科學敎育, 15, 133~149, 1998
Journal of Science education
15, 133~149, 1998

高等學校에서의 極限의 槪念 指導에 관한 硏究

宋錫準* · 高銀姬**

The Study for Teaching the Concept of Limit in High School

Song, Seok-Zun · Ko, Eun-Heui

Abstract

In this thesis, we research the definitions and some examples on the limits of both sequences and functions from mathematics textbooks that used in high schools and in universities, respectively. And then we compared them and found some difference between them. At last, we tried to correct the defects of definitions in the high school textbooks and to introduce the strict definitions of limits of both sequences and functions into high school textbooks.

I. 서 론

극한의 개념 지도의 중요성은 이것이 고교수학의 중심내용을 이루는 미분, 적분의 기초가 되기 때문이다. 또 극한의 개념은 해석학의 이론전개에 가장 기본이 되

* 제주대학교 자연과학대학 수학과 교수
** 제주중앙여자고등학교 교사

는 개념이다. 르네상스(17세기) 이후 극한개념을 이용하여 함수의 성질을 연구하는 미분적분학이 발전하게 되었고, 이 극한이라는 수학적 도구를 사용하여 근세수학이 발전하게 되었으며 그 주된 것은 해석학의 발전이었다. 수학의 한 분야인 해석학은 구조를 갖는 집합 사이에 정의된 함수의 성질을 조사하여 연구하는 학문이다. 해석학에서 함수의 성질을 연구함에 있어 기본이 되는 중요한 개념은 극한개념이다. 또 함수의 연속성, 미적분의 정의는 다항식 함수 또는 삼각함수 와 같은 연속함수의 근사값 측정에도 이런 극한개념이 토대가 되어있다.

이러한 중요한 개념을 「고등학교 수학 I」에서 학습하고 있는데, 본 연구는 고등학교 교과서들이 사용하는 극한 개념과 그 지도 내용에 관하여 교과서 별로 정의와 예제들을 조사하고, 대학교 교재에서 정의한 엄밀한 극한의 개념을 살펴보면서, 그 사이의 차이를 비교 분석하며 극한의 정의에 관한 문제점들을 찾아내고, 이것을 해소하는 방향을 모색하고자 연구를 계획하였다.

II. 연구방법

1. 연구자료

본 연구에서는 교육법에 의하여 고시된 제6차 교육 과정([10])에서 교육부가 제시한 고등학교 수학 교과 및「고교 수학 I」교과의 교육 과정 체제 및 이 고시에 의하여 제작된 「고교수학 I」교과서 5종과 국내 대학 교재 1권 및 외국 대학 교재 1권을 연구자료로 사용한다(<표 1>참조).

2. 연구내용

본 연구는 제6차 교육 과정에 따른 「고교 수학 I」 교과서의 극한의 정의와 예제를 조사하여 문제점을 찾아내고, 개선 방향을 제시하고자 한다. 그런데 「고등학교 수학 I」 교과서를 전부 분석하는 것이 연구의 목적에 부합되겠지만, 「수학 I」 교과의 교과목표에 따라서 제작된 각종 교과서가 대동소이할 것으로 생각되어서 5가지만 분석하였다.

곧 「고등학교 수학 I」 교과서에서 정의하는 극한의 개념과 이에 관련한 예제들을 조사하였고, 또 대학 교재들에 실린 극한의 정의와 예제를 조사하여 이를 비교 분석하였다. 그래서 그들 사이에 나타나는 차이점을 고교 수학의 성격, 목표 등

<표1> 제6차 교육 과정에 의한 「고등학교 수학 I」 교과서 5종과 대학 교재 목록

책 명	저 자	기호	출 판 사	발행년도
·수학 I	금종해, 정순영, 박평순	M1	한샘출판사	1995년도
· 〃	김연식, 김흥기	M2	동아출판사	〃
· 〃	박배훈외 5인	M3	교학사	〃
· 〃	박한식외 5인	M4	지학사	〃
· 〃	조승제	M5	재능교육	〃
·미분적분학	양성호외 6인	M6	학문사	1997년
·Caclus with analytic geometry	Thurman S. Peterson	M7	Marper & Row	1966년

에 비추어 문제점을 찾고 이를 해소하는 방안을 모색하였다.

Ⅲ. 결과 및 고찰

제6차 고교 과정([10])에서 「수학 I」의 성격을 " 「공통수학」보다 높은 수준이고 「수학II」 과목 이수에 기초가 되는 과목"으로 규정하였다. 또 "「수학 I」 과목의 학습에서는 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙의 습득과 이를 활용하여 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하게 하고, 단계적인 과정을 밟아 문제를 해결하는 습관을 가지도록 한다." 고 학습내용을 규정하였다. 이 성격에 맞추어 목표에서 "나. 수열과 함수의 극한 및 미적분의 기본 개념과 법칙을 이해하게 하고, 이를 활용할 수 있게 한다." 고 하였다. 그런데 방법에서는 "③ 극한에 관한 정의와 성질을 직관에 의하여 지도한다." 라고 규정하고 있다.

이상의 규정에 의하여 제작된 현재 「고교 수학 I」 교재들에서 수열의 극한 부분과, 함수의 극한 부분으로 나누어 문제들을 고찰하기로 한다.

1. 수열의 극한에 관한 교재내용 분석과 엄밀한 정의

앞서 말한 대로, 제6차 교육 과정([10])에서는 극한의 지도 방법을 "극한에 관한 정의와 성질을 직관에 의하여 지도한다."라고 규정하고 있다. 이 규정에 의하여 현

<표2> 「고교 수학1」 교과서에 있는 수열의 극한값의 정의와 예제

교재번호	면	정 의	기 본 예 제
M1	86	· 무한수열 $\{a_n\}$에서 항의 번호 n이 한없이 커짐에 따라 제 n항 a_n의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 L에 수렴한다고 한다.	· $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$, · $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$
M2	97	· 무한수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, a_n이 일정한 값 a에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 a에 수렴한다고 한다.	· $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$
M3	91	· 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, a_n이 일정한 값 a에 한없이 가까워지면 이 수열 $\{a_n\}$은 a에 수렴한다.	· $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ · $\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}=1$
M4	76	· 무한수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n이 일정한 수 a에 한없이 가까워지면, 수열 $\{a_n\}$은 a에 수렴한다고 한다.	· $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ · $\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{2n}\right\}=1$
M5	97	· 무한수열 $\{a_n\}$, 즉 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ 에 대하여 n이 한없이 커짐에 따라 수열의 일반항 a_n의 값이 일정한 값 a에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 a에 수렴한다고 한다.	· $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ · $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$

재 「고등학교 수학 I」 교재들에서는 수열의 극한의 정의를 다음 표와 같이 말하

고 있다. 또 이것을 이해시키기 위하여 기본 예제들을 몇 가지씩 들고 있는데, 대표적인 예제들은 다음 <표2>와 같다.

이상의 정의들은 모두 대동소이하다. 여기서 몇 가지 문제점을 살펴보면, 먼저, 용어 '한없이' 에 대한 정의이다. 이 '한없이' 라는 용어는 수학적인 용어라고 말할 수 없다. 그래서 비수학적인 용어로 수학을 정의하게 된 것이다. 이것은 수열의 극한에 관한 엄밀한 정의를 「고교 수학Ⅰ」의 과정에서 지도하기가 어려울 것으로 여겨서 피한 것으로 사료된다. 그런데 「고교 수학Ⅰ」 교육 과정에서 이 정의에 아무런 문제 의식 없이 교육을 함으로써, 「수학Ⅰ」 교육 과정의 성격에 위배되고 있다. 즉 수열의 극한의 기본적인 개념과 원리를 이해하게 하지 못하는 것이다. 그래서 교육 과정의 목표를 달성하기 어렵다.

<표3> 대학 교재에서 사용하는 수열의 극한에 대한 정의와 예제

교재기호	면	정의	기본예제
M6	35	. 수열 $\{a_n\}$에서 임의의 주어진 임의의 양수 ε에 대하여 자연수 N이 존재하여 $n \geq N$ 인 모든 자연수 n에 대해서 $\mid a_n - L \mid < \varepsilon$이 성립할 때, 수열 $\{a_n\}$은 L에 수렴한다고 한다.	. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ 임을 증명하여라. . 수열 $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$의 값은 2임을 보여라.
M7	38	. A sequence is said to approach a value A as n increases, if corresponding to every positive number ε there is some positive integer N such that $\mid s_n - A \mid < \varepsilon$ is true for every integer n that satisfies the inequality $n > N$	. $\left\{\frac{1}{n^2}\right\} \to 0$ as $n \to \infty$

한편 대학 교재의 미분, 적분학 교재에서는 수학적인 엄밀한 극한의 정의를 사용하고 있다. 우리는 두 권의 교재에서 사용하는 정의와 이에 관련된 기본 예제를 조사하였더니 아래 <표3>과 같았다.

이 <표 3>의 두 정의는 같은 내용이다. 여기서는 '한없이'라는 용어는 사용하지

않는다. 그 대신 '임의의 양수 ε' 을 비교의 기준으로 사용하는 것이다. 이것은 확실히 수학적인 용어이다. 그러므로 이를 엄밀한 정의라고도 한다. 이 엄밀한 정의를 「고등학교 수학 I」의 교육 과정에서 곧바로 도입하는 것은 어려움이 있을 것으로 여겨지지만, 그렇다고 교육의 목표와 성격에 일치하지 못하는 직관에 의한 정의만을 고집하는 것도 문제가 있다고 본다.

그러므로 「고교 수학 I」 교육 과정에서는 수열의 극한의 정의는 몇 가지 기준값을 줌으로서 이 기준값보다 가까워지는 항의 수를 보여주는 방법으로 엄밀한 정의에 접근하게 하고, 또한 엄밀한 정의가 있음을 알 수 있도록 교육할 수 있을 것이다. 그래서 우리는 다음과 같이 예제를 통하여 「고등학교 수학 I」 교육 과정에서 수열의 극한에 관한 엄밀한 정의가 있음을 보여줄 수 있다고 본다.

<예제 3.1> 수열 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 에 대하여 각 항의 값이 1과의 차이가 $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10,000}$, $\frac{1}{10^6}$, $\frac{1}{10^8}$ 보다 작게되는 수열의 항은 제 몇 항부터인가 ?

(풀이) $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\frac{1}{100}$ 의 부등식을 풀자. 그러면 $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{100}$ 곧, $n=100$ 항부터 그 이후의 모든 항은 1과의 차이가 $\frac{1}{100}$ 보다 작음을 알 수 있다. 같은 방법으로 계산하면 1과의 차이가 $\frac{1}{10,000}$, $\frac{1}{10^6}$, $\frac{1}{10^8}$ 보다 작게되는 수열의 항은 각각 $n=10,000$, $n=10^6$, $n=10^8$ 번째 항 이후부터임을 알 수 있다.

본 예제에서는 수열 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 의 항들과 1과의 차이가 우리가 줄 수 있는 임의의 기준값들 (곧 $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10,000}$, $\frac{1}{10^6}$, 및 $\frac{1}{10^8}$)보다 작게 하는 첫 번째 항을 항상 잡을 수 있음을 보여 준다. 그렇다면 이것을 이용하여 수열의 극한에 관한 엄밀한 정의를 다음과 같이 말할 수 있다.

<정의 3.2> "수열 $\{a_n\}$이 a에 수렴한다." 는 정의는, 임의의 양수 ε에 대하여 수열의 제N항을 잡을 수 있어서 이 N항보다 같거나 큰 모든 n항들에 대하여

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

이 성립하는 것이다. 이것을 기호로 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 또는 $n \to \infty$ 일 때 $a_n \to a$ 와 같이 나타낸다.

또한 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하지 않는 것은 위의 <정의 3-2>에서 적당한 자연수 N을 잡을 수 없는 경우이다.

앞의 <예제 3.1>을 정의에 맞추어서 극한값 1과의 차이가 ε 보다 작게 되는 첫 번째 항, 곧 제 N항을 찾아보자. 임의의 양수 ε 에 대하여 적당한 자연수 N을 $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 로 잡는다(단, [ ]는 최대정수 함수이다.). 그러면 N보다 같거나 큰 모든 n 에 대하여 다음을 얻는다.

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| \leq \frac{1}{N+1} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

이것은 수열 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 이 제 $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$번째 항을 제N항으로 잡으면 <정의 3.2> 를 만족시키므로 <정의 3.2>에 의하여 이 수열의 극한이 1임을 밝힌 것이 된다. 다른 예제를 하나 더 생각해 보자

<예제 3.3> $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 임을 증명하여라.

(증명) 임의의 양수 ε 을 잡는다. 적당한 자연수 N을 $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ 로 잡자. 그 N 보다 같거나 큰 모든 n 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\left|\frac{1}{n}-0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

따라서 <정의 3.2>에서 사용하는 기준값 ε 을 아무리 작은 양수로 잡더라도 항상 제N항을 $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ 로 잡을 수 있어서 N항보다 같거나 큰 모든 n항에 대하여 $\left|\frac{1}{n}-0\right| < \varepsilon$ 임을 알 수 있다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 이다.

그러면 이제 수렴하지 않는 수열을 <정의 3.2>의 관점에서 생각해 보자.

<예제 3.4> 수열 $\{(-1)^n\}$은 발산함을 밝혀라.

(증명) 여기서는 이 수열이 어떤 실수 a에도 수렴하지 않음을 보이자.

먼저 $a \ge 0$ 일 때는 모든 홀수 n에 대하여 $|(-1)^n - a| \ge 1$ 이고,

다음에 $a < 0$ 일 때는 모든 짝수 n에 대해서 $|(-1)^n - a| \ge 1$ 이다.

따라서 $0 < \varepsilon < 1$ 가 되도록 ε을 잡으면 수렴의 <정의 3.2>를 만족하는 실수 a 는 양수나 0 또는 음수에도 없다. 곧 $\{(-1)^n\}$ 은 발산한다.

이상에서 우리는 수학적 기준이 되는 수 ε 을 임의로 줄 때, 수열의 극한값 a가 있다는 것은 첫째, 그 극한값 a와 수열의 항과의 값의 차이가 주어진 기준값 ε 보다 작게 되는 최초의 항 N항을 찾을 수 있음을 보이고 둘째, 이 N항보다 같거나 큰 모든 n항들에 대하여 그 n항과 극한값 a 와 의 차이가 기준값 ε 보다 작음을 증명하는 것으로 요약된다.

이러한 수열의 극한에 관한 정의는 짧은 시간 안에 고등학교 학생들에게 학습시킬 수 있을 것이다. 그러면 「고등학교 수학 I」의 교육 목표를 달성할 수 있게 될 것이다.

이제 위의 정의의 관점에서 우리는 수열의 극한에 관한 기본적인 예제를 소개하고 필요한 정리를 도입하여 증명해 보인다.

<예제 3.5>

두 수열

$$\{a_n\} : \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \cdots,\ \frac{n+1}{n},\cdots$$

$$\{b_n\} : 0,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{6},\ \frac{3}{8},\ \frac{4}{10},\ \cdots,\ \frac{n-1}{2n},\ \cdots$$

에서 만들어지는 수열

$$\{C_n\} = \{a_n + b_n\} : \frac{4}{2},\ \frac{7}{4},\ \frac{10}{6},\ \frac{13}{8},\ \cdots,\ \frac{3n+1}{2n},\ \cdots$$

은 수렴할 것인가? 수렴한다면 그 극한은 얼마인가? 하는 문제를 생각해 보자.

쉽게 알 수 있는 바와 같이 $\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \frac{3}{2}$ 이다. $\varepsilon = 0.01$ 로 주어

졌을 때 N항보다 같거나 큰 모든 n항에 대하여 $\left| C_n - \frac{3}{2} \right| < 0.01$ 을 만족하는 제 N항을 찾아보자. 우선 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$로부터 N_1항 보다 같거나 큰 모든 n에 대하여 $|a_n - 1| < 0.005$ 인 제 N_1항을 찾는다. $|a_n - 1| = \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}$ 이므로 $N_1 = \frac{1}{0.005} + 1 = 201$ 으로 하면 201 보다 같거나 큰 모든 n 에 대하여 $|a_n - 1| = \frac{1}{n} < \frac{1}{200} = 0.005$ 이다. 또 $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$ 로부터 N_2항 보다 같거나 큰 모든 n항에 대하여 $\left| b_n - \frac{1}{2} \right| < 0.005$ 인 제 N_2항을 찾는다.

$\left| b_n - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n-1}{2n} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2n}$ 이므로 $2N_2 = \frac{1}{0.05} = 200$, 즉 $N_2 = 101$ 로 하면 101 보다 같거나 큰 모든 n항에 대하여

$\left| b_n - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{200} = 0.005$. N_1과 N_2 중에서 큰 것을 N이라 하면 $(N=201)$ 201 보다 같거나 큰 모든 n항에 대하여

$$\begin{aligned} \left| C_n - \frac{3}{2} \right| &= \left| (a_n + b_n) - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \right| \\ &= \left| (a_n - 1) + \left(b_n - \frac{1}{2}\right) \right| \\ &\leq |a_n - 1| + \left| b_n - \frac{1}{2} \right| \\ &< 0.005 + 0.005 \\ &= 0.01 \end{aligned}$$

즉 우리가 구하는 항의 번호는 $N=201$ 임을 알 수 있다.

우리는 여기서

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

이 성립하는 것을 추측할 수 있으며 위에서 $\varepsilon = 0.01$ 에 대해서 $N=201$을 구하는 방법은 그의 증명을 시사하고 있다. 사실 일반으로 다음의 정리가 성립된다.

<정리 3.6> ([12]) 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 이 모두 수렴하고

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ 일 때 엄밀한 극한의 정의를 사용하여 다음이 성립함을 보일 수 있다.

(1) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$ (k 는 상수)

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - \beta$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)

<보조정리 3.7> **([12])** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이고 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ 이다.

위의 정리는 고등학교 교과서에서는 증명 없이 다루어지고 있다. 우리는 <정의 3.2>를 이용하여 이 사실을 증명할 수 있는데 이것이 「고등학교 수학 I」 교육 과정에서 도입하기 위해서는 앞의 <예제 3.5>를 잘 설명하여 이해시키는 것이 필요할 것이다. 그러면 적어도 <정리 3.6>을 무난히 이해시킬 수 있을 것으로 사료된다. 그래서 이러한 정의와 증명법까지를 「고등학교 수학 I」 교육 과정에 소개함으로서 수학의 엄밀성을 주지시키며, 또 고등학교 수학 교과목의 가장 중요한 미분 적분학의 기초를 튼튼히 할 수 있을 것이다. 이것은 제6차 고등학교 수학 교육 과정의 성격에서 말하는 "수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하게 한다."는 대 전제와 수학 교과목의 목표에서 "가. 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하게 한다."는 첫 번째 목표에도 매우 부합된다고 사료된다.
그래서 「 고등학교 수학 I」 교육 과정에서 <정의 3.2>와 <정리 3.6>의 (1), (2)의 증명 및 (3) (4)의 소개는 필요하다고 본다.

2. 함수의 극한에 관한 교재내용 분석과 엄밀한 정의

함수의 극한에 대한 교육 방법도 수열의 극한에 대한 교육 방법과 같이 "직관에 의하여 지도한다."는 제6차 교육 과정에 의하여 현재 「고등학교 수학 I」 교재들에서는 그 정의를 다음 <표4>와 같이 말하고 있다. 아울러 이 정의를 이해시키는 예제들도 <표4>에서 조사하였다.

<표4> 「고교 수학 I」 교과서에서 사용하는 함수의 극한값의 정의와 예제

교재기호	면	정 의	기 본 예 제
+M1	108	· 함수 $f(x)$에서 x가 a와 다른값을 취하면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$가 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 x가 a에 가까워질 때, $f(x)$는 L에 수렴한다고 한다.	. $\lim_{x\to 1}(x+1)=1$. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$
M2 M3	113 118	· 함수 $y=f(x)$에서 x가 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 a에 한없이 가까워지면 x가 a 에 가까워질 때, $f(x)$는 a 에 수렴한다고 한다.	. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$. $\lim_{x\to 1}(x^2+2)=3$
M4	113	· 함수 $f(x)$에서 x가 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 a에 한없이 가까워지면, $f(x)$는 a에 수렴한다고 한다.	. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$
M5	97	· 함수 $y=f(x)$에서 x가 a와 같지 않으면서 a에 한없이 가까워짐에 따라 함수값 $f(x)$가 일정한 값 a에 한없이 가까워질 때, 함수 $f(x)$는 a에 수렴한다.	. $\lim_{x\to 1}(2x+1)=3$. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$
		· 함수 $f(x)$에서 x가 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, 함수값 $f(x)$가 일정한 값 a에 한없이 가까워지면, $f(x)$는 a에 수렴한다 고 한다.	. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$

이 정의들은 모두 비슷하다. 여기서도 극한의 정의를 "한없이 가까워진다."는 용어를 사용하고 있다. 이에 대한 문제점은 앞의 수열의 극한에 관한 내용 분석 부분에서 다룬 것과 같다. 그래서 이 함수의 극한의 정의를 수학적인 용어로 정의할 필요가 제기된다.

한편 대학 교재의 미분적분학 교재에서는 수학적인 엄밀한 정의를 조사하여 다음 <표5>를 얻었다.

<표 5> 대학 교재에서 사용하는 함수의 극한값의 정의와 예제

교재기호	면	정 의	기 본 예 제
M6	45	. 함수 f 는 a를 포함하는 구간 내의 모든 점에서 정의되어 있다 (단, $x=a$에서 정의되어 있지 않아도 좋다.). 임의의 양수 ε을 주더라도 항상 수 δ가 존재해서 $0<\|x-a\|<\delta$ 이면, $\|f(x)-L\|<\varepsilon$ 이 성립할 때, 함수 f 는 a에서 극한 L을 갖는다고 한다.	. $\lim_{x\to1}(x+1)=2$. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$
M7	51	. A function $f(x)$ is said to approach a value A as x approaches a, if corresponding to every positive number ε there is some positive number δ such $\|f(x)-A\|<\varepsilon$ is true for every x that satisfies the inequality $0<\|x-a\|<\delta$.	. Prove that $\lim_{x\to2}(5x-2)=8$.

이 두 권의 교재에서 사용하는 함수의 극한의 정의는 같은 내용이다. 여기서는 "한없이 가까워진다." 는 용어를 사용하지 않는다. 그 대신 함수값과 함수의 극한값 사이의 차이를 수학적인 기준값 미만으로 규정하고 있는데 이것은 분명히 수학적인 용어이다. 이것은 엄밀한 함수의 극한에 관한 정의이다.

이제 이 정의를 「고등학교 수학Ⅰ」의 교과 내용에 그대로 도입하는 것은 약간의 무리가 있을 것이다. 그러므로 「고등학교 수학Ⅰ」 교재에서는 함수의 극한의 엄밀한 정의를 주기에 앞서서, 간단한 1차 함수에서 예제를 통하여 이 정의의 성격을 암시하고, 그 후에 엄밀한 정의를 도입하여 설명하도록 할 수 있을 것이다. 곧 다음과 같은 예제로서 함수의 극한의 엄밀한 정의를 도입한다.

<예제 3.8> 함수 $f(x)=2x-1$ 에 대하여 다음에 답하라.

(a) $f(x)$와 5가 $\frac{1}{100}$ 보다 더 작게 차이가 나기 위해서는 x 가 3에 얼마나 가까이 있어야 하는가 ?

(b) $f(x)$와 5가 $\frac{1}{10,000}$ 보다 더 작게 차이가 나기 위해서는 x가 3에 얼마나 더 가까이 있어야 하는가 ?

(c) $f(x)$와 5가 양수 ε 보다 더 작게 차이가 나기 위해서는 x와 3이 얼마나 가까이 있어야 하는가 ?

(풀이) x와 3과의 거리는 $|x-3|$ 이고 $f(x)$와 5와의 거리는 $|f(x)-5|$ 이다.

(a) 그러므로 문제는 $x\neq3$ 이면서 $|x-3|<\delta$ 일 때, $|f(x)-5|<\frac{1}{100}$ 을 만족하는 수 δ 를 구하는 것이 된다. 만약 $|x-3|>0$ 이면 $x\neq3$이므로 문제는 같은 형식인 $0<|x-3|<\delta$ 일 때 $|f(x)-5|<\frac{1}{100}$ 을 만족시키는 수 δ 를 구하는 것이 된다. 만약 $0<|x-3|<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}$ 이면 다음을 얻는다.

$$|f(x)-5| = |(2x-1)-5| = |2x-6| = 2|x-3| < \frac{1}{100}$$

따라서 문제 (a)의 답은 $\delta=\frac{1}{200}$ 로 주어지는 것이다. 즉 만약 x가 3으로부터 $\frac{1}{200}$의 거리 이내에 있으면 $f(x)$는 5로부터 $\frac{1}{100}$의 거리 이내에 있을 것이다.

(b) (a)에서 $\frac{1}{100}$을 $\frac{1}{10,000}$로 바꾼다면, 같은 방법을 사용하여 x가 3으로부터 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10,000}=\frac{1}{20,000}$ 보다 작게 떨어져 있어야함을 알 수 있다.

(c) 앞의 (a)와 (b)에서 각각 $\frac{1}{100}$ 과 $\frac{1}{10,000}$ 의 차이를 허용하는 대신에 임의의 양수 ε 의 허용 범위 내로 정확하기를 원한다면, 앞에서와 마찬가지로

$$0 < |x-3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{이면} \quad |f(x)-5| < \varepsilon \quad \text{이다.} \quad ---- (*)$$

임을 알 수 있다.

이것이 x가 3에 접근할 때 $f(x)$ 가 5에 접근한다는 것을 말하는 정확한 방법이다. 왜냐하면 x의 값이 3으로부터 $\frac{\varepsilon}{2}$의 거리 이내에 (그러나 $x \neq 3$이다.) 있도록 할 수 있음을 말한다. 이제 식(*)를 보기로 하여 극한의 엄밀한 정의를 다음과 같이 정한다.

<정의 3.9> $f(x)$는 a를 포함하는 어떤 개구간 (a를 제외시킬 수 있음)에서 정의한 함수라 하자. 만약 모든 양수 ε에 대하여

$$0 < |x-a| < \delta \quad \text{일 때마다} \quad |f(x)-L| < \varepsilon \quad \text{이다.}$$

를 만족하게 하는 대응되는 양수 δ 가 존재하면, x 가 a에 접근할 때 $f(x)$의 극한값이 L 이다 라고 말하고

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

로 나타낸다.

이제 <정의 3.9>에 맞추어서 다음 예제를 증명할 수 있다.

<예제 3.10> $\lim_{x \to 3}(4x-5) = 7$ 임을 증명하라.

(풀이) 1. 문제의 예비분석 (δ의 값을 추측). ε을 주어진 양수라 하자.

$$0 < |x-3| < \delta \text{ 일 때마다 } |(4x-5)-7| < \varepsilon$$

을 만족하는 수 δ를 찾고자 한다. 그런데

$$|(4x-5)-7| = |4x-12| = |4(x-3)| = 4|x-3|$$

이므로 우리가 원하는 것은

$$0 < |x-3| < \delta \text{ 일 때마다 } 4|x-3| < \varepsilon$$

이다. 이 사실은 $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$를 선택해야 함을 추측케 한다.

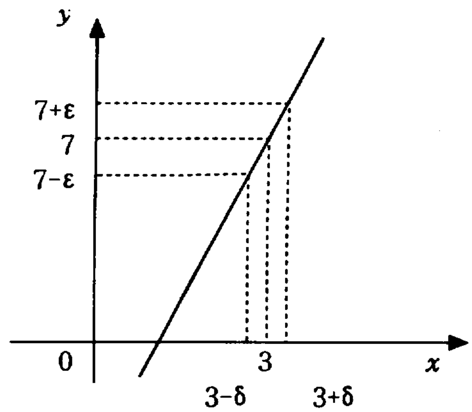
2. 증명 (δ가 적합함을 보임).

주어진 ε>0에 대하여 $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$를 선택한다. 만약 $0<|x-3|<\delta$ 이면

$$|(4x-5)-7|=|4x-12|=4|x-3|<4\delta=4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)=\varepsilon$$

이다. 그러므로 극한값의 정의에 의하여 $\lim_{x\to 3}(4x-5)=7$이다.

이 예제는 <그림 3-1>에 설명되어 있다. <예제 3.10>의 풀이에서 추측과 증명의 두 단계가 있었음을 주목한다. 우리들이 δ의 값을 추측할 수 있도록 하기 위해서 예비분석을 했다. 그러나 두 번째 단계에서 우리가 정확하게 추측했는가를 되돌



<그림 3-1>

아보고 조심스럽게 또한 논리적으로 증명을 해야겠다. 이러한 과정은 수학의 많은 부분에서 사용하는 전형적인 방법이다. 때때로 먼저 문제의 답에 대한 현명한 추측을 하고 그 추측이 정확한가를 나중에 증명하는 것이 필요하다.

이상에서 우리는 함수의 극한에 관한 엄밀한 정의를 내렸다. 이제 이 <정의3.9>의 관점에서 함수의 극한에 관한 필요한 정리를 도입한다.

<정리 3.11>([12]) f와 g를 R의 부분집합 X에서 R에로의 실수값 함수라 하자.

$\lim_{x\to a}f(x)=L$이고 $\lim_{x\to a}g(x)=M$ 이면 다음의 정리가 성립한다.

(i) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=L+M$

(ii) $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=L-M$

(iii) $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=LM$

(iv) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}\quad(M\neq 0)$

이상과 같이 극한의 엄밀한 정의를 내리는 것은 「고등학교 수학 I」의 교육 과정에서 가능하리라 본다. 이것은 고등학교 수학 교육의 목표와 성격에도 부합하므로, 이러한 엄밀한 정의를 고등학교 교과서에 도입할 필요가 있다고 생각된다. 그렇게 함으로써, 수학의 기초와 원리를 확실히 이해하게 될 것이다.

혹시 이 내용을 정확히 이해하지 못하는 학생이라 하더라도, 극한의 개념이 막연히 "한없이 가깝다."는 용어로 정의하는 것이 아니라, 엄밀한 수학적 용어에 바탕을 둔 확실한 논리가 있는 개념임을 인식할 것이다. 따라서 「고등학교 수학 I」을 배운 학생들은 확실한 기초 위에서, 미분 적분의 이론을 학습해 나갈 수 있을 것이며 여러 가지 자연 현상을 엄밀하게, 또 과학적인 분석으로 탐구해야함을 인식하는 데도 도움이 될 것으로 생각된다.

Ⅳ. 摘 要

수학교육의 현대화 과정에서 논리의 엄밀성을 강조하기 위해서는 미적분학의 토대가 되는 극한의 개념 및 그 성질에 관한 교과 내용과 지도는 현재의 직관적인 방법과 동시에 엄밀한 논리의 접근도 재고되어야 한다고 생각된다.

본 연구에서는 첫째, 고등학교 교과서와 대학 교과서를 비교 분석함으로써 극한의 개념을 직관적인 방법에서 탈피하여 보다 정확하고 엄밀한 정의를 내리기 위하여 예제를 통하여 정의에 접근하는 방법을 제시하였다.

둘째, 함수의 극한의 엄밀한 정의를 내리는 방법을 제시하였다. 곧 기준이 되는 양수 ε값 대신에 작은 양수들을 이용하여 δ값을 찾는 방법을 학습케 하는 예제를 설명하고, 이 예제를 보기로 하여 함수의 극한을 엄밀하게 정의하였다.

또 이 정의에 따라서 1차 함수의 예를 통하여 극한값을 구하고 이 극한값이 옳음을 ε - δ 방법으로 자세히 증명해 보임으로써 고등학교 학생들이 엄밀한 정의의 개념을 알고 이를 응용할 수 있는 방법을 제시하였다. 이것은 고등학교 수학 교육

의 목표와 성격에 부합됨을 강조하였다.

셋째, 현재 고등학교 교과서에서 증명 없이 사용하는 수열의 극한과 함수의 극한에 대한 기본적인 성질들을 위에 제시한 엄밀한 정의를 이용하여 각각 증명해 보임으로써, 수학의 엄밀성 이해와 논리적 사고력의 발달에 이바지 할 수 있도록 하였다.

이상의 내용들은 제6차 수학 교육 과정에서 개선되지 못한 극한의 정의를 엄밀하게 내리는 방법을 제시한 것인데, 앞으로 교육부의 연구진과 교과서 집필자들 모두에게 권장되어야 할 사항으로 제시하는 바이다.

참 고 문 헌

[1]. 금종해 · 정순영 · 박평순 (1996), 「고등학교 수학 I」, 한샘출판(주)
[2]. 김연식 · 김홍기 (1996), 「고등학교 수학 I」, 동아출판사
[3]. 박배훈 외 5인 (1996), 「고등학교 수학 I」, (주)교학사
[4]. 박한식 외 5인 (1996), 「고등학교 수학 I」, (주)지학사
[5]. 이현구 외 6인(1995), 「고등학교 수학 I」, (주)천재교육
[6]. 정봉화, 이우영, 신항균(1995) , 「고등학교 수학 I」, 형설출판사
[7]. 조승제 (1996), 「고등학교 수학 I」, 재능교육
[8]. 조태근 외 6인 (1995), 「고등학교 수학 I」, 금성교과서(주)
[9]. 교육부(1992), 「고등학교 수학과 교육과정 해설」
[10]. 교육부(1995), 「고등학교 제6차 교육과정 해설」
[11]. 미분적분학교재편찬위원회(1989), 「미분적분학」, 삼영사
[12]. 양성호 외 5인 (1997), 「미분적분학」, 학문사
[13]. 김용운, 김용국 (1986), 「수학사 대전」, 우성문화사
[14]. 김철리 (1990), "고등학교 수학에서의 극한개념 지도에 관한 연구", 단국대학교 교육대학원 석사학위 논문
[15]. 이순재 (1988), "고등학교 수학에서 함수의 극한개념과 연속성의 도입에 ", 단국대학교 교육대학원 석사학위 논문
[16]. 권라상 (1991), " 함수와 수열의 극한과 초등함수의 연속성", 조선대학교 교육대학원 석사학위 논문
[17]. Thurman S. Peterson. (1966), Calculus with analytic geometry.