

경계요소법에 의한 직립원주의 파력해석 프로그램 개발

김 남 형 · 박 민 수

제주대학교 토목환경공학전공

A program development for wave force analysis of a vertical circular cylinder by the boundary element method

Nam-Hyeong Kim and Min-Su Park

Major of Civil and Environmental Engineering, Cheju National University, Jeju-Do 690-756, Korea

To solve the interaction of incident monochromatic waves with a bottom-mounted nonporous circular cylinder, a program for wave force analysis by the boundary element method is developed in the frame of three-dimensional linear potential theory. It is based on Green's theorem and gives rise to an integral equation for the fluid velocity potential on the cylinder surface. The results of the wave force analysis were compared with those of MacCamy and Fuchs(1954), and Williams and Mansour(2002). The comparison results show that they are in good agreement with those of MacCamy and Fuchs(1954), and Williams and Mansour(2002). The program developed in this study will be a very useful tool in the analyses of vertical circular cylinder.

Key words : nonporous circular cylinder, Green's theorem, Boundary element method, wave force analysis

서 론

해양구조물에는 그 목적과 기능, 역할, 사회적 인 요청의 정도, 주위의 환경, 규모, 설치수심, 설계시공과 같이, 각각의 면에 있어서 다르다고 말할 수 있다. 해양 구조물과 주변유체와의 상호작용은 구조물에 의한 파의 회절·산란과 작용파력의 문제는 속도 포텐셜에 관한 경계값 문제로 취급한다. 선형화된 자유표면조건을 이용하는 것을 선형 회절파이론이라 하며 선형 회절 파이론은 이론적 취급이 용이한 것으로부터 여

러가지 계산법이 제안되고 있다. 원기둥에 의한 파의 산란문제는 해양공학 분야에서 해석해가 존재하는 대표적인 문제로 깊은 수심일 경우에는 Havelock(1940)에 의해 제안되었고, 중간 수심일 경우에는 MacCamy and Fuchs(1954)의 해가 제안되어졌으며, 원기둥 표면의 파고와 최대 파고는 Sarpkaya and Isaacson(1981)에 의해 표현되었다. 이후에 불투과성 원기둥과 파랑 사이의 상호작용 문제를 해석하는 많은 연구들이 있었다(Kagemoto and Yue, 1986; Williams, 1985; Isaacson, 1978). 또, 타원모양의 수직구조물에

작용하는 파의 산란문제에 대한 해석해가 Chen and Mei(1973)에 의해 제안되었으며, 선형이론을 이용한 구조물에 작용하는 파력 계산이 이루어졌다(Lighthill, 1978; Garrison, 1978).

경계요소법(김과 서, 1995; 김 등, 2004)은 적분방정식의 유도방법의 차이에 의해, 직접경계요소법(Direct boundary element method)과 간접경계요소법(Indirect boundary element method)으로 나누어진다. 직접법은 Green의 적분공식이나 Cauchy의 적분공식 등을 이용하여 적분방정식을 유도하는 것이다. 이 유도과정은 가중잔차법의 특별한 응용으로 해석되며, Brebbia(1978)에 의해 정식화의 일반화가 행해졌다. 유도된 적분방정식은 미지함수와 그 법선방향 도함수로 구성되며, 일반적으로 어느 쪽이든지 미지량으로 된다. 한편, 지배방정식의 특이해를 이용하여 시행함수를 만들고, 경계조건에서 적분방정식을 유도하는 방법을 간접법이라 한다. 간접법에서는 시행함수에 포함되는 계수가 미지량으로 된다.

본 연구에서는 직접경계요소법에 Green함수를 사용하여 경계조건으로서 양단에 포텐셜값(ϕ)을 지정하고, 일단에서 포텐셜값(ϕ)과 타단에서의 미분한포텐셜($d\phi/dx$) 값을 지정하는 Dirichlet형 경계조건을 사용하여 수치해석 프로그램을 개발하고, 이 수치해석 프로그램을 검증하기 위해 직립원주에 의한 파랑의 산란문제에 관한 대표적인 해석해인 MacCamy and Fuchs(1954)의 해석해와 비교하고, 구조물에 작용하는 최대파고는 Williams and Mansour(2002)의 해석해와 비교해 보았고, 또 구조물에 작용하는 벡터, 파형 등을 나타내 보았다.

경계요소법 기초방정식

유체를 비압축성, 비점성, 비회전운동으로 가정하면 자유표면의 파고와 구조물 사이의 유체

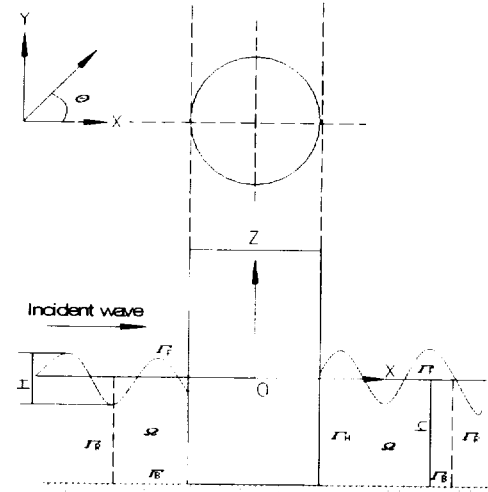


Fig. 1. Definition sketch for cylinder diffraction problem.

운동은 미소하다. Fig 1.에서와 같이 x 축과 y 축을 정수면 내에서 수평 직각방향으로 잡고, z 축을 연직 방향으로 잡는다. 유체입자의 운동이 주파수 ω 를 갖고 주기운동을한다면 입사파는 규칙파로 x 축의 양의 방향과 θ 의 각도를 이루면서 들어오면 속도포텐셜을 다음과 같이 나타낸다.

$$\Phi(x, y, z) = R_e [\phi(x, y, z) e^{-i\omega t}] \quad (1)$$

여기서, $R_e[\]$ 은 $[]$ 내의 실수부를 취한다는 의미이다.

식(1)의 전체포텐셜은 다음과 같다.

$$\phi = \phi_0 + \phi_d \quad (2)$$

여기서, 입사파의 진폭을 $\frac{H}{2}$ 라고 입사파의 속도포텐셜과 산란파의 속도포텐셜에 대입하면 다음과 같다.

$$\phi_0 = -i \frac{g}{\omega} \frac{H}{2} \varphi_0, \quad \phi_d = -i \frac{g}{\omega} \frac{H}{2} \varphi_d \quad (3)$$

여기서, $\varphi_0 = \frac{\cosh(z+h)}{\cosh kh} e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}$ 이며 k 을

파수라 하고, ω 을 주파수라하면 분산식 $\omega^2 = gk \tanh kh$ 을 만족한다. 결국, 식(3)의 ϕ_0 은 ϕ_d 에 대한 경계값 문제로 정식화 하여 해를 구할 수 있다.

정식화한 산란파의 속도포텐셜 ϕ_d 에 관한 경계값 문제는 아래와 같다.

- 라플라스 방정식

$$\nabla^2 \phi_d = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (4.a)$$

- 자유표면 경계조건

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial z} - \frac{w^2}{g} \phi_d = 0 \quad \text{on } \Gamma_F \quad (4.b)$$

- 구조물 표면 경계조건

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial n} = - \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \quad \text{on } \Gamma_H \quad (4.c)$$

- 해지면 경계조건

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_B \quad (4.d)$$

- 무한원방 방사조건

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left\{ \frac{\partial \phi_d}{\partial R} - ik \phi_d \right\} = 0 \quad \text{on } \Gamma_R \quad (4.e)$$

여기서, $\phi_0 = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}$, Ω : 유체영역, Γ_F : 자유표면, Γ_H : 구조물 표면, Γ_B : 해지면, Γ_R : 무한원 가상경계, $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ 이다.

구조물의 형상은 Fig.1에 나타낸 임의의 단면을 가지는 주상구조물에 한정된다.

입사파의 속도포텐셜은 다음과 같다.

$$\phi_0 = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \Psi_0, \quad \Psi_0 = e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \quad (5)$$

같은 값으로, 산란파의 속도포텐셜 ϕ_d 는 z 방향으로 전개된다.

$$\phi_d = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \Psi_d(x, y) \quad (6)$$

위에 정의를 식(5), (6)과, 식(4.a)~(4.e)에 대입하면, Ψ_d 에 관한 경계값 문제는 아래와 같다.

$$\nabla^2 \Psi_d + k^2 \Psi_d = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (7.a)$$

$$\frac{\partial \Psi_d}{\partial n} = - \frac{\partial \Psi_0}{\partial n} \quad \text{on } S_H \quad (7.b)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left\{ \frac{\partial \Psi_d}{\partial R} - ik \Psi_d \right\} = 0 \quad \text{on } S_\infty \quad (7.c)$$

식(7.a)~(7.c)의 경계값 문제를, Fig.2에 나타내면 $x-y$ 평면의 2차원 문제가 된다. 따라서 식(4.a)~(4.e)의 경계값 문제를, 구조물의 형상과 주상구조물에 한정할 수 있으며, 식(7.a)~(7.c)은 2차원의 경계값 문제로 변환된다. 결국, Ψ_d 에 관한 경계값 문제로 해석되므로 파장의 속도포텐셜을 결정하고, 이것을 이용하여 파압과 파력을 산정한다.

경계요소 방정식의 전개

Ψ_d 의 지배 방정식은, Helmholtz 방정식이며, G 는 Helmholtz 방정식의 기본해이다. G 를 구하면 다음과 같다.

$$\nabla^2 G + k^2 G + \delta(x-\xi, y-\eta) = 0 \quad (8)$$

단, δ : 2차원 Dirac의 Delta함수를 나타낸다.

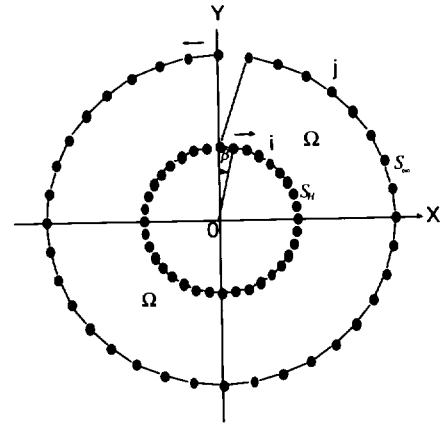


Fig. 2. Numerical model configuration.

2차원의 Helmholtz 방정식의 기본해는 아래와 같다.

$$G = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(kr) \quad (9)$$

여기서, 소스점의 좌표를 (ξ, η) 라하고 관측점의 좌표를 (x, y) 라하면 $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ 이다. 즉, $H_0^{(1)}$ 는 제 1 종 Hankel 함수이다. 관측점 i 를 경계 S 면 위로 나타내면 식(7.a) ~ (7.c) 의 경계값 문제는 아래와 같이 적분 방정식으로 정의 된다.

$$\frac{1}{2} \Psi_{di} + \int_{S_H+S_\infty} \Psi_d \frac{\partial G}{\partial n} ds = \int_{S_H+S_\infty} \frac{\partial \Psi_d}{\partial n} G ds \quad (10)$$

여기서, $S_\infty: R \rightarrow \infty$ 는 원형상에 나타낸 가상 경계면의 폐곡선으로 보인다.

식(10)은 S_∞ 에 관한 적분이된다. Fig. 2에서 관측점 i 는 S_H 에 근접한다. S_∞ 가 S_H 에 근접하도록 $r \gg 1, kr \approx r, r \approx R$ 로 취하면 Hankel 함수의 점근 표시는 다음과 같다.

$$H_0^{(1)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} \exp \left\{ i \left(kR - \frac{\pi}{4} \right) \right\}$$

$$\frac{\partial H_0^{(1)}(kr)}{\partial n} \approx ik \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} \exp \left\{ i \left(kR - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \quad \text{on } S_\infty \quad (11)$$

여기서, 식(10)의 S_∞ 에 관해 적분한 항을 대입하면 다음과 같다.

$$\int_{S_\infty} \Psi_d \frac{\partial G}{\partial R} ds - \int_{S_\infty} \frac{\partial \Psi_d}{\partial R} G ds$$

$$= -\frac{1}{4i} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{S_\infty} \frac{e^{ikR}}{\sqrt{R}} \left(\frac{\partial \Psi_d}{\partial r} - ik \Psi_d \right) ds$$

$$= -\frac{1}{4i} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} e^{ikR} \sqrt{R} \left(\frac{\partial \Psi_d}{\partial R} - ik \Psi_d \right) d\theta \quad (12)$$

즉, 식(7.c)의 조건에 Ψ_d 에 관해 식(12)을 대입하면 아래와 같다.

$$\int_{S_\infty} \Psi_d \frac{\partial G}{\partial n} ds - \int_{S_\infty} \frac{\partial \Psi_d}{\partial n} G ds = 0 \quad (13)$$

최종적인 적분 방정식 (7.b)에 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{2} \Psi_{di} + \int_{S_H} \Psi_d \frac{\partial G}{\partial n} ds = - \int_{S_H} \frac{\partial \Psi_d}{\partial n} G ds \quad (14)$$

즉, 구조물 표면의 폐곡선 S_H 의 적분 방정식이다.

파압과 파력의 산정식

구조물에 작용하는 변동 파압력은 다음과 같이 정의 된다

$$P(x, y, z, t) = R_e \left\{ P(x, y, z) e^{-i\omega t} \right\} \quad (15)$$

베르누이의 파력 방정식을 변동 파압력 p 의 속도포텐셜을 이용하여 윗식을 표현하면 다음과 같다.

$$P = i\omega \rho \phi \quad (16)$$

여기서, ρ : 유체의 밀도 이다.

이것을 Ψ_d, Ψ_o 을 이용하여 식(15)을 다시 표현하면 다음 식으로 나타낸다.

$$P = \rho g a \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} (\Psi_o + \Psi_d) \quad (17)$$

파압이 정의되고 또한 같은값으로 파력은 아래식으로 정의 된다.

$$F_j = R_e \left\{ f_j e^{i\omega t} \right\} \quad (18)$$

여기서, j : 힘의 방향이며

$$f_j = \iint_{\Gamma_n} P n_j d\Gamma \quad (19)$$

이다. 식 (19)에 대입하면, j 방향의 파력에 다음과 같은 식이 된다.

$$f_j = \rho g a \int_{-h}^0 \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} dz \int_{S_H} (\Psi_d + \Psi_o) n_j ds \quad (20)$$

또한, z 방향의 적분을 실행하면, 식(20)은 아래와 같이 정의 된다.

$$f_j = \rho g a \frac{\tanh kh}{k} \int_{S_H} (\Psi_d + \Psi_o) n_j ds \quad (21)$$

또한, 같은 방향의 전도모멘트 M_j 는 다음과 같다.

$$M_j = \rho g a h^2 \left\{ \frac{kh \sinh(kh) + 1 - \cosh(kh)}{(kh)^2 \cosh(kh)} \right\} \times \int_{S_H} (\Psi_d + \Psi_o) n_j ds \quad (22)$$

여기서, n_j 는 경계 S_H 상의 법선 벡터의 j 방향 성분이다.

수치해석 및 고찰

Fig. 3에서는 한 개의 불투과성 원기둥에 작용하는 파력을 살펴보았다. 계산결과는 MacCamy and Fuchs(1954)의 해석해와 비교하였다. 계산에서 무차원화된 수심(h/a)은 5.0이다. x 축은 ka 로 무차원화된 파장으로 잡았고, y 축은 $\rho g(H/2)a^2$ 으로 무차원화된 x 방향의 파력을 나타낸다. 계산결과는 MacCamy and Fuchs (1954)의 해석해와 잘 일치하고 있음을 보여주고 있다.

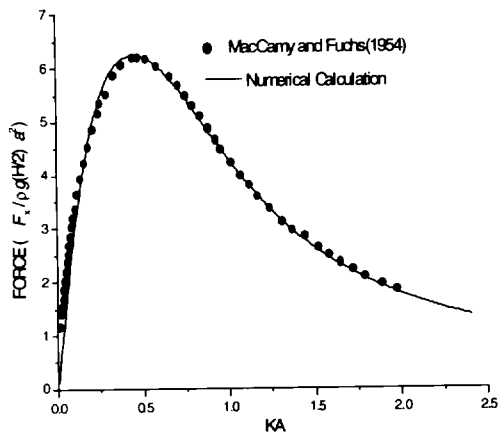


Fig. 3. Dimensionless hydrodynamic forces on a single circular cylinder for $h/a=5.0$.

Fig. 4는 불투과성 원기둥에 입사파의 파향과 직각인 한점에서의 최대파고를 계산한 것으로 Williams and Mansour(2002)의 해석해과 비교하였다. x 축은 무차원화된 파장(ka)으로 잡고, y 축은 무차원화된 최대 파고(R/H)를 나타낸

다. 계산결과는 Williams and Mansour(2002)의 해석해와 잘 일치하고 있음을 보여주고 있다.

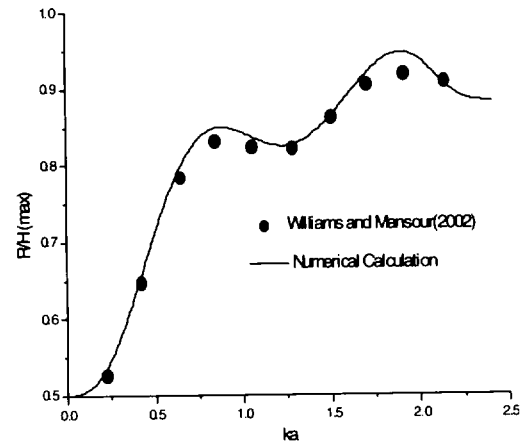


Fig. 4. Maximum run-up profiles on the outer walls of a single circular cylinder for $h/a=5.0$.

Fig. 5는 불투과성 원기둥의 외부벽면에 작용하는 파고를 무차원화하여 MacCamy and Fuchs(1954)의 해석해와 비교하였다. x 축을 각도로 잡고, y 축은 무차원화된 파고를 나타낸다. 계산결과는 MacCamy and Fuchs(1954)의 해석해와 잘 일치하고 있음을 보여주고 있다.

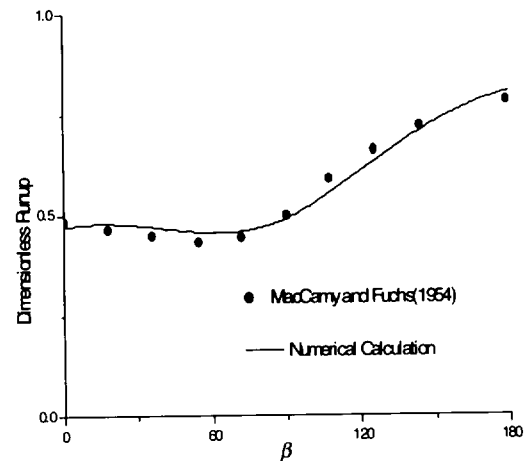


Fig. 5. Run-up profiles on the outer walls of a single circular cylinder for $ka=6.0$.

Fig. 6은 특정주파수 ($ka = 0.504$)에서의 불투과성 원기둥 주위에 작용하는 유선을 나타낸 것이며, Fig. 7은 특정주파수 ($ka = 0.504$)에서의 불투과성 원기둥 주위에 작용하는 속도벡터를 나타낸 것이다. Fig. 8은 특정주파수 ($ka = 0.504$)에서 불투과성 원기둥 주위의 파고를 입사파의 파고 (H)로 나눈 파고 분포를 나타낸 것이다.

Fig. 6. Flow line profiles on a single circular cylinder for $ka=0.504$.

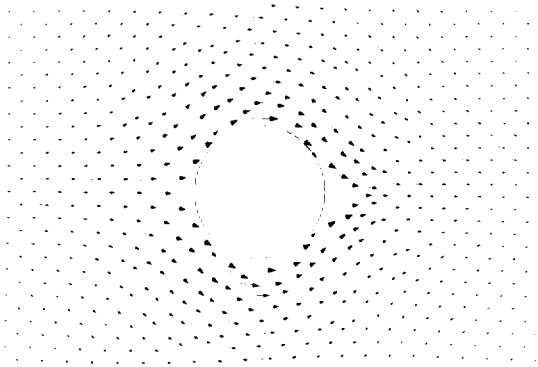


Fig. 7. Velocity vector profiles on a single circular cylinder for $ka=0.504$.

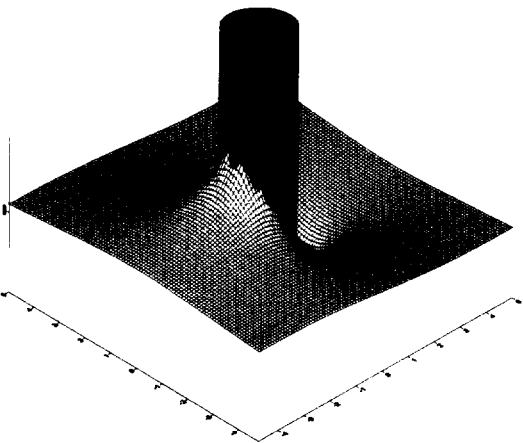


Fig. 8. Free-surface elevation in the vicinity of a single circular cylinder for $h/a=5.0$, $ka=0.504$.

결 론

직접경계요소법에 Green함수를 이용한 불투과성 원기둥에 작용하는 파력을 MacCamy and Fuchs(1954)의 해석해와 비교해 보았고, 입사파와 직각에 있는 불투과성 원기둥의 한점에 작용하는 최대파고를 Williams and Mansour(2002)와 비교해 보았으며, 불투과성 원기둥 외부에 작용하는 파고를 MacCamy and Fuchs(1954)의 해석해와 비교해 보았다.

경계요소법을 이용한 수치해석결과와 해석해 (MacCamy and Fuchs, 1954; Williams and Mansour, 2002)의 비교결과를 통하여 본 연구에서 개발된 수치해석 프로그램의 타당성을 검증할 수 있었다.

본 연구에서 개발된 파력수치해석프로그램은 앞으로 해양에 설치되는 각종 주상구조물의 수치해석에 유용하게 사용될 것으로 사료된다.

참고 문헌

- 김남형 · 서일교 공역. 1995. 경계요소법기초. 원창출판사, 207pp.
- 김남형 · 박구용 · 조일형 공역. 2004. 해안파동. 구미서관, 1095pp.
- Brebbia, C.A., 1978. The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press.
- Chen, H.S., Mei, C.C., 1973. Wave forces on a stationary platform of elliptical shape.

- Journal of Ship Research 17 (2), 61-71.
- Garrison, C.J. 1978. Hydrodynamic loading of large offshore structures: three dimensional source distribution methods. In Numerical Methods on offshore Engineering, Zienkiewicz, O., Lewis, R. and Stagg, K. (eds), pp.97-140. John Wiley, Chichester.
- Havelock, T.H., 1940. The pressure of water waves on a fixed obstacle. Proceedings of Royal Society, London, Series A 175, 409-421.
- Isaacson, M., 1978. Vertical cylinder of arbitrary section in waves. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, ASCE 104(WW4), 309-324.
- Kagemoto, H. and Yue, D.K.P., 1986. Interaction among multiple three dimensional bodies in water waves, J. of Fluid Mech., 166, pp.189-209
- Lighthill, J. 1978. Waves and hydrodynamic loads. Proceedings of the Second International Conference on Behaviour of Offshore Structures, Imperial College, London, Vol. 1, pp. 1-40.
- MacCamy, R.C., Fuchs, R.A., 1954. Wave forces on piles: a diffraction theory. Tech. Memo No. 69, US Army Corps of Engineers, Beach Erosion Board.
- Sarpkaya, T., Isaacson, M., 1981. Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures. Van Nostrand Reinhold, New York.
- Williams, A.N., 1985. Wave forces on an elliptic cylinders. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, ASCE 111 (2), 433-449

