

다변수 LQG/LTR 설계에서 스케일링 행렬에 의한 강인성 여유 계산

강진식*

Computation of Robustness Margins in Multivariable LQG/LTR Design When the Plant is Scaled

*Jin-Shig Kang**

Summary

In MIMO design, input and output units are different from each other. By this reason, we must consider the effect of larger units to smaller one, and it was known that the scaling of plant model can solve this problem. But, it was known that the scaling of the plant model can degrade the robust stability margins and that there is no method of proper and optimal scaling.

In this paper, robust stability of MIMO LQG/LTR design are analysed when the plant inputs and outputs are scaled. The upper bound of model error to guarantee the robust stability is obtained, and gain margins and phase margins are computed with respect to the ratio of singular values of scaling matrices.

서론

다변수 제어시스템에서 입력변수들과 출력변수들의 단위계는 서로 다르며 이로인하여 큰 단위계의 변수가 작은 단위계의 변수에 미치는 영향은 커지게 된다. 또한 이러한 문제는 제어대상인 플랜트 모델에 의존하여 최적인 스케일링(Scaling) 방법 및 조건이 없으며 적절히 스케일링된 플랜트에 대하여 LQG/

LTR을 설계하여도 임플리멘테이션(Implimentation) 구조에서는 안정도 강인성이 보장되지 않는다 (Grag, 1985).

본 논문에서는 다변수 LQG/LTR 설계에서 입력단과 출력단에 스케일링을 하였을 경우 이 스케일링 행렬에 대한 안정도 강인성을 분석한다. 목표루프를 칼만필터로 하였을 때 임플리멘테이션 구조에서 안정도 강인성을 유지하기 위한 모델오차의 상한을 구하며 이에 따르는 안정도 강인성 여유를 계산한다. 또

* 공과대학 통신공학과 (Dept. of Communication Engineering, Cheju univ., Cheju-do, 690-756, Korea)

한 스케일링이 되지 않은 경우와 스케일링 된 경우의 안정도 여유를 비교하며 목표루프가 LQ조정기인 경우에도 모델오차의 상한 및 안정도 여유에 대하여 계산한다.

이론해석

1. 페루프 시스템 설계에서 안정도 강인성

모델오차가 존재하는 경우에 대하여 안정도 및 강인성 및 성능 강인성을 보장하기 위한 페루프 전달함수 $C(j\omega)$ 와 감도함수 $S(j\omega)$ 의 특이치는 다음식을 만족하여야 한다(Doyle and Stein, 1981).

$$\bar{\sigma}[C(j\omega)] < \frac{1}{\bar{\sigma}[E(j\omega)]} < \frac{1}{I_m(j\omega)} \quad (1. a)$$

$$\bar{\sigma}[S(j\omega)] < \frac{1}{P_m(j\omega)} \quad (1. b)$$

여기서 $E(j\omega)$ 는 주파수 영역에서의 곱셈형 모델오차로 최대오차 I_m 에 대하여 $\bar{\sigma}[E(j\omega)] < I_m(j\omega)$ 를 만족하며 $P_m(j\omega)$ 는 최대 허용성능을 의미한다. 그리고 위와같은 모델오차에 대한 이득여유 및 위상 여유는 다음식으로 구할 수 있다(Lethomaki et. al. 1982)

$$G. M = \frac{1}{1 \pm I_m(j\omega)} \quad (2. a)$$

$$P. M = \pm \cos^{-1} \left[1 - \frac{I_m^2(j\omega)}{2} \right] \quad (2. b)$$

LQG/LTR 보상기의 특이치 모양은 설계변수의 조

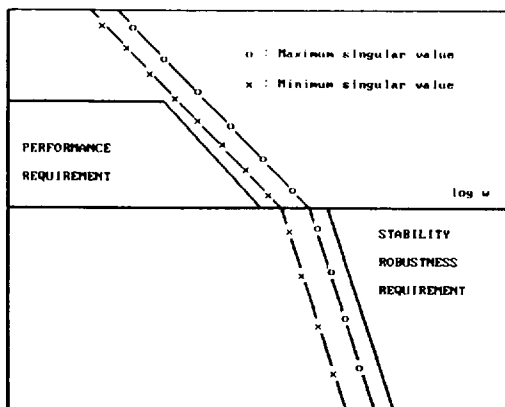


Fig. 1. Singular value shape of target loop.

정에 따라 목표루프의 특이치 모양으로 수렴하므로 목표루프의 특이치 모양이 Fig. 1과 같아지도록 목표루프의 설계변수를 결정하여야 한다(Doyle and Stein, 1981; Ridgely et. al. 1987)

2. 루프 전달회복 특성 및 LQG/LTR 설계

다음과 같은 플랜트 모델을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + L\xi \\ y(t) &= Cx(t) + \eta \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 ξ 와 η 는 각각 백색가우시안 잡음으로 단위 강도를 갖는다.

LQG/LTR 설계 방법은 선형 다변수 시스템에 의한 조직적인 설계 방법으로 주어진 플랜트에 대하여 설계조건에 맞도록 목표루프를 설계하고 개루프 전달함수를 목표루프의 전달함수로 회복 시키는 과정으로 수행된다. LQG/LTR 제어 구조는 Fig. 2와 같다.

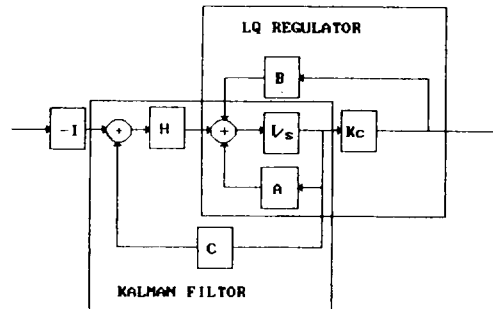


Fig. 2. Feedback control structure of LQG/LTR.

LQG 보상기는 LQ조정기와 칼만필터가 분리되어 설계되며 목표루프를 칼만필터로 선정하면 칼만필터 이득은 다음과 같다(김, 1991).

$$H = PCT\theta \quad (4)$$

여기서 θ 는 양한정 대칭행렬이며 P는 다음과 같은 필터 대수 리카티 방정식의 해이다.

$$AP + PA^T + LL^T - PC^T\theta^{-1}CP = 0 \quad (5)$$

이때 칼만필터는 다음과 같은 특성을 보장한다. (Doyle and Stein, 1981; 김, 1991)

$$\overline{\sigma}(I+G_F^{-1}(s)) \geq 1 > 1_m(s) \quad (6)$$

따라서 칼만 필터는 $\|m(s)\| < 1$ 인 곱셈형 모델오차에 대하여 $\pm 60^\circ$ 의 위상 여유와 $-6 \sim \infty$ dB의 이득 여유를 갖는다. LQ조정의 설계에서 최적제어 입력은

$$u(t) = -B^T R^{-1} Kx(t) \quad (7)$$

로 구하여진다. 여기서 R은 제어가중치로 양의 반한정 대칭행렬이며 K는 다음과 같이 주어지는 대수리 카티 방정식이 행이다.

$$KA + A^T K + Q - KBR^{-1} B^T K = 0 \quad (8)$$

여기서 Q는 상태 가중치로 양한정 대칭행렬이다. 일반적으로 LQG/LTR 설계에서는 $R = \rho I$, $Q = C^T C$ 를 이용한다.

제어시스템이 안정하다면 플랜트 출력단에서 절단한 LQG 보상기의 극한 거동은 다음과 같다. (Doyle and Stein, 1981)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} K(s) \rightarrow [C(sI-A)^{-1} B]^{-1} C(sI-A)^{-1} H = G_p^{-1}(s) G_f(s) \quad (9)$$

이 극한 거동은 주파수 s에 대하여 불연속적으로 수렴한다. 그리고 루프전달함수의 극한 거동은

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G_p(s) K_p(s) = G_f(s) \quad (10)$$

으로 된다. 따라서 식(10)은 루프전달함수가 LQG/LTR 설계변수 ρ 가 0으로 접근할 때 칼만필터 루프로 회복됨을 보여주고 있다. 따라서 목표루프인 칼만필터가 안정도 강인성 및 성능 강인성을 만족하도록 설계된다면 루프전달함수의 특성이 목표루프의 특성을 회복하여 안정도 강인성 및 성능강인성을 보장할 수 있게 된다.

3. Scalling문제 및 안정도 강인성

다변수 제어시스템에서 입력변수들과 출력변수들의 단위계는 서로 다르며 이로인하여 큰 단위계의 변수가 작은 단위계의 변수에 미치는 영향은 커지게 된다. 또한 이러한 문제는 제어대상인 플랜트 모델에 의존하여 최적인 스케일링 방법 및 조건이 없으며 적

절히 스케일링된 플랜트에 대하여 LQG/LTR을 설계하여도 임폴리멘테이션 구조에서는 안정도 강인성이 보장되지 않는다. (Grag, 1981)

플랜트의 입력단과 출력단이 스케일링된 제어구조는 Fig. 3과 같다.

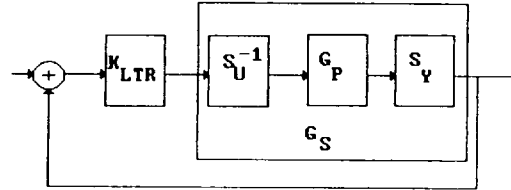


Fig. 3. Feedback control structure for plant with scalling.

그림에서 S_U , S_Y 는 각각 입력과 출력단의 스케일링 행렬이다. 스케일링된 입력과 출력은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} us(t) &= S_U u(t) \\ ys(t) &= S_Y y(t) \end{aligned} \quad (11)$$

이때 스케일링된 플랜트의 상태공간 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_S us(t) \\ ys(t) &= C_S(t) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 $B_S = BS_U^{-1}$, $C_S = S_Y C$ 이다. 위의 동력학 식에 대하여 목표루프를 칼만필터로 선정하고 LQG/LTR을 설계할 경우 제어기의 점근적 특성은 다음과 같다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} K_{LTR}(s) \rightarrow [C_S(sI-A)^{-1} B_S]^{-1} C_S(sI-A)^{-1} H = G_p^{-1}(s) G_f(s) \quad (13)$$

그리고 개루프 전달함수의 점근적 특성은

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G_S(s) K_{LTR}(s) = G_f(s) \quad (14)$$

로 된다. 식(14)에서 보여지는 바와 같이 설계시에는 개루프 전달함수가 목표루프인 칼만필터의 전달함수로 회복되어 칼만필터가 갖는 안정도 및 성능강인성을 유지한다. 임폴리멘테이션 구조는 Fig. 4와 같은 귀환 제어구조로 표현된다.

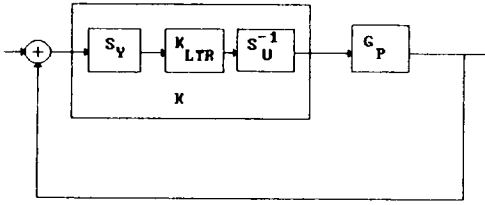


Fig. 4. Implementation structure.

그림에서 제어기 전달함수는 다음과 같다.

$$K(s) = S_Y^{-1}(s) K_{LTR}(s) S_Y \quad (15)$$

그리고 ρ 가 0으로 접근할때 제어기의 점근적 특성은

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} K(s) = S_P^{-1}(s) S_Y^{-1}(s) (sI - A)^{-1} K^F \quad (16)$$

이다. 따라서 개루프전달함수의 점근적 특성은 다음과 같다.

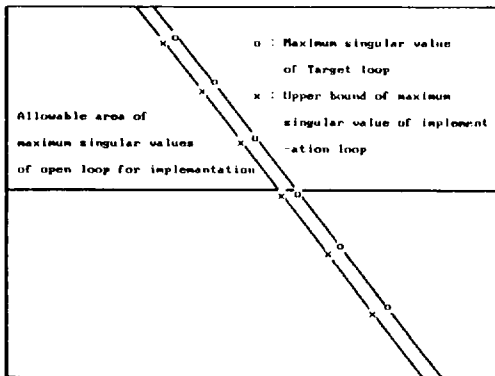
$$\lim_{\rho \rightarrow 0} G_P(s) K(s) = S_Y^{-1} G_F(s) S_Y \quad (17)$$

식 (17)을 특이치 부등식을 이용하면 다음과 같다.

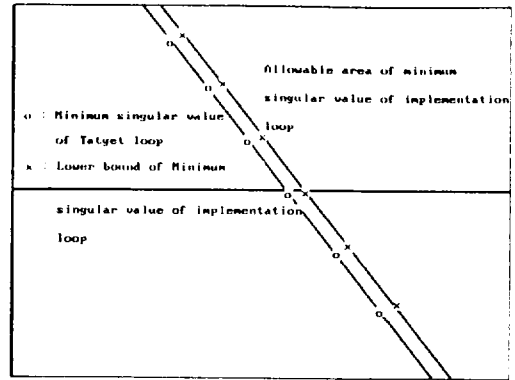
$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \bar{\sigma}(G_P(s) K(s)) \geq \frac{\sigma(S_Y)}{\bar{\sigma}(S_Y)} \bar{\sigma}(G_F(s)) \quad (18. a)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \underline{\sigma}(G_P(s) K(s)) = \frac{\bar{\sigma}(S_Y)}{\underline{\sigma}(S_Y)} \underline{\sigma}(G_F(s)) \quad (18. b)$$

식 (18)은 개루프 전달함수의 특이치가 스케일링 행렬에 의존하며 개루프 전달함수의 최대 특이치는 목표루프인 칼만필터 전달함수의 최대치 제적보다



(a) Maximum Singular value



(b) Minimum Singular value

Fig. 5. Boundary area of open loop transfer function.

아래에 위치하고 최소특이치의 제적은 위에 놓이게 되어 목표루프가 보장하는 안정도 강인성을 회복하지 못하게 됨을 알 수 있다. 이 특이치 제적을 Fig. 5에 나타내었다.

Fig. 5에서 보는 바와 같이 개루프 전달함수의 특이치 영역은 스케일링 행렬에 의하여 결정되며 일반적으로 스케일링행렬의 최대특이치와 최소특이치의 비는 조건이 나쁜 플랜트에서 큰값을 갖는다.

임플리멘테이션 구조에서의 안정도 강인성 여유를 구하기 위하여 실제구조에서의 모델오차를 I_m 이라고 가정하자. 이 모델오차가 식(6)의 안정도 강인성 조건을 만족한다고 하면 임플리멘테이션 구조에서 안정도 강인성 조건식의 점근적 특성은 다음과 같다.

$$\underline{\sigma}(I + (G_P(j\omega) K(j\omega))^{-1}) \geq \frac{\sigma(S_Y)}{\bar{\sigma}(S_Y)} \underline{\sigma}(I + G_F^{-1}(j\omega)) \quad (19)$$

여기서 $\underline{\sigma}(I + G_F^{-1}(j\omega)) \geq I_m$ 을 만족하므로 임플리멘테이션 구조에서 안정도 강인성을 보장하기 위한 모델오차의 한계는 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$I_m = \frac{\sigma(S_Y)}{\bar{\sigma}(S_Y)} I_m' \quad (20)$$

따라서 임플리멘테이션 구조에서의 이득여유 및 위상여유는 다음식으로 된다.

$$G. M. = 20 \log_{10} \frac{1}{1 \pm \frac{\sigma(S_Y)}{\bar{\sigma}(S_Y)} I_m} \quad (21. a)$$

$$P.M. = \pm \cos^{-1} \left[1 - \frac{(\frac{\sigma(S_Y)}{\sigma(S_V)})^2 I_m^2}{2} \right] \quad (21b)$$

식 (21)에서 보이는 바와 같이 설계구조에서는 모델오차 I_m 에 대하여 위상여유 및 이득여유를 갖지만 임플리멘테이션 구조에서는 이보다 작은 I_m 에 대하여 이득여유 및 위상여유를 갖게 된다.

4. 목표루프가 LQ조정기일때의 요약

Fig. 3의 (ii)를 절단한 루프전달함수는 $K(s)G(s)$ 로 되며 목표루프를 LQ 조정기로 선정하면 LQG/LTR을 설계할 때 제어기의 점근적 특성은 다음과 같다.

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} K_{LTR}(s) \rightarrow K_C(sI-A)^{-1}B_S \\ (C_S(sI-A)^{-1}B_S)^{-1} = G_{LQ}(s)G_S^{-1}(s) \quad (22)$$

따라서 개루프 전달함수의 점근적 특성은

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} K_{LTR}(s)G_S(s) = G_{LQ}(s) \quad (23)$$

이다. 임플리멘테이션 구조에서 제어기 전달함수는 다음과 같은 점근적 특성을 갖는다.

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} K(s) = S_U^{-1}G_{LQ}G_S^{-1}(s)S_V \quad (24)$$

따라서 개루프전달함수의 점근적 특성을 특이치 부등식을 이용하면 다음과 같다.

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \bar{\sigma}(K(s)G_P(s)) \leq \frac{\alpha(S_U)}{\bar{\sigma}(S_U)} \bar{\sigma}(G_{LQ}(s)) \quad (25.a)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \bar{\sigma}(K(s)G_P(s)) = \frac{\bar{\sigma}(S_U)}{\alpha(S_U)} \bar{\sigma}(G_{LQ}(s)) \quad (25.b)$$

임플리멘테이션 구조에서 안정도 강인성 조건식의 점근적 특성은 다음 같이 표현한다.

$$\alpha[I + (K(j\omega)G_P(j\omega))^{-1}] \geq \frac{\alpha(S_U)}{\bar{\sigma}(S_U)} \alpha[I + G_{LQ}^{-1}(j\omega)] \quad (26)$$

여기서 $\alpha[I + G_{LQ}^{-1}(j\omega)] \geq I_m$ 을 만족하므로 임플리멘테이션 구조에서 안정도 강인성을 보장하기 위한 모델오차의 한계는 다음과 같다.

$$I_m = \frac{\alpha(S_U)}{\bar{\sigma}(S_U)} I_m \quad (27)$$

따라서 임플리멘테이션 구조에서의 이득여유 및 위상여유는

$$G.M. = 20 \log_{10} \frac{1}{1 \pm \frac{\sigma(S_U)}{\sigma(S_U)} I_m} \quad (28.a)$$

$$P.M. = \pm \cos^{-1} \left[1 - \frac{(\frac{\sigma(S_U)}{\sigma(S_U)})^2 I_m^2}{2} \right] \quad (28.b)$$

결과 및 고찰

Fig. 6에 임플리멘테이션 구조에서 $\|m\|=1$ 인 경우 특이치 비에 대한 이득여유 및 위상여유를 보였다.

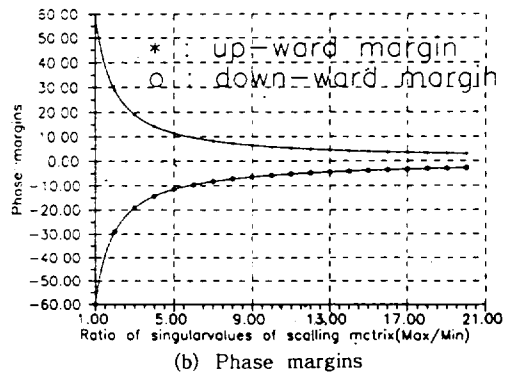
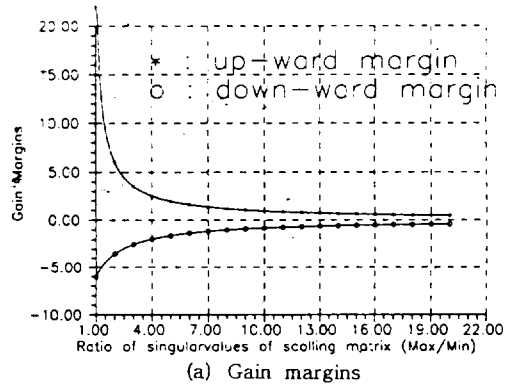


Fig. 6. Gain and phase margins of implementation structure.

Fig. 6에서 보는 바와 같이 특이치의 비가 1인 스케일링이 없는 경우에는 $-6 \sim \infty$ dB의 이득여유와 $\pm 60^\circ$ 의 위상여유를 갖지만 특이치의 비가 1/2인 경우에는 $-3.5128 \sim 6.0206$ dB의 이득여유와 $\pm 28.9550^\circ$ 의 위상여유를, 1/10인 경우에는 $-0.8279 \sim 0.9151$ dB의 이득여유와 $\pm 5.732^\circ$ 의 위상여유를, 그리고 특이치의 비가 1/20인 경우에는 $-0.4238 \sim 0.4455$ dB의 이득여유와 $\pm 2.8651^\circ$ 의 위상여유를 갖게 된다. 따라서 목표루프가 충분한 이득여유 및 위상여유를 갖도록 설계되고 루프 전달회복이 일어나도록 LQG/LRT를 설계하여도 임플리멘테이션 구조에서는 안정도 강인성 및 성능강인성을 보장하지 않음을 알 수 있다.

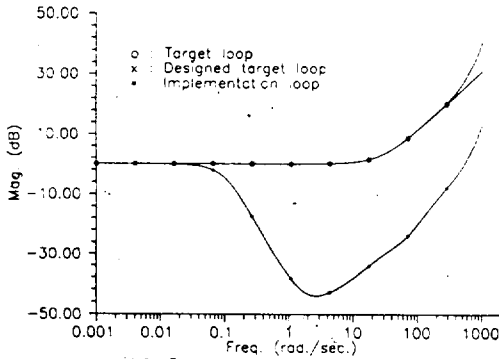


Fig. 7. Minimum singular value plots for $I+G_p^{-1}(s)$ and $I-(G_p(s)K(s))^{-1}$.

모의실험 2. 실제 플랜트에 대하여 LQG/LTR을 설계할 때 설계구조와 임플리멘테이션 구조에서의 안정도 강인성을 비교한다. 플랜트 모델은 터보펜 엔

진으로 동력학 변수 및 설계 변수, 스케일링 행렬들은 부록에 나타내었다(Grag, 1985). Fig. 7에 $I+G_p^{-1}(s)$ 와 $I-(G_p(s)K(s))^{-1}$ 의 최소특이치 궤적을 보였

다. Fig. 7에서 보는 바와 같이 목표 루프 및 칼만필터의 특이치 궤적은 -6 dB 보다 큰 값을 갖지만 임플리멘테이션 구조에서는 -40 dB이하로 되어 목표루프는 안정도 강인성을 유지하지만 임플리멘테이션 구조에서는 안정도 강인성을 보장하지 않음을 알 수 있다.

적 요

본 논문에서는 다변수 LQG/LTR 설계에서 입력단과 출력단에 스케일링을 하였을 경우 이 스케일링 행렬에 대한 안정도 강인성을 분석하였다. 목표루프가 칼만필터 및 LQ 조정기인 경우에 대한 모델 오차의 상한 및 안정도 여유를 구하였다.

임플리멘테이션 구조에서 안정도 강인성을 유지하기 위한 모델 오차의 상한은 목표루프가 칼만필터일 경우에는 출력단 스케일링 행렬, 목표루프가 LQ 조정기일 경우에는 입력단 스케일링 행렬의 특이치 비에 의존하며 그 값은 실제 구조에 비하여 아주 작게 됨을 확인하였다. 안정도 여유는 스케일링 행렬의 최소-최대 특이치의 비가 1/2인 경우에는 $-3.5128 \sim 6.0206$ dB의 이득여유와 $\pm 28.9550^\circ$ 의 위상여유, 1/10인 경우에는 $-0.8279 \sim 0.9151$ dB의 이득여유와 $\pm 5.732^\circ$ 의 위상여유, 그리고 특이치의 비가 1/20인 경우에는 $-0.4238 \sim 0.4455$ dB의 이득여유와 $\pm 2.8651^\circ$ 의 위상여유를 갖는다.

참 고 문 헌

- Doyle, J.C. and Stein, G. 1981. Multivariable Feedback Design: Concept for a Classical/Morden Synthesis, *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-26, 1: 4-16.
- Grag, S., 1985. Turbofan Engine Control System Design Using the LQG/LTR Methodology, ACC.
- 김중식, 선형 제어시스템 공학, 청문각, 1991.
- Lethomaki, N.A., Sandwell, R.N. and Athan, M. 1982. Robustness Results in Linear Quadratic Gaussian Based Multivariable Control Designs, *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-26: 75-92.
- Ridgely, D.B., Banda, S.S. McQuade T.E. and Lynch, P.J. 1987. Linear Quadratic Gaussian with Loop Transfer Recovery Methodology for

an Unmanned Aircraft, *Journal Guidance*, 10(1) :
Jan-Feb.

2.71e+1, 4.32e-1;
9.38e+1, 1.48e+0;
2.70e+1, 3.13e-1;
4.17e+2, -7.72e-3);

부 록

A = [-3.25E+0, 1.98E+0, 8.03E-1, 1.94E-1,
1.53E+0, 1.65E+0, 0, 0;
-4.73E-1, -2.88e+0, 1.63e+0, 2.30e-1,
2.27e+0, -1.00e+0, 0, 0;
4.64e-2, 3.66e-2, -8.99e-1, 7.38e-4,
7.44e-3, 2.48e-3, 0, 0;
-9.72e-4, -1.32e-2, 5.35e-2, -2.76e-1,
8.16e-4, -4.17e-3, 0, 0;
-1.54e-3, -4.49e-2, 1.81e-1, 3.14e-2,
-1.00e+0, -1.43e-2, 0, 0;
1.43e-2, 8.82e-3, 1.34e-1, 8.86e-3,
7.01e-2, -7.02e-1, 0, 0;
1.43e-4, 1.72e-5, 4.91e-5, 1.16e-5,
8.82e-5, -9.24e-5, -1.00e+2];

B = [6.58e+2, 2.76e+1;
7.56e+2, 2.10e+1;
2.69e+0, -2.68e-1;

C = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
0, 0, 0, 0, 0, 0, 100];

D = [0, 0;
0, 0];

S_Y = 0.0001 0
0 0.33

S_U = 0.05 0
0 0.0023

G_{BW} = 10 0
0 20

$\theta = \mu I$ ($\mu = 0.5$)

L = C_S^T (C_SC_S^T)⁻¹ G^{BW}
- (C_SA_S¹C^S)⁻¹ G_{BW}

R = $\frac{I}{\sigma}$ ($\sigma = 10^{-1}$) Q = C_S^T C_S