科學敎育, 12, 167~175, 1995
Journal of Science Education
12, 167~175, 1995

이차원 시공에서의 구속조건들과 Hamilton-Jacobi 방정식

강동식* · 강정우*

Constraints and Hamilton-Jacobi Equation in Two Spacetime Dimension.

Kang, Dong-Shik · Khang, Jeong-Woo

The classical action for a complex scalar field conformally coupled to gravity in two spacetime dimension is considered. The algebra of constraints is not always closed. Under the special conformal transformation, the algebra of constraints obtains the anomalous terms. These terms violate the invariance of the action under the gauge transformation. We also investigate the Hamilton principlal function through the Hamilton-Jacobi equation.

이차원 중력이론은 4차원 중력이론에서 해결할 수 없는 문제에 대해 해결의 실마리를 제공하며, 그 자체로서도 물리적 의미가 있다.

초현이론에서 현의 운동은 세계선(world line)이 아니라 세계면(world surface)로 기술되고 이 경우 surface의 운동은 이차원 중력이론이 된다. 이차원시공은 좌표의 설정에 무관하게 기술되므로 Diffeomorphism에 대해 불변이다.

구속조건으로 이를 표현하면 정준변수들의 게이지 변화에 따라 변할 때 작용은 게이지 불변이 된다. 고전이론의 양자화는 구속조건에 나타날 정준변수들에 대한 공액 운동량들을 연산자로 바꾸어서 파동함수에 연산을 시키고 결과를 나타내는 미분방정식의 해를 구하면 된다.

하지만 이 과정에 나타날 미분방정식은 해를 구할 수 있는 경우가 거의 없다. 따라

* 제주대학교 사범대학 과학교육과

서 근사적 방법을 사용하게 되고 대표적인 근사식은 WKB 방법이다. 고전이론에서는 Hamilton-Jacobi 방정식이 WKB 일차근사항을 제공하며 파동함수의 위상인자를 논할 때 일차근사항으로 충분한 경우가 많다. 여기에 주어지는 고찰에서는 이차원 중력이론에 대한 게이지 변환과 Hamilton-Jacobi 방정식의 해에 대해서 알아보고자 한다.

이차원 중력장에서 복소 dilaton장과 상호작용하는 중력에 대한 작용은 다음과 같다.

$$S=\frac{1}{2}\int d^2x\sqrt{-\bar{g}}\ (\phi^*\phi R(\bar{g})+V(\phi^*\phi)) \tag{1}$$

여기에서 $R(\bar{g})$는 계량 텐서 $\bar{g}_{\mu\nu}$에 대한 Ricci Scalar, $\bar{g}$는 $\bar{g}_{\mu\nu}$의 행렬식, ϕ는 복소 dilaton장 ($\phi=\alpha+i\beta$), $V(|\phi|^2)$도 복소 dilaton장에 대한 포텐셜 함수이다.
계량텐서 $\bar{g}_{\mu\nu}$를 $\Omega^2(x)$만큼 등각변환 시키면

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \Omega^2\,\bar{g}_{\mu\nu}, \\ R(\bar{g}) &= \Omega^2(R(g)+2\nabla^2\ln\Omega), \\ \sqrt{-\bar{g}} &= \sqrt{-g}/\Omega^2 \end{aligned} \tag{2}$$

으로 주어진다. 여기서 $R(\bar{g})$는 등각변환된 계량텐서 $\bar{g}_{\mu\nu}$에 대한 Ricci Scalar 이다. 변환된 계량텐서에 의해서 작용 (1)은 다음과 같은 형태가 된다.

$$S=\frac{1}{2}\int d^2x\sqrt{-g}\left\{|\phi|^2(R(g)+2\nabla^2\ln\Omega)+\frac{V(|\phi|^2)}{\Omega^2}\right\} \tag{3}$$

시공간에 대한 기술은 Hamiltonian형식[1]으로 하기 위해서 계량텐서를

$$ds^2=-(N^2-M^2)dt^2+2Mdtdr+dr^2$$

으로 하고, 등각 변환인자를 $e^{-2\rho(x)}$로 놓자. 여기서 N은 경과한 인자(lapse factor), M은 이동인자(shift factor)이다. (ρ, α, β, N, M)에 대한 구체적인 형태로 작용을 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} S=\int d^2x\Big\{ &\frac{2M'}{N}(\alpha\dot{\alpha}+\beta\dot{\beta}-M(\alpha\alpha'+\beta\beta'))-2N(\alpha\alpha''+\alpha'^2+\beta\beta''\beta'^2) \\ &-\frac{2}{N}(\alpha\dot{\alpha}+\beta\dot{\beta})\dot{\rho}+\frac{2M}{N}((\alpha\dot{\alpha}+\beta\dot{\beta})\rho'+(\alpha\alpha'+\beta\beta')\dot{\rho}) \\ &+2(N-\frac{M^2}{N})(\alpha\alpha'+\beta\beta')\rho'+N\frac{e^{2\rho}}{2}V(|\phi^2|)\Big\} \end{aligned} \tag{4}$$

Hamiltonion형식화를 위한 첫 단계로 정준변수 ρ, α, β, N, M 에 대한 공액운동량 P_α, P_β, P_ρ, P_N, P_M들을 구하자.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta S}{\delta \dot{\alpha}} = \frac{2}{N}\alpha(M' - \dot{\rho} + M\rho') = P_\alpha \\
&\frac{\delta S}{\delta \dot{\beta}} = \frac{2}{N}\beta(M' - \dot{\rho} + M\rho') = P_\beta \\
&\frac{\delta S}{\delta \dot{\rho}} = \frac{2}{N}(-(\alpha\dot{\alpha} + \beta\dot{\beta}) + M(\alpha\alpha' + \beta\beta')) = P_\rho \\
&\frac{\delta S}{\delta \dot{N}} = 0 = P_N \qquad \frac{\delta S}{\delta \dot{M}} = 0 = P_M
\end{aligned}
\tag{5}
$$

P_N과 P_M이 운동방정식을 사용하지 않고서도 영이 되므로 이들은 일차 구속 조건이고 나중에 알 수 있듯이 다른 구속조건들과 교환적이므로 First Class 구속조건들이다. 이는 N과 M에 대한 시간 도함수가 작용에 없다는 사실로 부터 알 수 있으며 따라서 구속조건들에 대한 Langrange 미정계수로서의 의미를 갖게 된다.

Hamilton형식으로 작용을 표현하면,

$$S = \int d^2x\{P_\alpha\dot{\alpha} + P_\beta\dot{\beta} + P_\rho\dot{\rho} - NH_0 - MH_1\} \tag{6}$$

과 같이 되며 H_0 와 H_1은 구속 조건들이다. 시공간의 상대성이론에 의하며 좌표변환에 대해 작용은 불변이여야 하고 따라서 구속조건들이 나타나게 된다.

식 (4)와 (5)에 의해 H_0와 H_1을 구하면 다음과 같다.

$$H_0 = -\frac{1}{2\alpha}P_\alpha P_\rho + (\alpha^2+\beta^2)'' - \rho'(\alpha^2+\beta^2)' - \frac{e^{2\rho}}{2}V \tag{7}$$

$$H_1 = \frac{P_\alpha}{2\alpha}(\alpha^2+\beta^2)' + \rho' P_\rho - P_\rho' \tag{8}$$

4차원 중력이론이나 다른 모형의 2차원 중력이론에서처럼 이들 구속조건들도 대수를 이룰 때, 직접계산에 의해 다음과 같음을 알 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&\{H_0(x), H_0(x')\} = H_1(x)\delta'(x-x') - H_1(x')\delta'(x'-x) \\
&\{H_0(x), H_1(x')\} = H_0(x)\delta'(x-x') - H_0(x')\delta'(x'-x) \\
&\{H_1(x), H_1(x')\} = H_1(x)\delta'(x-x') - H_1(x')\delta'(x-x')
\end{aligned}
\tag{9}
$$

간단한 형식으로 세개를 합쳐서 쓰면

$$\{H_a(x), H_b(x')\} = \int dx'' K_{ab}^{c}(x, x', x'') H_c(x'') \tag{10}$$

로서, 군에서의 구조상수가 일반적인 시공간 좌표의 함수로 대치된 형식이다. 4차원 이론과 다른점은 구조함수 $K_{ab}{}^{c}$가 계량텐서를 포함하지 않는다는 점이다.

구속조건 (7)과 (8)에서 구속표면상에서 사라지는 Poisson braket를 이르므로 First Class 구속조건들이다. 따라서 구속조건들은 게이지 변환을 발생시킨다[2]. 그러면 게이지 변환하에서 작용이 불변이기 위해서 Lagrange 미정계수는 어떻게 변환해야 하는지 알아보자.

게이지 변환하에서 작용의 변화는

$$\begin{aligned}\delta S = \int d^2x(\ & \delta P_\alpha \dot{\alpha} + \delta P_\beta \dot{\beta} + \delta P_\rho \dot{\rho} + P_\alpha \delta \dot{\alpha} + P_\beta \delta \dot{\beta} + P - \rho \delta \dot{\rho} \\ & - N\delta H_0 - M\delta H_1 - H_0 \delta N - H_1 \delta M)\end{aligned} \tag{11}$$

으로 게이지 불변이기 위해서는 이 변화량이 영이 되어야 한다. 구속조건에의해 발생되는 정준변수와 H_0, H_1의 게이지 변화량은

$$\delta F(x) = \int dx' \varepsilon^a(x) \{F(x), H_a(x')\} \tag{12}$$

로 $\varepsilon^a(x)$는 무한소의 매개 변수, $a=(0,1)$, $F(x)$는 정준변수와 H_0, H_1을 나타낸다.

표기를 간단히 하기 위해 $N^a \equiv (N, M)$을 사용하면 작용의 변화량(14)는

$$\delta S = \int d^2x(-\varepsilon^a(x) \frac{d}{dt} H_a(x) - N^b \varepsilon^c K_{bc}{}^{a} H_a(x) - \delta N^a(x) H_a(x)) \tag{13}$$

로서 Lagrange 미정계수가

$$\delta N^a(x) = \varepsilon^a - N^b \varepsilon^c K_{bc}{}^{a} \tag{14}$$

처럼 변환하고, $\varepsilon^a(x)$는 적분구간의 상한, 하한 값에서 영이 되면 된다. 말하자면

$$\varepsilon^a(x_1) = 0 = \varepsilon^a(x_2) \tag{15}$$

따라서 작용(6)은 구속조건들에 의해서 발생되는 게이지 변환하에서 불변이다. 하지만 이러한 작용의 불변성은 (2)식에서 주어진 등각변환과 다른 형태의 등각변환하에서는

반드시 보장되어 있는 것은 아니다[3]. 이를 알아보기 위해서 작용 (1)에서 $|\phi|^2$ 대신에 실수 함수 ϕ를, 등각변환 $\Omega^2=e^{-2\phi}$인 경우를 생각해보자. 이러한 경우 작용 S는 다음과 같이 나타난다.

$$S=\int d^2x\left\{-\frac{1}{N}(\dot{\phi}-M\phi'-2M')^2+N((\phi')^2-\phi''+\frac{1}{2}e^{2\phi}V(\phi))\right\} \tag{16}$$

이 작용에서 정준 변수들에 대한 공액 운동량들을 구하고, 작용을 Hamiltonian형식으로 바꿔쓰면

$$S=\int d^2x(P_\phi\dot{\phi}-NH_0'-MH_1') \tag{17}$$

이 되며 이 때 H_0', H_1'은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H_0' &= -\frac{1}{4}P_\phi^2+\phi''-(\phi')^2-\frac{1}{2}e^{2\phi}V(\phi) \\ H_1' &= P_\phi\phi'-2P_\phi^2 \end{aligned} \tag{18}$$

이 구속조건들을 가지고 Poisson bracket를 구해보면

$$\begin{aligned} \{H_0'(x), H_0(x')\} &= H_1'(x)\delta'(x-x')-H_0'(x')\delta'(x'-x) \\ \{H_1'(x), H_1(x')\} &= H_1'(x)\delta'(x-x')-H_1'(x')\delta'(x'-x) \\ \{H_1'(x), H_0'(x')\} &= H_0(x)\delta'(x-x')-H_0'(x')\delta'(x'-x)-4\delta'''(x-x') \end{aligned} \tag{19}$$

와 같으며 마지막 식에서 이상항(anomalous term)이 나타난다.

식 (10)과 같은 형태로 바꿔쓰면

$$\{H_a'(x), H_b'(x')\}=\int dx''\ K_{ab}{}^c(x,x';x'')H_c(x'')+A_{ab}(x,x') \tag{20}$$

으로 $A_{01}(x,x')\neq 0$이고 나머지는 0이 된다.

이 경우 작용 (17)의 게이지 변환하에서 불변성은 성립하지 않는다. 작용(17)를 게이지 변환 시키면 식 (12), (14), (15)변환하에서

$$\delta S=-\int dtdx' A_{ab}(x,x')N^a(x,t)\epsilon^b(x,t) \tag{21}$$

가 되며 $A_{01}\neq 0$이므로 $\delta S\neq 0$이다.

Poisson bracket에 나타나는 이상항은 계를 양자화 시킬 때 역시 문제가 된다. 양자이론에서 게이지 불변성은 모든 물리적 파동함수가 구속조건들에 의해 발생되는 변환에 대해서 성립 되야 한다.

$$H_a(x)|\psi\rangle=0 \tag{22}$$

이 식이 적분가능하기 위해서는

$$[H_a(x), H_b(x')]|\psi\rangle=0 \tag{23}$$

을 만족시켜야 하고 이는 곧

$$A_{ab}|\psi\rangle=0 \tag{24}$$

이 되야 함을 의미한다. 하지만 이와 유사한 조건이 고전이론에는 없으며 또한 물리적 공간을 너무 제한시키는 역할을 하게 된다. 특별한 경우로 A_{ab}가 영이 아닌 행렬식을 갖는 경우 물리적 파동함수 $|\psi\rangle=0$이 되어 이론 자체가 무의미해지게 된다. 따라서 2차원 시공간에서의 중력과 결합된 dilaton장을 갖는 이론에서는 계를 양자화 시키는 것이 항상 가능한 것은 아니다.

이러한 등각변환에 대해 주의를 하면서 작용(6)에 대한 Hamilton-Jacobi방정식의 해를 구해보자. 구속된 계에서의 Hamilton-Jacobi방정식은 다음과 같다.

발생함수를 W라 하면

$$\begin{aligned} &H_a(\alpha,\beta,\rho,\frac{\partial W}{\partial\alpha},\frac{\partial W}{\partial\beta},\frac{\partial W}{\partial\rho})=0 \\ &\frac{\partial W}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

두번째 식으로 부터 W는 명백히 t의 함수가 아니며 이는 공변성을 갖는 중력이론이 특징이다. 결국 식 (25)의 첫번째 방정식의 해를 구하면 된다. 이를 위해 구속조건을 이용하여 공액운동량들에 대한 표현식 먼저 구하기로 하자.

$\alpha^2+\beta^2\equiv\varphi$ 라 놓고 (7)과 (8)을 결합시키면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$-2(H_0\varphi'+H_1P_\rho)=(P_\rho^2)'-2\rho' P_\rho^2-2\varphi''\varphi'+2\rho'(\varphi')^2+e^{2\rho}V\varphi' \tag{26}$$

이 식에

$V(\varphi)\equiv dj(\varphi)/d\varphi$를 대입하고 $e^{-2\rho}$를 곱하면

$$\begin{aligned} &G(x)=-2e^{2\rho}(H_0\varphi'+H_1P_\rho)=(C)' \\ &C=e^{-2\rho}P_\rho^2-(\varphi')^2e^{-2\rho}+j(\rho) \end{aligned} \tag{27}$$

와 같고. 구속 표면 상에서 $H_0=0, H_1=0$이므로 $C'=0$로서 C는 운동의 상수가 된다. 이는 결합함수 $|\varphi|$가 실수 함수인 경우에와 같다.

(12)식으로 부터 P_ρ를 구하고 이 결과를 (8)식에 대입해서 P_α를 구하면

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \frac{2\alpha}{\varphi'}(P_\rho{}' - \rho' P_\rho) \\ P_\beta &= \frac{\beta}{\alpha} P_\beta \\ P_\rho^2 &= (\varphi')^2 + e^{2\rho}(C - j(\varphi)) \end{aligned} \tag{28}$$

로 주어진다.

발생함수를 이용하여 공액운동량들을 표현하면

$$P_\alpha = \frac{\delta W}{\delta \alpha}, \quad P_\beta = \frac{\delta W}{\delta \beta}, \quad P_\rho = \frac{\delta W}{\delta \rho} \tag{29}$$

로서 (28)식에 이들을 대입하면

$$\frac{\delta W}{\delta \rho} = \{(\varphi)^2 + e^{2\rho}(C - j)\}^{1/2} \equiv \gamma(x) \tag{30}$$

$$\frac{\delta W}{\delta \alpha} = \frac{2\alpha}{\varphi'}\left(\left(\frac{\delta W}{\delta \rho}\right)' - \rho'\left(\frac{\delta W}{\delta \rho}\right)\right) \tag{31}$$

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\delta W}{\delta \alpha}\right) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\delta W}{\delta \beta}\right) . \tag{32}$$

식 (30)으로 부터

$$W = \int dx\left(\gamma + \frac{\varphi'}{2}\ln\frac{\gamma - \varphi}{\gamma + \varphi}\right) + F(\varphi) \tag{33}$$

여기서 $F(\varphi)$는 ρ적분에서의 적분상수로 φ의 함수이며 α와 β적분으로 부터 결정된다. (31)식으로부터

$$\begin{aligned} \frac{\delta W}{\delta \alpha} &= \frac{\delta W}{\delta \varphi}\frac{\delta \varphi}{\delta \alpha} = 2\alpha\frac{\delta W}{\delta \varphi} \\ \frac{\delta W}{\delta \varphi}\varphi' &+ \frac{\delta W}{\delta \rho}\rho' = \gamma' \end{aligned} \tag{34}$$

로서 식 (33)과 비교하면 $F(\varphi)=0$이 된다.

따라서 발생함수 W는

$$W=\int dx\left(\gamma+\frac{\varphi'}{2}\ln\frac{\gamma-\varphi'}{\gamma+\varphi'}\right) \tag{35}$$

로서 함수 형태는 실수 dilaton장에 대해서 참고문헌 〔4〕에서 구한 결과와 일치한다.

Hamilton Principal함수는 양자 이론에서 WKB근사식을 이용하여 물리적 파동함수를 구할 때 플랑크 상수 $\hbar$의 최소항까지만 고려한 경우의 위상인자이다. 즉 식 (22)의 해로서 $\psi(x)$를

$$\psi(x)=\exp\left\{\frac{i}{\hbar}(s_0+\hbar s_1)\right\} \tag{36}$$

으로 할 때 식 (35)는 s_0가 된다.

마찬가지로 $\hbar$의 다음 차수, 즉 양자보정 항 s_1은 식 (27)에서 $P_\rho=\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta\rho}$로 치환하면 다음 방정식을 만족한다.

$$2\frac{\delta}{\delta\rho}s_0\frac{\delta s_1}{\delta\rho}+\frac{\delta^2 s_0}{\partial\rho^2}=0 \tag{37}$$

식 (35)에서 $W=s_0$를 이용하면 (37)식의 해 s_1은

$$s_1=-\frac{1}{2}\ln\gamma \tag{38}$$

이 된다.

식 (35), (38)을 이용하여 근사적인 파동함수 ψ를 다시 쓰면

$$\psi(x)=A\gamma^{-\frac{1}{2}}\exp\int dx\left\{\gamma+(\alpha\alpha'+\beta\beta')\ln\left(\frac{\gamma-2(\alpha\alpha'+\beta\beta')}{\gamma+2(\alpha\alpha'+\beta\beta')}\right)\right\} \tag{39}$$

가 된다.

결론적으로 2차원시공에서 작용(1)로 주어지는 이론은 식 (20)에서와 같이 이상항에 나타나는 경우를 제외하면 게이지 변환에 대해서 Lagrange 미정계수가 (14)식 처럼 변환할때 게이지 불변이 된다. 특수한 등각변환에 대해 이상항이 나타나므로 등각변환에 대해서 구속조건들에 대한 Poisson bracket을 항상 확인해야 한다. 참고문헌 〔4〕에 주어진 것처럼 작용(1)로 주어지는 이론에서는 인수정렬(factor ordering) 문제를 고려하지 않으면 근사식을 사용하지 않고도 양자화 될 수 있다.

참고문헌

1. R.Arnowitt, S.Deser, and C.W.Misner, *The Dynamics of General Relativity, in GRAVITATION : an introduction to current research*, ed. by L.Witten, John Wiley & Sons, NewYork.
2. M.Henneaux and C.Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton, Princeton, (1992).
3. C.Teitelboim, Phys.LettB, 126.5241, (1983).
4. J.Gegenberg and G.Kunstatter, Phys. RevD 47, R4192, (1993).