科學敎育, 14, 33～50, 1997
Journal of Science education
14, 33～50, 1997

차분방정식의 해의 형태에 관한 연구

문 경 천* · 고 윤 희**

A Study on Behavior of Solution in Difference Equations

Moon, Kyung-Cheon · Ko, Yun-Hee

Abstract

In this thesis, we obtain sufficient conditions on the difference equation $x(n+1)=f\{x(n)\}$ to ensure the existence and the asymptotic stability of the constant solution. Also, we present examples to apply the above results.

Ⅰ. 서 론

연속적인 시간의 경우에 시간 t에 대한 함수 $x(t)$의 변화유형은 도함수 $\frac{dx(t)}{dt}\equiv x'(t)$, $\frac{d^2x(t)}{dt^2}\equiv x''(t)$ 등으로 구체화 된다. 반면에 시간이 이산적 변수(discrete variable)이어서 변수 t가 정수값만을 가진다고 볼 때는 시간에 대한 함수 $x(t)$의 변화는 $x(t)$의 도함수보다 차분(difference)으로 표현해야 한다. 여러가지 변화현상들을 수학적 모형화 과정을 통해서 차분이 포함된 차분방정식(difference equation) 형태로 표현되었을 때, 차분방정식이 선형형태이거나 간단한 비선형 형태인 경우를 제외하고는 직접 해를 구하는 것이 거의 불가

* 대정중학교 교사

** 제주대학교 사범대학 수학교육과 교수

능하다. 이와같은 경우에 차분방정식에 관하여 직접 해를 구하지 않고 전체적인 해의 성질들을 분석하는 정성분석방법(qualitative method)을 연구하는 것은 매우 의미있는 것이다.

본 논문에서는 그러한 정성분석방법에 관한 연구로서 1계 자동차분방정식(autonomous difference equation)의 상수해(균형점)의 존재성에 관한 충분조건과 상수해의 안정성과 불안정성을 보장하는 충분조건들을 제시하고 있다. 그리고 연구과정에서 얻어진 결과들을 적용시키기 위해서 여러가지 형태의 1계 자동차분방정식들이 보기로 제시되었다. 특히 연구과정에서 얻어진 결과들을 고등학교 수학과정의 1계 자동차분방정식 형태의 계차수열들에 적용시킬 경우에는 계차수열의 일반항을 구하지 않고도 일반항의 수렴, 발산에 대한 조건들을 얻을 수 있으며 수렴하는 경우의 수렴값을 쉽게 찾을 수 있다.

Ⅱ. 본 론

2. 1 주요 정의

(정의 1. 1) 차분방정식의 일반적인 정의는 다음과 같다.

이산적인 시간 변수의 경우에 시간에 대한 함수 $x(t)$의 변화유형은 차분몫 $\Delta x/\Delta t$로 표시되어야 한다. 이것은 도함수 dx/dt의 이산적 시간에 대응하는 개념이다. 이산 시간 t는 정수값만을 가지므로 두 개의 인접한 기간의 x값을 비교할 때 $\Delta t=(n+1)-n=1$이 된다. 이와같은 이유로 차분들의 비 $\Delta x/\Delta t$를 Δx로 간단히 표현할 수 있다. 앞으로 본 논문에서는 이산 시간 t는 0을 포함하는 자연수의 집합 N에 속하는 것으로 약속하며 t대신 변수 n을 사용하기로 한다.

1계 차분방정식을 다음과 같이 정의하도록 한다.

(1) $\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$ 또는 (1′) $x(n+1)=f(n,\ x(n))$

여기에서 x는 집합 $\{0\}\cup N$에서 실수집합 R로 대응되는 함수이고 f는 집합 $\{0\}\cup N\times R$에서 실수집합 R로 대응되는 함수이다. 그리고 Δ를 차분연산자라 부른다. 한편 (1)식에서와 같은 방법으로 2계 차분연산자를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}\Delta^2 x(n) &= \Delta(\Delta x(n)) = \Delta(x(n+1) - x(n)) = \Delta x(n+1) - \Delta x(n) \\ &= x(n+2) - x(n+1) - (x(n+1) - x(n)) \\ &= x(n+2) - 2x(n+1) + x(n)\end{aligned}$$

같은 방법으로 3계 이상의 차분연산자들을 정의할 수 있으며 1계 차분연산자만 포함하는 차분방정식을 1계 차분방정식(first order difference equation)이라 부른다.

그리고 (1′)에서 f가 $x(n)$에 관하여만 영향을 받을 때, 즉 $f(n,\ x(n)) = f(x(n))$ 인 경우에 (1′)식을 "자동차분방정식(autonomous difference equation)"이라고 부르며 1계 차분연산자만을 포함하는 자동차분방정식을 "1계 자동차분방정식(first order autonomous difference equation)"이라 부른다. 특히 $f(x(n)) = ax(n) + b$인 경우에 1계 자동차분방정식 $x(n+1) = f(x(n))$를 "선형 1계 자동차분방정식"이라 하고 선형이 아닌 1계 자동차분방정식을 "비선형 1계 자동차분방정식"이라고 한다.

앞으로 본 논문에서는

(2) $x(n+1) = f(x(n))$ 를 1계 자동차분방정식이라고 약속한다.

만약, $x = \Phi(n)$으로 놓았을 때 모든 $n \in \{0\} \cup N$에 대하여 $\Phi(n)$이 (2)를 만족하면 $\Phi(n)$을 (2)의 해라고 하며 초기조건을 강조하기 위해 $\Phi(n) = \Phi(n,\ q)$로 표시하기로 하는데 이 때 $\Phi(n,\ q)$는 (2)의 해로서 $\Phi(0) = q$를 만족하는 것을 의미한다. 그리고,

$\Phi(1) = f(\Phi(0)) = f(q)$, $\Phi(2) = f(\Phi(1)) = (f \circ f)(q) = f^2(q)$,

$\Phi(3) = f^3(q)$, ……, $\Phi(n) = f^n(q)$ 등으로 표시될 수 있다.

(정의 1. 2) 차분방정식의 균형점(균형수준)의 정의는 다음과 같다.

차분방정식

$$x(n+1) = f\{x(n)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

에서 f가 실수 R에서 연속함수이고 $f(p) = p$이면 p를 차분방정식 (*)의 상수

해라 하고 p를 차분방정식 (*)의 균형점 또는 균형수준이라고 한다. 이 때 $\Phi(n)=\Phi(n,\ p)$ 라 하면 $\Phi(1)=f(\Phi(0))=f(p)=p$, $\Phi(2)=f^2(p)=p$, …… 즉, $\Phi(n)=p$ 인 상수해가 되는 것이다.

(정의 1. 3) 차분방정식

$$x(n+1)=f\{x(n)\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

에서 함수 f가 실수 R에서 연속이고 p가 차분방정식 (*)의 균형점일 때 임의의 주어진 $\varepsilon>0$ 에 대하여 적당한 양수 $\delta=\delta(\varepsilon)$가 존재하여 $|p-q|<\delta$ 이고 $\Phi(n)=\Phi(n,\ q)$가 차분방정식 (*)의 해일때 $|\Phi(n)-p|<\varepsilon$ 을 만족하는 경우에 균형점 p는 안정적이라고 말한다.

(정의 1. 4) 균형점 p가 안정적이 아니면 불안정하다고 말한다.

(정의 1. 5) 차분방정식

$$x(n+1)=f\{x(n)\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

에서 함수 f가 실수 R에서 연속이고 p가 차분방정식 (*)의 균형점일 때

(1) p : 안정적이고

(2) 적당한 양수 δ_o가 존재하여 $|p-q|<\delta_o$ 이고 $\Phi(n)=\Phi(n,\ q)$가 차분방정식 (*)의 해일때 $\lim\limits_{n\to\infty}|\Phi(n)-p|=0$ 를 만족하면 균형점 p는 점근적으로 안정적이라고 말한다.

(정의 1. 6) 차분방정식

$$x(n+1)=f\{x(n)\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

에서 함수 f가 실수 R에서 연속이고 p가 차분방정식 (*)의 균형점일 때

(1) p : 안정적이고

(2) 임의의 실수 q에 대하여

$\Phi(n)=\Phi(n, q)$가 차분방정식 (*)의 해일때 $\lim_{n\to\infty}\Phi(n, q)=p$ 이면 균형점 p는전체적 점근적으로 안정적이라고 말한다.

2. 2 기본 정리들

(정리 2. 1) (평균치의 정리) 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고, 개구간 (a, b)에서 미분가능하면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_1)$ 를 만족하는 x의 값 x_1이 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다.

(정의 2. 1) 실수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족하면 $\{a_n\}$을 코시수열(Cauchy Sequence)이라고 한다. "임의의 주어진 $\varepsilon>0$ 에 대하여 적당한 자연수 N이 존재하여 $m, n\geq N$이면 $|a_m-a_n|<\varepsilon$ 이다."

(정리 2. 2) R에서 Cauchy 수열은 수렴한다.

2. 3 차분방정식에 관한 정리들

(정리 3. 1) 차분방정식

$$x(n+1)=f\{x(n)\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

에서 함수 f가 실수 R에서 연속이고 $\Phi(n)$이 차분방정식 (*)의 해일 때, $\lim_{n\to\infty}\Phi(n)=p$이면 p는 차분방정식 (*)의 균형점이 된다.

(증명) $\Phi(n)$이 차분방정식 (*)의 해이므로 $f\{\Phi(n)\}=\Phi(n+1)$ 이다.
또, 함수 f가 실수 R에서 연속이고 $\lim_{n\to\infty}\Phi(n)=p$이므로

$$\lim_{n\to\infty} f\{\Phi(n)\}=\lim_{n\to\infty}\Phi(n+1)$$

$$f\{\lim_{n\to\infty}\Phi(n)\} = \lim_{n\to\infty}\Phi(n+1)$$

$$\therefore\ f(p) = p$$

따라서, p는 차분방정식 (*)의 균형점이다.

(보기 3. 1) 차분방정식

$$x(n+1) + ax(n) = b(a,\ b\text{는 상수}) \cdots\cdots\cdots(3.\ 1)$$

의 해를 구하고 (정리 3. 1)에 의해서 균형점을 찾아 보자.

미분방정식의 해법에 의하여

(3. 1)의 해는 (3. 1)의 특수해(특수적분)인 x_p와 (3. 1)의 축약방정식

$$x(n+1) + ax(n) = 0 \cdots\cdots\cdots(3.\ 2)$$

의 보조함수 x_c의 합이다.

우선 보조함수를 다루도록 하자.

$x(n) = Ab^n$이라 하면 $x(n+1) = Ab^{n+1}$이다. 이것을 (3. 2)에 대입하면

$$Ab^{n+1} + aAb^n = 0$$

$$b + a = 0 \text{ 즉 } b = -a$$

$$\therefore\ x_c(=Ab^n) = A(-a)^n$$

이제 (3. 1)의 특수해(특수적분)을 구해 보자.

$x(n) = k$ 이라 하면 $x(n+1) = k$. 이것을 (3. 1)에 대입하면

$$k + ak = b \quad \text{즉} \quad k = \frac{b}{1+a}\ (a \neq -1)$$

따라서, $a \neq -1$인 경우의 일반해는

$$\Phi(n) = A(-a)^n + \frac{b}{1+a} \cdots\cdots\cdots(3.\ 3)$$

이다.

$n=0$일 때 $\Phi(0)=x_o$ 을 (3. 3)식에 대입하면

$$x_o=A+\frac{b}{1+a} \quad \therefore A=x_o-\frac{b}{1+a}$$

따라서, $a\neq-1$인 경우의 확정해는

$$\Phi(n)=(x_o-\frac{b}{1+a})(-a)^n+\frac{b}{1+a}$$

이다.

다음은 (정리 3. 1)을 적용해서 균형점을 구해 보자

$|a|<1$일 때 $\lim_{n\to\infty}\Phi(n)=\frac{b}{1+a}$ 므로 차분방정식 (3. 1)의 균형점은 $\frac{b}{1+a}$ 가 된다.

(정리 3. 2) 차분방정식 $x(n+1)=f\{x(n)\}$ 에서 함수 f가 실수 R에서 미분가능하고 $\forall r\in R$, $f'(r)\neq 1$이면 기껏해야 하나의 균형점이 존재한다.

(증명) 결론을 부정하면 즉, $f(x)$의 균형점 P, $Q(P\neq Q)$가 존재한다고 하면 $f(P)=P$, $f(Q)=Q$ 이다. 그런데, 평균치의 정리에 의해서 $\frac{f(P)-f(Q)}{P-Q}=f'(r)$ 인 r이 (P, Q)안에 적어도 하나 존재한다.

즉, $f'(r)=\frac{P-Q}{P-Q}(P\neq Q)=1$ 이므로 $f'(r)=1$인 r이 (P, Q)안에 적어도 하나 존재한다. 이것은 가정에 모순이다. 따라서, 위 정리는 성립한다.

(정리 3. 3) (균형점의 존재성)

차분방정식

$$x(n+1)=f\{x(n)\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

에서 함수 f와 f'가 실수 R에서 연속이고 $|f'(x)|<a$, $\forall x\in R$ ($0\leq a<1$)

이면 균형점 p는 유일하게 존재한다.

(증명) 평균치의 정리와 가정인 $|f'(x)| < a$, $\forall x \in R$ ($0 \le a < 1$)에 의해서 $\Phi(n) = \Phi(n, q) = \Phi_n$가 차분방정식 (*)의 해이고 $q = \Phi(0)$라 할 때, 먼저 수열 $\langle \Phi_n \rangle$이 Cauchy 수열임을 보이자.

$$|\Phi_n - \Phi_{n-1}| = |f^n(q) - f^{n-1}(q)| = |f\{f^{n-1}(q)\} - f\{f^{n-2}(q)\}|$$

$$< a|f^{n-1}(q) - f^{n-2}(q)| < a^2|f^{n-2}(q) - f^{n-3}(q)|$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$< a^{n-2}|f^2(q) - f(q)| = a^{n-2}|\Phi_2 - \Phi_1|$$ 이므로

$m \ge n$일 때 삼각부등식에 의해 다음을 얻게 된다.

$|\Phi_m - \Phi_n|$

$\le |\Phi_m - \Phi_{m-1}| + |\Phi_{m-1} - \Phi_{m-2}| + \cdots + |\Phi_{n+2} - \Phi_{n+1}| + |\Phi_{n+1} - \Phi_n|$

$\le a^{m-2}|\Phi_2 - \Phi_1| + a^{m-3}|\Phi_2 - \Phi_1| + \cdots + a^n|\Phi_2 - \Phi_1| + a^{n-1}|\Phi_2 - \Phi_1|$

$= a^{n-1} \times \dfrac{1 - a^{m-n}}{1 - a}|\Phi_2 - \Phi_1|$

$< a^{n-1} \times \dfrac{1}{1-a}|\Phi_2 - \Phi_1| \to 0$ as $n \to \infty$ ($\because$ $0 \le a < 1$)

$\therefore \langle \Phi_n \rangle$: *a Cauchy seqiemce* 즉, $\lim_{n\to\infty} \Phi_n = p$

여기서, Φ_n은 차분방정식의 해이므로

$$f\{x(n)\} = x(n+1)$$ 을 만족한다.

또한, 함수 f가 모든 실수에서 연속이므로

$$\lim_{n\to\infty} f\{\Phi(n)\} = \lim_{n\to\infty} \Phi(n+1)$$

$$f\{\lim_{n\to\infty} \Phi(n)\} = \lim_{n\to\infty} \Phi(n+1)$$

$$\therefore f(p) = p$$

따라서, 균형점 p가 존재한다. 또한, (정리 3.2)에 의해 균형점 p는 유일하다.

(정리 3. 4) 차분방정식 $x(n+1)=f\{x(n)\}$ 에서 함수 f와 f'가 실수 R에서 연속이고, $|f'(x)|<a, \ \forall x\in R \ (0\le a<1)$ 이면 균형점 p는 전체적 점근적으로 안정적이다.

(증명) (1) 임의의 실수 $q \ (q\neq p)$를 생각하면 평균치 정리에 의해 r가 p와 q사이에 존재하여 다음을 만족한다.

$$|f(p)-f(q)|=|f'(r)||p-q|<|p-q|\cdots\cdots\cdots(A)$$

임의의 양의 수 $\varepsilon>0$에 대하여 δ를 $\delta\equiv\varepsilon$라 놓는다.
주어진 차분방정식의 해 $\Phi(n, \ q), \ \Phi(0)=q$를 생각하고 $0\le|q-p|<\delta$ 라고 가정하면 위의 결과 (A)에 의하여

$$\begin{aligned}|\Phi(n)-p| &= |f^n(q)-f^n(p)| = |f\{f^{n-1}(q)\}-f\{f^{n-1}(p)\}| \\ &\le |f^{n-1}(q)-f^{n-1}(p)| \le |f^{n-2}(q)-f^{n-2}(p)| \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\le |f^2(q)-f^2(p)| \le |f(q)-f(p)| \le |q-p| < \delta\equiv\varepsilon\end{aligned}$$

를 만족한다. 따라서, 균형점 p는 안정적이다.

(2) 임의의 실수 $q \ (p\neq q, \ p<q)$ 에 대하여 함수 f가 $[p, \ q]$에서 연속이고, $(p, \ q)$에서 미분가능하므로 평균치의 정리에 의해서

$$\frac{f(q)-f(p)}{q-p}=f'(r)$$

인 r이 $(p, \ q)$안에 적어도 하나 존재한다. 즉,

$$\frac{|f(q)-f(p)|}{|q-p|}=|f'(r)|\le a<1$$

이므로

$$|f(q)-f(p)| \le a|q-p|$$

그러므로

$$\Phi(n)=\Phi(n,\ q),\ \ q=\Phi(0)$$

라 하면

$$\begin{aligned}|\Phi(n)-p| &= |f^{n}(q)-f^{n}(p)| = |f\{f^{n-1}(q)\}-f\{f^{n-1}(p)\}| \\ &\le a|f^{n-1}(q)-f^{n-1}(p)| \le a^2|f^{n-2}(q)-f^{n-2}(p)| \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\le a^{n-1}|f(q)-f(p)| \le a^{n}|q-p| \to 0 \ \ as\ \ n\to\infty\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}|\Phi(n)-p|=0 \text{ 즉, } \lim_{n\to\infty}\Phi(n,\ q)=p$$

따라서, 균형점 p는 전체적 점근적으로 안정적이다.

(참고) 고등학교 수학과정의 1계 자동차분방정식의 계차수열 $\{x(n)\}$에 대하여 점화식이

$$ax(n+1)-bx(n)=c\ \ (a\neq 0)$$

으로 주어질 때 극한값을 일반항을 이용하지 않고도 구할 수 있음을 보이자.

점화식을 정리하면

$$x(n+1)=\frac{b}{a}x(n)+\frac{c}{a}$$

$x(n)=x$라 놓으면

$$f(x)=\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$$

균형점의 정의에 의하여

$$f(p)=\frac{b}{a}p+\frac{c}{a}=p$$

$$p\left(1-\frac{b}{a}\right)=\frac{c}{a}$$

$$p\left(\frac{a-b}{a}\right)=\frac{c}{a}$$

$$\therefore \quad p = \frac{c}{a-b}$$

따라서, $\left|\frac{b}{a}\right| < k \ (0 \le k < 1)$이면 (정리 3. 4)에 의하여

$\lim_{n\to\infty} x(n) = \frac{c}{a-b}$로 수렴한다.

(정리 3. 5) 차분방정식

$$x(n+1) = f\{x(n)\}$$

에서 함수 f와 f'가 실수 R에서 연속이고 $f(p) = p$, $|f'(p)| < 1$을 만족하는 $p \in R$이 존재하면 균형점 p는 점근적으로 안정적이다.

(증명) (1) 함수 $f'(x)$가 점 p에서 연속이므로

양수 $\varepsilon_0 = 1 - |f'(p)|$에 대하여 적당한 양수 δ^*가 존재하여 $|p-x| < \delta^*$ 이면 $|f'(p) - f'(x)| < 1 - |f'(x)|$ 을 만족한다.

그런데

$$|f'(x)| - |f'(p)| < |f'(x) - f'(p)|$$

이므로

$$|f'(x)| - |f'(p)| < 1 - |f'(p)|$$

$$\therefore \ |f'(x)| < 1$$

임의의 양의 수 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 δ를 $\delta = \min\{\delta^*, \ \varepsilon\}$라 놓는다. 주어진 차분방정식의 해 $\Phi(n, \ q)$, $\Phi(0) = q$를 생각하고 $0 \le |p-q| < \delta$라고 가정하면 평균치의 정리에 의해서

$$\begin{aligned} |\Phi(n) - p| &= |f^n(q) - f^n(p)| = |f\{f^{n-1}(q)\} - f\{f^{n-1}(p)\}| \\ &\le |f^{n-1}(q) - f^{n-1}(p)| \le |f^{n-2}(q) - f^{n-2}(p)| \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\le |f(q) - f(p)| \le |q-p| < \delta \le \varepsilon \end{aligned}$$

를 만족한다. 따라서, 균형점 p는 안정적이다.

(2) $\delta_0=\frac{1}{2}\delta^*$라 놓는다. 이 때 $f'(x)$는 폐구간 $[p-\delta_0,\ p+\delta_0]$에서 연속이므로 양의 수 $M<1$이 존재하여 모든 실수 $x\in[p-\delta_0,\ p+\delta_0]$에 대하여 $0\le|f'(x)|\le M$를 만족한다. 주어진 차분방정식의 해 $\Phi(n,\ q)$, $\Phi(0)=q$를 생각하고 $0\le|p-q|<\delta_0$라 가정하면 평균치의 정리에 의해서

$$
\begin{aligned}
|\Phi(n)-p| &= |f^n(q)-f^n(p)| = |f\{f^{n-1}(q)\}-f\{f^{n-1}(p)\}| \\
&\le M|f^{n-1}(q)-f^{n-1}(p)| \\
&\le M^2|f^{n-2}(q)-f^{n-2}(p)| \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\le M^{n-1}|f(q)-f(p)| \\
&\le M^n|q-p|\to 0 \ \ as\ \ n\to\infty
\end{aligned}
$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}|\Phi(n)-p|=0$$

따라서, 균형점 p는 점근적으로 안정적이다.

(보기 3. 4) 차분방정식

$$x(n+1)-x(n)\left\{x(n)-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$$

의 해는 직접해법으로 찾기는 불가능하지만 위 (정리 3. 5)의 조건을 만족하는 균형점 p가 존재하고 점근적으로 안정적임을 살펴보자.

차분방정식

$$x(n+1)-x(n)\left\{x(n)-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$$

을 정리하면

$$x(n+1)=x(n)\left\{x(n)-\frac{1}{2}\right\}+\frac{1}{2}$$

즉

$$f\{x(n)\}=x(n)\left\{x(n)-\frac{1}{2}\right\}+\frac{1}{2}$$

$x(n)=x$ 라 두면

$$f(x)=x\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2} \text{ 이고 } f'(x)=2x-\frac{1}{2}$$

균형점 p는 $f(p)=p$을 만족하므로

$$p(p-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=p$$

이것을 정리하면

$$p^2-\frac{3}{2}p+\frac{1}{2}=0 \text{ 즉, } (p-\frac{1}{2})(p-1)=0$$

$$\therefore\ p=\frac{1}{2},\ 1$$

여기서

$$p=\frac{1}{2} \text{ 일 때 } f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \text{ 즉, } \left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right|<1$$

을 만족한다. 따라서, 균형점 $p=\frac{1}{2}$은 (정리 3. 5)에 의해서 점근적으로 안정적이다.

(보조정리) $p_1=a_1$, $p_2=a_1a_2$, $p_3=a_1a_2a_3$, $\cdots, p_n=a_1a_2\cdots a_n$ 이고 $0<a_i(i=1, 2, 3, \cdots, n)<1$ 이면 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=0$ 이다.

(증명) 가정에서 $0<a_i(i=1, 2, 3, \cdots, n)<1$ 이므로

$$p_1>p_2>p_3>\cdots>p_n>\cdots$$

즉, 수열 $\{p_n\}$은 단조감소수열(monotone decreasing sequence)이다.

또한, 수열 $\{p_n\}$은 유계이므로 반드시 수렴한다. 여기서, $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p>0$ 라 가정하자. 그러면 $p_{n_0}\le(a_k)^{n_0}<p$ 을 만족하는 $p_{n_0}=a_1a_2\cdots a_{n_0}$ 이 존재한다.

(단, $a_k=\max(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n_0})$)그런데, $p\le p_n$ $(\forall n\in N)$ 이므로 모순이다. 따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=0$ 이다.

(정리 3. 6) 차분방정식

$$x(n+1)=f\{x(n)\}$$

에 대하여 함수 f가 실수 R에서 연속이고 $f(p)=p$일 때 함수 f가 적당한 양수 δ에 대하여 구간 $(p-\delta,\ p)\bigcup(p,\ p+\delta)$에서 미분가능이고 $x\in(p-\delta,\ p)\bigcup(p,\ p+\delta)$ 일 때 $|f'(x)|<1$ 이면 균형점 p는 점근적으로 안정적이다.

(증명) (1) 임의의 $q=\Phi(0)\in(p-\delta,\ p)\bigcup(p,\ p+\delta)$ 라 놓으면 함수 f는 폐구간 $[p,\ q]$에서 연속이고, 개구간 $(p,\ q)$에서 미분가능하므로 평균치의 정리에 의해서

$$\frac{f(p)-f(q)}{p-q}=f'(r)$$

인 r이 $(p,\ q)$안에 적어도 하나 존재한다. 즉,

$$|f(p)-f(q)|=|f'(r)||p-q|<|p-q|\ (\because\ |f'(r)|<1)$$

따라서

$$\Phi(n)=\Phi(n,\ q),\ q=\Phi(0) \text{ 라 하면 } |p-q|<\delta \text{ 일 때}$$

$$\begin{aligned}|\Phi(n)-p|&=|f^n(q)-f^n(p)|=|f\{f^{n-1}(q)\}-f\{f^{n-1}(p)\}|\\&<|f^{n-1}(q)-f^{n-1}(p)|<|f^{n-2}(q)-f^{n-2}(p)|\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&<|f(q)-f(p)|<|q-p|<\delta\end{aligned}$$

여기서 $\delta\equiv\varepsilon$라 놓으면

$$|\Phi(n)-p|<|p-q|<\delta\equiv\varepsilon$$

$\therefore$ 균형점 p는 안정적이다.

(2) 평균치의 정리에 의해서

$$\begin{aligned}|\Phi(n)-p|&=|f^n(q)-f^n(p)|\\&=|f'(r_1)||f^{n-1}(q)-f^{n-1}(p)|\\&=|f'(r_1)||f'(r_2)||f^{n-2}(q)-f^{n-2}(p)|\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$= |f'(r_1)||f'(r_2)|\cdots|f'(r_{n-1})||f(q)-f(p)|$$
$$= |f'(r_1)||f'(r_2)|\cdots|f'(r_n)||f'(r_n)||q-p| \to 0 \ \ as \ n\to\infty$$

(∵ 위의 (보조정리)에 의해서

$$0 < |f'(r_i)| < 1 \ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1)$$

이므로

$$|f'(r_1)||f'(r_2)|\cdots|f'(r_n)||f'(r_n)| \to 0 \ \ as \ n\to\infty \ )$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} |\Phi(n)-p| = 0$$

따라서, 균형점 p는 점근적으로 안정적이다.

(보기 3. 5) 차분방정식

$$x(n+1) = f\{x(n)\}$$

에 대하여

$$x(n+1) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{x(n)-5\}+5 & \text{만약 } x \geq 5 \\ -\frac{2}{3}\{x(n)-5\}+5 & \text{만약 } x < 5 \end{cases}$$

일 때 미분불능인 균형점 p에서도 전체적 점근적으로 안정적임을 보이자.

$x(n)=x$라 놓으면

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-5)+5 & \text{만약 } x \geq 5 \\ -\frac{2}{3}(x-5)+5 & \text{만약 } x < 5 \end{cases}$$

그런데

$$x \geq 5 \text{ 일 때} \quad f'(x) = \frac{1}{2}$$
$$x < 5 \text{ 일 때} \quad f'(x) = -\frac{2}{3}$$

이므로 (정리 3. 6)의 충분조건인 $|f'(x)|<1$을 만족한다.

따라서, 균형점 p는 전체적 점근적으로 안정적이다.

(정리 3. 7) 차분방정식

$$x(n+1)=f\{x(n)\}$$

에 대하여 함수 f와 f'가 실수 R에서 연속이고 $f(p)=p$, $|f'(p)|>1$ 이면 균형점 p는 불안정하다.

(증명) 함수 f'가 점 p에서 연속이므로 임의의 양수 $\varepsilon^*=|f'(p)|-1$ 에 대하여 적당한 양수 δ^*가 존재하여

$|p-x|<\delta^*$ 이면

$|f'(p)-f'(x)|<\varepsilon^*=|f'(x)|-1$ 을 만족한다. 즉,

$$|f'(p)|-|f'(x)|<|f'(p)|-1$$

$$\therefore\ |f'(x)|>1$$

그러므로, 적당한 양수 δ^*에 대하여

$x\in[p-\delta^*,\ p+\delta^*]$ 일 때 $\min|f'(x)|=a$ 라 두면 $\min|f'(x)|=a>1$ 이다. 또한, 평균치의 정리에 의해서

$$\frac{|f(p)-f(q)|}{|p-q|}=|f'(r)|\geq a \quad (r\in(p,\ q))$$

즉

$|f(p)-f(q)|\geq a|p-q|$ 이 성립한다.

따라서 $\Phi(n)=\Phi(n,\ q)$, $q=\Phi(0)$ 라 하면

$$\begin{aligned}|\Phi(n)-p| &= |p-\Phi(n)| = |f^n(p)-f^n(q)| \\ &= |f\{f^{n-1}(p)\}-f\{f^{n-1}(q)\}| \\ &\geq a|f^{n-1}(p)-f^{n-1}(q)| \geq a^2|f^{n-2}(p)-f^{n-2}(q)| \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\geq a^{n-1}|f(p)-f(q)| \geq a^n|p-q|\to\infty \ \ as\ n\to\infty \quad (\because\ a>1)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}|\Phi(n)-p|=\infty$$

그러므로, 균형점 p는 불안정하다.

(보기 3. 6) 차분방정식

$$x(n+1)-x(n)\left\{x(n)-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$$

의 불안정한 균형점 p를 구해 보자.

차분방정식

$$x(n+1)-x(n)\left\{x(n)-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$$

을 정리하면

$$x(n+1)=x(n)\left\{x(n)-\frac{1}{2}\right\}+\frac{1}{2}$$

즉

$$f\{x(n)\}=x(n)\left\{x(n)-\frac{1}{2}\right\}+\frac{1}{2}$$

여기서 $x(n)=x$라 놓으면

$$f(x)=x\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2} \text{ 이고 } f'(x)=2x-\frac{1}{2}$$

균형점을 p라 하면

$$p\left(p-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=p$$

를 만족하므로 정리하면

$$(p-1)\left(p-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\therefore\ p=\frac{1}{2},\ 1$$

그런데 $p=1$ 일 때 $f'(1)=\frac{3}{2}$ 즉, $|f'(1)|>1$ 을 만족한다.

따라서, 균형점 $p=1$ 은 정리 3. 7)에 의해서 불안정하다.

Ⅲ. 결론 및 제언

본 논문의 주요 내용은 차분방정식 $x(n+1)=f\{x(n)\}$, $f: R \to R$에 대하여
(1) 상수해(균형점)의 존재성에 관한 충분조건들을 제시하고 이러한 충분조건들을 응용하는 보기들을 제시하였다.
(2) 차분방정식의 상수해(균형점)의 안정성에 관한 충분조건들을 제시하고 그러한 충분조건들을 응용하는 보기들을 제시하였다.
(3) 차분방정식의 상수해(균형점)의 불안정성에 관한 충분조건들을 제시하고 그러한 충분조건들을 응용하는 보기들을 제시하였다.

결론적으로 위에서 얻어진 연구결과들을 차분방정식계

$$x(n+1)=f\{x(n)\}, \quad f: R^n \to R^n$$

에 적용시킬 경우 확장되고 일반화된 결과들을 얻을 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

[1]. 장중일 (1985), "경제수학입문", 비봉출판사.
[2]. 양영오 (1995), "해석학", 청문각.
[3]. 전유봉· 오정환· 남상욱 공저, "미분적분학", 청문각.
[4]. 김종석 (1994), "고등학교 수학교실에서 유한차분방정식의 연구".
[5]. R. K. Miller and A. N. Michel ordinary Differtial Equations, 1982, Academic Press.