제주교육대학교 논문집 (2006)
제35집 pp. 65~88

초등수학에서 사용가능한 이산수학 주제에 관한 교수학적 분석

최 근 배*

〈목 차〉

Ⅰ. 서 론

오늘날 지식은 과거 산업사회와는 비교가 되지 않을 정도로 빠른 속도로 변화하고 있다. 이에 따라, 빠르게 변화하는 사회적 환경에 적응하기 위한 새로운 지식의 습득이 요구된다. 이와 같은 최근의 사회적 흐름의 변화에는 컴퓨터의 보급과 인터넷의 확산이 주요한 요인이며, 이러한 시대적 조류에 편승하여 이산수학의 중요성이 널리 인식되고 있다.

* 제주교육대학교 수학교육과 조교수

National Council of Teachers Mathematics, 이하 NCTM, (1989)에서는 9-12학년의 규준으로 이산수학을 도입하고 있으며, 그 교육적 가치를 수학의 다른 분야와 같은 수준으로 평가하고 있다. 한편, NCTM(2000)의 '학교수학을 위한 원리와 규준'에서는 이산수학의 주요한 내용을 포함하고 있지만, 별도의 규준으로 다루지 않고 Pre-K에서 12학년까지에 걸쳐 여러 규준에 흩어져 분포되어 있다. 이산수학은 다양한 분야에 폭넓게 사용되는 현대 수학의 한 분야로서 학교수학의 교육과정에 없어서는 안 될 필수적인 분야이며 또한 이산수학의 주제들은 수학의 다른 분야를 통해서 자연스럽게 나타난다.

황석근 외(2001)은 근년에 이산수학이 각광받는 수학의 한 분야로 인식되어 진 이유로 다음과 같은 두 가지를 들고 있다. 첫째로, 전 시대에는 자연현상을 연속적인 모델로 보았지만 컴퓨터의 많은 영향을 받고 있는 오늘날에는 오히려 연속적인 현상마저도 이산적 모델로 분석하려는 경향이 있다. 왜냐하면, 컴퓨터는 프로그램에 의하여 움직이고 프로그램은 이산적 알고리즘에 의하여 작성되기 때문이다. 둘째로, 예전에 무심코 간과했던 교육적 측면이 이산수학 속에 들어 있기 때문이다. 즉, 이산수학은 정해진 틀을 따르기보다는 수학적 센스를 요구하는 경우가 많고, 보통의 수학문제도 이산적인 아이디어를 사용하면 쉽게 해결되는 경우가 많다. 또한 이산적인 이아디어와 기술은 사회과학, 생물학, 정보이론 등과 같은 수학의 타 분야에 그 효용성과 더불어 광범위하게 사용되고 있다.

Hart(1991)는 학생들에게 이산수학의 학습을 권장해야 할 이유를 네 가지로 들고 있다. 첫째, 이산수학은 수학학습에 생동감을 준다. 이산수학의 주제들은 새롭고 흥미로운 것들이며 수학적 배경이 거의 없는 학생들도 배울 수 있어, 교실 수업에서 학생들에게 수학의 활력과 흥미를 불어넣을 수 있다. 둘째, 이산수학은 문제해결에서 알고리즘적으로 사고하는 능력을 키울 수 있으며 새로운 수학적 모델링을 풍부하게 제시하기 때문이다. 셋째, 이산수학은 다양한 분야에서 폭넓게 사용되기 때문이다. 넷째, 이산수학은 전통적인 교육과정을 보충하며 향상시키고 수학 교육과정을 폭넓고 풍부하게 하기 때문이다.

이러한 시대적 흐름에 부응하여 우리나라의 제 7차 수학과 교육과정에서도 이산수학을 고등학교 과정의 심화 선택과목으로 포함시켜 가르치고 있으며 최근의 몇몇 연구에서도 새롭게 주목받고 있는 이산수학에 대한 논의가 이루어지고 있다. 그러나 이러한 교육과정이나 연구들이 아직은 중등중심의 것이 대부분이고 초등학교에 적용할

만한 것은 그 수가 많지 않다. 교육과정의 연계적인 측면과 더불어 앞에서 언급한 것처럼 이산수학은 많은 수학적 지식을 요구하지 않으며 또한 수학학습에 흥미를 불어넣을 수 있다는 점에서 초등에서의 이산수학에 대한 다양한 논의가 필요하다.

현재까지 초등수학에 관점을 둔 이산수학과 관련된 연구에는 이도영(1995), 전민경(2003), 최근배 외(2005a, 2005b), 최근배(2005) 등이 있다. 이도영(1995)은 초등에서 소개될 수 있는 10개의 이산수학 주제[1]에 대하여 논의하고 이 중에서 수세기, 한붓그리기, 지도 색칠하기, 최소지름 수형도에 대한 학습 문항 개발 및 이에 따른 성취도 평가를 하였다. 전민경(2003)은 New Jersey의 교육위원회에서 선정한 5가지의 이산수학 주제[2]를 중심으로 K-2, 3-4, 5-6학년에서 배우는 이산수학적인 내용을 분석하고, 또한 이 주제들을 기준으로 우리나라 제 6, 7차 교육과정의 초등수학에서 다루어지고 있는 이산수학 내용과 관련된 문제를 분석하였다. 최근배 외(2005a)는 Polya의 문제해결학습을 바탕으로 초등영재교육에 적용할 수 있는 이산수학 이론 자체를 중심으로 한 프로그램을 구성하였다. 최근배 외(2005b)는 이산수학에 관점을 둔 초등 수학교과서를 분석하였다. 또한 최근배(2005)에서는 네트워크(관계)와 관련된 이산수학 이론을 중심으로, 주로 Lakatos의 준경험주의 수리철학과 Polya의 발견술을 이론적 배경으로 한 학습프로그램의 내용을 구성하는 문제에 대한 교수학적 변환에 대하여 연구하였다.

본고에서는 창조(발견)하기와 정당화[3]하기의 의사소통과 관련된 유연성을 기르기 위한 활동의 관점에서, 이산수학을 경험해보지 못한-이산수학의 개념에 대한 전반적인 인식의 부족, 이에 따른 학습자료 개발 능력 부족 등-초등학교 교사를 위한 수학적인 전문성함양을 목적으로, 이산수학의 기초적인 개념 중에서 계수원리, 분할문제, 한붓그리기, 도로망문제를 중심으로 교수학적 분석을 시도하고, 이에 따른 시사점을 얻고자 한다.

---

1) (1) 수 세기 (2) 집합 (3) 논리적 추론 (4) 규칙성 (5) 알고리즘 (6) 확률 (7) 한붓그리기 (8) 최소지름 수형도 (9) 지도 색칠하기 (10) 소규모 최적 정보통신망 구축

2) (1) 체계적인 표 만들기, 수세기, 추론하기 (2) 그래프와 수형도 같은 이산수학적 모델들 (3) 반복적인 모형과 과정 (4) 배열, 조직, 분석, 변형과 정보전달 (5) 알고리즘이라고 불리는 교육의 추론과 연구

3) 구체적 조작기의 학생들에게는 증명이라는 용어보다는 비형식적 증명이라는 관점에서 정당화라는 용어가 어울린다.

Ⅱ. 이산수학의 기초적인 주제들

'이산수학(Discrete Mathematics)이란 무엇인가?' 라는 물음에 답하기는 쉽지 않다. 여기서,「이산」이라는 사전적 의미는 '따로따로 떨어진, 분리된, 별개의' 라는 의미로 「연속」에 반하는 단어이다. 이산수학과 관련된 정의는 여러 가지의 관점에 따라 다를 수 있지만, 이산(離散)의 사전적 의미에 충실 한다면, 이산적인 대상과 이산적인 방법을 사용하는 수학으로 설명할 수 있으며, 해석학(analysis)의 토대가 되는 연속수학의 고전적인 개념과 대조된다. 이러한 관점을 수용한다면, 초등수학 대부분은 이산수학이라고 말할 수 있다.

한편, 뉴저지(New Jersey) 주의 수학과 교육과정에서는 이산수학과 관련된 정의를 다음과 같이 설명하고 있다.

> 이산수학은 이산적 대상의 배열을 다루는 수학의 한분야로서 한 도시에서 다른 도시로 가는 최적의 길을 찾는 것과 같은 일상생활에서 등장하는 다양한 주제와 기술과 관련되어 있다. 이산수학은 또한 얼마나 많은 종류의 피자 토핑이 가능하며, 해야 할 일의 순서를 최적화할 수 있는 방법이나 컴퓨터가 정보를 저장했다가 화면에 출력하는 방법과 같은 문제도 다룬다. 이산수학은 행정공무원, 의료, 교통, 통신 담당자들이 판단할 때 사용하는 수학이다. 이와 같이 다양하게 사용되는 이산수학은 학생들에게 수학과 실세계의 관련성을 보여 줄 수 있다(New Jersey's Curriculum Content Standards, 1991, 전민경에서 재인용, 2003).

실제로, 이산수학의 힘과 그 응용은 실세계에 나타나는 제반문제와 깊이 관련되어 있다. 이러한 점은 현재 수학교육에서 지향하고 있는 현실주의적 수학교육론과도 잘 부합된다.[4] 이산수학에서 가장 중요한 부분은 조합론(combinatorics)으로, 주된 관심사를 요약하면 다음과 같다(황석근 외, 2001 ; Dossey, 1991 ; Brualdi, 1977).

· 특정한 패턴의 배열이 존재하는가? (배열의 존재성)

4) Freudenthal(1983)이 말하고 있는 교수학적 현상학이 의미하는 바는 수학적 대상에 대한 심상을 구성하는 것이 먼저 선행되어야 하며, 이를 통해서 점진적으로 수학적으로 세련시켜야 함을 의미하는 것이다. 즉, 수학의 출발점은 학습자의 체험된 현실(현상)이고, 수학학습은 이런 현상을 수학적 수단으로 스스로 조직하는 경험을 우선시키고 점진적으로 형식화 과정을 밟아나가야 한다는 것이다.

· 존재한다면 몇 개나 있는가? (배열의 개수)
· 어떤 배열이 최적의 배열인가? (최적 배열 찾기)
· 배열의 구조는 어떠한가? (배열 구조분석)

이러한 문제들에 대하여 해를 구하는 알고리즘의 개발과 분석이 이산수학의 핵심이라고 할 수 있다. NCTM(1989, 2000)에서는 이산수학과 관련된 내용 중 순열조합, 반복과 회귀, 그래프(여기서는, 유한개의 점(꼭지점)과 이들 점을 연결하는 선(변)으로 이루어진 그림을 의미한다)를 포함하고 있다. 이러한 내용들은 유치원부터 12학년에 이르기까지 체계적으로 발전되며, 또한 9-12학년에서는 행렬(matrix)을 다룬다. 순열조합은 계수문제와 관련되어있고, 반복과 회귀는 단계적인 변화를 모델링 또는 식으로 만드는데 이용되며, 그래프는 경로, 네트워크, 대상들과의 관계와 관련된 문제를 모델링하고 해결하는데 이용된다.

이제, 초등수학에 적용 가능한 몇몇 이산수학과 관련된 기초적인 주제에 대하여 교수학적 분석을 하고, 약간의 교수학적인 시사점을 얻어 보고자 한다. 여기에서 다루고자하는 주제들은 기초적인 수세기(counting) 기법, 기초적인 분할의 문제, 알고리즘적 사고를 기르기 위한 한붓그리기의 문제와 도로망문제 등과 관련되어 있다. 이러한 주제의 선정은 초등수학에서의 적용가능성을 염두에 둔 것이다.

1. 계수(計數)하기

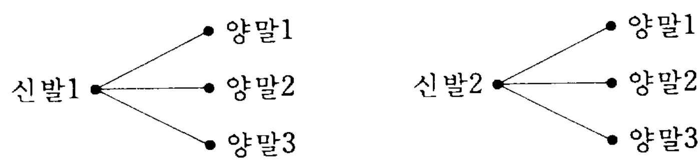
인간이 살아가는 동안 가장 많이 접하게 되는 수학적인 요소는 수세기(counting)라고 할 수 있다. 여기서는 수세기와 관련된 몇 가지의 기초적인 방법에 대하여 논의하고자 한다.

가. 곱집합(Cartesian Product)

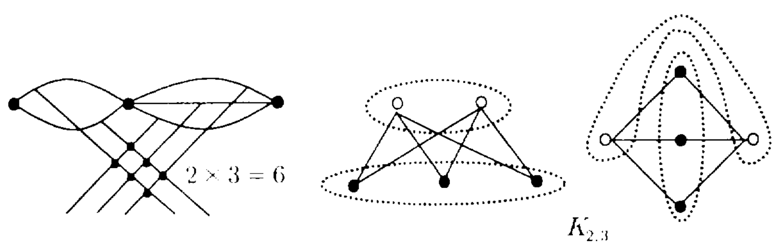
곱집합 개념은 수세기의 가장 기초적인 개념과 관련되어 있다. 이것은 단순히, 순서쌍들의 모임으로 정의되지만, 곱셈의 개념, 경우의 수 등 다양하게 적용될 수 있는 주제이다. 경험에 의하면, 학생들은 곱집합과 관련된 표층구조(순서쌍들의 모임)는 쉽게 알고 있지만, 곱집합에 내재된 의미와 활용에는 학습능력이 약함을 보였다(〈그림 1〉 참조). 즉, 기호화된 표층구조의 분석적 사고능력이 미약함을 보였다. 일반적으로, 대

부분 학생들의 곱집합과 관련된 개념이미지(concept image)[5]는 좌표평면에만 고착되어 있으며, 곱셈의 개념, 경우의 수의 개념과는 별개로 생각하는 경향을 보인다. 물론 이러한 문제는 교사들의 교수방법의 문제에서 기인하다고도 볼 수 있다. 실제로, 곱집합과 관련하여 다양한 형태의 모델을 만드는 활동은 다양한 형태의 개념이미지를 형성하는데 도움을 줄 수 있으며, 이로부터 여러 가지 종류의 문제를 해결하는데 유창성을 발휘할 수 있다(〈그림 2〉 참조).

1. 아래의 그림은 어떤 '수학적 개념'을 모델화한 것인가? 이에 대하여 논하고, 이러한 수학적 개념을 설명하기 위한 자기 자신의 모델을 만들어 보자.



〈그림 1〉 곱집합의 모델링[6]



〈그림 2〉 곱집합과 관련된 다양한 모델: 완전이분그래프[7]($K_{2,3}$)

나. 이중계수 원리(double counting principle)

---

5) 수학적 개념과 관련된 용어의 보거나 들을 때, 우리의 머리 속에 무엇인가가 떠오른다. 일반적으로 개념이 정의되어 있더라도 떠오르는 것은 '개념정의'가 아니다. 떠오른 것을 '개념이미지'라고 부른다(Tall & Vinner, 1981 ; Vinner, 1983).

6) 대학교 교양수학에서의 시험 문제 중 하나의 예시이다. 정답률이 50%정도로 곱집합의 의미보다는 단지 경우의 수(수형도)로 인식하고 있다. 특히, 자신의 새로운 모델을 만드는 유창성에는 매우 낮은 반응(30%)을 보였다.

7) 완전이분그래프(complete bipartite graph) $K_{n,m}$에서의 변의 수는 n×m이다. 즉, n개의 원소를 가지는 집합 A와 m개의 원소를 가지는 집합 B의 곱집합 $A \times B$의 원소의 개수와 같다.

우리가 그르칠 수 있을 만큼 단순하지만 흔히 사용되는 상당히 중요하고 유용한 계수원리가 있다. 「같은 집합이 두 가지의 다른 방법으로 계수 되었다면, 그 두 답은 같다」는 것으로, 주어진 수 행렬에서 모든 행의 원소를 모두 더해서 그 행렬을 구성하고 있는 모든 원소들의 합을 찾고, 모든 열의 원소를 모두 더하여 그 합을 확인하는 것과 유사하다.

이 원리는 우리가 흔히 「악수보조정리(Handshaking Lemma)」라고 부르는 응용에 의하여 잘 설명된다.

악수보조정리[8]: 어떤 모임에서, 홀수 번 악수를 한 참석자의 수는 짝수이다.

실제로, 이 원리는 「어떤 모임에서 악수한 손의 총 수는 그 모임에서 일어난 악수의 총 횟수의 두 배와 같다」는 사실로부터 자연스럽게 유도된다. 따라서 어떤 모임에서 일어난 악수의 총 회수를 구할 때, 그 모임에 참석한 각 개인에게 악수한 회수를 물어 그 회수의 총합을 구한 후에, 그 총합을 2로 나누면 된다. 우리의 일상에서도 두 가지의 서로 다른 두 대상의 행위에 의하여 하나의 결과가 나타나는 현상을 자주 접할 수 있다. 이를 테면, 운동경기, 컴퓨터 게임, 가위바위보, 인사하기 등이 그 예이다.

이중계수의 문제는 주어진 대상들 간에 발생한 관계의 회수를 설명할 수 있는 기초적인 네트워크 문제로 적절한 교수학적 변환을 거쳐 현행 초등학교 수학교과서에 도입되어 있다. 이러한 원리가 숨어있는 제 7차 초등학교 수학교과서 및 수학 익힘책에 도입된 문제를 중심으로 그 내용을 살펴보면 다음과 같다.

〈4-나〉

- 사각형, 오각형의 대각선은 모두 몇 개입니까?
- 토끼, 사자, 여우, 사슴, 염소 5팀이 축구 경기를 합니다. 각 팀끼리 서로 한 번씩만 경기를 한다면, 모두 몇 경기를 하게 되는가요?
- 축구 경기에 8팀이 참가하여 각 팀끼리 서로 한 번씩 경기를 한다면, 모두 몇 경기를 하게 됩니까?

---

8) 오일러(Leonhard Euler, 1707-1783)의 1736년의 그래프 이론의 원조로 널리 알려진 논문인 *Solutio problematis ad geometriam situs perinentis* 에 처음으로 소개되었다. 실제로, '임의의 그래프에서, 그 그래프의 모든 꼭지점의 차수의 합은 변의 수의 2배 이다' 라는 수학적인 정리로 그래프의 일반적인 특징을 기술한 것이다.

〈5-가〉

· 오늘 우리 반에서 치러지는 오목대회 경기는 모두 몇 번일까요?
· 37명이 2명씩 짝을 지어 가위바위보를 하려고 합니다. 이들이 모두 서로 한 번씩 가위바위보를 하면, 가위바위보는 모두 몇 번 하게 됩니까?
· 원 위에 점을 똑 같은 간격으로 8개 찍는다면, 선분을 모두 몇 개 그을 수 있습니까?
· 6명이 모여 씨름을 한다면, 씨름은 모두 몇 번 하게 됩니까?
· 탁구 선수 11명이 각자 다른 선수와 한 번씩 경기를 하려고 합니다. 경기는 모두 몇 번 해야 합니까?
· 9명이 서로 다른 사람과 악수를 한다면, 악수를 몇 번 하게 됩니까?

〈5-나〉

· 월드컵 경기는 32개국 축구 팀이 경기를 합니다. 32개국을 8조로 나누어 조별로 경기를 합니다. 각 조에서는 그 조의 모든 팀이 서로 한 번씩 경기를 한다면, 각 조는 경기를 모두 몇 번 합니까?

〈6-나〉

· 인주네 학교 6학년 네 반이 서로 한 번씩 축구 경기를 하려고 합니다. 경기를 모두 몇 번 해야 되는지 알아보시오.
· 수철이네 모둠에는 남학생이 5명 있습니다. 서로 한 번씩 경기를 하여 팔씨름 왕을 뽑으려고 합니다. 경기는 모두 몇 번 해야 합니까?
· 민정이네 학교 6학년 학생들은 반별로 발야구 대회를 하기로 하였습니다. 6학년이 모두 일곱 반인데, 모든 반과 한 번씩 발야구 경기를 하기로 하였습니다. 모두 몇 번의 경기를 해야 되는지 알아보시오.
· 5개의 야구팀이 서로 한 번씩 경기를 할 때, 총 경기 수는?
· 10명의 친구가 모두 한 번씩 악수를 하였습니다. 모두가 악수를 한 총 횟수는 몇 번입니까?
· 6명의 친구가 탁구 경기를 하려고 합니다. 모든 친구와 한 번씩 경기를 해야 한다면, 모두 몇 번의 경기를 해야 합니까?

이중계수와 관련하여, 〈6-나〉의 문제해결의 식 만들기 전략(각 대상이 행한 행위의 합을 2로 나눈다)에서 이러한 의도가 나타난다(〈그림 3〉 참조). 이전의 단계(4단계, 5단계)에서는 주로 그림 그리기, 규칙성 찾기의 전략을 사용하여 문제를 해결하고 있다. 여기서 중요한 점은 이러한 사실을 이중계수의 관점에서 교사가 인식하고 있는가라는 것이다. 즉, 이중계수의 문제가 학생들의 인지수준에 맞게 어떠한 형태의 교수학적 변환을 하고 있는지에 대한 교사의 인식수준의 문제이다.

활동 3. 식을 만들어 해결하여 보시오.

- **한 반은 몇 번의 경기를 하게 됩니까?**
- **다른 반과 한 번씩 경기를 하기로 했는데, 겹쳐지는 경기가 있다면 어떻게 처리해야 합니까?**
- **겹쳐지는 경기를 한 번으로 생각한다면, 일곱 반은 모두 몇 번의 경기를 하게 됩니까?**
- **위의 생각을 식으로 만들어 계산해 보시오.**
- **총 경기 수는 얼마입니까?**

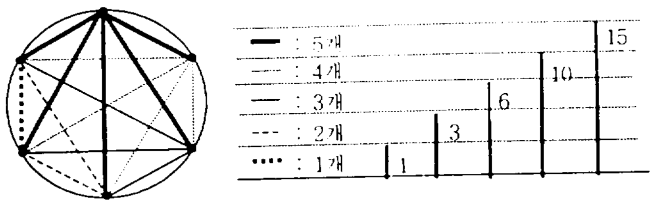
〈그림 3〉 이중계수(교육부, 2004, 〈6-나〉, p. 135)

초등 수학교과서에 나타나있는 이중계수와 관련된 문제들의 공통점은 「임의의 서로 다른 두 대상은 관계행위에 반드시 참석해야 하며 또한 그 행위는 단 한번 발생한다」는 것이다. 이것은 일반적인 이중계수의 문제에서 약간의 제약을 받고 있음을 암시하고 있다. 즉, 초등학생의 인지수준에 맞게 적절한 교수학적 변환을 거쳐 교과서에 제시되고 있다(〈그림 4〉 참조).

〈그림 4〉 교수학적 변환

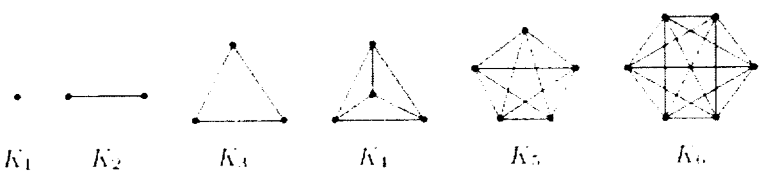
현행 초등학교 교과서에 주어진 이중계수 문제를 살펴보면 〈표 1〉에서 대각선의 값은 0이고, 대각선을 제외한 다른 부분은 모두 1인 경우임을 알 수 있다. 여기서, 학교현장의 교사가 〈그림 4〉에 주어진 변환과정을 인지하고 있다면, 실세계에서 나타날 수 있는 보다 일반적인 이중계수의 문제(〈표 1〉 참조)를, 학생들의 추론능력을 기르기 위한 학습 자료의 관점에서, 학생들에게 제공할 수 있다.

이중계수 문제와 관련된 문제해결전략으로, 그림그리기(〈그림 6〉 참조), 규칙찾기, 식 만들기의 세 가지를 현행 초등 수학교과서에서 도입하고 있다. 이 세 가지 전략사이의 관계를 살펴보면 〈그림 5〉와 같다(최근배 · 강문보, 2005b).



이중계수 : $\frac{5\times6}{2} = 1+2+3+4+5$

〈그림 5〉 세 가지 전략들의 관계



〈그림 6〉 그림 그리기 전략: 완전그래프[9](K_n)

〈표 1〉 이중계수의 해석(최근배 · 강문보, 2005. 6.)

	x_1	x_2	x_3	⋯	x_n	합	
x_1						→	$d(x_1)$
x_2						→	$d(x_2)$
x_3							$d(x_3)$
⋮							
x_n						→	$d(x_n)$

$\boxed{d(x_1)+d(x_1)+\cdots+d(x_n)=2\times e}$

9) 완전그래프(complete graph) K_n의 변의 수는

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

다. 비둘기집의 원리(Pigeon Hole Principle)

「(n+1)마리의 비둘기를 개의 비둘기집에 넣으면, 2마리 이상 들어간 집이 반드시 있다」[10] 이와 같은 주장은 너무도 당연한 것이지만, 문제해결의 과정에서 흔히 나타나는 배열의 존재성을 이야기 할 때, 주요한 원리로 사용된다. 이 원리는 두 마리 이상의 비둘기를 가진 비둘기집을 찾는데 도움을 주지는 못한다. 단지, 그러한 비둘기집이 있다는 사실을 주장하는 존재성의 문제인 것이다.[11] 예를 들어, 학생 13명 중에는 생일이 같은 달인 학생을 구체적으로 찾지는 못해도, 생일이 같은 달인 학생이 적어도 2명이 있다는 존재성은 보장해 준다.

비둘기집의 원리는 문제해결 과정 중에 자주 나타나는 원리로, 중요한 점은 무엇을 비둘기로, 또한 무엇을 비둘기집으로 간주 할 것인가를 주의 깊게 살펴봐야 한다.

이도영(1995)의 논문에 의하면, 비둘기집의 원리를 이용한 수세기문제[12]의 초등학교 고학년을 대상으로 한 학업성취도 평가에서 상당한 학습효과가 있음을 보였다.

여기서는 학생들을 위한 학습활동으로 램지게임을 소개하고자 한다(Cameron, 1994). 이 게임의 목적은 이중계수 및 비둘기집의 원리 개념을 인식시키기 위함이다. 만일 학생들이 두 개념의 형성에 어려움을 겪는다면, 교사는 다음의 두 가지를 학생들에게 인식시킬 필요가 있다.

- 선분의 수는 몇 개나 될까?
- 항상 게임이 성립할까요? 즉, 항상 승자가 있을까요? 만일 게임이 성립하면, 그 이유는? 많은 게임을 하여 각 게임을 분석해 보세요.

램지게임(Ramsey Game)

- **개 념** : 이중계수, 비둘기집의 원리
- **능 력** : 이중계수와 비둘기집의 원리 인식하기
- **활 동** : 2명씩 짝을 지어 할 수 있는 놀이 게임이다. 이 게임의 목적은 이중계수 원리와 비둘기집의 원리의 개념을 쌓아가는 데 있다.

---

10) 일반적인 비둘기집의 원리: 「m마리의 비둘기를 n개의 비둘기집에 넣으면, ⌈m/n⌉마리 이상 들어간 집이 반드시 있다」

11) 이 사실은 구성의 관점과 비교하여 수학적 존재성의 특수성을 보여 준다.

12) 4개의 문항으로 구성되어 있다. 문항의 예들은 주로 「몇 권의 책과 책꽂이가 8칸 있다. 각 칸마다 책을 고루 꽂아야 한다. 그런데 어느 한 칸에 10권의 책을 꽂았다. 책은 최소한 몇 권 있는가?」와 같은 비슷한 종류의 문제로 구성되어 있다.

· **준비물** : A4 용지 한 장, 서로 다른 색의 색연필 두개
· **방　법** :
1. 준비한 종이 위에 어느 세 점도 동일 선상에 놓여 있지 않도록 6개의 큰 점을 찍어라 (예를 들어, 정육각형의 꼭지점).
2. 준비된 두 개의 색연필을 각자 선택하고, 차례로 자신의 색연필로 이미 연결되어 있지 않은 두 점을 선택하여 선분으로 연결 한다 (6개의 점을 제외한 곳에서 선분들의 만남은 중요하지 않다).
3. 먼저 자신의 색으로 칠해진 세 변을 가지는 삼각형을 만든 학생은 이 게임에서 진다.

결국, 비둘기집의 원리란 몇 개의 수가 있을 때, 그 중 적어도 하나는 평균이상이라는 뜻이다. 또한 몇 개의 수 중 적어도 하나는 평균이하라는 사실도 같은 원리라고 할 수 있다. 따라서 학생들에게 평균과 관련된 문제를 가르칠 때, 이 원리가 유용하게 사용될 수 있다.

2. 분할하기

가. 모임의 분할

「주어진 n개의 서로 다른 구슬을 k개의 그룹으로 나누는 방법의 수」를 모임의 분할 수 또는 제 2종 스털링수 (Stirling number of the second kind)라고 부르고, 수학적 기호 $S(n, k)$로 나타낸다. 여기서 k개의 그룹을 구별하지 않는다고 가정한다. 실제로, 모임의 분할 수는 수학에서 가장 근본적인 개념인 '동치관계(equivalent relation)'와 깊은 관련이 있다.

먼저, 빨간색, 파란색, 검은색인 구슬 3개를 개의 그룹으로 나누는 방법의 수를 살펴보자.

· $k=1$: {{빨, 파, 검}}: 1가지
· $k=2$: {{빨}, {파, 검}}, {{파}, {빨, 검}}, {{검}, {빨, 파}}: 3가지
· $k=3$: {{빨}, {파}, {검}}: 1가지
· $k\geq4$: 0가지

즉, $S(3,1)=1$, $S(3,2)=3$, $S(3,3)=1$이고 다른 경우는 방법의 수가 0이 됨을 알 수 있다.

일반적인 경우의 제2종 스털링 수의 규칙성을 찾아보자.

(1) $k>n$: $S(n, k)=0$

(2) $k=1$, $n=k$: $S(n, k)=1$

(3) $k<n$:

이 경우는 구슬의 개수가 그룹의 개수보다 큰 경우를 의미한다. 여기서, 조합론에서 흔히 사용하는 문제해결 기술을 적용해보자. 다시 말해서, 특정한 구슬을 선택하고, 선택된 구슬을 중심으로 단순화하여 생각해 보자. 이를 위하여, n개의 서로 다른 구슬을 편의상 1, 2,…n이라고 하고, 이때 선택된 특정한 구슬을 n이라고 하자. 그러면 우리가 모임의 분할을 할 때, 특정한 구슬 n은 다음과 같은 2가지의 경우로만 나타난다.

경우 1 : 특정한 구슬 n이 혼자서 1개의 그룹을 이루는 경우

이 경우에는 구슬 n을 제외한 나머지 (n-1)개의 서로 다른 구슬 1, 2,…,(n-1)을 (k-1)개의 그룹 G_1, G_2,…G_{k-1}으로 분할함으로써 n개의 구슬은 다음과 같은 k개의 그룹으로 나누어진다.

$$\{G_1,\ G_2, \cdots G_{k-1},\ \{n\}\}$$

따라서 모임의 분할 수는 $S(n\text{-}1,\ k\text{-}1)$이다.

경우 2 : 특정한 구슬 n이 다른 구슬과 함께 1개의 그룹을 이루는 경우

이 경우에는 구슬 n을 제외한 나머지 (n-1)개의 서로 다른 구슬 1, 2, …,(n-1)을 k개의 그룹

$$G_1,\ G_2,\ \cdots,\ G_k$$

으로 분할한 후, n을 이 k개의 그룹 중 어느 하나에 포함시키면 된다. 따라서 구슬 n을 포함시키는 방법의 수는 그룹 수 k와 같다. 이로부터 모임의 분할 수는 $k \times S(n\text{-}1,\ k)$이다.

경우 1과 경우 2에 의하여, k<n인 경우에 나타나는 중요한 규칙성[13]은 다음과 같다.

$$S(n,\ k) = S(n-1,\ k-1) + k \times S(n-1,\ k)$$

구슬수 \ 그룹수	…	k-1	k	…
⋮				
n-1		**$S(n-1,\ k-1)$**	**$S(n-1,\ k)$**	
n			**$S(n,\ k)$**	
⋮				

나. 자연수의 분할

「서로 같은 구슬 n개를 k개의 그룹으로 나누는 방법의 수」를 알아보자. 이와 같은 종류인 모임의 분할 수를 수학적 기호 p(n, k)로 나타낸다. 예를 들어, 서로 같은 구슬(●) 4개를 k개의 그룹으로 나누는 방법의 수를 살펴보자:

- $k=1$: {{● ● ● ●}}: 1가지
- $k=2$: {{●}, {● ● ●}}, {{● ●}, {● ●}}: 2가지
- $k=3$: {{●}, {●}, {● ●}}: 1가지
- $k=4$: {{●}, {●}, {●}, {●}}: 1가지
- $k \geq 5$: 0가지

가 됨을 알 수 있다. 즉,

$$p(4,\ 1)=1,\ p(4,\ 2)=2,\ p(4,\ 3)=1,\ p(4,\ 4)=1$$

을 얻는다.

위의 예와 같이 $p(n,\ k)$는「자연수 n을 k개의 자연수의 합으로 나타내는 방법의 수」와 같음을 알 수 있다. 예를 들어, $p(4,\ 2)=2$; 자연수 4를 2개의 자연수의 합으로 나타내면

13) 황석근 외(2001)에서는 이 규칙성을「ㄱ」법칙이라고 부르고 있다.

$$4 = 1 + 3 = 2 + 2$$

$$\{\,\{\bullet\}, \{\bullet\ \bullet\ \bullet\}\,\},\ \{\,\{\bullet\ \bullet\}, \{\bullet\ \bullet\}\,\}$$

〈그림 7〉 자연수의 분할

일반적인 경우, 자연수의 분할수와 관련된 규칙성을 찾아보자.

(1) $k>n$: $p(n, k)=0$

(2) $k=1$, $n=k$: $p(n, k)=1$

(3) $k<n$:

이 경우는 구슬의 수가 그룹의 수보다 많은 경우를 의미한다. 여기서, 조합론에서 흔히 사용하는 문제해결 기술을 적용해보자.

먼저, 각 그룹은 적어도 하나 이상의 구슬을 가져야 함으로, 우선 각 그룹에 구슬 개씩 분배하자. 이제, 분배하고 남은 $(n-k)$개의 구슬을 $m(m=1, 2, \cdots, k)$개의 그룹에 나누어 주면된다. 그 방법의 수는 $p(n-k, m)$이다.[14] 이로부터 다음의 점화식을 얻을 수 있다.

$$p(n, k)=p(n-k, 1)+\cdots +p(n-k, k)$$

그룹수 / 구슬수	1	2	…	k	…
⋮					
$n-k$	$p(n-k, 1)$	$p(n-k, 2)$		$p(n-k, k)$	
⋮					
n				$p(n, k)$	
⋮					

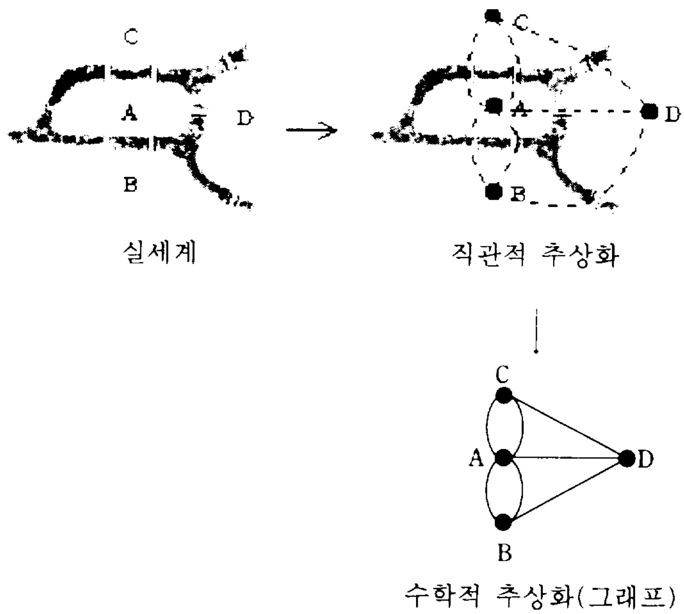
3. 한붓그리기

역사적으로, 한붓그리기는 오일러의 산책길 문제가 그 원형이다(주석 3 참조). 즉, 〈그림 8〉에서 "7개의 다리를 꼭 한번씩만 건너는 산책이 가능할까?" 여기서, 실세계에

14) 여기서 k개의 상자에서 m개의 상자를 선택하는 방법의 수는 생각할 이유가 없다. 왜냐하면, 서로 같은 구슬이고 상자의 구별이 없기 때문이다.

서의 문제가 직관적 추상화를 걸쳐 수학적으로 추상화-그래프-되고, 이로부터 추상화된 것이 수학적 사고의 대상이 되며, 이러한 변환과정에서 현실에서의 산책길 문제가 그래프(수학적 대상)에서의 '한붓그리기 문제[15]'로 전환된다.

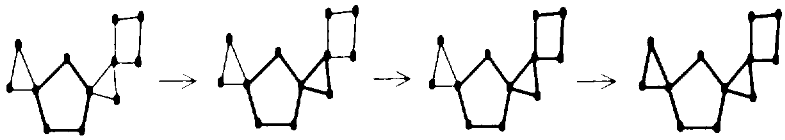
이산수학에서 도로망 문제와 마찬가지로 한붓그리기의 문제는 문제해결을 위한 알고리즘을 찾는 것이 중요하다. 즉, 학생들에게 알고리즘적 사고를 요구한다는 점이다. 그러나 대다수의 학생들은 이와 같은 종류의 문제를 단지 퍼즐처럼 다루는 경향이 있으며, 학생들의 답은 우연의 산물인 경우가 많다는 것이다. 실제로, 학생들이 탐구활동을 통해서 얻어야 할 것은 한붓그리기 수순(알고리즘)을 발견할 수 있어야 한다는 것이다. 따라서 한붓그리기와 관련된 학습프로그램은 한붓그리기의 수순을 찾아가는 형태의 탐구학습활동의 문제로 구성되어야 한다(〈그림 9〉 참고).



〈그림 8〉 수학적 추상화와 한붓그리기(최근배, 2005)

---

15) '위상수학(topology)' 라는 기하학은 Henri Poincare(1854~1912, 프랑스)가 그 기초를 마련했다고 한다. Poincare는 1895년에 123쪽이나 되는 논문(Analysis situs)을 발표했는데, 오늘날 '호몰로지(Homology)' 이론의 원형을 그 안에서 발견할 수 있다. 그러나 위상수학적 발상이나 감각은 수학사를 더 거슬러 올라갈 수 있다. 일반적으로는 오일러에 의하여 해결된 쾨니그스베르크를 가로질러 흐르고 있는 프레겔 강에 있는 7개 다리의 산책길 문제(〈그림 8〉 참조)를 위상수학의 근원으로 치고 있다. 수학의 역사발생적 측면에서 보면 위상수학이 가장나중에 나타났지만 심리학적관점에서는 역순임을 알 수 있다.



〈그림 9〉 한붓그리기 수순 찾기의 기본아이디어(최근배, 2005)

4. 도로망 문제[16]

도로망의 문제는 우리가 실세계에서 흔히 접할 수 있는 현실적인 문제로, 이를 수학적으로 추상화 하면 한붓그리기의 문제와 마찬가지로 수학적 사고의 대상인 그래프에서의 문제로 전환된다.

가. 최소연결문제(The Minimum Connector Problem)

주어진 몇 개의 장소를 연결하는 도로망체계가 필요하다고 하자. 어떤 두 장소는 지리적인 또는 정치적인 이유 때문에 도로로 연결할 수 없다는 점을 제외하고는 각 도로를 연결하고 유지하는 비용을 알고 있다고 하자. 가능한 최소 전체비용으로 모든 장소를 연결할 수 있는 도로망체계를 어떻게 디자인하면 될까?

이와 같은 최소연결 문제는 각 장소를 꼭지점으로, 각 도로를 변으로 두면 무게(비용 등)그래프로 나타낼 수 있다. 그러면, 이 문제는 무게그래프의 각 꼭지점을 지나면서 최소무게의 부분그래프를 찾는 문제로 귀착 된다. 만일 이 부분그래프가 순환길을 가지고 있다면 순환길의 변들 중 하나를 제거함으로써 더 작은 전체 비용을 만들 수 있기 때문에, 이 부분그래프는 항상 생성나무(spanning tree)가 되어야만 한다. 즉, 모든 꼭지점을 포함하는 주어진 그래프의 부분그래프를 의미한다.

최소연결 문제의 문제해결(생성나무 찾기) 전략인 Kruskal의 알고리즘(또는 greedy 알고리즘)을 간단히 살펴보면 다음과 같다.

(1) 먼저, 최소무게의 변을 선택한다.

(2) 선택된 변의 각 꼭지점에서 연결할 수 있는 변들의 무게를 보고, 그 중에서 최소무게인 변을 선택한다.

16) 최근배 외(2005a), 최근배 외(2005b), 최근배(2005)에 있는 내용을 수정 · 보완한 것임.

(3) 전 단계에서 선택된 변들의 각 꼭지점에서 연결할 수 있는 변들의 무게를 보고, 그 중에서 최소무게인 변을 찾는다. 여기서 주의할 점은 전 단계에서 선택된 변들과 새로 선택된 변에는 순환길이 없어야 한다.

(4) 이와 같은 활동을 반복하여, 모든 꼭지점을 연결한다.

위의 사실로부터 우리가 고려해야 할 두 가지의 핵심사항은 다음과 같다.

(K1) 올림차순으로 길의 무게(비용 등)를 정렬하기

(K2) 다음 길의 선택에 순환길 여부를 인식하기

위의 두 가지 사항 중에서 (K1)의 경우는 순차적으로 찾아가는 활동이라는 관점에서 학생들의 활동을 통한 인식에는 큰 어려움이 없다. 그러나 (K2)의 경우에는 약간의 사고활동을 요구할 수 있으며, 최소무게의 도로망연결이라는 개념과도 직결된다. 따라서 (K2)의 경우에는 소집단 활동을 통한 의사소통이 도움을 줄 수 있다.

한편, 이러한 두 가지의 개념은 컴퓨터 실행에 적절하지는 않다. 이 두 가지를 극복할 수 있는 방법은 각 길의 무게를 구성원소로 가지는 무게행렬을 이용하는 것인데, 이 알고리즘을 Prim의 알고리즘이라고 한다. 일반적으로, 알고리즘학습에 있어서 상기해야 할 점은 다수의 학생들은 단지 알고리즘에 대한 이해보다는 '절차적 지식' 만을 알고 있다는 것이다. 즉, 개념적으로 이해하지 못하거나 절차가 왜 그렇게 이루어지는지를 모른다. 따라서 이와 같은 종류의 알고리즘학습 프로그램 또는 활동은 교사의 설명식 교수방법 보다는 소집단 활동 및 교사의 적절한 발문을 통하여 학생 스스로 알고리즘을 찾을 수 있는 발견학습이 되어야 한다. 특히, Prim의 알고리즘과 같이 네트워크 문제를 해결하는데 '기하적 모델' 대신에 '표' 와 같은 대수적 모델을 사용하는 경우에는 세심한 주의가 필요하다. 이를 테면,

· 행을 지우는 조작활동의 실제적인 수학적 개념은 무엇일까?
· 지워진 행들과 대응해서 그 열들에서 최소값을 찾는 이유는 무엇일까?
· 초기의 무게행렬에서 변화된 행렬을 보고 실제적 도로망을 구성할 수 있을까?

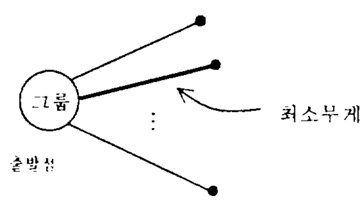
이는 초등학생의 인지수준과 관련되며, 표 모델의 경우는 대상간의 연결 상태를 나타내는 시각적인 요소가 없기 때문이다.

나. 최단경로 문제(The Shortest Path Problem)

최단경로를 찾는 문제는 최소연결문제와는 달리 모든 지점을 연결하는 최소무게의 연결망을 찾는 것은 아니다. 단지 한 지점에서 다른 지점으로 가는 최소무게의 연결망을 찾는 것이다. 모든 변의 무게(거리, 비용 등)가 0이상인 네트워크에서 최단경로를 찾는 딕스트라(Dijkstra) 알고리즘을 간단히 살펴보면 다음과 같다.

(1) 먼저, 출발점을 0으로 본다.
(2) 출발점에서 다음 경로로 갈 수 있는 모든 곳들의 무게를 보고, 그 중에서 최단경로인 곳을 표시한다.
(3) 전 단계에서 선택한 경로에서 한 단계로 이어진 경로 중 최단경로인 곳을 표시한다.
(4) 이와 같은 활동을 반복하면 도착점까지 가는 최단경로를 찾을 수 있다.

위의 두 알고리즘(최소연결문제, 최단경로 문제)에 사용된 핵심적인 개념을 추출하면 〈그림 10〉과 같다. 즉, 각 단계의 출발점은 이전단계에서 얻은 점들과 경로들로 구성된 하나의 그룹이고, 이 그룹의 외부에 있는 점들과 한 단계 연결경로 중에서 무게(길이, 비용)가 최소인 경로를 찾는 일이 계속 반복된다. 어떤 것을 그룹화 하여 하나로 보는 재귀적 활동은 초등에서도 흔히 나타난다. 이를 테면, 수의 자리 값과 곱셈 등과 같은 개념의 도입 시 자주 사용하는 활동이다. 따라서 묶어서 하나(그룹)인 개념을 잘 이해하는 학생들에게는 이러한 알고리즘과 관련된 활동도 충분히 인식할 수 있다고 생각된다.

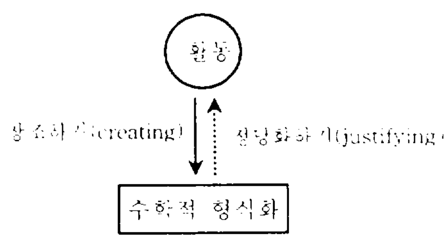


〈그림 10〉 최단경로와 최소연결 문제의 핵심아이디어

Ⅲ. 결론 및 논의

수학적 센스를 요구하며 문제해결에 유용한 역할을 하는 이산수학적 사고와 관련된 어린시절(초등학교)의 경험은 상위학년에서의 수학학습에 많은 도움을 줄 수 있다. 그러나 교사들의 이산수학이론에 대한 경험 및 학습부족[17]은 이산수학의 개념에 대한 인식부족과 이에 따른 학생들을 위한 창의성 학습자료 개발능력의 부족을 초래할 수 있다. 따라서 기초적인 이산수학이론은 초등교사가 지녀야할 중요한 수학적 전문성 중의 하나라고 생각된다.

초등수학에서의 일반적인 교수-학습구조는 개략적으로 〈그림 11〉과 같다. 즉, 활동을 통해서 수학적 개념을 형식화 또는 기호화하고, 이를 이용하여 문제를 해결하는 활동으로 구성된다.



〈그림 11〉 교수-학습구조

그러나 수학적 형식화로부터 창조 또는 발견의 역 활동인 정당화와 관련된 활동은 소홀히 다루는 경향이 있다. 이러한 경우에 나타날 수 있는 문제점은, 문제를 해결하는 데 유용하게 적용될 수 있는 수학적으로 형식화된 식을 모르는 경우에 학생들은 문제해결에 어려움을 겪을 수 있다는 것이다. 따라서 창조하기와 정당화하기의 의사소통과 관련된 유연성을 기르기는 활동이 수학학습에 매우 중요하다. 이러한 점에서, 이산수학은 문제해결에 유용한 주제로, 알고리즘적 사고와 반성적 사고를 통한 수학적 추론과 정당화의 능력을 길러줄 수 있다.

본고에서는 학생들의 분석적 사고와 정당화의 능력을 배양하기 위한 교수-학습에 관점을 두고, 이산수학의 기초적인 주제인 계수 원리, 분할문제, 한붓그리기, 도로망

17) 전통적으로 미분, 적분과 같은 연속수학이 주종을 이루었다.

문제 중심으로 이론적인 교수학적 분석을 하였다. 이러한 분석으로부터 얻을 수 있는 시사점을 요약하면 다음과 같다.

먼저, 기초적인 계수의 원리는 제 7차 교육과정 초등수학 교과서에서 주로 문제해결 영역에 도입되어 상당히 많이 다루고 있다. 곱집합과 관련된 계수의 원리는 곱셈의 개념, 경우의 수의 헤아리기 등으로 도입되고 있음을 알 수 있고, 이중계수의 원리는 현행 초등학교 교과서에서 다양한 형태의 문제로 도입하고 있지만, 결국 이는 하나의 수학적 개념인 자연수 1부터 n까지의 합을 계산하는 것과 동일한 것이다. 즉, 원 위에 $(n+1)$개의 점을 찍고 선분의 총 수를 구하는 것이고, 선분의 총 개수를 나타내는 계산식 $\frac{n(n+1)}{2}$의 해석은 이중계수의 원리로 해석할 수 있다.

다시 말해서, 다음의 등식

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

을 그래프를 이용한 이산적인 정당화의 방법 중 하나인 것이다.

초등학교 학생들은 초등수학 교과서에 도입된 다양한 형태의 계수 문제를 단지 개별적 문제로만 간주할 수 있다. 그러나 초등학생을 지도하는 교사가 다양한 문제에 적용되는 위에서 언급한 것 같은 수학적 이론을 가지고 있다면 학생들의 학습상황이 개선될 수 있다. 스캠프(1989)는 교사로서 만약 적절한 이론도 없이 아동의 정신과정에 관여한다면 우리는 이익보다 더 많은 해를 가져다 줄지도 모른다고 이론의 중요성을 강조하고 있다.

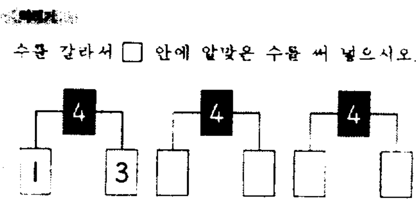
특히, 이중계수 문제를 그 속성의 관점에서 본다면, 앞에서 언급한 것처럼 실제로 초등수학에서의 이중계수와 관련된 문제는 모두 한가지이다. 이왕에 초등수학에서 이중계수 원리를 도입해서 그 개념을 인식시키고자 한다면, 다양하게 변형된 이중계수 문제도 여러 가지의 활동을 통해서 다루었으면 한다. 예를 들어, 「오늘 아침 등교를 하면서 우리 학급 친구에게 인사를 한 사람은 손들어 보세요?」 또는 「7개 팀이 출전하는 축구시합에서 모든 팀이 홀수 번 경기를 할 수 있게 대진표를 짤 수 있습니까?」 이러한 문제는 아동들에게 수 감각을 익히는 데에도 도움을 줄 수 있다. 즉, 홀짝성의 개념을 습득하는데 기여할 수 있다.

둘째, 비둘기집의 원리를 좀더 쉽게 해석하면 결국 이 원리는 「주어진 몇 개의 자연수 중에는 적어도 하나는 그 수들의 평균 이상 또는 이하이다」라는 뜻이다. 따라서 초

등학교 교과서에서 평균과 관련된 내용을 설명하기 위한 수단으로 이 원리를 이용하는 것도 바람직하다고 생각된다. 또한 자연수의 나눗셈에서 등분제 개념을 설명하는데 이 원리가 유용하다.

셋째, 어떤 모임을 분할한다는 것은 주어진 기준 하에 유사한 것끼리 모은다는 것을 의미한다. 좀더 수학적으로 말하면, 주어진 집합에서, 그 집합에서의 동치관계들의 모임과 분할들의 모임은 일대일대응이 있다는 것이다. 어떤 기준에 따라서 유사한 것 끼리 모으는 분류의 활동은 초등에서도 흔히 나타난다. 유사한 것끼리는 주어진 기준 하에 같다는 것이다. 즉, 「=」의 일반화된 개념으로 볼 수 있다. 예를 들어, 초등수학에서 배우는 「합동」, 「동치분수」, 「시계의 구성」, 「요일의 구성」등이 이러한 수학적 개념이 포함되어 있다.

넷째, 덧셈과 관련된 연산법칙을 설명하는 데에는 서로 같은 구슬 몇 개를 몇 개의 그룹으로 나누기 활동을 함으로써 그 개념을 인식시킬 수 있다(〈그림 12〉 참조). 또한 자연수의 분할 문제는 아동들로 하여금 수 감각을 익히는데 사용할 수 있는 문제이다.



〈그림 12〉 수 가르기

분할문제(모임의 분할, 자연수의 분할)를 해결하기 위한 규칙성을 찾는데, 중요한 이산수학적 문제해결전략인

- 특수한 것 중심으로 생각하기
- 먼저 설정하고 생각하기

는 경우의 수를 찾는 문제나 조합론에 나타나는 항등식(identity)을 이산적인 방법으로 증명할 때 흔히 나타나는 전략들이고, 초등교사가 문제해결의 관점에서 학생들을 지도하는데 유용한 것들이다. 이산수학은 문제해결에 유용하기 때문에, 이산수학 이론에서 자주 사용되는 전략을 분석한다는 것은 결국 문제해결 전략을 가질 수 있다는 것이다.

끝으로, 한붓그리기와 도로망 문제는 알고리즘적 사고를 기르기 위한 활동으로, 수학적으로 형식화된 이론을 소개하고, 단지 퍼즐처럼 다루는 경향이 있다. 즉, 알고리즘적 사고인 것은 아니다. 중요한 것은 찾기와 정당화의 활동을 통한 알고리즘적 사고를 기르는 것이다.

본고에서는 교사들의 이산수학과 관련된 수학적인 전문성향상을 위하여 초등학교 고학년에서 적용 가능한 이산수학의 몇몇 이론만을 중심으로 분석과 논의를 하였지만, 앞으로 좀 더 다양한 이산수학적인 주제를 분석함이 필요하다.

《참 고 문 헌》

교육부 (2004). 수학 〈1-가〉~〈6-나〉 교과서 및 익힘책. (주) 대한교과서 주식회사.

이도영 (1995). 국민학교 고학년에서 이산수학의 소개에 관한 기초 연구. 한국교원대학교 대학원.

전민경 (2003). 제 7차 교육과정에서 초등수학 이산수학에 관한 연구. 단국대학교 교육대학원.

최근배 · 안선영 (2005a). 초등 영재교육에 적용 가능한 이산수학 프로그램 개발 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E 〈수학교육 논문집〉 19(1), 167~189.

최근배 · 강문보 (2005b). 이산수학적 관점에서의 초등수학교과서 분석 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 C 〈초등수학교육〉 9(1), 11~29.

최근배 (2005). 초등영재 교육에 적용 가능한 이산수학 주제의 내용 구성에 관한 소고 (네트워크 문제를 중심으로). 대한수학교육학회지 〈학교수학〉 7(4), 353~373.

황석근 · 이재돈 · 김익표 (2001). 이산수학, 서울: 블랙박스

Brualdi, R. A. (1977). Introductory Combinatorics, New York, Oxford, Amsterdam: North-Holland.

Cameron, P. J. (1994). Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms, London: Cambridge University Press.

Dossey, J. A. (1991). Discrete Mathematics: The Math for Our Time. Kenney, M. J. & Hirsch, C. R. (Ed.). Discrete Mathematics Across the Curriculum K-12 1991

Year Book, Reston: NCTM.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1983.

Hart, E. W. (1991). Discrete Mathematics: An Exiting and Necessary Addition to the Secondary School Curriculum. Kenney, M. J. & Hirsch, C. R. (Ed.). Discrete Mathematics Across the Curriculum K-12 1991 Year Book, Reston: NCTM.

NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston, VA., The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA., The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Skemp R. R. (김판수 · 박성택 역) (1996). 초등수학교육, 서울: 교우사.

Tall, D. O. & Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

Vinner, S. (1983). *Concept definition, concept image and the notion of function*, International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 14, 239～305.