

2차원 연속체요소를 이용한 박판금속 성형공정의 해석

정 동 원* · 양 경 부**

Analysis of Sheet Metal Forming Process by using 2-Dimensional Continuum Element

Dong-Won Jung* and Kyoung-Boo Yang**

ABSTRACT

The study is concerned with two-dimensional rigid-plastic finite element analysis of deep drawing process by using the continuum elements. The analysis of sheet metal forming process has three element types: membrane, shell and continuum element. The membrane analysis is frequently used due to the short computational time. However, in the membrane analysis the bending effects can not be considered at all. The shell analysis allows the consideration of bending effects, but involves too much computational time than membrane analysis. The continuum analysis allows the consideration of realistic bending effects and calculated the accuracy thickness strain then the shell analysis in the sheet metal forming process, but involves an amount computational time. Therefore little analysis by using the continuum element. Recently, as a fast development of computer hardware, this study carried out the analysis by using the continuum element in order to obtain the accuracy results

Key words : Sheet metal forming, Rigid-plastic finite element method, Continuum element, Thickness strain

1. 서 론

수치적 방법에 의한 박판금속(sheet metal) 성형공정의 해석은 1970년대 이후 많이 시도 되었으며 그중 유한요소법(finite element method)은 다른 방법에 비해 적용의 융통성이 좋으며 다양하고 자세한 정보를 제공하고 있어 널리 사용되고 있다.

박판금속 성형공정의 유한요소해석은 크게 강소성(rigid-plastic)해석과 탄소성(elastic-plastic)해석으로 나눌수 있는데 강소성해석은 금속성형의 경우 탄성 변형도에 비해 매우 큰 소성 변형도가 일어남으로 탄성 변형도는 무시할 수 있다고 가정하여 응력의 항복 여부를 체크하기 위한 응력 적분과정이 필요없고 각 단계마다 변형량을 크게 할 수 있어 계산시간이 줄어드는 장점이 있으나 소성영역에서의 탄성복원이 생기거나 변형이 다른 부분에 비해 극히 적게 일어나는 강체영역(rigid zone)이 발생하는 경우 해석이 곤란해지는 단점이 있다. 반면 탄소성 해석은 변형도의 적분

* 제주대학교 기계공학과
Dept. of Mechanical Eng., Cheju Nat'l Univ.

** 제주대학교 대학원
Graduate School, Cheju Nat'l Univ.

과 더불어 응력의 적분을 수행하기 때문에 변형경로 및 응력의 경로를 정확히 예측할 수 있어 제품의 최종적인 상태를 파악할 수 있다. 또한 강소성해석과 달리 강체 회전효과를 고려할 수 있어 박판성형과 같이 대변형이 일어나는 공정의 해석에 적합하다는 장점이 있으나 계산시간과 해의 수렴성 문제가 대두된다.

박판금속 성형공정의 해석에는 사용하는 요소의 종류에 따라 박막(membrane)해석, 셸(shelle)해석 그리고 연속체(continuum)해석등의 3가지 범주로 나눌수 있는데 그중 박막해석은 두께방향의 응력을 고려하지 않아 계산시간과 계산에 필요한 기억용량이 적으나 굽힘효과(bending effect)를 고려할 수 없는 단점을 가지고 있어 박판이 변형되는 형상은 정확히 예측할 수 있으나 정확한 스트레인 분포를 예측하지 못한다. 따라서 굽힘에 영향을 적은 스트레칭 문제해석에 널리 사용되고 있다. 셸해석은 박막해석에 두께 변화를 시뮬레이션(simulation)중에 적절히 고려한 방법으로 가상 두께 변화를 계산하므로 박막해석에 비해 많은 계산 시간과 기억용량을 필요로 하나 굽힘효과를 볼 수 있다는 장점이 있어 많은 상용 해석 프로그램에서 사용되고 있다.

본 논문에서 다루고 있는 연속체해석은 실제로 두께 방향의 응력을 고려 함으로써 두께방향의 변형 및 응력을 가장 자연스럽게 표현할 수 있는 방법으로 박막요소와 셸요소에 의한 해석에서 블랭크(blank) 홀더의 접촉에 의한 압축력등을 고려하지 못하는 반면 연속체해석은 이러한 양면접촉문제등을 정확하게 표현할 수 있는 방법이다.

이러한 연속체요소를 이용한 박판금속성형공정의 해석은 계산시간의 방대함과 많은 기억용량으로 인해 그리 많지 않은 편이다. Massoni¹⁾ 등은 반구형편치를 이용한 딥드로잉(deepj-drawing)공정을 강소성유한요소법으로 해석한바 있고 Shimizu와 Sano²⁾는 강소성 유한요소법을 이용하여 사각컵 드로잉 해석을 블랭크 홀더에 두께보다 조금 큰 간격을 두고 해석한 바 있다. 그러나, 근래 컴퓨터 하드웨어(hardware)의 급속한 발달로 인해 종전의 계산시간보다 많은 계산 시간을 절감할 수있고 방대한 데이터(data)를 처리할 수 있으면서 좀더 정확한 해석에 대한 욕구를 충족시키기 위해 연속체 요소를 이용한 해석에 관심이

높아지고 있다.

본 논문에서는 2차원 연속체요소를 이용하여 사각편치를 이용한 딥드로잉 공정을 강소성 유한요소법으로 해석해 보고자 한다.

II. 이론해석

2.1. 기하학적 비선형을 고려한 강소성 유한요소 수식

시간 t_0 에서 체적형상과 유효 변형률분포 그리고 경계조건이 주어졌을 때 시간 $t_0 + \tau$ 에서 강소성 박판 금속재료에 대한 응력장의 필요충분조건은 다음과 같이 가상일의 정리로부터 나타낼수 있다.

$$\int_{\nu} \delta w_{int} = \int_{\nu} S^{ab} \delta \epsilon_{ab} dV \quad (1)$$

여기서 S^{ab} 는 2-nd Piola-Kirchhoff 응력텐서(tensor) 성분이며 ϵ_{ab} 는 한 스텝(step)동안의 Lagrangian 변형률 텐서이다.

일의 평형원리를 적용하면 (1)식은 다음과 같이 표현되며

$$\int_{\nu} \delta W_{int} = \int_{\nu} \delta \bar{\sigma}(\Delta \bar{\epsilon}) dV = \delta W_{ext} \quad (2)$$

주질점좌표계를 사용하고 최소에너지 경로를 가정하면 유효 변형률 증분 $\Delta \bar{\epsilon}$ 는 다음과 같다.

$$\Delta \bar{\epsilon} = \frac{1}{6} \left\{ \left(\ln \frac{r_{g1}}{r_{g1}^0} \right)^2 \left(\ln \frac{r_{g2}}{r_{g2}^0} \right)^2 \left(\ln \frac{r_{g3}}{r_{g3}^0} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

재료는 비압축성이기 때문에 비압축성조건이 유한요소해석에 적용되어야 하는데 일반적으로 강소성 유한요소해석에서는 그 조건을 만족시키기 위해 벌칙기법(penalty method)을 효과적으로 사용하고 있다. 따라서 벌칙기법을 채택하여 비압축성 조건을 적용하면 다음과 같은 식(4)처럼 나타낼수 있다.³⁾

$$\delta W_r = \int_{V_v} \bar{r} \delta(\Delta \bar{\epsilon}) dV + k \int_{V_v} E_v \delta E_v dV \quad (4)$$

여기서 E_v 는

$$E_v = \ln\left(\frac{r_1}{r_1}\right) + \ln\left(\frac{r_2}{r_2}\right) + \ln\left(\frac{r_3}{r_3}\right) \quad (5)$$

이며 k 는 벌칙상수이다.

2.2. 연속체 요소의 수식화

X_i 는 시간 t_0 에서 재료의 주직교좌표계 성분이고 u_i 는 한 스텝 r 동안 변위 벡터의 직교좌표계 성분이라고 하자. 요소의 임의의 질점좌표계와 자연 좌표계 (ξ_1, ξ_2, ξ_3)는 같은 성질을 지니고 있으므로 자연 좌표계를 질점좌표계로 택하여 수식을 유도하면 된다.^{3,4)}

형상함수(shape function) H 를 사용하여 요소내의 위치와 변위를 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$x \equiv \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = H \bar{X} \quad (6)$$

$$u \equiv \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = H \bar{U} \quad (7)$$

여기서, \bar{X} 와 \bar{U} 는 주어진 요소에 대한 각 질점에서의 좌표와 변위 벡터를 나타낸다. 따라서 Lagrangian 변형을 ϵ_{ij} 는 다음과 같이 표현된다.

$$E = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{X}^T B_1 \bar{U} + \bar{U}^T B_1 \bar{X} + \bar{U}^T B_1 \bar{U} \\ \bar{X}^T B_2 \bar{U} + \bar{U}^T B_2 \bar{X} + \bar{U}^T B_2 \bar{U} \\ \bar{X}^T B_3 \bar{U} + \bar{U}^T B_3 \bar{X} + \bar{U}^T B_3 \bar{U} \\ \bar{X}^T B_4 \bar{U} + \bar{U}^T B_4 \bar{X} + \bar{U}^T B_4 \bar{U} \\ \bar{X}^T B_5 \bar{U} + \bar{U}^T B_5 \bar{X} + \bar{U}^T B_5 \bar{U} \\ \bar{X}^T B_6 \bar{U} + \bar{U}^T B_6 \bar{X} + \bar{U}^T B_6 \bar{U} \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서, $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ 는 각각 다음과 같이 주어지고 이는 좌표값에 무관하므로 모든 요소에 대하여 같은 값을 가진다.

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\partial H^T}{\partial \xi^1} \frac{\partial H}{\partial \xi^1} \\ B_2 &= \frac{\partial H^T}{\partial \xi^2} \frac{\partial H}{\partial \xi^2} \\ B_3 &= \frac{\partial H^T}{\partial \xi^3} \frac{\partial H}{\partial \xi^3} \\ B_4 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial H^T}{\partial \xi^1} \frac{\partial H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial H^T}{\partial \xi^2} \frac{\partial H}{\partial \xi^1} \right] \\ B_5 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial H^T}{\partial \xi^1} \frac{\partial H}{\partial \xi^3} + \frac{\partial H^T}{\partial \xi^3} \frac{\partial H}{\partial \xi^1} \right] \\ B_6 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial H^T}{\partial \xi^2} \frac{\partial H}{\partial \xi^3} + \frac{\partial H^T}{\partial \xi^3} \frac{\partial H}{\partial \xi^2} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Lagrangian 변형도 변화량은 다음식(10)으로부터 구할 수 있다.

$$\delta E = \begin{bmatrix} \delta \bar{U}^T B_1 (\bar{X} + \bar{U}) \\ \delta \bar{U}^T B_2 (\bar{X} + \bar{U}) \\ \delta \bar{U}^T B_3 (\bar{X} + \bar{U}) \\ \delta \bar{U}^T B_4 (\bar{X} + \bar{U}) \\ \delta \bar{U}^T B_5 (\bar{X} + \bar{U}) \\ \delta \bar{U}^T B_6 (\bar{X} + \bar{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \bar{U}^T K_1 \\ \delta \bar{U}^T K_2 \\ \delta \bar{U}^T K_3 \\ \delta \bar{U}^T K_4 \\ \delta \bar{U}^T K_5 \\ \delta \bar{U}^T K_6 \end{bmatrix} \quad (10)$$

식(10)을 이용하면 식(4)의 $\Delta \bar{\epsilon}$ 과 E_v 의 변화량은 다음과 같이 표현되며

$$\begin{aligned} \delta(\Delta \bar{\epsilon}) &= \delta \bar{U}^T \left(\frac{\partial \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \bar{E}_1} \frac{\partial \bar{E}_1}{\partial \bar{U}} + \frac{\partial \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \bar{E}_2} \frac{\partial \bar{E}_2}{\partial \bar{U}} + \frac{\partial \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \bar{E}_3} \frac{\partial \bar{E}_3}{\partial \bar{U}} \right) \\ &= \delta \bar{U}^T \left[\frac{1}{3 \Delta \bar{\epsilon}} \left(\alpha_1 \frac{\partial \bar{E}_1}{\partial \bar{U}} + \alpha_2 \frac{\partial \bar{E}_2}{\partial \bar{U}} + \alpha_3 \frac{\partial \bar{E}_3}{\partial \bar{U}} \right) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \delta E_v &= \delta \bar{U}^T \left(\frac{\partial E_v}{\partial \bar{E}_1} \frac{\partial \bar{E}_1}{\partial \bar{U}} + \frac{\partial E_v}{\partial \bar{E}_2} \frac{\partial \bar{E}_2}{\partial \bar{U}} + \frac{\partial E_v}{\partial \bar{E}_3} \frac{\partial \bar{E}_3}{\partial \bar{U}} \right) \\ &= \delta \bar{U}^T \left(\alpha_1 \frac{\partial \bar{E}_1}{\partial \bar{U}} + \alpha_2 \frac{\partial \bar{E}_2}{\partial \bar{U}} + \alpha_3 \frac{\partial \bar{E}_3}{\partial \bar{U}} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

따라서, 식(4)는 다음과 같은 유한요소 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\int_V \bar{\sigma} \delta(\Delta \bar{\epsilon})^o dV + k \int_V E_V \delta E_V^o dV = \delta \bar{U}^T [Q_{def}(\bar{U}) + Q_{tot}(\bar{U})] \quad (13)$$

위의 비선형방정식의 해를 구하기 위해 뉴턴-랩슨(Newton-Raphson)방법을 이용하면 식(4)는 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$K\Delta U^i = R - F^{(i-1)} \quad (14)$$

여기서, $F^{(i-1)}$ 은 시간 $t_0 + \tau$ 일 때 (i-1)번째 측차(iteration)의 응력발산항(stress divergence)이며 R은 시간 $t_0 + \tau$ 일 때 외부로부터 작용한 힘벡터이다.

측차(iteration)는 아래의 조건을 만족 시킬 때 까지 반복하게 된다.

$$\frac{\|\Delta U\|}{\|U\|} \leq \delta \quad (15)$$

여기서, δ 는 $10^{-5} \sim 10^{-6}$ 정도의 매우 작은 상수 값이다.

본 연구에서는 사용하는 강소성 재료의 특성방정식은 해중의 경우 그 부분에서의 응력을 알 수 없어 해가 발산하게 된다. 따라서, 이러한 어려움을 수치적으로 해결하기 위하여 Osakada등⁵⁾이 사용한 다음과 같은 변형된 유효변형을 증분방법을 사용하였다.

$$d\bar{\epsilon} = \sqrt{d\bar{\epsilon}^2 + d\bar{\epsilon}_o^2} \quad (16)$$

이 때 구성방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}_o}{\sqrt{d\bar{\epsilon}^2 + d\bar{\epsilon}_o^2}} d\bar{\epsilon} \quad (17)$$

III. 계산결과 및 고찰

2차원 연속체요소를 이용한 예제로써 사각편치에 의한 박판의 딥드로잉(deep-drawing)공정을 해석하였다. Fig. 1은 해석모델의 개요도이며 해석에 사용된

재질은 알루미늄(aluminium)을 사용하였고 사용된 재질의 재료상수와 공정변수는 아래와 같다.

- 응력-변형률 특성 : $\bar{\sigma} = 51.915 \bar{\epsilon}^{0.247}$ Mpa
- 이방성 계수(R) : 1.66
- 재료의 초기두께(t_0) : 3.0mm
- Coulomb 마찰계수(μ) : 0.1

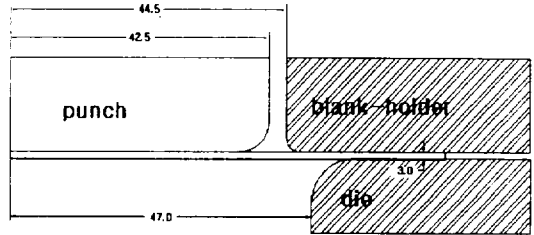


Fig. 1 Geometry of the tooling.

해석에서는 사용된 유한요소격자를 50개의 4절점 사각요소로 분할하였고 매 계산 단계에서의 최대 유효변형도는 0.025 이내로 제한되도록 계산 단계의 크기를 조정하였다. 계산에서 각 변형 단계의 편치 증분 변위는 1.0mm로 하였고 Newton-Raphson 방법에서 초기 감속계수를 0.25로 하였을 때 최대 136회의 측차(iteration)를 거쳐 해가 수렴하였다.

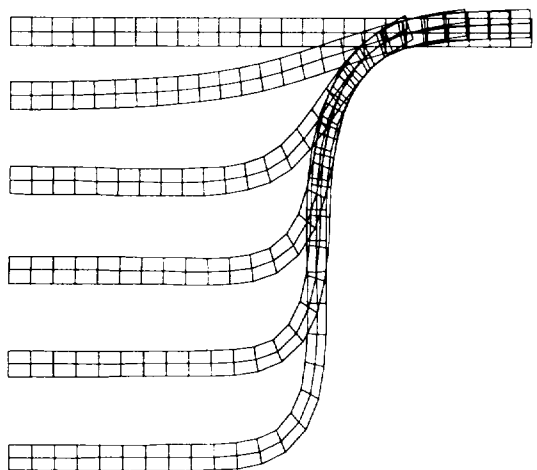


Fig. 2 Deformed mesh for the deep-drawing process at the various punch heights.

Fig. 2 는 펀치행정이 5mm, 15mm, 25mm, 35mm 그리고 45mm일때의 박판이 변형되는 형상을 보여주고 있는데 블랭크홀더(blank-holder)와 다이(die)사이에서의 박판이 들림현상이나 박판이 펀치 안쪽으로 드로인(draw-in)되는 모습등을 자연스럽게 보여주고 있다.

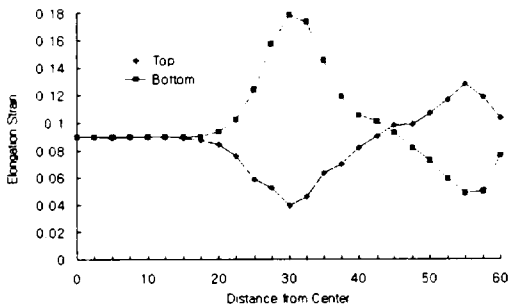


Fig. 3 Elongation Strain from Center.

Fig. 3은 펀치가 최종 45mm 이동했을때의 박판 상부(top)와 하부(bottom)의 신장변형율(elongation strain) 분포를 나타내고 있으며 수평축은 펀치 중앙에서 부터의 거리이다. 변형율분포에서 박판 상부와 하부의 변형율분포가 서로 다르게 나타나는 것은 펀치 곡률부위에서 박판 상부와 하부는 서로 압축과 인장을 받고 있으며 다이 곡률부위에서는 반대로 상부는 인장을 하부는 압축과정이 일어나기 때문이다. Fig. 3에서 박판 상부와 하부 변형율 모두 펀치 곡률부위와 다이 곡률부위에서의 급격한 변형율 분포를 잘 나타내고 있음을 알 수 있다.

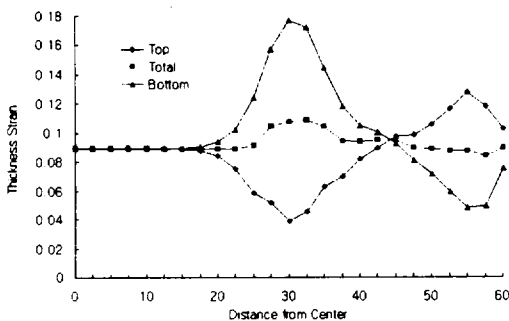


Fig. 4 Thickness Strain from Center.

Fig. 4 는 펀치가 최종 45mm이동했을때의 박판의 두께변형율(thickness strain)을 보여주고 있는데 역시 곡률부위에서 급격히 변하는 변형율(strain) 분포가 잘 나타나고 있으며 전체 박판 두께의 변형율 분포가 평균값으로 보여주고 있다. 이것은 박막해석과 쉘해석에 비해 좀더 정확하게 두께 변화를 알 수 있는 부분으로 정확한 두께변형율의 분포를 알기 위해서는 연속체 해석을 사용해야하는 이유이기도 하다.

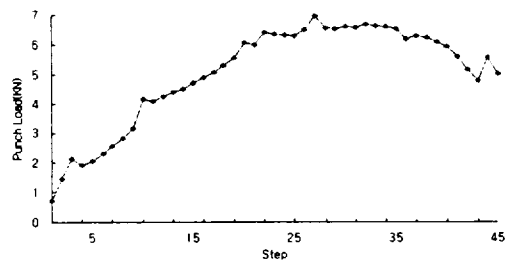


Fig. 5 Punch load for deep drawing.

Fig. 5 는 진행 스텝(step)에 따른 펀치하중의 변화량을 보여주고 있다.

IV. 결론

박판금속성형과정의 보다 정확한 해석을 위하여 강소성 2차원 연속체요소를 이용하여 덩드로잉과정을 해석하였으며 박판금속성형해석에서 중요한 두께변형율 분포를 보다 정확하게 얻을수 있었다. 또한 지금껏 많은 컴퓨터 계산시간과 방대한 기억용량으로 인하여 많은 연구가 이루어지지 않은 연속체요소를 이용한 해석이 최근 급속히 발전한 컴퓨터 하드웨어로 인해 앞으로 보다 정밀을 요하는 해석의 적용을 위해 연속체요소에 대한 많은 연구가 이루어지리라 생각한다.

참고문헌

- 1) E. Massoni, N. Soyris and J. L. Chenot, 1989 "Rigid-plastic deep drawing analysis with a

- 3-dimensional finite element modelisation". Proc. NUMIFORM'89 Conf., A.A. Balkema, Rotterdam, pp. 497.
- 2) T.Shimizu and T. Sano. 1995 "An application of a penalty method contact and friction algorithm to a 3-dimensional tlo surface expressed by a B-spline patch". Journal of Materials Processing Technology, Netherlands, Vol. 48, pp. 207.
- 3) Lee. D.W., 1997 "A rigid-plastic finite element formulation of continuum elements and its application to sheet metal working" Ph.D. Thesis. KAIST, pp. 12-31.
- 4) 이동우, 양동열. 1997 "연속체요소를 이용한 이방성 박판재료 성형공정의 강소성 유한요소해석". 한국소성가공학회 '97춘계학술대회 논문집, pp. 24-27.
- 5) K. Osakada, J.Nakano and K.Mori. 1982 "Finite element method for rigid-plastic analysis of metal forming formulation for finite deformation". Int.J. Mech. Sci., Vol. 24, pp. 459.