Tachyon에 관한 硏究

-Bradyon과 Tachyon의 결합 모형과 궤도 스핀 각운동량-

玄 南 奎

A Study on Tachyon

-The Orbital Spin Angular Momentum as Compounds of a Bradyon & a Tachyon-

Hyun Nam-gyu

Summary

The anthor considered in this paper that spin may be expressed in terms of the classical position and momenta coordinates of the transcendent tachyon in the system of the compound of a free bradyon and a tachyon.

序 論

시간적(time-like) 입자에 대한 Bradyon과 Tachyon의 결합 모형(현, 1987a. b)에서 양성자와 핵자의 스핀을 계산하고, 그들의 여기 상태로서의 공명 입자들을 논하였다.

본 논문에서는 Bradyon-Tachyon 결합 모형하에서 보앙까레 群 불변량 중의 하나인 Spin이 Tachyon의 궤도 각운동량으로 표현될 가능성이 있음을 보이고자 한다.

이공대학 조교수

1. 뽀앙까레(Poincare) 群

N개의 입자의 Cartesian 좌표들을 $X_r(r=1, 2, 3, \cdots, 3N)$이라고 쓸 때, 3N-k개의 holonomic 구속 조건을 두면 k개의 좌표만이 서로 독립적인 바 이를 다음 식과 같이 쓸 수 있으며

$q_s=q_s(X_r, t)$, $(s=1, 2, \cdots, k)$ ……(1)

계의 Lagrangian을 $L(q, p, t)$라고 표기하면, "일반화 좌표" q_s에 해당하는 "일반화 운동량" p_s를 다음 식과 같이 정의할 수 있다.

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \quad \cdots\cdots (2)$$

이들 2k 개의 q_s, p_s를 독립 변수들로 취급하기 위하여 점들이 q와 p들로써 나타내지는 계의 2k 차원 실수 "위상공간"을 정의할 수 있다. 이 위상공간 상에서 미분 가능한 두 함수 A(q,p,t)와 B(q, p, t)에 대하여, 그들의 "Poisson bracket" (PB)는 함수 C로써 일반적으로 다음 식으로 주어진다.

$$C = \{A, B\} = \sum_s \left\{ \frac{\partial A}{\partial q_s}\frac{\partial B}{\partial p_s} - \frac{\partial A}{\partial p_s}\frac{\partial B}{\partial q_s} \right\} \quad \cdots\cdots (3)$$

또한 q와 p들이 A의 함수들로 쓰여질 수 있도록 하기 위해 $A_1(q,p)$, $A_2(q,p)$, $\cdots$, $A_{2k}(q,p)$가 위상 공간 상에서 2k 개의 독립적인 함수라고 하면, 그 때 "Lagrange bracket" (LB)는 다음 식으로 정의된다.

$$[A_j, A_l] = \sum_{s=1}^{k} \left(\frac{\partial q_s}{\partial A_j}\frac{\partial P_s}{\partial A_l} - \frac{\partial q_s}{\partial A_l}\frac{\partial P_s}{\partial A_j} \right), j, l = 1, 2, \cdots\cdots 2k. \quad \cdots\cdots (4)$$

여기서 서로 독립인 2k 개의 함수들 A_j의 집합의 LB와 PB들은 서로 역행렬인 행렬들을 이루며 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{l=1}^{2k} [A_j, A_l]\{A_l, A_m\} = -\delta_{jm}, \quad j, m = 1, 2, \cdots 2k \quad \cdots\cdots (5)$$

2k 개의 변수들 q_s, p_s를 $\omega^\mu (\mu = 1, 2, \cdots, 2k)$로 나타내면, 함수 f(q, p)를 $f(\omega)$로 쓸 수 있다. 이 때 다음 식과 같은 성분들을 갖는 2k 차원 반대칭 행렬 $\| \varepsilon^{\mu\nu} \|$를 정의하자.

$$\varepsilon^{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{만약 } \mu, \nu \leq k, \text{ 또는 } \mu, \nu > k \\ 1 & \text{〃} \quad \mu \leq k, \quad \nu = \mu + k \\ -1 & \text{〃} \quad \nu \leq k, \quad \mu = \nu + k \end{cases} \quad \cdots (6)$$

이것의 역행렬은 $\| \varepsilon_{\mu\nu} \|$로 나타내어 지기 때문에 다음 식과 같이 쓸 수 있으며

$$\varepsilon_{\mu\upsilon}\varepsilon^{\mu\upsilon} = \delta_\mu^\upsilon \quad \cdots\cdots (7)$$

다음과 같은 행렬 요소들을 갖는다.

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{만약 } \mu, \nu \leq k, \text{ 또는 } \mu, \nu \geq k \\ -1 & \text{〃} \quad \mu \leq k \quad \nu = \mu + k \\ 1 & \text{〃} \quad \nu \leq k \quad \mu = \nu + k \end{cases} \quad \cdots (8)$$

그러면 $f(\omega)$와 $g(\omega)$의 PB는 다음 식과 같이 간단하게 나타내어 진다.

$$\{f, g\} = \varepsilon^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial w^\mu}\frac{\partial g}{\partial w^\nu} \quad \cdots\cdots (9)$$

이와 유사하게 독립적인 함수들 $A_j(\omega)$ ($j=1, 2, \cdots, 2k$)가 주어질 때, 임의의 두 A에 대해서는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$[A_j, A_l] = -\varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial w^\mu}{\partial A_j}\frac{\partial w^\nu}{\partial A_l} \quad \cdots\cdots (10)$$

이 때 (5)식과 유사하게 (9), (10)식에서부터 다음 식이 성립함을 알 수 있으며

$$\sum_{l=1}^{2k} [A_j, A_l]\{A_l, A_m\} = -\delta_{jm} \quad \cdots\cdots (11)$$

또, f, g와 h를 임의의 세 ω의 함수라고 할 때, PB에 대한 다음과 같은 중요한 식을 얻는다.

$$\sum \{\{f, g\}, h\} = \{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0 \quad \cdots\cdots (12)$$

이와 같이 PB들의 주요 성질들을 모아 보면 다음 식과 같으며

(i) 반대칭 : $\{f, g\} = -\{g, h\}$

(ii) 선형성 : $\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1\{f_1, g\} + c_2\{f_2, g\}$
단, c_1과 c_2는 숫자

(iii) 어떤 수 c와, 어떤 f에 대하여
$\{c, f\} = 0$,
단 c는 "중성"의 원소

(iv) Jacobi 항등식 : $\sum \{\{f, g\}, h\} = 0 \cdots\cdots (13)$

LB에 대해서는 다음과 같은 성질들이 있다.

(i) 반대칭 : $[A_j, A_l] = -[A_l A_j]$

만약 c가 숫자이면

$$(\text{ii})[c\ A_j, A_l] = \frac{1}{c}[A_j, A_l]$$

$$(\text{iii})\Sigma_{(jlm)}\left(\frac{\partial}{\partial A_j}\right)[A_l, A_m] = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

(여기서 A_j, A_l 과 A_m은 2k 개의 독립 함수들의 집합 중의 세 개이다.)

이러한 표기법을 사용하여 뽀앙까레 群에 대해 다음과 같이 요약해 보고자 한다(Sudarshan and Mukunda, 1974).

두 관성 기준계 S와 S′에서 사용되는 시공 변수들을 각각 x^μ, x'^μ 라고 하자. 첨자 μ가 0, 1, 2, 3을 갖도록 택할 때, x^μ의 성분들을 $x^0=ct$, $x^j=x_j(j=1, 2, 3)$으로 정의하고 x^μ를 x의 "반변 성분들"이라 하자. 이 때 대칭이며 0이 아니고, 성분들이 $g_{00}=-1$, $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$인 계량 텐서 $g_{\mu\nu}$ 에 의하여 "공변 성분들" x_μ을 정의할 수 있다.

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu \ ; \ x_0 = -x^0,\ x_j = x^j \quad \cdots\cdots\cdots (15)$$

$g_{\mu\nu}$ 의 역은 $g^{\mu\nu}$이며 이는 $g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda}=\delta^\mu{}_\lambda$ 를 만족시키며 또한 대칭인 바, 0이 아닌 성분들은 $g^{00}=-1$, $g^{11}=g^{22}=g^{33}=1$ 뿐이다.

만약 두 관성 기준계 s, s′의 시공 원점들이 일치한다면, 그 때 Homogeneous Lorentz Group(HLG)의 한 원소를 생각할 수 있다. 각 s, s′에 의하여 지정된 좌표들 x^μ, x'^μ 는 다음과 같은 선형 관계가 있다.

$$S \rightarrow S' = \Lambda S \quad : \quad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(\xi, \alpha)x^\nu \cdots\cdots (16)$$

여기서 α는 회전에 관한 일반화 좌표이고 ξ는 순속도 변환의 매개 변수이며, 행렬 $\|\Lambda^\mu{}_\nu\|$의 성분들은 다음 식으로 주어진다.

$$\Lambda^j{}_k(\xi, \alpha) = A_{jk}(\alpha) + \xi_j\xi_m A_{mk}(\alpha)\frac{\cosh\xi - 1}{\xi^2}$$

$$\Lambda^j{}_0(\xi, \alpha) = -\xi_j\frac{\sinh\xi}{\xi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

$$\Lambda^0{}_j(\xi, \alpha) = -\xi_k A_{kj}(\alpha)\frac{\sinh\xi}{\xi}$$

$$\Lambda^0{}_0(\xi, \alpha) = \cosh\xi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

x′과 x 사이의 관계와 함께, $S'=\exp(\xi\cdot k)\cdot\exp(\alpha\cdot l)S$라고 쓸 수 있으며, 일반적으로 HLG의 어떤 원소는 $\exp(\xi\cdot k)\ \exp(\alpha\cdot l)$로 유일하게 쓰여진다. 이 때 k_j와 l_j 사이의 기본적 교환 관계는 다음 식과 같고

$$[l_j, l_m] = \epsilon_{jmn}\ l_n,\ [l_j, k_m] = \epsilon_{jmn}k_n,$$

$$[k_j, k_m] = -\epsilon_{jmn}\ l_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

다음 식과 같이 4차원 공변 표기로 (19) 식을 달리 쓸 수 있다.

$$[l_{\mu\nu}, l_{\sigma\rho}] = g_{\mu\sigma}l_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}l_{\mu\rho} + g_{\mu\rho}l_{\sigma\nu} - g_{\nu\rho}\ l_{\sigma\mu},\ \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

$$l_{\mu\nu} = -l_{\nu\mu},\ l_{mn} = \epsilon_{mnj}l_j,\ l_{om} = k_m \cdots (20)$$

또한 시공 원점들이 일치하지 않는 한 쌍의 관성 기준계 S, S′에 대해서는 (16)식은 다음 식으로 대치된다.

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(\xi, \alpha)x^\nu + a^\mu \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

분명히 a^μ는 S′에 의하여 S의 시-공 원점에 부여된 시-공 좌표들이다. x′과 x 사이의 이 관계식과 함께, $S'=\exp(a^\mu d_\mu)\ \exp(\xi\cdot K)\ \exp(\alpha\cdot l)S$로 쓰며, $d_0=-h$, d_j들은 뽀앙까레 群 P의 Lie 대수에 있어서 부가적인 기본 원소들이다. 우리는 여기서, 4×4 로렌츠 변환 행렬 Λ와 시-공 변환 a^μ로 구성되는 한 쌍의 (Λ, a^μ)나 혹은 $\exp(a^\mu d_\mu)\ \exp(\xi\cdot k)\ \exp(\alpha\cdot l)$로 나타 내어지는 P의 어떤 원소를 갖는다. P에 있어서 합성 법칙을 나타내는 데는 앞의 표기법이 편리하다.

$$(\Lambda', a'^{\mu})(\Lambda, a^{\mu}) = (\Lambda'\Lambda,\ a'^{\mu} + \Lambda'^{\mu}{}_{\nu} a^{\nu}) \cdots (22)$$

여기서 群 P는 시-공 변환의 가환 불변 부분群 (Abelian invariant Subgroup) T_4와 HLG의 반직적 (semidirect product)이다. P에 대한 기본 교환 관계들의 全集合은 다음 식과 같으며

$$[l_j, l_m] = \epsilon_{jmn} l_n,\ [l_j, k_m] = \epsilon_{jmn} k_n$$

$$[k_j, k_m] = -\epsilon_{jmn} l_n$$

$$[l_j, d_m] = \epsilon_{jmn} d_n,\ [l_j, h] = 0,\ [k_j, d_m] = \delta_{jm} h$$

$$[k_j, h] = d_j,\ [d_j, d_m] = 0,\ [d_j, h] = 0 \quad (23)$$

(23)식은 4차원 형식으로는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[l_{\mu\nu}, l_{\sigma\rho}] = g_{\mu\sigma} l_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} l_{\mu\rho} + g_{\mu\rho} l_{\sigma\nu} - g_{\nu\rho} l_{\sigma\mu} \quad ;\ \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

$$l_{\mu\nu} = -l_{\nu\mu},\ l_{mn} = \epsilon_{mnj} l_j,\ l_{om} = k_m$$

$$[l_{\mu\nu}, d_\rho] = g_{\mu\rho} d_\nu - g_{\nu\rho} d_\mu,\ [d_\mu, d_\nu] = 0 \quad \cdots (24)$$

Lie 대수의 성분들 l_j, k_j, d_j와 h를 각각 나타내기 위해서 위상 공간 함수들 $J_j(\omega)$, $K_j(\omega)$, $P_j(\omega)$와 $H(\omega)$를 생각하면 이들은 (6)식과 유사한 교환 관계를 만족시킨다.

$$\{J_j, J_k\} = \epsilon_{jkm} J_m,\ \{J_j, K_k\} = \epsilon_{jkm} K_m$$

$$\{K_j, K_k\} = -\epsilon_{jkm} J_m,\ \{J_j, P_k\} = \epsilon_{jkm} P_m$$

$$\{J_j, H\} = 0,\ \{K_j, P_k\} = \delta_{jk} H,\ \{K_j, H\} = P_j$$

$$\{P_j, P_k\} = 0,\ \{P_j, H\} = 0 \quad \cdots (25)$$

여기서 $J_j(\omega)$와 $K_j(\omega)$를 첨자가 둘인 양 $J_{\mu\nu}(\omega)$로, $H(\omega)$와 $P_j(\omega)$를 첨자가 하나인 양 $P_\mu(\omega)$로 다음 식과 같이 나타내면,

$$J_{mn}(\omega) = \epsilon_{mnj} J_j(\omega),\ J_{om}(\omega) = K_m(\omega),\ J_{\mu\nu}(\omega) = -J_{\nu\mu}(\omega)$$

$$P_o(\omega) = -P^0(\omega) = -H(\omega) \quad \cdots (26)$$

이들은 식(20)에 해당하는 다음의 PB 관계식들을 만족시킨다.

$$\{J_{\mu\nu}(\omega), J_{\sigma\rho}(\omega)\} = g_{\mu\sigma} J_{\nu\rho}(\omega) - g_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} + g_{\mu\rho} J_{\sigma\nu}(\omega) - g_{\nu\rho} J_{\sigma\mu}(\omega)$$

$$\{J_{\mu\nu}(\omega), P_\rho(\omega)\} = g_{\mu\rho} P_\nu(\omega) - g_{\nu\rho} P_\mu(\omega)$$

$$\{P_\mu(\omega), P_\nu(\omega)\} = 0 \quad \cdots (27)$$

그런데 P에 대한 첫번째 Casimir invariant는 총질량의 제곱이라고 불리며, 다음 식과 같이 정의한다.

$$M^2 = -P^\mu(\omega) P_\mu(\omega) = (H(\omega))^2 - P_j(\omega) P_j(\omega) \cdots (28)$$

여기서 M을 실수로 택하면 M^2은 양수이다.

P에 대한 두번째 Casimir invariant를 구하기 위해서 $J_{\mu\nu}$와 P_μ를 결합한 양인 Pauli-Lubauski 4-vector $W_\mu(\omega)$를 다음 식과 같이 정의하면, 이는 HLG하에서 4-vector와 같이 변환한다.

$$W_\mu(\omega) = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} P^\nu(\omega) J^{\lambda\rho}(\omega) \quad \cdots (29)$$

여기서 $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$는 4차원에서 완전 비대칭 부호이다. 이로부터 두번째 Casimir invariant는 다음 식과 같이 쓸 수 있다.

$$W^2(\omega) = W^\mu(\omega) W_\mu(\omega) \quad \cdots (30)$$

이 때 M^2와 W^2는 P에 대해 서로 독립인 두 Casimir invariant들이다. W_μ 는 P^μ 와 서로 수직하므로 다음 식과 같이 쓸 수 있으며

$$W_\mu P^\mu = 0 \quad \cdots (31)$$

P^{μ} 가 시간적(timelike)이면 W^{μ}는 공간적(spacelike)이거나 0이어야 하므로 $W^2 \geq 0$이고, P^{μ}가 light-like이면 W^{μ}는 또한 공간적 이거나 W^{μ}에 대해서는 특정한 말을 할 수 없으므로 W^2의 부호에 대해서도 그렇다. 따라서 에너지-운동량 4-vector가 time-like이고 W_{μ} 가 공간적이거나 0인 경우에 대해서만 생각하자. 그 때 $\{W_{\mu}, P_{\nu}\}=0$이지만, $\{W_{\mu}, W_{\nu}\}$는 그렇지 않다. 즉,

$$\{W_{\mu}, W_{\nu}\} = -\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} P^{\lambda} W^{\sigma} \quad \cdots\cdots (32)$$

그런데 (31)식에서 보듯이 W_{μ} 와 P^{μ} 는 서로 수직하므로 W_0은 다음 식과 같이 쓸 수 있으며

$$W_0 = -\frac{\mathbf{W}\cdot\mathbf{P}}{H} \quad \cdots\cdots (33)$$

(32) 식을 공간 성분들에 대하여 생각해 보면

$$\{W_j, W_k\} = \varepsilon_{jkl}(-HW_l - W_0 P_l) = \varepsilon_{jkl}(-HW_l + \mathbf{W}\cdot\mathbf{P}\frac{P_l}{H}) \quad \cdots\cdots (34)$$

W_j 대신에 $V_j = -\frac{W_j}{H}$ 를 (34)식에 대입하면,

$$\{V_j, V_k\} = \varepsilon_{jkl} V_l - \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{P}}{H^2} \varepsilon_{jkl} P_l$$

$$\{V_j, P_k\} = 0, \ \{V_j, H\} = 0 \quad \cdots\cdots (35)$$

이고, 여기서 $\mathbf{V}\cdot\mathbf{P}$가 0이면 V_j를 고유 각운동량으로 볼 수 있다. 또한 $\alpha = -\frac{1}{H(H+M)}$, $\beta = \frac{M}{H}$ 으로 두고 S_j를 다음 식과 같이 정의하면

$$S_j = \beta^{-1}(V_j + \alpha \mathbf{V}\cdot\mathbf{P}P_j) = -\frac{W_j}{M} + \frac{\mathbf{W}\cdot\mathbf{P}P_j}{MH(M+H)}$$

$$= -\frac{W_j}{H} + \frac{[\mathbf{P}\times(\mathbf{P}\times\mathbf{W})]_j}{MH(M+H)} \quad \cdots\cdots (36)$$

S_j는 다음의 PB 관계식들을 만족시킨다.

$$\{S_j, S_k\} = \varepsilon_{jkl} S_l, \ \{J_j, S_k\} = \varepsilon_{jkl} S_l$$

$$\{S_j, P_{\mu}\} = 0 \quad \cdots\cdots (37)$$

이러한 S_j는 고유 각운동량(internal angular momentum)이라 하며, spatial transformation에 대해서 불변이어서 운동의 상수이다.

그런데 (36)식으로부터 다음 관계식들이 성립함을 알 수 있으므로

$$\mathbf{W}\times\mathbf{P} = -M\mathbf{S}\times\mathbf{P}, \ \mathbf{W}\cdot\mathbf{P} = -H\mathbf{S}\cdot\mathbf{P} \cdots\cdots (38)$$

(33)식과 (38)식으로부터 다음 관계식들을 얻는다.

$$W_0 = \mathbf{S}\cdot\mathbf{P}, \ \mathbf{W} = -M\mathbf{S} - \frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{P}\mathbf{P}}{M+H}$$

$$W^2 = M^2 S^2 + (\mathbf{S}\cdot\mathbf{P})^2\left(\frac{2M}{M+H} + \frac{H-M}{M+H} - 1\right) = M^2 S^2 \quad \cdots\cdots (39)$$

따라서 두번째 Casimir invariant는 고유 각 운동량의 제곱에 비례한다(Ryder, 1985; Gursey, 1965; Bacry, 1977).

2. 두 입자 계에서의 뽀앙까레 群

두 자유 입자 계에서의 P의 generator들은 각각의 generator들의 합으로 볼 수 있다. 만약 $\mathbf{q}_{(1)}$과 $\mathbf{p}_{(1)}$ 및 $\mathbf{q}_{(2)}$과 $\mathbf{p}_{(2)}$를 각각 첫째와 둘째 입자들에 대한 변수들로 보고, $m_{(1)}$과 $m_{(2)}$를 각각의 질량들로 나타내면, 상호작용 하지 않는 두 입자에 대하여 P의 generator들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{J} = \mathbf{q}_{(1)}\times\mathbf{p}_{(1)} + \mathbf{q}_{(2)}\times\mathbf{p}_{(2)}, \ \mathbf{P} = \mathbf{p}_{(1)} + \mathbf{p}_{(2)}$$
$$\mathbf{K} = E_{(1)}\mathbf{q}_{(1)} + E_{(2)}\mathbf{q}_{(2)}, \ H = E_{(1)} + E_{(2)}$$
$$E_{(1)} = (m_{(1)}^2 + \mathbf{p}_{(1)}\cdot\mathbf{p}_{(1)})^{1/2}$$
$$E_{(2)} = (m_{(2)}^2 + \mathbf{p}_{(2)}\cdot\mathbf{p}_{(2)})^{1/2} \cdots (40)$$

이 때 그 첫째 Casimir invariaut M^2는 다음과 같이 쓸 수 있으므로

$$\begin{aligned} M^2 &= (E_{(1)}+E_{(2)})^2-(p_{(1)}+p_{(2)})^2 \\ &= (m_{(1)})^2+(m_{(2)})^2+2(E_{(1)}E_{(2)}-p_{(1)}\cdot p_{(2)}) \end{aligned} \quad \cdots\cdots(41)$$

여기서 $(m_{(1)}+m_{(2)})^2 \leq M^2 < \infty$ 임을 알 수 있다. 또한 W의 성분들을 다음과 같이 쓸 수 있으므로

$$\begin{aligned} W_0 &= (q_{(1)}-q_{(2)})\times p_{(1)}\cdot p_{(2)}, \\ W &= (q_{(1)}-q_{(2)})\times(E_{(1)}p_{(2)}-E_{(2)}p_{(1)}) \end{aligned} \quad \cdots\cdots(42)$$

두번째 Casimir invariant에 대한 표현은 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} W^2 = & (q_{(1)}-q_{(2)})^2(E_{(1)}p_{(2)}-E_{(2)}P_{(1)})^2 \\ & -[(q_{(1)}-q_{(2)})\cdot(E_{(1)}p_{(2)}-E_{(2)}p_{(1)})]^2 \\ & -[(q_{(1)}-q_{(2)})\cdot p_{(1)}\times p_{(2)}]^2 \end{aligned} \quad \cdots\cdots(43)$$

여기서 어떤 경우에도 W_μ가 공간적 4-vector이므로 W^2은 음이 될 수 없으며, (38)식과 (42)식으로부터 다음 식을 얻는다. (Sudarshan & Mukunda, 1974)

$$S = \frac{1}{M}\left[(\boldsymbol{q}^{(1)}-\boldsymbol{q}^{(2)})\times(E^{(2)}\mathbf{P}^{(1)}-E^{(1)}\mathbf{P}^{(2)})\right.$$
$$\left.-(\mathbf{P}^{(1)}+\mathbf{P}^{(2)})\frac{(\boldsymbol{q}^{(1)}-\boldsymbol{q}^{(2)})\cdot\mathbf{P}^{(1)}\times\mathbf{P}^{(2)}}{M+E^{(1)}+E^{(2)}}\right] \quad \cdots\cdots(44)$$

3. Bradyon-Tachyon 결합 모형과 스핀

시간적 입자에 대한 Bradyon-Tachyon 결합 모형(현, 1987 a, b)을 논하면서, Bradyon에 정지한 좌표계에서 볼 때 ∞의 속도를 갖는 tachyon이 일정한 운동량을 가지고 Bradyon 주위를 원운동 한다고 가정하였다. 또한 초광속 로렌츠 변환(SLT)과 로렌츠 변환(LT)을 모두 고려하면 群을 이룸을 보았는데(현, 1988), 초광속 변환 중의 한 원소, $-i\Lambda_>(U,\theta,\varphi)$ (단 $U>c$)가 로렌츠 변환 $\Lambda_<(c^2/U,\theta,\varphi)$와 속도 U가 ∞일 때의 변환인(transcendent SLT) $\overline{K}_+$의 곱으로 나타내어 지므로(Recami and Mignani, 1974)

$$-i\Lambda_>(U,\theta,\varphi)=\overline{K}_+\Lambda_<(c^2/U,\theta,\varphi)\cdots(45)$$

운동량이 0이 아닌 시간적 Bradyon에 대해서도 상대 속도가 ∞인 tachyon을 항상 고려할 수 있다. 따라서 어떤 정지 질량이 $(m_B^2-m_T^2)^{1/2}>0$인 Bradyon이 정지 질량이 m_B인 Bradyon과, q_T인 위치에서 이에 수직하고 일정한 운동량 p_T로 원점에 정지한 Bradyon 주위를 ∞의 속도로 원운동하는 정지 질량이 im_T인 tachyon으로 되었다고 하자. Bradyon에 정지한 좌표계에서 볼 때, Bradyon의 위치와 운동량은 0이나 tachyon의 운동량과 위치는 0이 아니며, bradyon의 에너지는 0이 아니나 tachyon의 에너지는 0으로 둘 수 있으므로, (40)식의 첫째 입자를 Bradyon, 둘째 입자를 tachyon이라고 보고, 다음 식과 같이 약속하기로 한다.

$$\begin{aligned} & q_{(1)}=o=p_{(1)},\ q_{(2)}=q_T,\ p_{(2)}=p_T, \\ & E_{(1)}=m_B,\ E_{(2)}=0 \end{aligned} \quad \cdots\cdots(46)$$

(46) 식을 (40) 식에 대입하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} & J=q_T\times P_T,\ P=P_T,\ K=0 \\ & H=m_B,\ E^{(1)}=m_B,\ E^{(2)}=0 \end{aligned} \quad \cdots\cdots(47)$$

(47)식을 (41)식에 대입하면 첫번째 Casimir invariant M^2를 얻는다.

$$M^2=m_B^2-p_T^2 \cdots\cdots(48)$$

또한 W_μ 의 성분들은 다음 식과 같이 나타내어 지므로

$$W_0=0,\ W=-q_T\times(m_B P_T)=-HJ \cdots\cdots(49)$$

q_T가 p_T에 수직하다는 조건을 사용하면 두번째 Casimir invariaut W^2는 다음 식과 같다.

$$W^2=q_T^2 m_B^2 p_T^2=m_B^2 J^2 \cdots\cdots(50)$$

만약 P와 W가 수직하다는 조건을 가정하면 다음 식이 성립한다.

$$P \cdot W = 0 \quad \cdots\cdots (51)$$

이 때 (51)식과 (35)식에 의하여 V는 다음 관계식을 만족시키므로 고유 각운동량(스핀)으로 볼 수 있다.

$$\{V_j, V_k\} = \epsilon_{jkl} V_l$$
$$\{V_j, P_k\} = 0, \ \{V_j, H\} = 0 \cdots\cdots (52)$$

또한 $V_j = -\frac{W_j}{H}$이므로 이를 (49)식에 대입하면 다음 식이 성립한다.

$$V = -\frac{\mathbf{W}}{H} = -\frac{m_B}{m_B}(-q_T \times P_T) = q_T \times P_T = \mathbf{J} \quad \cdots\cdots (53)$$

그런데 (53)식에서 보듯이 스핀 연산자 V는 tachyon의 위치 q_T와 일정한 운동량 P_T의 벡터 곱, 즉, 궤도 각운동량의 표현이므로, 시간적 입자의 Bradyon-Tachyon 결합모형에 의하면 Tachyon의 원운동이 시간적 입자의 Spin을 야기시킨다고 해석할 수 있을 것 같다.

結 論

시간적 입자(timelike particle)에 대한 Bradyon-Tachyon 결합 모형에 의하면 어떤 정지 질량이 $(m_B^2-m_T^2)^{1/2}>0$인 Bradyon은 정지 질량이 m_B인 Bradyon과 q_T인 위치에서 이에 수직하고 일정한 운동량 P_T로 원점에 정지한 Bradyon 주위를 무한대의 속도로 원운동하는 정지 질량이 im_T인 tachyon으로 구성되어 있다고 볼 수 있다.

이 모형에 의하여 상호작용 하지 않는 두 자유 입자(Bradyon과 Tachyon)의 뽀앙까레 群 generator 들을 구성하여 Casimir invariant들을 논하였으며, W와 P가 수직하다는 추가 조건을 가정한 결과, SU(2) 교환 관계를 만족 시키는 고유 각운동량 연산자 V를 무한대 속도의 tachyon의 위치와 운동량으로 나타낼 수 있었다. 따라서 tachyon이 시간적 입자의 고유 각운동량으로 알려진 스핀을 야기 시킨다고 생각되어 편의상 이를 궤도 스핀 각운동량이라고 하였으나 이에 대한 엄밀한 논의는 차후 연구 과제로 둔다.

摘 要

시간적 입자의 Bradyon-Tachyon에 결합 모형을 뽀앙까레 群에 적용시킴으로써 고유 각 운동량으로만 논의되고 있는 스핀을 Bradyon 주위를 원운동하는 Tachyon의 궤도 각운동량으로 설명할 수 있는 가능성을 보였다.

引 用 文 獻

Bacry, H., 1977, Lectures on Group Theory and Particle Physics, Gordon and Beach Science Pub. New York. 375-414.

Gursey, F., 1965, High Energy Physics. C. Dewitt and M. Jacob (ed.), Gordon and Beach Science Pub., New York. 61-67.

현남규, 1987a, Tachyon에 관한 硏究-Bradyon-Tachyon 결합 모형과 양성자의 구조. 제주대학교 논문집 (자연과학) 24 : 67-74.

현남규, 1987b, Tachyon에 관한 硏究-Bradyon과 Tachyon의 결합모형과 核子의 구조. 제주대학교 논문집 (자연과학), 25 : 57-63.

현남규, 1988. Tachyon에 관한 연구-일반적인 로렌츠 변환(GLT)의 群. 제주대학교 논문집 (자연

과학), 26 : 127-134.

Recami, E and R. Mignani, 1974, Classical Theory of Tachyons (Special Relativity Extended to Superluminal Frames and Objects). *Riv. Nuovo Cimento*, 4 : 209~290.

Ryder, L. H., 1985, Quantum Field Theory, 57~66. Cambridge University Press, Cambridge.

Sudarshan, E. C. G. and N. Mukunda., 1974, Classical Dynamics : A Modern Perspective, pp. 1~40, 439~511, John Wiley & Sons, New York.