기하 증명에 관한 의식과 증명 과정의 오류 경향 연구

- 중3 학생을 중심으로 -

홍 인 선* · 현 진 오**

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 목적과 필요성

21세기 지식과 정보화를 기반으로 하는 사회에서의 학교 교육의 중점은 단순 기능인의 양성보다는 자기 주도적으로 지적 가치를 창조할 수 있는 자율적이고 창의적인 인간의 육성에 있다. 이에 대비하기 위한 수학과의 역할은 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 토대로 탐구하고 예측하며 논리적으로 추론하는 능력, 수학을 사용한 또는 수학을 통한 정보를 처리하고 교환하는 능력, 실생활이나 다른 교과 영역에서 수학적 지식을 사용하여 문제를 구성하고 해결하는 문제 해결력, 창의력, 수학적으로 사고하는 성향, 사고의 유연성, 자신감 등의 수학적 힘(mathematical power)을 기르게 하는 것이다.

이러한 수학적 힘을 기르기 위한 수학 교육 목표의 하나로서 수학적 사고력의 신장을 들 수 있는데, 수학적 사고를 기르는데 특히 중요한 역할을 하는 것이 바로 증명이라고 할 수 있다.

수학에서 증명은 매우 중요한 위치를 차지하고 있다. 수학이라는 학문 자체가 몇 가지 정의와 공리로부터 논리법칙을 이용하여 명제나 정리를 유도하며 확장하여 나가는 공리적인 성격을 지니고 있는데, 그러한 논리 전개가 옳은지 아니면 오류가 있는지를 판별해 주는 기준이 되는 것이 증명이다.

현재 우리 나라 수학 교육 과정에서는 중학교 2학년 기하 단원에서 처음으로 형식적인 증명을 다루고 있는데, Becker(1982)는 기하 영역의 증명 지도에

---

* 제주서중학교 교사
** 제주대학교 사범대학 수학교육과 교수

대해 다음과 같이 말하고 있다.

"중등학교 수학의 영역 중에서 기하는 증명이 가장 많이 요구되며, 따라서 학생들에게 증명 훈련을 시키는데 가장 적합한 분야로 간주되어 왔다. '증명'이라는 용어는 일관성과 관련된 주어진 증명의 평가, 학습한 증명의 재진술 뿐만 아니라, 새로운 증명을 고안해 내는 것과 같은 넓은 분야의 활동을 총체적으로 일컫기도 한다. 그것은 주어진 진술에 대한 일련의 추론을 구성하고 있다. 이들 능력을 갖추기는 어려워서 장기간에 걸친 훈련에 의해서만 할 수 있다. 그러므로 기하 증명에서 어려움과 오류를 분석하고 확인하는 것은 증명을 학습하는데 중요한 치료 수단이 될 것이다."(p. 123)

그러나 수학 교사들이 지도하기에 다른 어느 영역 못지 않게 어려움을 느끼는 부분이 증명을 이용하여 명제나 정리를 지도하는 부분이며, 그 중요성과 여러 가지 이점에도 불구하고 학생들이 싫어하는 것이 또한 증명이다. 따라서 학생들이 증명 문제에 흥미를 갖게 하고, 증명 능력을 신장시킬 수 있는 지도 방안 마련이 필요하다 하겠다.

이에 본 연구는 중학교 2학년 과정에서 처음으로 형식적인 기하 증명을 배운 학생들을 대상으로 기하 증명에 대한 의식과 증명 능력 수준을 알아보고, 증명 과정에서 나타나는 오류 경향을 분석하여 바람직한 증명 지도가 이루어 질 수 있도록 도움을 주고자 하는데 그 목적이 있다.

2. 연구 문제 및 제한점

앞의 연구 목적을 달성하기 위해 본 논문은 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

1) 중학교 2학년 과정에서 형식적인 기하 증명을 처음 배운 학생들의 증명에 대한 의식은 어떠한가?
2) 기하 증명 능력 검사를 통한 학생들의 기하 증명 능력은 어느 정도인가?
3) 기하 증명 과정에서 나타나는 학생들의 오류에는 어떠한 것이 있는가?
4) 연구 대상자를 제주도내의 중학생들을 임의로 선정하였으므로 특성이 다른 집단에 대해서는 연구 결과가 다르게 나타날 수도 있다.

5) 본 연구에 사용된 검사 문항은 표준화된 검사지가 아닌 본 연구자가 직접 제작한 검사지를 적용하였다.
6) 본 연구에서의 점수는 설정된 채점 기준에 따라 본 연구자에 의해 계산되었으므로 신뢰도에 있어 약간의 오차가 발생할 수도 있다.

Ⅱ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

중학교 2학년에서 "도형의 성질", "도형의 닮음"을 배운 제주도내 5개 중학교 3학년 학생 중에서 제주시내 남자중 2학급, 여자중 2학급, 남녀공학 2학급, 읍·면지역 남녀공학 4학급 314명을 표집하여 조사하였다.

2. 검사 도구

1) 의식 조사 질문지

기하 증명 과정을 마친 학생들의 도형 단원의 증명에 대한 의식을 조사해 보고자 실시한 질문지는 다음과 같은 항목으로 구성되어 있다.

(1) 기하 증명에 대한 난이도와 그 이유
(2) 기하 증명에 대한 중요도와 그 이유
(3) 기하 증명에 대한 선호도와 그 이유
(4) 기하 증명에 대한 이해도와 그 이유

2) 기하 증명 능력 검사지

(1) 형식

기하 증명에 대한 능력과 오류경향을 조사하기 위하여 다음과 같은 형식으로 구성하였다.

문항 1~4 : ① 주어진 문제에 알맞은 도형을 그리고 기호로 나타내기
② 가정 부분을 기호로 나타내기
③ 결론 부분을 기호로 나타내기
④ 명제가 참임을 직접 증명하기

문항 5 : ① 가정 부분을 기호로 나타내기
② 결론 부분을 기호로 나타내기
③ 명제가 참임을 직접 증명하기
문항 6~9 : 명제가 참임을 직접 증명하기
문항 10 : 용어의 정의 쓰기

(2) 내용

연구 대상 학생들이 사용하였던(제6차 교육과정) 2학년 8종 교과서를 분석하여 기본적이고 공통적으로 다루고 있는 내용을 중심으로 구성하였으며, 각 문항별 구체적인 내용은 <표1>과 같다.

<표1> 기하 증명 능력 검사 문항 내용

문항	내 용	난이도
1	이등변삼각형의 성질	중
2	직사각형의 성질	하
3	삼각형의 세 내각의 합	중
4	평행사변형이 되는 조건	중
5	평행사변형의 성질	중
6	삼각형의 합동	하
7	삼각형의 닮음	하
8	직각삼각형의 합동	중
9	삼각형의 중점연결정리	상
10	이등변삼각형, 직각삼각형, 평행사변형, 직사각형, 마름모, 정사각형의 정의 쓰기	

위와 같은 형식과 내용으로 구성된 의식 조사 질문과 증명 능력 검사를 연구 대상으로 표집된 학생 314명에게 실시하였고, 실시 방법은 해당 학교 수학 교사의 협조를 얻어 수학 시간을 이용하여 실시하였다.

3. 자료의 처리 및 분석

의식 조사 질문지의 경우 응답자의 빈도와 백분율을 구하고, 증명 능력 검

사의 경우에는 다음과 같은 채점 기준에 따라 채점하고, 오류를 분석하였다.

1) 채점 기준

증명 능력 검사의 채점 기준은 전현미(1996)의 연구에서 이용한 방법을 참고로 하여 다음과 같이 마련하였다.

(1) 문항 1~5의 (1)~(3)번

0점 : 아무 것도 쓰지 않거나 틀리게 답한 경우

1점 : * 도형을 옳게 그리고 기호를 바르게 나타낸 경우
* 가정 부분을 기호로 바르게 나타낸 경우
* 결론 부분을 기호로 바르게 나타낸 경우

(2) 문항 1~5의 (4)번, 문항 6~9

0점 : 응답을 하지 않았거나 전혀 무의미한 것을 답했을 경우

1점 : 적어도 1개의 타당한 연역을 하고 그 근거를 말했을 경우

2점 : 증명의 반 정도를 유효하게 연역해 내었을 경우

3점 : 증명의 각 단계들이 논리적으로 유효하지만, 용어나 기호, 정리의 이름 등에 잘못이 있거나 생략된 경우

4점 : 증명의 모든 전개 과정이 논리적으로 유효하고, 각 증명 단계에 맞는 이유를 정확히 기술하며, 용어나 기호, 정리의 이름 등이 정확한 경우

채점 결과는 류성림(1993)의 논문을 참고로 하여 증명의 전체 점수인 PT(Proof Total)와 증명의 완성도에 있어 유효한 증명이 이루어졌을 경우 주어지는 PC(Proof Correct)의 두 가지 방식으로 산출하였다. PT의 총점은 50점 만점이고, PC는 명제의 증명 문제에서 3점이나 4점을 얻은 문항 수를 일컬으며, 0점~9점 사이이다.

2) 오류 분석

학생들의 답안 중에서 옳은 답을 제시한 경우(4점)와 아무 것도 기술하지 않은 경우는 오류 분석의 대상에서 제외시켰다. 또, 같은 문제를 증명하는 과정에서 여러 개의 오류가 발생한 경우에는 제일 먼저 발생한 오류만을 분석의 대상으로 삼았고, 선행 오류에 기인하는 다음 단계의 오류는 고려하지 않았다.

오류의 분류 모델은 류성림(1993)의 논문을 참고로 하여 다음의 9가지로 분

류하였다.

(1) 가정을 잘 이용하지 못하는 오류(A)

주어진 문제의 전제 조건을 잘못 이해하거나 활용을 잘 하지 못하여 발생하는 오류로서 가정하지 않은 것을 가정으로 이용하는 경우, 여기에는 결론을 가정으로 이용하는 것까지 포함한다. 가정에 너무 집착하여 그 이상은 생각하지 못하는 경우, 주로 가정 이외에는 더 이상 진술하지 못하는 경우이다.

(2) 도형에 집착하여 생기는 오류(B)

문제의 가정을 무시하고 도형의 직관적인 요소에 너무 집착하여 기인하는 오류이다.

(3) 연산자의 잘못된 적용(C)

연산자를 적용하는데 있어서 'AAA'와 같은 실제로 존재하지 않는 합동조건의 적용 또는 'SAS'를 이용해야 되는데 'ASA'를 이용하는 등과 같은 부적절한 이용으로 인한 오류이다. 필요한 정리나 정의를 잘못 선택하는 경우, 증명할 필요가 없는 곳에 정리 또는 정의를 적용하는 경우, 정리나 정의 또는 성질을 밝히지 않은 경우의 오류이다.

(4) 연산자의 잘못된 실행(D)

정리나 정의를 적용하는 과정에서 잘못이 있는 경우로 일반적으로 올바른 결론의 변경을 낳게 된다.

(5) 증명 과정의 일부 생략(E)

현 단계까지는 맞으나 그 다음 단계의 과정이 생략되었거나 또는 한 단계가 생략된 경우의 오류이다.

(6) 결론을 바르게 내리지 못함(F)

결론 전 단계까지는 잘 연역해 내었으나 결론을 진술하지 않은 경우, 결론을 진술했으나 문제가 요구한 결론을 틀리게 기술한 경우의 오류이다.

(7) 기술적인 오류(G)

기호를 잘못 표기하거나 빠뜨리는 경우 또는 문자를 잘못 옮겨 적는 경우이다.

(8) 논리적 추론의 결여(H)

정리의 적용, 실행 등 증명에 필요한 기본 지식은 잘 알고 있으나 증명 과정의 각 단계가 논리적이지 못하거나 보조선을 그어 그림을 정확히 그렸으나 증명 과정을 기호와 이유를 들어 논리적으로 연역하지 못한 경우이다.

(9) 오류의 애매 모호함(I)

학생들이 주어진 문항을 증명하는 과정에서 글자가 애매 모호하여 위와 같은 오류로 분류하기가 곤란하고, 또 학생이 제시한 답을 보고 학생의 의도를 정확히 알 수 없는 경우이다.

Ⅲ. 결과 분석 및 논의

1. 결과

1) 의식 조사 질문 결과

(1) 질문지의 1번 문항은 '중2 수학 단원 중 가장 재미있는 단원'을 묻는 문항으로 그 결과는 어느 한 단원에 치우치지 않고 비교적 고른 응답율을 보이고 있고, 도형 단원보다 함수, 유리수와 근사값 단원이 더 낮은 응답율을 보이고 있다.

(2) 질문지의 2번 문항은 '중2 수학 단원 중 가장 좋아하는 단원'을 묻는 문항으로 그 결과는 가장 재미있는 단원을 묻는 문항과 비슷한 응답율을 보이고 있다.

(3) 질문지의 3번 문항은 '중2 수학 단원 중 가장 어렵게 생각되는 단원'을 묻는 문항으로 그 결과는 전체 314명중에 143명(45.5%)의 학생이 가장 어렵게 생각되는 단원이 '도형'단원이라고 응답하고 있다.

(4) 질문지의 4번 문항은 '도형의 증명이 다른 단원에 비해 어떻게 생각되는가'를 묻는 문항으로 그 결과는 매우 어렵거나 조금 어렵다고 응답한 학생이 74.9%로 나타나고 있으며, 7.3%의 학생만이 쉽다고 응답하고 있다.

도형의 증명이 어렵게 느껴지는 이유로 '타당한 근거를 제시하면서 증명 과정을 논리적으로 전개시켜야 하기 때문'이라고 응답한 학생이 47.7%로 가장 많았으며, 그 다음으로 '외워야 할 정의와 정리, 성질들이 많아서'(16.1%), '증명 절차가 복잡해서'(11.9%)라고 응답하고 있다.

도형의 증명이 쉽게 느껴지는 이유로는 '그림을 그려서 생각하면 쉽게 이해되기 때문에'(35.2%), '선생님이 설명을 잘 해 주셔서'(25.9%)라고 응답하고 있다.

(5) 질문지의 5번 문항은 '도형의 증명이 중요하다고 생각되는가'를 묻는 문

항으로 그 결과는 28.3%의 학생만이 '중요하다'라고 응답하고 있으며, 40.8%의 학생이 '중요하지 않다'고 응답하고 있어 도형 단원의 중요성에 대한 지도가 필요하다고 볼 수 있다.

도형의 증명이 중요하다고 생각되는 이유로는 '시험에 나오기 때문에'(47.5%)라고 응답한 학생이 가장 많았으며, 중요하지 않다고 생각되는 이유로는 56.1%의 학생이 '일상 생활에 전혀 이용되지 않기 때문'이라고 응답하고 있다.

(6) 질문지의 6번 문항은 '도형의 증명이 다른 단원에 비해 재미가 있는가'를 묻는 문항으로 15.3%의 학생만이 긍정적인 반응을 보이고 있고, 64.3%의 학생이 부정적인 반응을 보이고 있다.

도형의 증명이 재미있는 이유로는 '증명을 해결하고 난 후에 기쁨을 느끼기 때문에'(31.4%), '증명 자체가 신기하기 때문에'(24.4%), '생각하는 과정이 재미있어서'(20.9%)라고 응답하고 있고, 재미없는 이유로는 51.8%의 학생이 '과정이 복잡하기 때문'이라고 응답하고 있다.

(7) 질문지의 7번 문항은 '도형의 증명을 어느 정도 이해했다고 생각하는가'를 묻는 문항으로 그 결과는 12.7%의 학생만이 '이해하였다'고 응답, 37.9%의 학생이 '반정도 이해하였다'고 응답하고 있으며, 49.4%의 학생이 '거의 또는 전혀 이해하지 못하였다'고 응답하고 있다.

도형의 증명을 이해했다고 생각되는 이유로 '열심히 노력하였기 때문'이라고 응답한 학생(41.8%)이 가장 많았으며, '내용 자체가 너무 어려워서'(36.6%), '열심히 노력하지 않아서'(34.7%) 이해하지 못하였다고 응답하고 있다.

2) 기하 증명 능력 검사 결과

기하 증명 능력 검사를 통한 학생들의 기하 증명 능력 결과는 다음과 같다.

<표2> 기하 증명 능력 검사 결과 PT와 PC

	P T			P C		
	평균	%	SD	평균	%	SD
시 지역 중학교	10.6	21.2	5.6	0.80	8.9	1.59
읍·면 지역 중학교	8.5	17	5.0	0.78	8.7	1.55
전 체	9.8	19.6	5.3	0.79	8.8	1.57

시 지역 중학교의 PT 평균은 10.6점(21.2%), 읍·면 지역 중학교의 PT 평균은 8.5점(17%)으로 전체적으로 9.8점(19.6%)의 평균을 보여 학생들이 도형의 증명에 대해 어려움을 느끼는 만큼 성적도 부진함을 알 수 있다.

특히 완전한 증명을 요구한 PC 점수에 대한 평균이 8.8%로 PT 점수에 비해 현저히 떨어지고 있음은 가정과 결론을 구별하는 능력은 어느 정도 있으나 논리적이고 체계적으로 증명을 직접 기술해 나가는 능력이 부족하다는 것을 보여주고 있다.

<표3> PC의 각 점수에 대한 학생수와 백분율

PC점수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	계
시지역 (%)	145 (70.4)	20 (9.7)	14 (6.8)	9 (4.3)	8 (3.9)	5 (2.4)	2 (1.0)	1 (0.5)	2 (1.0)	0 (0)	206 (100)
읍·면지역 (%)	78 (72.3)	9 (8.3)	6 (5.6)	5 (4.6)	5 (4.6)	4 (3.7)	0 (0)	0 (0)	1 (0.9)	0 (0)	108 (100)
전체 (%)	223 (71.0)	29 (9.2)	20 (6.4)	14 (4.5)	13 (4.1)	9 (2.9)	2 (0.6)	1 (0.3)	3 (1.0)	0 (0)	314 (100)

PC 점수가 0 또는 1인 학생이 252명으로 완전하게 증명을 해 낼 수 있는 능력이 거의 없는 학생이 전체의 80.2%를 차지하고 있음을 알 수 있다. 또 약간의 증명 능력이 있다고 생각되는 학생(PC 점수 2, 3, 4, 5)은 17.9%이며, 1.9%의 학생만이 증명을 이해하여 논리적으로 전개해 나가는 능력이 있는 것으로 나타났다.

명제의 증명에서 문제에 알맞은 도형을 그리고 기호를 사용하여 나타내는 부분에서는 삼각형인 경우(문항1, 3)에는 93.3%, 70.1%의 학생이 바르게 나타냈고, 사각형인 경우(문항2, 4)에는 71.3%, 63.7%의 학생만이 바르게 나타냈다. 삼각형인 경우에 있어서 기호를 도형 안에 붙이는 경우가 있었고, 사각형인 경우에 있어서는 기호를 위, 아래 순서로 붙이는 경우가 많았다.

가정과 결론 부분을 기호를 사용하여 나타내는 부분에서는 문항2의 가정(직사각형ABCD에서)을 기호로 바르게 나타낸 경우가 5.7%, 문항3의 가정(삼각형의 세 내각)을 바르게 나타낸 경우가 1.6%로 나타났고, 문항4의 결론(사각형은 평행사변형이다)을 기호로 바르게 나타낸 경우가 7.3%로 나타났다.

특히, 명제가 문장제로 주어진 문항5(평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다)의 경우 가정과 결론을 기호로 바르게 나타낸 경우가 각각 9.2%, 24.8%로 나타나 문장으로 주어진 가정과 결론을 기호를 사용하여 나타내는 능력이 부족함을 보여주고 있다.

완전한 증명을 요구한 9개의 문항 중 6번, 9번 문항에 3, 4점을 받은 학생수가 66명(21.0%)으로 가장 많았고, 8번 문항의 정답율이 가장 낮았는데, 이는 삼각형의 중점연결정리를 기억하지 못하고, 도형의 직관적인 면에 치중하여 정리의 내용을 평행사변형의 성질과 관련짓지 못하는데서 오는 결과인 것 같다. 용어의 정의를 쓰도록 한 문항10의 경우 6개의 정의 중 5개 이상을 바르게 쓴 경우가 23.6%, 2개 이하를 바르게 쓴 경우가 51.9%를 차지하여 도형의 정의를 바르게 쓰지 못하는 경우가 많았고, 특히 도형의 성질을 정의로 받아들여 정의와 성질을 구별하지 못하는 경우가 많았다.

3) 오류 분석

오류 분석은 완전한 증명을 요구한 9개의 문항에서 무응답을 한 문항과 4점을 받은 문항을 제외하고 총 888개의 오류를 찾아내어 분석을 하였다.

<표4> 오류 발생 빈도표

문 항	1(4)	2(4)	3(4)	4(4)	5(3)	6	7	8	9	계
오류발생 (%)	158 (50.3)	101 (32.2)	88 (28.0)	78 (24.8)	73 (23.2)	110 (35.1)	80 (25.5)	66 (21.0)	134 (42.7)	888 (31.4)
4점 (%)	2 (0.6)	6 (1.9)	5 (1.6)	4 (1.3)	3 (1.0)	24 (7.6)	24 (7.6)	0 (0)	15 (4.8)	83 (2.9)
무응답 (%)	154 (49.1)	207 (65.9)	221 (70.4)	232 (73.9)	238 (75.8)	180 (57.3)	210 (66.9)	248 (79.0)	165 (52.5)	1855 (65.7)
계	314	314	314	314	314	314	314	314	314	2826

<표4>는 각 문항별로 오류가 발생한 학생, 4점 받은 학생, 무응답한 학생수와 그 비율을 나타낸 것이다. 오류가 가장 많이 발생한 문항은 1번 문항으로 50.3%의 비율을 차지하였고, 6번, 7번 문항이 4점을 받은 학생수가 가장 많았으며, 전체적으로 무응답한 비율이 높아 도형의 증명에 대해 학생들이 정리를

이해하고 기억하여 증명에 적용하고 실행하는 데 많은 어려움이 있다는 것을 알 수 있다.

<표5> 오류 유형별 빈도표

오류유형 \ 문항	1	2	3	4	5	6	7	8	9	계
(1) A	119	51	45	55	39	31	26	4	42	412 (46.4)
(2) B	0	1	1	1	1	0	2	52	0	58 (6.5)
(3) C	8	16	1	4	12	23	27	1	51	143 (16.1)
(4) D	14	16	5	7	5	2	6	1	1	57 (6.4)
(5) E	4	3	10	3	3	25	16	2	16	82 (9.2)
(6) F	2	5	0	0	4	13	0	0	5	29 (3.3)
(7) G	4	6	0	4	6	15	1	0	17	53 (6.0)
(8) H	6	1	23	4	2	0	0	6	1	43 (4.9)
(9) I	1	2	3	0	1	1	2	0	1	11 (1.2)
계	158	101	88	78	73	110	80	66	134	888 (100.0)

<표5> 오류 유형별 빈도표에서 살펴보면, (1) 가정을 잘 이용하지 못하는 오류(A)가 46.4%로서 가장 많은데, 이는 가정하지 않은 것을 가정으로 이용하는 경우, 결론을 가정으로 이용하는 경우, 가정 이외에는 더 이상 진술하지 못한 경우에 해당된다. 특히, '$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이면 $\angle B=\angle C$이다.'를 증명하는 1번 문항에서 37.9%의 학생이 '$\overline{AB}=\overline{AC}$이면 이등변삼각형이기 때문에 이등변삼각형의 성질에 의해 $\angle B=\angle C$이다.' 라고 기술해 수업 시간 중에 정리로 사용되고 있는 사실은 당연히 참이라고 생각하며 그 정리를 증명해야 한다는 것을 이해하지 못하는 경향이 있어 아직 증명이나 정리의 개념에 대한 이해가 부족하기 때문인 것으로 여겨진다. (3) 연산자의 잘못된 적용(C)으로 인한 오류가 두 번 째로 많이 나타나는데, 이는 증명에 필요한 정리나 정의의 잘못된 선택과 연역에 대한 이유로서 정리나 정의의 성질을 밝히지 않은 것, 정리나 정의의 이름 또는 성질을 잘못 말한 경우에 해당된다. (5) 증명 과정의 일부 생략(E) 오류는 9.2%로서 전체적으로 보아 증명이 논리적으로 유효

하게 이루어지고 있으나 증명을 기술하는 과정 중에 필요한 단계가 생략되어 있는 경우이다. (2) 도형에 집착하여 생기는 오류(B)는 8번 문항에서 주로 나타났는데, 삼각형의 중점연결정리를 이용하여 평행사변형임을 증명해야 하는데 그림에서 직관적으로 판단하여 기술한 경우가 대부분이었다. (7) 기술적인 오류(G)도 6.0%로 나타나는 데 학생들의 부주의 또는 실수로 잘못 표기하는 경우로 특히, 합동기호(≡)를 넓이 기호(=)로 잘못 사용하는 경우가 많아 기호 사용에 대한 지도에 특별한 주의를 기울일 필요성이 제기된다.

4번 문항에서는 증명을 통해서 밝히고 난 뒤 사용할 수 있는 평행사변형의 성질을 증명 과정 중에 사용하는 오류를 보이고 있는데, 이러한 오류는 가정과 결론에 대한 개념이 명확하지 않고, 평행사변형이 되는 조건과 평행사변형의 성질을 구분하지 못하는데서 오는 것 같다.

2. 논의

본 연구의 연구 문제를 바탕으로 연구 결과를 논의하면 다음과 같다.

첫째, 중학교 2학년 과정에서 형식적인 기하 증명을 처음 배운 학생들의 증명에 대한 의식 조사를 해 보았다. 도형의 증명의 난이도를 묻는 문항에 74.9%의 학생이 어렵다라고 응답하고 있으며, 7.3%의 학생만이 쉽다고 응답하였다.

도형의 증명의 중요도를 묻는 문항에는 28.3%의 학생이 중요하다, 40.8%의 학생이 중요하지 않다고 응답하고 있다. 도형의 증명의 선호도를 묻는 문항에는 15.3%의 학생이 긍정적인 반응을 보였고, 64.3%의 학생이 부정적인 반응을 보였다.

도형의 증명의 이해도를 묻는 문항에는 12.7%의 학생이 이해하였다고 응답을, 49.4%의 학생이 이해하지 못하였다고 응답하였다. 전체적으로 도형의 증명에 대해 부정적 의식을 갖고 있는 것으로 나타나 증명의 필요성과 의의에 대한 지도가 이루어져야 하겠다.

둘째, 기하 증명 능력 검사에서는 도형 그리기, 가정과 결론을 진술하는 데 있어서는 약간의 능력이 있었으나 완전한 증명을 연역해 내는 문제에서는 능력이 부족하였다. 1.9%의 학생만이 증명을 이해하여 논리적으로 전개해 나가는 능력이 있는 것으로 나타났고, 80.2%의 학생이 연역적인 증명을 하는데 있어서 많은 어려움을 겪고 있는 것으로 나타났다.

이러한 결과는 중2 학생의 60% 정도가 Van Hiele 수준 0과 1(연역적인 증명이 불가능한 수준)에, 25%의 학생만이 수준 3과 4(연역적인 증명이 어느 정도 가능한 수준)에 이르고 있다는 최현호와 한태식(1990)의 연구 결과와 류성림(1993)의 연구 결과와도 많은 차이를 보이고 있어 중학교 2학년 학생에게 형식적인 증명을 하도록 하는 것은 무리라는 점을 시사한다고 할 수 있다.

셋째, 기하 증명 과정에서 발생하는 오류 유형을 살펴보았다. 가정을 잘 이용하지 못하는 오류가 가장 많았는데, 이는 가정에서 더 이상 진전을 하지 못하는 즉, 가정에 있는 조건만 나열하는 경우, 결론을 가정으로 이용하는 경우가 많아 증명이나 정리의 개념에 대한 이해가 부족하고, 정리나 정의를 기억하여 증명에 적용하는데는 많은 어려움이 있음을 나타내고 있다. 도형의 정의를 쓰는 부분에서 많은 학생들이 도형의 성질을 정의로 받아들여 기술하고 있어 정의와 정리에 대한 명확한 구분 지도가 필요함을 보여 주고 있다. 또한 기호 사용이 미흡해 정확한 기호 사용에 대한 지도가 이루어져야 하겠다.

Ⅳ. 요약 및 결론

1. 요약

본 연구의 목적은 중학교 3학년 학생들을 대상으로 중학교 2학년 과정에서 배우는 기하 증명에 대한 의식과 기하 증명 능력, 증명 과정의 오류 경향에 대하여 알아보는 것이다.

연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

1) 중학교 2학년 과정에서 형식적인 기하 증명을 처음 배운 학생들의 증명에 대한 의식은 어떠한가?
2) 기하 증명 능력 검사를 통한 학생들의 기하 증명 능력은 어느 정도인가?
3) 기하 증명 과정에서 나타나는 학생들의 오류에는 어떠한 것이 있는가?

연구 문제의 분석을 위해 제주도내의 시 지역 남자 중학교 2학급, 여자 중학교 2학급, 남녀공학 2학급, 읍·면 지역 남녀공학 4학급을 대상으로 의식 조사 질문지검사와 기하 증명 능력 검사를 담당 수학 교사의 협조를 얻어 실시하였다.

연구에 사용된 의식 조사 질문지는 기하 증명에 대한 난이도, 중요도, 선호도, 이해도를 묻는 문항으로 연구자가 자체 제작하였다. 기하 증명 능력 검사지의 경우 연구 대상 학생들이 사용하였던 8종 교과서를 분석하여 기본적이고 공통된 내용을 추출해서 주어진 문제에 알맞은 도형을 그리고 기호로 나타내기, 가정, 결론 부분을 기호로 나타내기, 명제가 참임을 직접 증명하기와 같은 형식으로 제작하였다. 검사 도구는 표집된 학생 모두에게 실시하여 자료는 100% 수집했으며, 의식 조사 질문지의 경우 각 문항에 따라 빈도와 백분율을 구하고, 증명 능력 검사의 경우 수집된 자료를 설정한 채점 기준에 따라 증명 능력 전체 점수인 PT(Proof Total)와 증명의 완성도에 있어 유효한 증명이 이루어졌을 경우 주어지는 PC(Proof Correct)의 두 가지 방식으로 점수를 산출하였다. 증명 과정의 오류 분석은 류성림(1993)의 연구에서 제시한 9가지 유형에 따라 분류하여 실시하였다.

통계 처리는 개인용 컴퓨터의 Microsoft Excel 프로그램과 계산기를 이용하여 처리하였다.

2. 결론

논리적으로 사고하는 능력과 태도의 육성을 수학 교육의 가장 중요한 목표 중의 하나라고 볼 때, 이러한 목표를 달성하는데 연역적 추론으로서의 증명은 수학 교육에서 더욱 중요한 학습 주제가 된다고 할 수 있다.

그러나 그 중요성과 학교에서 많은 시간을 투자하여 지도하고 있음에도 불구하고 학생들은 증명을 별로 선호하지 않고, 많은 어려움을 겪고 있음을 여러 연구 결과에서 알 수 있다. 우리 나라를 비롯한 대부분의 나라에서 증명을 학습한 학생들을 대상으로 연구한 결과에 의하면 다른 영역에 비해 성취도 면에서 기대할 만한 것이 못되고 있다. 일부 수학교육자들은 이러한 현상의 원인으로 학생들의 증명의 필요성 인식의 부족과 불충분한 논리적 성숙 등을 언급하고 있다. 증명은 수학적 추론 능력을 개발하고 수학적 이해를 증진시키며, 수학적으로 이해한 것을 의사 소통할 수 있는 필수적인 도구이지만, 증명을 처음으로 접하는 학생들에게는 인위적이고 부자연스럽게 이용되는 것으로 간주될 수도 있다. 초보자에게 수학적인 증명은 명제의 타당성에 대한 의심을 제거하기 위한 자연스러운 목적을 가지도록 해야 한다.

중학교 2학년에서 처음으로 나오는 도형의 증명 문제는 삼각형, 사각형의 성질에 관한 문제이다. 이들 도형의 성질을 평행선의 성질이나 삼각형의 합동조건을 이용하여 학습하고 있는데, 만일 형식적인 증명은 할 수 있지만 왜 증명을 하게 되는가의 필요성과 의의를 이해하지 못한다면 동기유발이 결여되어 증명 학습의 본래 목적인 논리적, 비판적 사고력은 제대로 육성되지 못할 것이다.

본 연구는 중학교 2학년에서 형식적인 기하 증명을 처음 배운 학생들의 증명에 대한 의식과 증명 능력, 증명 과정에서의 오류 경향을 분석한 것이다. 본 연구의 결과 분석에 의하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

첫째, 증명에 대한 의식 조사 질문의 경우 74.9%의 학생이 증명 단원이 어렵다고 응답하고 있고, 7.3%의 학생만이 쉽다는 반응을 보였다. 어렵게 느껴지는 이유로는 타당한 근거를 제시하면서 증명 과정을 논리적으로 전개시켜야 하기 때문에(47.7%), 외워야 할 정의와 정리, 성질들이 많아서(16.1%), 증명 절차가 복잡해서(11.9%)라고 응답하고 있다. 도형의 증명이 중요하다라고 응답한 학생은 28.3%, 40.8%의 학생이 중요하지 않다고 응답하고 있고, 그 이유로는 일상생활에 전혀 이용되지 않기 때문(56.1%)이라고 답하고 있다. 도형의 증명의 선호도에서는 15.3%의 학생만이 긍정적인 반응을 보였고, 64.3%의 학생이 부정적인 반응을 보이고 있는데, 과정이 복잡하기 때문(51.8%)이라고 응답하고 있다. 이해도를 묻는 문항에서는 12.7%의 학생만이 도형의 증명을 이해하였다고 응답하고 있으며, 49.4%의 학생은 거의 이해하지 못하였다고 응답하고 있다. 그 이유로는 내용 자체가 어려워서(36.6%), 열심히 노력하지 않아서(34.7%) 이해하지 못하였다고 응답하고 있다.

전체적으로 도형의 증명에 대해 부정적 의식을 갖고 있는 것으로 나타났다.

둘째, 기하 증명 능력 검사 결과 전체 평균 점수는 PT 평균이 19.6%, PC 평균이 8.8%로 나타났으며, 도형을 그리고 가정과 결론을 구분하는 능력은 어느 정도 있으나 완전한 증명을 기술하는 능력은 매우 부진한 것으로 나타났다. 증명 능력이 거의 없다고 여겨지는 학생이 전체의 80.2%를 차지하고, 1.9%의 학생만이 증명을 이해하여 논리적으로 전개해 나가는 능력이 있는 것으로 나타났다.

셋째, 기하 증명 과정에서 발생하는 오류 경향을 분석해 요약해 보면 다음과 같다.

· 증명의 의미를 제대로 이해하지 못하여 논리적 추론이 결여된 직관 적인

사고의 결과를 이용 하려는 경향이 많이 나타났다.

- 배운 정리나 정의를 확실히 이해하지 못하는 경우가 많았고, 그 정리나 정의를 증명 과정에 활용하는 데 어려움을 많이 겪고 있는 것으로 나타났다.
- 언어로 표현된 문장을 수식으로 기호화하는 능력이 부족하고, 용어나 기호의 잘못된 사용에 의한 오류가 많이 나타났다.
- 증명하는 방법이 미숙하여 증명의 중요한 과정이 일부 생략되는 오류가 있었다.
- 문제에 알맞은 도형을 그리고 기호를 사용하여 나타내는 과정의 오류가 있었다.
- 가정과 결론을 구분하지 못하고, 특히 정의와 성질을 혼동하여 구분하지 못하는 오류가 많이 나타났다.

3. 제언

본 연구에서 얻은 연구 결과를 토대로 하여 다음과 같은 점을 제언하고자 한다.

첫째, 도형의 증명에 대한 학생들의 부정적인 의식을 변화시키기 위하여 연역적 증명의 필요성을 자연스럽게 인식하도록 지도가 이루어져야 하겠다.

둘째, 아직 학생들의 사고가 직관적인 수준에 머물러 있는 경향이 크므로 너무 형식적이고 논리적인 추론을 강조할 것이 아니라 학생들의 수준에 맞는 정도의 엄밀성으로 증명이 지도되어야 할 것이다.

셋째, 학생들에게 도형의 정의와 성질을 보다 명확히 구분하여 지도할 필요가 있으며, 이는 기호화나 문장화, 도형의 그림 표시, 가정과 결론의 구분 등과 연결하여 지도가 이루어져야 하겠다.

참 고 문 헌

- 강행고 외(2001), "중학교 수학8-나", (주)중앙교육.
- 교육부(1997), "수학과 교육과정", 교육부.
- 교육부(1999), "중학교 교육과정 해설(Ⅲ)", 교육부.
- 김연식 · 김홍기(1996), "중학교 수학2", (주)두산.

· 김응태외(1985), "수학교육학개론", 서울대학교 출판부.
· 박배훈 · 정창현(1996), "중학교 수학2", (주)교학사.
· 박한식외(1993), "수학대사전", 한국사전연구사.
· 윤영주(1993), "수리논리학", 형설출판사.
· 강상진(2000), "수준별 수업에서 선수학습이 학업성취도에 미치는 영향에 관한 연구-중학교 2학년 도형의 성질을 중심으로-", 제주대학교 교육대학원 석 사학위논문.
· 김미정 · 이종희(1994), "Van-Hiele 이론에 의한 중학생들의 기하적 사고 수준에 관한 연구", 한국수학교육학회지 <수학교육> 제33권 제2호.
· 김홍기(1998), "중학교 수학에서 증명 지도에 관한 연구", 한국수학교육학회지 <수학교육> 제37권 제1호.
· 류성림(1998), "수학교육에서 증명의 의의에 관한 연구", 한국수학교육학회지 <수학교육> 제37권 제1호.
· 류성림(1993), "중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구", 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
· 서동엽(1992), "증명 지도에 관한 연구", 서울대학교 대학원 석사학위논문.
· 신주식(1997), "기하 증명에 대한 정의적 영역과 오류 유형에 있어서 남녀차에 관한 연구", 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
· 이재원(1994), "중학교 수학에서 증명 방법의 지도에 관한 연구", 단국대학교 교육대학원 석사학위논문.
· 전현미(1996), "기하 증명 과정의 오류 경향 연구-중2 수학을 중심으로-", 경북대학교 교육대학원 석사학위논문.
· 최현호 · 한태식(1990), "기하 영역의 Van-Hiele 수준과 증명 능력에 관한 연구", 수학교육논총, 제8집, 대한수학회.
· 한태식(1991),"기하교육과 Van-Hiele 이론", 한국수학교육학회지 <수학교육> 제30권 제3호.