향을 무시할 수 없다. 즉, 이 경우의 자연대류의 유동특성 및 열전달 특성은 Rayleigh수와 Prandtl수의 영향을 동시에 고려해야 한다. Prandtl 수가 작은 물질은 일반적으로 액체 금속을 나타내는데 유동형태의 관찰이나 온도 등의 측정이 어렵기 때문에 실험적 연구를 통한 연구는 매우 드물다. 수은($Pr = 0.025$)에 대한 연구로는 Verhoeven⁴⁾에 의해 행해졌는데, 실린더에서 임계 Rayleigh수가 1808 ± 16 으로 보고되었고, Soberman⁵⁾은 임계 Rayleigh수가 최소 1200에서 최대 2000으로 보고하고 있다.

수치해석으로는 Samuel 과 Churchill⁶⁾은 긴 수평 채널에서 일어나는 자연대류 현상에 대하여 유한차분법으로 해석하였고, Chao등⁷⁾은 자연대류 현상을 유한차분법으로 해석하여 임계 Rayleigh수와 Prandtl수 간의 관계를 다음의 함수로 나타내었다.

$$Ra_c = 1708.8[1 + (0.00717/Pr)^{\frac{5}{3}}]^{\frac{3}{5}} \quad (1)$$

위에 제시된 관계식은 Prandtl수가 0.1보다 컸을 때의 경우에는 작은 오차를 보인 반면 Prandtl수가 0.1보다 작았을 때는 상당한 오차를 보이고 있다. 따라서 Bertin과 Ozoe⁸⁾는 수정된 유한요소법으로 각각의 Prandtl수에 따른 임계 Rayleigh수를 구하여 Prandtl수가 0.1보다 작았을 때 관련식을 아래와 같이 제시하였다.

$$(Ra_c)^{28} = (1262/Pr^{0.11})^{28} + (1708)^{28} \quad (2)$$

본 연구에서는 Rayleigh-Benard대류에 대하여 하부면이 가열되고(등온), 상부면이 냉각(등온)되며, 수직경계면이 단열된 밀폐용기내의 온도차에 의해 발생하는 자연대류 현상에 대하여 수치해석하였다. 또한 Rayleigh수, Prandtl수에 따른 유동형태, 온도분포 그리고 Nusselt수를 구하고, 자연대류가 발생하는 임계 Rayleigh수에 대하여 본 연구의 결과를 이용하여 해를 예측하고 기존의 연구와 비교하였다.

II. 이 론

2.1. 기본방정식의 유도

본 연구에서는 종횡비 $A=1$ 인 직각밀폐용기내에서 수직방향 온도차에 의해 발생하는 자연대류에 대하여 수치해석하였다. 해석하고자 하는 계의 기하학적 형상 및 경계조건은 Fig. 1과 같다. 두 수직 경계면은 단열되어 있으며, 하부 수평 경계면은 고온 그리고 상부 수평 경계면은 저온으로 유지하여 수평 경계층을 갖도록 하였다.

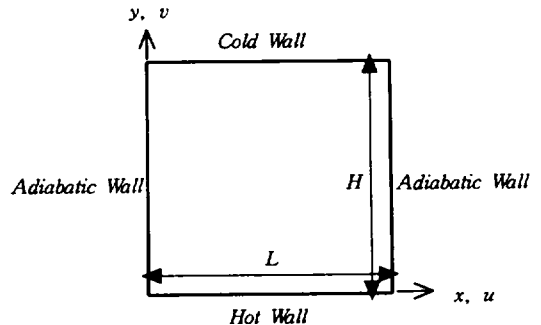


Fig. 1 Schematics of the present study.

밀폐용기에서의 순수물질에 대한 자연대류를 해석하기 위한 실질적인 물리적 현상을 기술하는 일반적인 기본방정식을 단순화시키기 위하여 유체는 비압축성, 뉴우톤 유체이고, 점성소산이 무시되며, 부력항에 온도차에 의한 밀도변화만을 고려한 Boussinesq의 근사를 적용된다고 가정하였다. 위의 가정에 의하여 2차원 정상 상태의 연속방정식, 운동방정식 및 에너지 방정식을 무차원하여 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (3)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + Pr \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4-1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + Pr \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + Ra \cdot Pr \cdot T \quad (4-2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5)$$

위 식(3)~(5)에 적용된 무차원량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'}{H}, \quad y = \frac{y'}{H}, \quad u = \frac{H}{\alpha} u', \\ v &= \frac{H}{\alpha} v', \quad P = \frac{1}{\rho} \left(\frac{H}{\alpha} \right)^2 P', \\ T &= \frac{T - T_0'}{\Delta T} \end{aligned} \quad (6)$$

위의 식(3)~(5)의 무차원 기본방정식으로부터 Prandtl 수와 Rayleigh수가 본 해석 시스템을 지배하는 무차원 수임을 알 수 있다.

2.2. 경계 조건

본 연구에서는 해석의 안정성을 부여하기 위하여 초기조건을 해석 영역 내부의 모든 속도는 0으로 하고, 해석영역 내부의 초기 온도를 상·하경계면 온도의 평균값인 0.5를 갖도록 하였다. 경계조건은 직각 밀폐용기의 수직 경계면은 단열이며 수평 경계면에 대하여 하부면은 고온, 상부면은 저온으로 일정한 온도차가 유지되도록 하였다. 그리고 각 벽면에서 점착 조건(No-slip condition)을 적용하여 벽면에서의 속도 (u, v)를 0으로 하였다. 따라서 무차원화된 경계조건은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0 \\ v(0, y) = v(1, y) = v(x, 0) = v(x, 1) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$T(x, 0) = 1, \quad T(x, 1) = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0,1} = 0$$

2.3 수치해석 방법

2.3.1. 기본방정식의 이산화(Discretization)

수치해석을 위해 기본방정식의 독립변수에 대하여 이산화 하였다. 식(3)~(5)의 일반적 이산화방정식은 식 (8)과 같다.

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (8)$$

여기서, 나타난 각 계수들은 이산화 방법에 따라 다르며, 본 해석에서는 멱승도식(power-law scheme)을 적용하여 다음과 같이 각 계수들을 구하고 수치해석 하였다.

$$\begin{aligned} a_E &= D_e(1 - 0.1|Pe|_e)^5 + [-F_e, 0] \\ a_W &= D_w(1 - 0.1|Pe|_w)^5 + [-F_w, 0] \\ a_N &= D_n(1 - 0.1|Pe|_n)^5 + [-F_n, 0] \\ a_S &= D_s(1 - 0.1|Pe|_s)^5 + [-F_s, 0] \\ b &= S_c \Delta x \Delta y, \\ a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (9)$$

식(9)에서 표시된 양들은 식 (10)에서와 같고 【】의 표기는 괄호안의 값 중 큰 값을 의미한다

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e}, \quad D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w}, \quad D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n}, \\ D_s &= \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s}, \quad (Pe)_e = \frac{F_e}{D_e}, \quad (Pe)_w = \frac{F_w}{D_w}, \\ (Pe)_n &= \frac{F_n}{D_n}, \quad (Pe)_s = \frac{F_s}{D_s} \end{aligned} \quad (10)$$

2.3.2. 계산방법

유동 및 온도장을 구하기 위해 본 해석에서는 압력장을 예측하여 속도장을 계산하고 계산된 해에 대하여 보정과 수렴판정을 통해 해를 수렴시키는 과정을 반복 계산함으로써 해를 구하는 SIMPLE 알고리즘에 따라 모든 계산을 수행하였다⁹⁾

앞에서 구한 이산화방정식은 비선형을 띠고 있어 반복계산을 통해 해를 수렴시켜야 하므로 이산화방정식의 계산 방법으로 TDMA(tri-diagonal matrix algorithm)를 사용하였고 수렴이 빠르며 경계조건의 영향이 해석영역 내부로 전달되는 속도가 빠른 선순법(line-by-line method)을 사용하여 수치해석하였다. 또한, 임계값 부근에서 유동장이 매우 미세하게 일어나며 따라 해가 발산할 수 있기 때문에 계산과정에서 안정된 수렴을 위해 하향이완계수(under-relaxation factor)를 이용하였는데 속도량에 대해서 0.5~0.7을 사용하였고, 온도장의 경우 사용하지 않았다. 격자망은 Prandtl수의 영향을 크게 받기 때문에 Prandtl수에 따라 격자수의 영향을 조사한 결과, 0.1보다 큰 경우에는 30×30~40×40 부근에 이르러 거의 정확한 해를 구할 수 있음을 확인할 수 있었다. 반면 Prandtl수가 0.1보다 작을 경우, 해의 정확성을 위해서 70×70의 매우 조밀한 격자망을 구성해야 함을 확인할 수 있었다. 따라서 본 연구에서는 해의 정확성을 위해 격자수를 Prandtl수가 0.1보다 큰 영역에서 40×40을 그리고 Prandtl수가 0.05에서는 70×70으로 하여 수치해석 하였다. 해가 정상상태에 도달되기까지는 해석 조건에 따라 1000~30000회의 반복 계산이 필요하였다.

III. 결과 및 고찰

본 연구에서는 Prandtl수와 Rayleigh수가 본 해석 시스템에 미치는 영향을 조사하기 위해 Pr = 0.05~10.0에 대하여 그리고 Ra = 1750~20000에 대하여 수치해석하여 유동이 발생하는 임계 Rayleigh수를 구하고 열전달 특성 및 유동현상을 관찰하였다.

3.1. 수치해석의 타당성 고찰

Prandtl수가 작은 경우 수치해석이 어렵기 때문에 그 타당도를 조사하였다. Table 1은 Prandtl수가 0.1 일 때 Bertin과 Ozoe⁸⁾의 연구결과와 본 연구에서 구해진 결과를 비교한 것이다. Rayleigh수에 따른 Nusselt수의 값에 대한 오차를 살펴보면 오차의 범위가 5% 이내로 상당히 일치하고 있을 뿐만 아니라

Rayleigh수의 변화에 따른 Nusselt수의 변화의 경향 또한 유사하게 나타나고 있어 본 수치해석 방법이 밀폐용기내의 자연대류에 대한 해석 방법을 타당한 것으로 사료된다.

Table 1 Comparison of average Nusselt number with other results(Bertin et al.⁸⁾)

Ra	Present study	Bertin and Ozoe(1985)	error(%)
2000	1.13097	1.127	0.397
2200	1.21752	1.225	0.748
2300	1.25800	1.273	1.500
2400	1.29655	1.319	2.245
2500	1.33324	1.363	2.976
2600	1.36818	1.403	3.482
2700	1.40148	1.442	4.053

3.2. 임계 Rayleigh수의 결정

본 해석 영역에서 평균 Nusselt수는 다음과 같이 계산된다.

$$Nu_{ave} = -\frac{1}{H} \int_0^H \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} dy \quad (11)$$

각 Prandtl수에서 Rayleigh수에 따른 Nusselt의 영향을 관찰하기 위하여 아래의 식과 같이 임계 Rayleigh수에 따른 Nusselt수의 변화를 선형화시킬 수 있다.

$$Nu = 1 + B(1 - \frac{Ra_c}{Ra}) \quad (12)$$

여기서, B의 값은 Rayleigh수의 변화에 따른 Nusselt수의 변화의 정도를 나타내는 상수값이며 Churchill과 Usagi¹⁰⁾는 다음과 같은 관계식을 제시하였다.

$$(B)^{-5} = (1.336)^{-5} + (Pr^{0.312}/0.317)^{-5} \quad (13)$$

본 연구에서는 각 Prandtl수에 따른 임계 Rayleigh수를 구하기 위하여 위의 식(12)에 의해 (Nu-1)와 (1/Ra)의 상관관계를 도시하여 Fig. 2에 나타내었다. 임계 Rayleigh수와 상수 B값은 Fig. 2에서 보듯이 본 연구에서 행한 결과를 확장시켜 Nu-1이 0이 되는 지

점을 기준으로 결정하였다. 이와 같이 구한 임계 Rayleigh수는 Pr=10.0일 때 1710, Pr=1.0일 때 1714, Pr=0.1일 때 1725, Pr=0.05때 1784로 계산되었으며, Prandtl수가 감소할수록 임계 Rayleigh수가 증가됨을 알 수 있다.

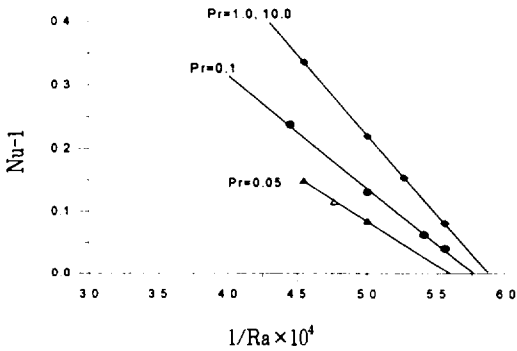


Fig. 2 Determination of critical Rayleigh number for various Prandtl numbers using the equation of Malkus and Veronis¹¹⁾

3.3. Rayleigh수 및 Prandtl수에 따른 영향

자연대류에서 열전달 특성 및 유동형태는 Rayleigh수 및 Prandtl수에 의해 영향을 받는다. 본 해석에서는 Prandtl수의 영향을 조사하기 위해 Pr=0.05, 0.1, 1.0, 10.0에 대하여 수치해석하였다.

Rayleigh수의 영향을 조사하기 위해 각 Prandtl수에서 Rayleigh수를 변화시켜 수치해석하였다. Fig. 3은 Pr=10, 1.0, 0.1, 0.05일 때 Rayleigh수에 따른 평균 Nusselt수의 변화를 도시한 것이다. Fig. 3에서 살펴보면 Prandtl수가 커질수록 임계 Rayleigh수에 가까워짐에 따라 평균 Nusselt수의 값은 위로 블록하는 현상이 관찰되고 있으며, 본 연구영역에서 Prandtl수가 작은 0.1인 경우에는 Rayleigh수에 따른 평균 Nusselt수가 거의 직선으로 변함을 알 수 있고(Fig. 3(c)), 더욱 작은 경우(Pr=0.05, Fig. 3(d))에는 's' 자 형태로 휘어지는 경향을 보이고 있다. 또한 각 그림에서 Rayleigh수가 커짐에 따라 평균 Nusselt수의 증가는 완만해짐을 알 수 있다. 이와 같은 현상은 임계 Rayleigh수 근처에서는 유동이 매우 작고 유

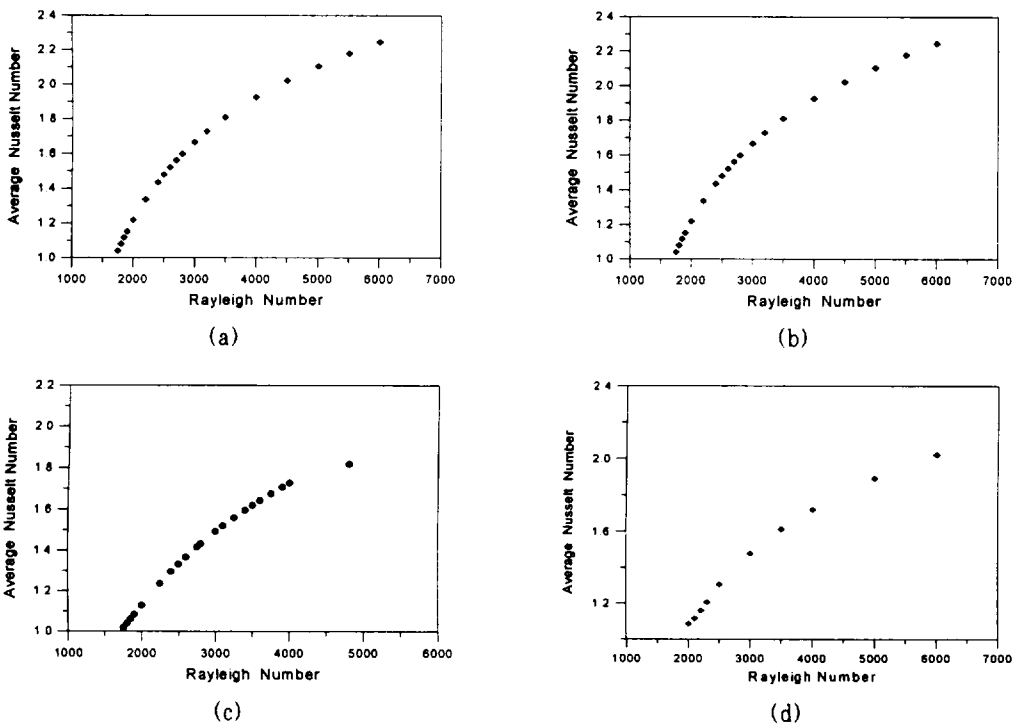


Fig. 3 Average Nusselt number with Rayleigh numbers (a) Pr=10, (b) Pr=1.0, (c) Pr=0.1, (d) Pr=0.05.

동발생지역이 경계면에서 짧은 거리에 있기 때문에 사실상 임계 Rayleigh수의 판정이 어렵기 때문에 사료된다. 이와 같은 유동현상에 대해 좀더 정확한 관찰을 위해서는 미세한 유동현상의 해석이 가능하도록 격자의 수를 증가시켜 격자의 크기를 작게 하고 수렴판정에 있어 좀더 오차를 작게 해야 할 것으로 사료된다.

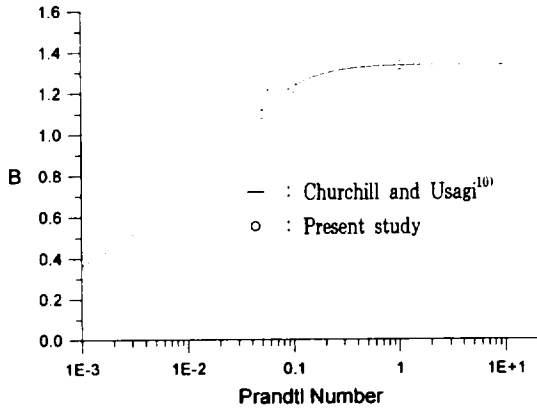


Fig. 4 Plot of the computed constant B with Prandtl number.

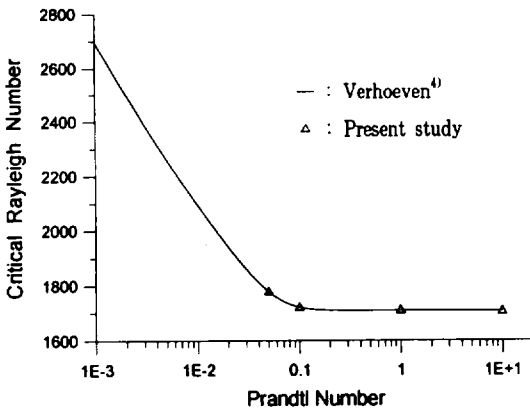


Fig. 5 Plot of the computed critical Rayleigh number with Prandtl number.

Fig. 4는 Churchill과 Usagi¹⁰⁾가 제시한 Nusselt수와 임계 Rayleigh수의 상관관계식의 계수 B의 식과 본 연구결과에서 구한 값을 도시해 놓은 것으로 거의

일치함을 알 수 있다. Fig. 5는 Prandtl수에 따른 임계 Rayleigh수를 도시한 것이다. 본 연구에서의 결과와 Verhoeven⁴⁾의 결과가 거의 일치하고 있음을 보여주고 있다. 보다 다양한 검증을 위해 Pr수가 아주 작은 영역까지 연구되어야 하나 수많은 격자를 구성해 줘야 하기 때문에 연구결과를 얻지 못하였고, 차후 이에 대한 연구가 필요한 것으로 사료된다.

IV. 결 론

본 연구에서는 Rayleigh-Benard대류에 대하여 하부면이 가열되고 (등온), 상부면이 냉각(등온)되며, 수직경계면이 단열된 밀폐용기내의 온도차에 의해 발생하는 자연대류 현상에 대하여 수치해석을 하였다. 이를 통하여 Ra수, Pr수에 따른 유동형태, 온도분포의 특성을 살펴보고 Nu수를 구하였으며 자연대류가 발생하는 임계 Rayleigh수에 대하여 기존의 연구와 비교하였다. 해석범위는 $A=1$, $Pr=0.05\sim 10.0$, $Ra=1750\sim 20000$ 이며, 연구 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 본 연구의 결과에서 Prandtl수에 따른 임계 Rayleigh수는 $Pr=10.0$ 일 때 $Ra_c=1710$, $Pr=1.0$ 일 때 $Ra_c=1714$, $Pr=0.1$ 일때 $Ra_c=1725$, $Pr=0.05$ 일 때 $Ra_c=1784$ 로 Prandtl수가 감소할수록 임계 Rayleigh수가 다소 증가하였다.
2. Rayleigh수에 따른 평균 Nusselt수는 위로 불록한 형태를 띄며 임계 Ra수에 가까울수록, Pr수가 증가할수록 더욱 더 불록한 형태를 보이지만 $Pr=0.1$ 일 때는 거의 직선적으로 분포하였고, $Pr=0.05$ 일 때는 임계값 근처에서 'S'자 형태로 나타났다.

참고문헌

- 1) Chandrasekhar, S., 1961. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford, Oxford University Press.

- 2) Ozoe, H. K., Fuji, N. L. and Churchill, S. W., 1983. Long rolls generated by natural convection in an inclined, rectangular enclosure. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 26, pp. 1427-1438.
- 3) Koshmieder, E. L., 1974. Benard convection. *Adv. Chem. Phys.*, Vol. 26, pp. 177-211.
- 4) Verhoeven, J. D., 1964. Experimental study of thermal convection in a vertical cylinder of mercury heated from below. *Phys. Fluids*, Vol. 12, pp. 1733-1740.
- 5) Soberman, R. K., 1959. Onset of convection in liquids subjected to transient heating below. *Phys. Fluids*, pp. 131-138.
- 6) Samuels, M. R. and Churchill, S. W., 1967. Stability of a fluid in a rectangular region heated from below. *A. I. Ch. E. J.*, Vol. 13, pp. 77-85.
- 7) Chao, P. S., Churchill, S. W. and Ozoe, H., 1972. The dependence of the critical Rayeigh number. In *Convection Transfer and Instability Phenomena*, edited by Zierep, J. and Oertel, G., Braun, Karlsruhe.
- 8) Bertin, H. and Ozoe, H., 1985. Numerical study of two-dimensional natural convection in a horizontal fluid layer heated from below, by finite-element method influence of Prandtl number. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 28, No. 1, pp. 125-138.
- 9) Patankar, S. V., 1980. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw Hill, New York.
- 10) Churchill, S. W. and Usagi, R., 1972. A general expression for the correlation of rate of transfer and other phenomena. *A. I. Ch. E. J.*, Vol. 18, pp. 1121-1128.
- 11) Malkus, M. V. R. and Veronis, G., 1958. Finite

amplitude cellular convection. *J. Fluid Mech.*, Vol. 4, pp. 225-260.

기 호

A	: aspect ratio = H/L
F	: flow rate through a control volume
g	: acceleration due to gravity, [m/s ²]
H	: height of the enclosure, [m]
L	: length of the enclosure, [m]
Nu	: Nusselt number = hL/k
P	: dimensionless pressure
Pr	: Prandtl number = ν / α
Ra	: Rayleigh number = $g\beta \Delta T H^3 / \nu \alpha$
T	: dimensionless temperature
$\Delta T'$: temperature difference = (T _h - T _c), [°C]
t	: dimensionless time
u, v	: dimensionless velocity component in x and y direction, [m/s]
x, y	: dimensionless coordinate axis in the horizontal and vertical direction, [m]

Greek Symbols

α	: thermal diffusivity, [m ² /s]
β	: thermal expansion coefficient, [°C ⁻¹]
ν	: kinematic viscosity, [m ² /s]

Superscript

: dimensional value

Subscript

ave	: average value
c	: critical value