구간계산을 사용한 NEWTON방법에 관한 연구

김 근 시* • 김 도 현**

A Study on Newton Method with Interval Analysis

Kim, Keun-si • Kim, Do-hyun

Abstract

In general, interval arithmetic as a number of significant applications in scientific, engineering and statistical computation.

In this thesis, we shall consider a method for including zeros of a real function of one real variable x. Among the many methods for root-finding, we shall study especially the Newton method which uses derivatives.

It can be used to find zeros of the function, indluding non-accuracy coefficients.

* 남녕고등학교

** 제주대학교 사범대학 수학교육과

1. 서　론

科學的인 作業중에서 자주 일어나는 問題点의 하나는 高次 代數方程式이나 分數方程式, 三角函數나 指數函數를 포함하는 超越方程式等의 方程式 $f(x)=0$의 根을 求하는 일이다. 그런데 方程式 $f(x)=0$의 根을 正確히 求할 수 있는 경우는 매우 드문 일이나 願하는 만큼 正確한近似解를 求할 수는 있다. 方程式의 根을 求하는 問題는 數學에서 가장 오래된 問題들 중에 하나일 뿐만 아니라 컴퓨터를 이용해서 近似解를 찾는 數値解析學 分野에서 가장 基本的인 問題들 중의 하나이며 現在에도 이 分野에 대한 硏究가 繼續되고 있다.

方程式의 近似解를 求하는 數値的 方法에는 3百年前 뉴우톤에 의해서 만들어진 Newton-Raphson方法에서 부터 最近에 開發된 多項式函數에 關한 Quotient Difference 方法에 이르기까지 폭넓은 範圍로 되어 있는데 이들 方法의 共通되는 점은 中間置 定理를 이용하여 根이 存在하는 것을 確認한 後 그 區間內에 있는 任意의 한 點을 近似解로 取해 適當한 方法을 反復함으로써 참 根에 接近시켜 간다는 것이다.

本 論文에서는 方程式의 根을 찾기 위하여 導函數를 이용하여 精密度를 높여가는 方法인 Newton方法을 區間計算(Interval computation)을 使用하여 變形시킴으로써 願하는 近似解를 求하고 여러가지 問題点을 提起하고자 한다. 區間計算을 이용했을 때의 效率性은 컴퓨터에 正確한 初期데이타를 入力할 수 있고 또한 願하는 만큼 正確한 近似解를 찾을 수 있는데 있다.

本 論文의 2章에서는 實數 區間에서 4개의 二項演算 ＋ , -, . , :와 距離를 定義하고 基本的인 性質들을 살펴본다.

3章에서는 區間計算을 이용한 連續 實函數 f에 대해 考察해 본다.

4章에서는 旣存的인 Newton 方法을 區間을 이용하여 變形했을 때의 性質들을 調査하고 한 個의 例를 PASCAL - SC를 使用하여 프로그램해서 그 結果를 確認했다.

2. 실수구간계산

지금부터 實數 集合은 R로 表示하고, R의 元素는 小文字 $a,b,\ldots,y,z$로서 表示한다.

$$A=[a_1,a_2]=\{t \mid a_1 \le t \le a_2,\ a_1,a_2 \in R\}$$

와 같은 형의 實數의 部分集合을 閉區間으로 부른다. 모든 閉區間의 集合은 $I(R)$로 表示하고 $I(R)$의 元素는 大文字 $A,B,\ldots Y,Z$로서 表示한다. 實數 $x\in R$는 $I(R)$에서의 특수한 元素 $[x,x]$로 생각할 수 있으며 그것을 點 區間으로 부른다.

定義 2.1 $* \in \{+,-,\cdot,:\}$를 實數集合 R에서 二項演算이라 하자. 만약, $A,B \in I(R)$이면, $A * B = \{z = a * b \mid a \in A,\ b \in B\}$를 $I(R)$에서 二項演算이라고 定義한다.

나눗셈의 경우에서는 $0 \notin B$로 하자. 區間 $A=[a_1,a_2]$, $B=[b_1,b_2]$에서 演算은 다음과 같이 明確히 計算되어질 수 있다.

$A+B = [a_1+b_1, a_2+b_2]$,

$A-B = [a_1-b_1, a_2-b_2] = A+[-1,-1] \cdot B$

$A \cdot B = [\min\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}, \max\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}]$

$A:B = [a_1, a_2] \cdot [\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}]$

이것은 $f(x,y) = x * y$, $* \in \{+,-,\cdot,:\}$인 $z=f(x,y)$가 *Compact set*에서 連續函數라는 事實에서 起因된다.

定義 2.2. 만약 $r(x)$가 R에서 連續一項演算이면,

$$r(X) = [\min r(x), \max r(x)]$$

는 $I(R)$상에서 一項演算으로 定義한다.

$I(R)$에서 一項演算에 대한 例를 보면, $X^k (k \in R), e^x, \ln X, \sin X, \cos X$等이다.

定理 2.3. A,B,C를 $I(R)$元素라 하면 다음 性質이 成立한다.

(1) $A+B=B+A$, $A \cdot B = B \cdot A$ (交換法則)

(2) $(A+B)+C = A+(B+C)$, $(A \cdot B)C = A(B \cdot C)$ (結合法則)

(3) $X=[0,0]$과 $Y=[1,1]$은 덧셈과 곱셈에 關한 項等元이다. 즉, 모든 $A \in I(R)$에 對하여,

$$A = X + A = A + X \Leftrightarrow X = [0,0]$$

$$A = Y \cdot A = A \cdot Y \Leftrightarrow Y = [1,1]$$

(4) $a_1 \neq a_2$인 任意의 元素 $A=[a_1,a_2] \in I(R)$은 $+$ 와 $\cdot$ 에 對한 逆元을 갖지 않는다. 그럼에도 불구하고 다음이 成立한다.

$$o \in A - A,\ 1 \in A : A$$

$$A \cdot (B + C) \subset A \cdot B + A \cdot C \text{ (部分的인 分配法則)}$$

(5) 任意의 實數 a에 對하여, $a(B+C) = aB + aC$

모든 $b \in B$, $c \in C$에 對하여 $bc \geq 0$이면, $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$

定理 2.4. $A^{(k)}, B^{(k)} \in I(R)$(단, $k=1,2$)이고, $A^{(k)} \subset B^{(k)}$(단, $k=1,2$)이라 하면, 演算 $* \in \{+,-,\cdot,:\}$에 對하여

$$A^{(1)} * A^{(2)} \subset B^{(1)} * B^{(2)}$$

이 成立한다.

定義 2.2의 一項演算 $\pi(X)$는 다음의 類似한 性質을 갖는다.

$$X \subset Y \Rightarrow \pi(X) \subset \pi(Y)$$

$$x \in X \Rightarrow \pi(x) \in \pi(X)$$

지금 實數區間의 集合 $I(R)$에서 距離의 槪念을 紹介한다.

定義 2.5. 두개의 區間 $A=[a_1,a_2]$, $B=[b_1,b_2] \in I(R)$사이의 距離는 다음과 같이 定義한다.

$$q(A,B)=\max\{|a_1-b_1|, |a_2-b_2|\}$$

定理 2.6. 定義 2.5의 距離를 갖는 距離空間 $(I(R))$는 完備性(Complete)이다.
(이것은 區間들의 모든 *Cauchy* 數列은 한 區間으로 收斂한다는 것이다.)

定理 2.7. $A^{(0)} \supset A^{(1)} \supset A^{(2)} \supset ..$인 區間들의 數列 $\{A^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$는 區間 $A=\cap_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$에 收斂한다.

定理 2.8. 定義 2.1에 紹介한 區間사이의 演算 +,-,.,:은 連續이다.

定義 2.9. $I(R)$에 속하는 任意의 區間 $A=[a_1,a_2]$의 절대값은 다음과 같이 定義한다.

$$|A|=q(A,[0,0])=\max\{|a_1|,|a_2|\}$$

定義 2.10. 區間 $A=[a_1,a_2]$의 나비(폭)는

$$d(A)=a_2-a_1 \geq 0$$

으로 定義한다.

點區間의 集合은 $\{A \in I(R) | d(A)=0\}$로 表示될 수 있다. 위의 定義로 부터 다음의 性質을 얻을 수 있다.

$$A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$$

$$d(A \pm B)=d(A)+d(B)$$

定理 2.11. $I(R)$에 속하는 任意의 區間 A,B에 對하여 다음 性質이 成立된다.

(1) $d(A)=|A-A|$,

(2) $A \subset B \Rightarrow \frac{1}{2}(d(B)-d(A)) \leq q(A,B) \leq d(B)-d(A)$.

3. 구간값과 실함수의 치역

이 節에서는 連續實函數 f에 對해 考察해 본다. f로 부터 表現되는 어떤 式 $f(x)$는 獨立變數에 對한 函數 f의 값을 決定하는 計算過程이다. f로부터 表現되는 모든 式은 有限個의 演算과 被演算數로 構成 됐다고 생각 할 수 있다. 만약, f로부터 表現되는 어떤 式이 常數 $a^{(0)},\dots,a^{(m)}$을 갖는다면, 이것을 $f(x;a^{(0)},\dots,a^{(m)})$로 쓰기로 한다.

여러가지 問題들을 간단히하기 위하여, 각 常數 $a^{(k)}, (0 \le k \le m)$는 한 式에서 오직 한 번만 나타난다고 假定한다.

(例): 函數 g에 대한 2개의 式은

$$g^{(1)}(x;a)=\frac{ax}{1-x}, \quad x\neq 1,\ x\neq 0$$
$$g^{(2)}(x;a)=\frac{a}{\frac{1}{x}-1}, \quad x\neq 1,\ x=0$$

이다. 다음의 式

$$W(f,X,A^{(0)},\dots,A^{(m)})$$
$$=\{f(x;a^{(0)},\dots,a^{(m)}) \mid x\in X,\ a^{(k)}\in A^{(k)},\ 0\le k\le m\}$$
$$=[\min_{\substack{x\in X\\ a^{(k)}\in A^{(k)},0\le k\le m}} f(x;a^{(0)},\dots,a^{(m)}),\ \max_{\substack{x\in X\\ a^{(k)}\in A^{(k)},0\le k\le m}} f(x;a^{(0)},\dots,a^{(m)})]$$

는 $x\in X$와 $a^{(k)}\in A^{(k)}$, $0\le k\le m$가 서로 獨立일 때 그 函數 f의 모든 값들의 區間을 나타낼 것이다. 이 定義는 f의 式과 獨立이다.

(例): 앞 例에서의 函數 g와 $A=[0,1]$, $X=[2,3]$에 對하여

$$W(g^{(1)},[2,3];[0,1])=\{\frac{ax}{1-x} \mid 2\le x\le 3, 0\le a\le 1\}=[-2,0]$$
$$W(g^{(2)},[2,3];[0,1])=\{\frac{a}{\frac{1}{x}-1} \mid 2\le x, 0\le a\le 1\}=[-2,0]$$

따라서,

$$W(g^{(1)},X;A)=W(g^{(2)},X;A)$$

그러나,

$$g^{(1)}([2,3];[0,1])=\frac{[0,1][2,3]}{1-[2,3]}=[-3,0]$$

$$g^{(2)}([2,3];[0,1])=\frac{[0,3]}{\frac{1}{[2,3]}-1}=[-2,0]$$

이므로

$$g^{(1)}(X;A)\neq g^{(2)}(X;A)$$

어떤 實函數 f의 區間計算은 다음과 같이 定義한다. 어떤 式이 函數 f로 주어 졌다고 하자. 이 式에서 區間으로 바꾼 모든 被演算數와 區間演算으로 바꾼 모든 演算은 式

$f(X;A^{(0)},\ldots,A^{(m)})$로 表現된다. 만약 모든 被演算數가 定義 2.1과 정의 2.2에서 定義된 演算의 定義域 안에 있다면, 이것은 f에 대한 區間計算 또는 區間 算術計算이라 부른다.

定理 3. 1. f를 實變數 $x^{(1)},\ldots,x^{(n)}$인 連續函數라 하고, f에 對한 어떤 式을

$$f(x^{(1)},\ldots,x^{(n)};a^{(0)},\ldots,a^{(m)})$$

이라 하자. 區間 $Y^{(1)},\ldots,Y^{(n)},B^{(0)},\ldots,B^{(m)}$에 對한 區間計算을

$$f(Y^{(1)},\ldots,Y^{(n)};B^{(0)},\ldots,B^{(m)})$$

으로 定義하면 다음이 成立한다.

(a)모든 $X^{(k)}\subset Y^{(k)}$, $A^{(j)}\subset B^{(j)}, 1\le k\le n,\ 0\le j\le m$에對하여, $W(f,X^{(1)},\ldots,X^{(n)};A^{(0)},\ldots,A^{(m)})\subset f(X^{(1)},\ldots,X^{(n)};A^{(0)},\ldots,A^{(m)})$, (b)모든 $X^{(k)}\subset Z^{(k)}$, $A^{(j)}\subset C^{(j)}\subset B^{(j)}$, $1\le k\le n,\ 0\le j\le m$에 對하여, $f(X^{(1)},\ldots,X^{(n)};A^{(0)},\ldots,A^{(m)})\subset f(Z^{(1)},\ldots,Z^{(n)};C^{(1)},\ldots,C^{(m)})$이 성립한다.

(例) : 函數 f를 $f(x;a)=a-\frac{x}{1+x}$ $(x\neq -1)$이라 하고, $X=[-\frac{1}{2},1]$, $Z=[-\frac{1}{2},2]$, A =C=[2, 3]을 選擇하면, 다음 關係를 얻는다.

$$W(f[-\tfrac{1}{2},1];[2,3]=[\tfrac{3}{2},4]\subset f([-\tfrac{1}{2},1];[2,3])=[0,4]$$

$$f([-\tfrac{1}{2},1];[2,3]=[0,4]\subset f([-\tfrac{1}{2},2];[2,3])=[-2,4]$$

定理 3.1(a)에서 항상 等式을 얻을 수 있는 경우는 각각의 數 $x^{(1)},\ldots,x^{(n)},a^{(0)},\ldots,a^{(m)}$가 식 $f(x^{(1)},\ldots,x^{(n)};a^{(0)},\ldots,a^{(m)})$에서 오직 한 번만 나타날 때이다.

定理 3. 2. p를 다음 式으로 定義하는 實變數 x에 對한 多項式이라 하자.

$$p(x;a^{(0)},\ldots,a^{(m)})$$
$$=(\ldots((a^{(m)}x+(m-1))^{n_{m-1}}+a^{(m-2)})^{n_{m-2}}+\ldots+a^{(1)})^{n_1}+a^{(0)},$$

단, $n_v\le 2,\ 1\le v\le m-1$.

만약, 그 式에서 나타난 冪들(powers)이

$$X^{(k)}=[\min x^{(k)},\max x^{(k)}]$$

와 같이 計算되어 진다면,

$$W(p,X;a^{(0)},\ldots,a^{(m)})=p(X;a^{(0)},\ldots,a^{(m)})$$

이 된다.

(주의) : 一般的으로, $X^2\neq X\cdot X$가 된다.

定理 3.1의 一般的인 內容과 위에서 記述된 特別한 경우와 더불어 區間計算에 의한 어떤 函數에 f의 値域에 對한 近似値의 性質에 關한 內容에 關心이 있다. 그러므로 一變數函數인 경우에는 다음과 같이 體系化시킬 수 있다.

定理 3.3. f를 實變數 x의 實函數라 하고, $f(x;a^{(0)},\ldots,a^{(m)})$를 f의 任意의 式이라 하자. 새로운 式

$$\tilde{f}(x^{(1)},\ldots,x^{(m)};a^{(0)},\ldots,a^{(m)})$$

은 各各에 나타난 實變數 x를 새로운 變數 $x^{(k)}, 1 \leq k \leq n$로 代置하므로써 定義된다, Y와 $A^{(0)},\ldots,A^{(m)} \in I(R)$에 對하여, 區間計算 $f(Y;A^{(0)},\ldots,A^{(m)})$가 存在한다고 하자. 또한 다음 式

$$\tilde{f}(x^{(1)},\ldots,x^{(n)};a^{(0)},\ldots,a^{(m)})$$

$$f'(x_n\text{-}1)$$

이 區間 Y에 있는 各 變數 $x(k)$에 對하여 任意의 $x^{(j)} \in y, 1 \leq j \leq n, j \neq k, a^{(j)} \in A^{(j)}, 0 \leq j \leq m$에 對한 Lipschitz條件을 滿足한다고 하자. 그 밖의 記法(notation)은 定理 3.1에서와 같다 그러면 $X \subset Y$에 대하여 다음이 成立한다.

$$q(W(f,X;A^{(0)},\ldots,A^{(m)}), f(X;A^{(0)},\ldots,A^{(m)})) \leq r \cdot d(X),\ r \geq 0.$$

定理 3.4. f가 實變數 x의 實函數 이고 $f(x)$를 f에 對한 任意의 式이라고 하자. 定理 3.3의 모든 假定이 成立됐다고 하면, 任意의 $X \subset Y$에 對하여,

$$d(f(X) \leq \rho \cdot d(X),\ \rho \geq 0$$

이 成立한다.

4. NEWTON방법의 구간 변경

既存的인 Newton-Raphson(혹은 Newton) 方法은 $f(x)=0$의 根을 求하는 數値解析的 方法中에서 가장 훌륭하고 잘 알려진 方法인데 $x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_n-1)}{f(x_n-1)}$ 에 의해서 定義된다. 이 節에서는 ***Newton***方法에 對한 區間變更을 했을 때 나타나는 여러가지 性質과 問題點을 調査한다. 이를 위하여 주어진 區間 $X^{(0)}=[x_1^{(0)},x_2^{(0)}]$에서 하나의 根을 갖는 連續函數 f를 생각한다. 즉, 어떤 $\zeta\in X^{(0)}$에 대하여 $f(\zeta)=0$. $X^{(0)}$의 境界點에서

(1) $$f(x_1^{(0)})<0,\ f(x_2^{(0)})>0$$

이라 하고, 또한 m_1,m_2를 差分像(*divided differences*)

(2) $$0<m_1\leq\frac{f(x)-f(\zeta)}{x-\zeta}=\frac{f(x)}{x-\zeta}\leq m_2<\infty,\ \zeta\neq x\in X^{(0)}$$

에 對하여 境界라 하자. 이러한 境界는 區間 $M=[m_1,m_2]\in I(R)$로 나타난다.

(만약, $f(x_1^{(0)})>0$, $f(x_2^{(0)})<0$이고 $m_2<0$임을 假定하면 같은 表現이 역시 可能하다). 위의 假定하에서 f가 $X^{(0)}$에서 다른 根을 갖지 않은다는 것은 明確하다.

根 ζ를 包含하는 初期區間 $X^{(0)}$에서 出發하여 다음과 같이 反復的으로 새로운 區間$X^{(k)}(k\geq1)$를 計算한다. 즉, $m(X^{(k)})\in X^{(k)}$에 對하여

(3) $$X^{(k-1)}=\{m(X^{(k)})-\frac{f(m(X^{(k)}))}{M}\}\cap X^{(k)},\ k\geq0$$

反復法(3)은 다음과 같이 區間演算을 사용하지 않고 쓸 수도 있다.

(3') $$x_1^{(k+1)}=\begin{cases}\max\{x_1^{(k)},m(X^{(k)})-\frac{f(m(X^{(k)}))}{m_1}\}, & (\text{단},f(m(X^{(k)}))\geq0)\\ m(X^{(k)})-\frac{f(m(X^{(k)}))}{m_2}, & (\text{단},f(m(X^{(k)}))\leq0)\end{cases}$$

$$x_2^{(k+1)}=\begin{cases}m(X^{(k)})-\frac{f(m(X^{(k)}))}{m_2}, & (\text{단}.\ f(m(X^{(k)}))\geq0)\\ \min\{x_2^{(k)},m(X^{(k)})-\frac{f(m(X^{(k)}))}{m_1}\}, & (\text{단},\ f(m(X^{(k)}))\leq0)\end{cases}$$

두개의 公式(3)과 (3')에서 記法 m는 $I(R)$에서 R로 가는 函數이고 中點

(4) $$m(X)=\frac{x_1+x_2}{2}$$

가 가끔 사용된다. 이제 反復的인 計算에 따라 얻어진 數列$\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$에 對한 가장 重要한 性質을 定理하고자 한다.

定理 4. 1. f를 連續函數라 하고, ζ를 $X^{(0)}$에서 f의 根이라 하자. (1)은 成立하고, (2)는 區間 $M=[m_1,m_2]$, $m_1>0$에 對하여 明確하다고 하자. 그러면 數列$\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$는 (3)에 따라 計算하며 다음의 性質을 갖는다.

(5) $$\zeta\in X^{(k)},\ k\geq0,$$

(6) $$X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} X^{(k)} = \zeta,$$

또한 그 數列은 有限的인 몇 段階를 거친 후 點$[\zeta,\zeta]$에 收斂한다.

(7) $$d(X^{(k+1)}) \leq \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) d(X^{(k)})$$

(證明) : (5) : (2) 와 定理 2. 4에서부터 다음을 얻는다.

$$\xi = m(X^{(0)}) - \frac{f(m(X^{(0)}))}{f(m(X^{(0)}))/m(X^{(0)})}$$

$$\in \left\{ f(m(X^{(0)})) - \frac{f(m(X^{(0)}))}{M} \right\} \cap X^{(0)} = X^{(1)}.$$

$k>1$에 對한 證明은 歸納法을 사용함으로써 成立된다.

(6),(7) : $f(m(X^{(k)}))>0$임을 假定하자. 만약, $f(m(X^{(k)})) \geq (m(X^{(k)}) - x_1^{(k)})m_1$이 成立하면 (3′)을 사용하여

$$\begin{aligned} d(X^{(k+1)}) &= x_2^{(k+1)} - x_1^{(k+1)} \\ &= m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_2} - x_1^{(k)} \\ &\leq \left(m(X^{(k)}) - x_1^{(k)}\right) - \frac{(m(X^{(k)}) - x_1^{(k)})m_1}{m_2} \\ &= \left(m(X^{(k)}) - x_1^{(k)}\right)\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \\ &\leq d(X^{(k)})\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \end{aligned}$$

을 얻는다. 만약, $f(m(X^{(k)})) \leq (m(X^{(k)}) - x_1^{(k)})m_1$이면, (3′)을 사용하여

$$\begin{aligned} d(X^{(k+1)}) &= x_2^{(k+1)} - x_1^{(k+1)} \\ &= m(X^{(k)}) - \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_2} - m(X^{(k)}) + \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_1} \\ &= \frac{f(m(X^{(k)}))}{m_1}\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \\ &\leq \left(m(X^{(k)}) - x_1^{(k)}\right)\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \\ &\leq d(X^{(k)})\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right). \end{aligned}$$

$f(m(X^{(k)}))<0$인 경우에는 같은 方法으로 證明이 된다. 그러나 만약, $f(m(x^{(k)}))=0$이면 $m(X^{(k)}) = \zeta$,, 따라서 $X^{(k+i)} = \zeta$, , $i \geq 1$, $d(X^{(k+1)})=0$이 되므로서 (7)이 證明된다. 또한 $m_1 \leq$

m_2이므로

$$d(X^{(k+1)}) \leq \gamma^{k+1} d(X^{(0)}), \quad 0 \leq \gamma = (1 - \frac{m_1}{m_2}) < 1,$$

을 얻게 되는데, 이것은 다음 式과 같은 것이다.

$$\lim_{k\to\infty} d(X^{(k+1)})=0$$

(5)의 $\zeta \in X^{(k)}$, $k \geq 0$이고 $\lim_{k\to\infty} d(X^{(k+1)})=0$이므로 $\lim_{k\to\infty} X^{(k)}=\zeta$이다. (6)의 첫번째 부분은 (3)에 대한 결과이다.

따라서, 定理 4.1은 주어진 假定하에서 反復區間 $X^{(k)}$, $(k \geq 0)$의 各各은 원하는 根을 포함하고 k가 한없이 커지면 f의 根 ζ에 收斂한다는 것을 保障해 주고 있다.

우리는 지금부터 特別히 選擇된 點 m을 固定하고 다음의 따름定理를 얻는다.

따름 定理 4. 2. 定理 4.1과 같은 記法과 假定에 덧붙여

$$m(X^{(k)}) = \tfrac{1}{2}(x_1^{(k)}+x_2^{(k)}), k \geq 0$$

이 주어지면, 反復的인 計算에 의하여 얻어진 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$에 對하여 不等式

$$d(X^{(k+1)}) \leq (1 - \frac{m_1}{m_2}) d(X^{(k)})$$

은 (7)에서 改善된 것이다.

(證明): $m(X^{(k)}) = \tfrac{1}{2}(x_1^{(k)}+x_2^{(k)})$, $k \geq 0$

$$m(X^{(k)}) - x_1^{(k)} = \tfrac{1}{2} d(X^{(k)})$$

를 얻는다. 이것을 (7)의 證明課程에 代入하면 (8)을 얻을 수 있다.

만약, $m(X^{(k)})$에 對한 中點이 選擇되어 진다면, 그것은 모든 反復段階에서 包含되는 나비(폭)는 적어도 二等分 된다는 事實이 保障된다. 差分像(3)을 境界로 하는 區間 M는 定理 4.1은 물론 따름 定理 4.2에서 둘다 必要하다. 만약, 函數 f가 連續的으로 微分可能하면 ($x \in X^{(0)}$에 對하여 $f'(x) \neq 0$이면) 平均値 定理를 사용하여

(8) $$M = [\inf_{y \in X^{(0)}} f'(y), \ \sup_{y \in X^{(0)}} f'(y)]$$

와 같이 選擇되어질 수도 있다. 一般的으로 이 區間의 擴大集合(Superset)으로 어림잡을 수 있는데, 例를 들면 f'의 區間값 즉, $M=f'(X^{(0)})$로 計算한다. (3)의 方法을 사용하기 위하여 f의 差分像에 對한 境界의 固定된 點 m_1, m_2를 必要로 했다.

이러한 節次는 *Newton*方法의 區間計算에서도 필요하다. 지금부터 만약, f가 連續的으로 微分可能하고 導函數 f'이 區間計算 $f'(X)$를 갖는다면 普通의 *Newton* 方法을 區間計算을 사용하여 變形시켜 본다. (3)에서 M을

(9) $$M^{(k)} = f'(X^{(k)})$$

로 代置한다. 만약, 境界

$$0<l_1\leq f'(x)\leq l_2,\ x\in X^{(0)}$$

를 안다면 $m_1>0$이고 式

(10) $$M^{(k)}=[m_1^{(k)},m_2^{(k)}]=f'(X^{(k)})\cap L,\quad L=[l_1,l_2]$$

를 사용할 수 있다는 것을 保障하게 된다. 따라서, $m(X^{(k)})\in X^{(k)}$에 대하여 다음 式'을 얻게 된다.

(11) $$X^{(k+1)}=\{m(X^{(k)})-f(m(X^{(k)}))/M^{(k)}\}\cap X^{(k)},\quad k\geq 0.$$

(11)을 사용하면 區間들로 이루어진 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$는 定理 4.1과 비슷한 內容으로 證明할 수 있도록 만들어 진다.

定理 4.3 f를 連續的으로 微分可能한 函數이고, f이 區間$X^{(0)}$에서 定理 3.4의 假定을 滿足한다고 하자. 또한 關係式(1)이 $X^{(0)}$에서 成立된다고 하자. $X^{(0)}$에 있는 f의 根은 ζ로 나타내고, 區間 $M^{(k)}$는 (9)또는 (10)에 의하여 定義된다. 그러면 數列 $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$는

$$\zeta\in X^{(k)},\quad k\geq 0$$

$$X^{(0)}\supset X^{(1)}\supset X^{(2)}\supset\ldots,\quad \lim_{k\to\infty}X^{(k)}=\zeta,$$

을 滿足하거나, 그 數列은 몇번의 有限的인 段階를 거친 後에 $[\zeta,\zeta]$에 收斂한다.

(12) $$d(X^{(k+1)})\leq\left(1-\frac{m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}}\right)d(X^{(k)})$$
$$\leq\beta(d(X^{(k)}))^2,\quad \beta\geq 0.$$

(證明) $x\in X^{(k)}$에 對하여 다음이 成立한다.

$$\frac{f(\xi)}{x-\xi}=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=f'(\eta)\in M^{(k)},\ \eta=x+\theta(\xi-x),\quad (0<\theta<1).$$

그러므로, $M^{(k)}$에 對한 類似한 決定은 定理 4.1에서와 같이 證明되어 진다. 定理 4.1의 證明에서와 같이

$$d(X^{(k+1)})\leq\left(1-\frac{m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}}\right)d(X^{(k)})=\frac{m_2^{(k)}-m_1^{(k)}}{m_2^{(k)}}d(X^{(k)})$$

를 얻고 定理 3.4를 이용하여

$$d(X^{(k+1)})\leq\frac{d(M^{(k)})}{m_1^{(0)}}d(X^{(k)})\leq\frac{d(f'(X^{(k)})}{m_1^{(0)}}d(X^{(k)})$$

$$\leq\frac{c}{m_1^{(0)}}(d(X^{(k)}))^2,\qquad \frac{c}{m_1^{(0)}}\geq 0$$

를 얻는다.

여기서 이 反復을 더 많이 修訂하게 되고 이를 爲하여 $f(m(X^{(k)}))>0$ 또는 $f(m(X^{(k)}))<0$에 依存하여 願하는 根은 반드시 각각 區間 $[x_1^{(k)}, m(X^{(k)})]$ 또는 $[m(X^{(k)}), x_2^{(k)}]$안에 반드시 있어야 한다는 것을 알게 된다. 만약, $f(m(X^{(k)}))=0$이면, $m(X^{(k)})=\zeta$, 와 같이 그 反復은 끝나게 된다. 따라서 그것은 (11)에서부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(13)\qquad Y^{(k)} = \begin{cases} [x_1^{(k)}, m(X^{(k)})] & (f(m(X^{(k)})) > 0) \\ [m(X^{(k)}), x_2^{(k)}] & (f(m(X^{(k)})) < 0) \\ X^{(k)} & (f(m(X^{(k)})) = 0). \end{cases}$$

에 대하여,

$$M^{(k)}=f'(Y^{(k)})\cap L,\quad L=[l_1, l_2]$$

그러면 $f'(Y^{(k)})\subset f'(X^{(k)})$이고 $d(Y^{(k)}\leq d(X^{(k)})$가 되며, $m_1^{(k)}>0$이다.

定理 4.3은 역시 (13)의 選擇에 대해 明確하다. 方法(11)을 위해 $m(X^{(k)})\in X^{(k)}$의 選擇에 關하여는 따름定理 4.2의 內容과 비슷한 內容을 갖게 된다.

이제 하나의 例題를 通하여 區間을 이용한 Newton 反復法을 明確하게 하고자 한다.

(例題) : 函數 $f(x)= x^2(\frac{1}{3}x^2+\sqrt{2}\,sinx)-\sqrt{3}/13$는 $X^{(0)}=[0.1, 1]$에서 根ζ 를 갖는다. 導函數 $f'(x)= x(\frac{4}{3}x^2+\sqrt{2}(2sinx + cosx))$는 $l_1 \leq f'(x) \leq l_2$, $x\in X^{(0)}$를取함에 의하여 $X^{(0)}$ 에서推定되어진다. (10)을 사용해서 얻어진 反復區間 $X^{(k)}$, $k\geq 0$ 와(13)을 사용해서 求한 反復區間 $Y^{(k)}$, $k\geq 0$ 은 過程(11)에 따라서 컴퓨터로 計算했다. 그 結果는 표 1-1과 표 1-2에서 보여진다.

(표 1-1)

[0.100000000000,	0.520000000000]
[0.340000000000,	0.520000000000]
[0.370000000000,	0.410000000000]
[0.392200000000,	0.392600000000]
[0.392379490000,	0.392379530000]
[0.392379507136,	0.392379507138]

(표 1-2)

$Y^{(k)}$		$d(X^{(k)})/d(Y^{(k)})$
[0.100000000000,	0.520000000000,	0.929283714640]
[0.340000000000,	0.520000000000,	0.825576541375]
[0.370000000000,	0.410000000000,	0.389006337630]
[0.392200000000,	0.392600000000,	0.017633860914]
[0.392379490000,	0.392379530000,	0.000180266987]
[0.392379507136,	0.392379507138,	0.000149913799]

참고문헌

1. 송만석, 장건수 편역, 기초수치해석학, 김여사, 1992
2. 이경환, 송문섭편역, 수치해석, 희중당, 1984
3. Gotz Alefeld, Introductio to Interval Computation, Academic, 1983)
4. L.W.ehrlich, A modified newton Method for polynomials, 1967.
5. E. Hanson, Interval forms of Newton's Method, 1978