科學敎育
Journal of Science Education 16, 39-48, 1999

점성력과 쿨롱 마찰력이 작용하는 전자의 운동

김 규 용* · 문 철**·강 동 식*

The Pendulum Movement Influenced by Viscous Force and Frictional Force

Kyu Yong Kim, Chul Moon and Dong Shik Kang

Abstract

In the space with a medium of viscosity, an object moving back and forth through rough surface is resisted by the simultaneous operation of viscous force and Coulomb frictional force. While the amplitude of object under the influence of the viscous force decreases in the exponential shape, that of object under the influence of the viscous force and the Coulomb frictional force decreases in the linear shape.

In addition, as the value of α, a ratio between the restoring force and frictional force, changes the moving time of the object also changes accordingly. In case that the viscous force is smaller than the Coulomb frictional force, the damping term proportional to velocity will be enough to cover that movement. However, when the viscous force is so much than the Coulomb frictional force, and the resistance related to the size of the object couldn't be ignore, the another damping term should be added.

Ⅰ. 서 론

진자의 운동은 갈릴레오 시대뿐만 아니라 현재에도 다양한 호기심을 제공하고 있는 분야이다. 실제로 모든 역학 과정의 도입 부분에는 반드시 진자의 운동에 대한 논의를 포함하고 있으며, 여러 학술지에서 다양한 형태의 연구 결과를 심심치 않게 접할 수가 있다.

같은 시간 간격으로 되풀이되는 모든 운동을 주기운동이라고 한다. 주기운동을 하는 입자가 운동하는 경로마저 같을 경우, 이 운동을 진동이라고 한다. 이런 종류의 운동으로는 손목 시계의 태엽 바퀴의 진동, 바이올린 줄의 진동, 용수철에 매달린 물체의 진동, 분자나 혹은 고체 격자 내의 원자의 진동, 그리고 음파가 통과할 때 일어나는 공기 분자의 진동 등이 있다.

* 제주대학교 사범대학 과학교육과 교수
** 삼성여자고등학교 교사

이런 여러 가지 주기운동 중에서 일정한 주기를 갖고 단조화 운동을 하는 질량-용수철 계에서, 운동을 방해하는 힘이 없다는 이상적인 조건 하에서는, 진동이 무한히 계속한다. 그러나 물체의 운동을 방해하는 감쇠력이 작용하는 경우에는 운동 에너지를 소모시킴으로서 고정된 한계 사이를 왕복하지 않게 된다. 지금까지 행해진 많은 선행 연구들은 단진자에 대한 것 뿐 아니라 질량-용수철 계에 대한 여러 가지 감쇠 조건을 고려한 운동을 다루고 있다.

본 논문은 이상적인 단조화 운동에서 출발하여 실제 계에서 물체에 작용할 수 있는 여러 가지 감쇠력이 작용하는 좀더 실질적인 물체 운동에 대해 해석적인 방법으로 해를 구하고, 그래프[1]를 이용하여 해의 물리적 의미를 해석을 하는 데 그 목적이 있다.

Ⅱ. 장에서 속도에 비례하는 점성의 감쇠항을 갖는 조화진동의 논의를 복습할 것이다. 이 모델은 넓은 응용성과 수학적 해석의 용이함으로 인해 모든 교과서에 기본적으로 다루어진다.[2]

Ⅲ. 장에서 물체가 운동하는 지지대의 성질과 물체가 놓여 있는 수평면의 성질에 의존하는 경우 속도의 크기에 무관한 쿨롱의 감쇠력을 더해야만 할 필요성을 다루게 될 것이다. 이 계는 이상적인 용수철에 의하여 연결된 물체가 미끄럼 마찰력(쿨롱 감쇠)이 작용하는 수평면을 운동하고 있는 예로서, 이 계의 운동에 대하여 Lipidus[3]는 간단한 수학적 원리를 이용하여 쿨롱 마찰력이 작용하는 질량-용수철 계에 대한 미분 방정식의 해를 연구했고, Strobel 과 Barratt[4]에 의해서도 다루어졌다. Clark와 Swartz[5]는 수학적 원리를 사용하지 않고 개념적으로만 이 문제를 취급하고 있고, Peters와 Pritchett[6]는 쿨롱 마찰력이 적용되는 다양한 예를 보여주고 있다. 그리고 Nelson과 Olsson[7], 그리고 Squire[8]에 의해서도 연구되었으며, Symon[9]역학에는 연습문제로서 남겨져 있다.

Ⅳ. 장에서 속도에 비례하는 점성의 감쇠항과 쿨롱의 감쇠항이 동시에 물체의 운동에 영향을 줄 때 두 감쇠항의 비중에 따라서 운동이 어떻게 변화되는가를 다루게 된다. 점성력이 작용하는 질량-용수철 계의 시간에 대한 진폭 변화와, 쿨롱 마찰력 그리고 점성력과 쿨롱 마찰력이 동시에 작용하는 경우 진폭 감소의 변화를 논의하고, 쿨롱 마찰력에 의한 감쇠 그리고 점성력과 쿨롱 마찰력이 동시에 작용하는 질량-용수철 계의 $\alpha=\mu mg/(\kappa\chi_0)$ 값의 변화에 대한 물체 운동시간을 구하여 임의 시간에 대한 진폭의 변화를 취급하고자 한다.

Ⅱ. 점성력이 작용하는 질량-용수철 계의 운동

일정한 주기를 갖는 단조화 진동에서 진자의 운동을 방해하는 힘이 없다고 가정하면 용수철에 매달린 물체는 운동을 무한히 계속한다. 그러나 실제 세계에서 진동하는 모든 물체에 대해서 마찰이 없는 경우를 찾기란 쉽지가 않다. 공기 저항에 의한 마찰, 또는 점성이 있는 진자의 운동은 단조화 진동과는 다르다. 질량이 0 인 이상적인 용수철계에서 속도에 비례하는 감쇠 진동을 먼저 살펴보자. 그래서 질량-용수철 계의 모든 퍼텐셜 에너지는 용수철에 집중되어 있고, 용수철 내부 마찰에 의한 에너지 손실은 없다는 가정 하에서 다루게 된다.[10] 이러한 계의 감쇠 조화진자의 운동 방정식은 운동 제 2 법칙에 의하여 다음과 같이 주어진다.

$$m\ddot{x}=-kx-2\beta\dot{x} \qquad (1)$$

여기서 m은 진자의 질량, k는 용수철 상수, β

(>0)는 감쇠력의 세기를 결정하는 상수 그리고 x는 평형점으로 부터의 물체의 변위이다. 식(1)의 해는

$$\lambda=\beta/m\ ,\quad \omega_1=\sqrt{\omega_0{}^2-\lambda^2}\ ,\quad \omega_0=\sqrt{k/m} \qquad (2)$$

$$x(t)=A_0\,e^{-\lambda t}\cos(\omega_1 t+\theta) \qquad \omega_0{}^2>\lambda^2 \qquad (3)$$

$$x(t)=c_1\,e^{-\lambda_1 t}+c_2\,e^{-\lambda_2 t} \qquad \omega_0{}^2<\lambda^2 \qquad (4)$$

$$x(t)=(c_1+c_2 t)\,e^{-\lambda t} \qquad \omega_0{}^2=\lambda^2 \qquad (5)$$

여기서 λ는 감쇠 계수이고, $\omega_0/2\pi$는 비감쇠 진자의 자연 진동수이다.위 식들에서 A_0 c_1, c_2 $t=0$인 순간에 초기 조건들이다. 진동의 전체에너지 (=운동 에너지 + 위치 에너지) 는

$$E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2 \qquad (6)$$

이고, $\lambda\ll\omega_0$인 작은 감쇠의 경우에 대해서 $\omega_1\simeq\omega_0$로 놓을 수 있고, λ는 ω_0와 비교하여 무시할 수 있다. 식 (5)에 대응하는 에너지는 근사적으로

$$E\simeq\frac{1}{2}k\,A_0{}^2\,e^{-2\lambda t}=E_0\,e^{-2\lambda t} \qquad (7)$$

이 된다. 에너지의 시간 변화율 과 에너지의 비율을 보면 다음과 같다

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{dt}=\frac{d\ln E}{dt}=-2\lambda \qquad (8)$$

(8)식에서 에너지는 진폭이 감소하는 비율($-\lambda$) 보다 지수가 2배인 비율로 떨어짐을 알 수 있다. 즉 점성력이 작용하는 질량-용수철 계의 역학적 에너지는 시간이 경과함에 따라 감쇠 원인의 되는 물체들의 내부 열에너지로 전환되어 가는 것을 알 수 있다.

III. 쿨롱 마찰력이 작용하는 질량-용수철 계의 운동

일반적으로 물체가 움직일 때 접촉면과의 마찰은 속도에 비례하지 않는다. 마찰력은 정지 마찰력과 운동 마찰력이 있다. 정지 마찰력은 0에서 최대값까지 변하고 최대 정지 마찰력은 물체가 놓여 있는 표면의 수직항력에 비례한다. 또한 운동 마찰력은 수직항력과 표면의 거칠기에 비례하나 물체의 속도와 접촉면적과는 무관하다. 예로서 마찰계수가 있는 표면에서 미끄러지는 질량-용수철 계를 들 수 있다. 탄성계수를 갖는 용수철에 부착된 질량 m인 물체에 뉴턴의 운동 제 2 법칙을 적용하면,

$$m\ddot{x}+kx\pm\mu mg=0 \qquad (9)$$

로 쓸 수 있다. 처음에 질량 m은 평형점에서 A_0 만큼 떨어진 위치에 있고, 속력은 $\chi(0)=0$라고 움직인다고 하자. 물체는 평형점을 기준으로 하여 왕복 운동을 할 것이다. 최초의 위치A_0를 평형점의 오른쪽 방향으로 정하면 그 다음 물체의 운동 방향은 왼쪽 A_1, 다음 운동 방향과 위치는 오른쪽 A_2 순이 될 것이다. 이러한 진동을 연속적으로 나타내면 $A_0\,A_1\,A_2$,$A_2\,A_3\,A_4$,$A_4\,A_5\,A_6$,와 같이 표현될 것이다. 여기서 A_1,A_2,A_3,…는 운동의 전환점이다. 또한 A_1A_2는 $A_0\,A_1$와 A_1A_2같이 두 개의 운동으로 나눌 수 있는데 A_0A_1는 음의 방향의 운동을, A_1A_2는 양의 방향의 운동을 기술한다. 따라서 한 번의 진동은 두 개의 반 진동으로 이루어졌다고 볼 수 있다. 이러한 논의로부터 식(9)는 두 개의 방정식의 집합으로 볼 수 있다. 하나는 음이고 다른 하나는 양의 운동 방향을 표현하는 것이다. 이제 처음 반 진동은 $n=0$, 다음 반 진동은 $n=1$과 같은 식으로 번호를 부여하기로 하자.

최초의 물체의 위치 A_0를 양의 방향이라고 하면, 진자는 처음에($n=0$) 음의 방향으로 운동하게 된다. 그리고 그 후의 같은 방향의 모든 반 진동은 n=짝수가 된다. μmg 앞의 부호는 음의

방향의 반 진동에 대해서 양이 되고 $(-1)^n$으로 표현할 수 있다. 같은 방법으로 진자가 두 번째 반 진동에 대하여 양의 방향으로 운동하면 그 후의 같은 방향의 반 진동에 대해서 n=홀수가 된다. μmg 앞의 부호는 음이 될 것이고, 이 부호는 $(-1)^n$ 로 표현된다. 결과적으로 점성이 있는 매질에서 물체의 운동의 방정식은 다음과 같이 하나의 식으로 표현할 수 있다.

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + (-1)^n\mu mg = 0 \qquad (10)$$

여기서 n= 0, 1, 2,..., χ는 물체의 평형점에서 변위, 그리고 정지 마찰력은 오직 벽돌이 정지한 순간에만 작용하기 때문에 정지 마찰 계수와 운동 마찰 계수가 같다고 가정한다.

A_0을 포함한 운동의 전환점 A_1, A_2,...에서 $x=0$ 이기 때문에 각각의 반 진동은 $T/2$ 시간이 걸린다. 그래서 n번째 반 진동하는 시간 t는

$$t=\frac{nT}{2}+\tau \qquad 0\leq\tau\leq T/2 \qquad (11)$$

로 쓸 수 있다. 여기서 τ는 반 진동에서의 시간을 나타낸다. 식(11)은 진자가 $(n+1)$번째 반 진동 A_nA_{n+1}이 실행될 때를 나타내며, A_n은 $n+1$번째의 반진동의 초기순간($\tau=0$)의 전환점에 해당된다.

임의의 순간 t에서 변위 x를 n번째 반 진동 x_n이후의 운동의 변위 x_{n+1}로 나타내면 다음과 같다

$$x(t)=x(nT/2+\tau)=x_{n+1}(\tau) \qquad (12)$$

그리고 변위의 시간에 대한 일차 도함수와 이차 도함수는 $d\chi/dt=dx_{n+1}/d\tau$, $d^2\chi/dt^2=d^2\chi_{n+1}/d\tau^2$와 같이 변환된다. 이러한 결과들을 사용하면 식(10)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$m\ddot{x}_{n+1}(\tau) + kx_{n+1}(\tau) + (-1)^n\mu mg = 0 \qquad (13)$$

식(13)의 해를 구하기 위해서 다음과 같이 새로운 변수를 정의하는 것이 편리하다.

$$y_{n+1}(\tau) = x_{n+1}(\tau) + (-1)^n\frac{\mu mg}{k} \qquad (14)$$

$$\dot{x}_{n+1}(\tau)=\dot{y}_{n+1}(\tau) \qquad (15)$$

그러면 미분 방정식(13)은 다음과 같이 조화진동자에 대한 방정식으로 치환될 것이다.

$$\ddot{y}_{n+1}(\tau) + \omega_0^2 y_{n+1}(\tau)=0 \qquad (16)$$

여기서

$$n=[\omega_0 t/\pi]\geq 0 \qquad (17)$$

은 완성된 반진동 횟수를 나타내고, $\omega_0=2\pi/T$는 자연 진동수를 나타낸다. 따라서 해는

$$y_{n+1}(\tau)=A_{n+1}\cos\omega_0\tau \qquad (18)$$

이 된다. 여기서 A_{n+1}은 임의의 순간에 감쇠하는 진동의 진폭을 의미한다. 이 식을 $\chi_{n+1}(\tau)$에 대한 식으로 변환하면 다음과 같다.

$$x_{n+1}(\tau)=A_{n+1}\cos\omega_0\tau - (-1)^n\frac{\mu mg}{k} \qquad (19)$$

식(18)이 물리적 의미가 있는 해가 되기 위해서는, 초기의 위치 A_0가 주어졌을 때 임의의 순간의 진폭 A_{n+1}에 대한 식을 알아야만 한다. 반진동 사이의 경계조건

$$x_{n+1}(0)=x_n(T/2) \qquad (20)$$

을 (17)식에 대입하면 임의의 순간에 대한 진폭을 다음과 같이 점화식 형태로 나타낼 수 있다.

$$A_{n+1}=-A_n+(-1)^n\frac{2\mu mg}{k} \qquad (21)$$

여기에서 n=1, 2, 3…이다. n=1에 대한 식을 나타내 보면

$$A_2=-A_1+(-1)^1\frac{2\mu mg}{k} \qquad (22)$$

와 같이 주어지고, (22)식에서 A_1은 초기조건 $x_1(0)=A_0$을 (19)식에 대입하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x_1(0)=A_1-\frac{\mu mg}{k}=A_0 \qquad (23)$$

여기서 $\alpha=\mu mg/(kA_0)$ 라 놓고 정리하면

$$A_{n+1}=(-1)^n A_0[1-(2n-1)\alpha] \qquad (24)$$

이 되고, 따라서 임의 순간의 변위에 대한 완성된 해는

$$x_{n+1}(t)=(-1)^n A_0([1-(2n-1)\alpha]\cos\omega_0 t + \alpha) \qquad (25)$$

이 된다. $\alpha\to 0$인 극한에서 식(25)은 비감쇠 단진자 운동에 대한 식으로 나타남을 쉽게 확인할 수 있다.

쿨롱 마찰력이 있는 물체의 운동은 마찰력에 의하여 결국 정지하게 되므로 정지하기 전후에 대하여 경계점을 정할 필요가 있다. 마찰력에 의하여 물체의 변위는 작아져 가고 따라서 복원력도 작아져 간다. 용수철의 복원력과 마찰력이 같아지는 변위를 임계변위 x_c라 하면 이 임계변위가 경계점에 해당되며 다음 식으로 표시할 수 있다.

$$x_c=\left(\frac{\mu mg}{kA_0}\right)A_0=\alpha A_0 \qquad (26)$$

그리고 운동의 처음 j번째 반 회전 동안의 퍼텐셜 에너지의 손실은 마찰에 의하여 한 일과 같으므로

$$\frac{1}{2}k\,x_{j-1}^2-\frac{1}{2}k\,x_j^2=\mu mg(x_{j-1}-x_j) \qquad (27)$$

와 같고 이를 정리하면 다음 식을 얻을 수있다.

$$(x_{j-1}+x_j)=2\mu mg/k=2\alpha x_0 \qquad (28)$$

여기서 χ_j은 처음 반 진동 후의 변위로 (25)식을 사용하면 χ_0와는 다음과 같은 관계가 있음을 알 수 있다.

$$x_j=-(-1)^j(1-2\alpha j)\,x_0 \qquad (29)$$

(27), (28), (29)식에서 j = 1, 2, 3,…이다. $x=x_n$에서 물체가 정지한다고 가정하면 임계변위는 다음 식을 만족시켜야 한다.

$$|x_n|\le x_c<|x_{n-1}| \qquad (30)$$

(29)식과 (30)식을 이용하면 n과 α사이 관계식을 얻을 수 있다

$$(1-\alpha)/2\alpha\le n<(1+\alpha)/2\alpha \qquad (31)$$

이 식으로부터 진동의 횟수 n은 α 값에 영향을 받는다는 것을 알 수 있다. 따라서 (28)식, (29)식과 (31)식을 이용하면 진자의 최종 위치를 얻을 수 있다.

쿨롱 마찰력이 있는 표면에서 질량-용수철 계의 운동에 대하여 $A_0=0.44$m, $T_0=1.23$s, $\alpha=0.03718$일 때 변위의 시간에 대한 변화는 그림 1에서 확인할 수 있다. 그래프에서 진폭이 양에서 음으로 진행할 때는 변위의 변화가 부드럽게 진행되는 데 반하여 음의 진폭에서 양의 진폭으로 진행할 때는 갑자기 변하는 것을 확인할 수 있다. 그 이유는 식 (16)의 진동의 횟수 n이 가우스 기호로 정의되어 이 식이 포함된 미분 방정식이 그 영향을 받기 때문이다.

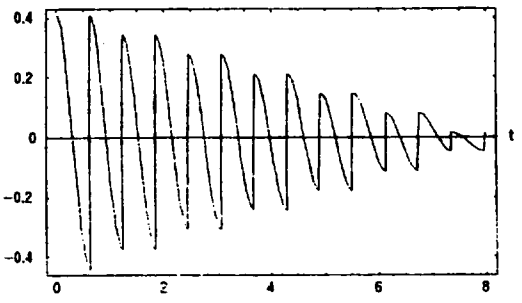

그림 1. $A_0=0.44$m, $T_0=1.23$s, $\alpha=0.03718$일 때 쿨롱 마찰력에 의한 질량-용수철 계의 그래프

진동의 주기는 진폭에 무관하기 때문에, 전체 운동 동안 경과된 시간은 운동이 일어나는 진동의 수에 의해서 결정된다. α의 값에 따른 주기를 구해보면 $1/2 \leq = \alpha < 1$ 일 때 $t = T/4$, $1/3 \leq = \alpha < 1/2$일 때 $t = T/2$이고 일반적으로

$$1/(n+1) \leq \alpha < 1/n \text{일 때 } t = nT/4 \qquad (32)$$

으로 α값이 작아 질수록 운동이 지속된 시간이 길어짐을 알 수 있다. 말하자면 작은 α의 값에 대하여는 진동의 수가 커지고, 평형점에서 정지하게 되기까지는 오랜 시간이 걸린다. 식(32)으로부터 α값에 따른 진동의 횟수 n값이 결정되고, n값에 따라 진동시간이 정해지므로 물체가 운동하는 시간을 측정할 수 있다. $A_0 = 0.44$ m, $T_0 = 1.23$s에서 $\alpha = 0.03718$에 대하여 2α, 3α 일 때, 임의의 시간 t에 대한 변위 χ의 변화를 그림 2에서 확인할 수 있다.

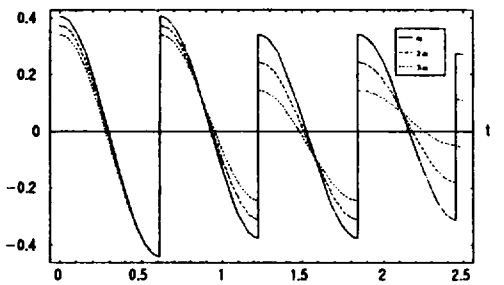

그림 2. $A_0 = 0.44$ m, $T_0 = 1.23$ s, $\alpha = 0.0371$ 일 때 쿨롱 마찰력이 작용하는 질량-용수철 계의 α의 값에 대한 진폭의 감쇠 비교

다음으로 쿨롱 마찰력이 작용하는 질량-용수철 계의 에너지 변화에 대해서 알아보자. 속도에 무관한 감쇠가 있는 진자의 운동 동안 계의 전체에너지 손실은 다음과 같이 구할 수 있다. 질량 m인 물체가 움직인 전체거리는

$$s_n = x_0 + \sum_{j=1}^{n-1} 2|x_j| + |x_n| \qquad (33)$$

에 의해서 주어진다. (33)식에서 우변의 두 번째 항의 계수 2는 진자의 왕복 운동에 의한 값이고, 세 번째 항은 물체가 정지한 n값에 대한 변위이다. (29)식으로부터 $|\chi_j| = (1-2\alpha_j)\chi_0$을 (33)식에 대입하여 전체거리를 구하면

$$s_n = 2n(1-\alpha n)x_0 \qquad (34)$$

가 된다. 초기 에너지를 $E_0 = k\chi_0^2/2$으로 놓으면 에너지 손실 비율은 다음과 같다

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\mu mg s_n}{\frac{1}{2}k x_0^2} = \frac{2\alpha s_n}{x_0} = 4\alpha n(1-\alpha n) \qquad (35)$$

에너지 손실 비율은 n 값에 따라 변하고 있다는 것을 알 수 있다. 그림 3은 $\alpha = 0.03718$m 일때 n값에 대한 쿨롱 마찰력이 작용하는 질량-용수철 계의 $\Delta E/E_0$의 변화를 나타낸 그래프이다. 진동이 진행될수록 최초의 물체가 갖고 있던 에너지는 마찰에 의하여 한 일로 전부 전환되어 에너지 손실 비율이 1이 됨을 알 수 있다.

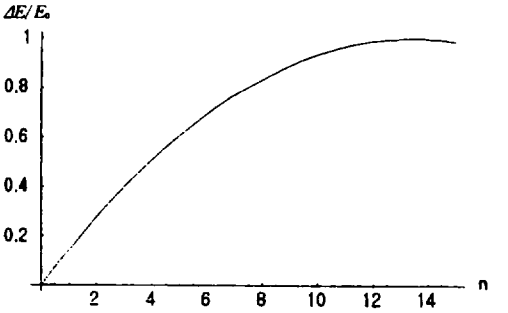

그림 3. 쿨롱 마찰력이 작용하는 질량-용수철의 에너지 변화

Ⅳ. 점성력과 쿨롱 마찰력이 작용하는 질량-용수철 계의 운동

위에서 우리는 속도에 비례하는 감쇠항(점성력) 또는 속도와는 무관한 감쇠항(쿨롱 마찰력)

을 고려한 단조화 운동에 대하여 살펴보았다. 두 가지 감쇠항이 모두 작용하는 진자 운동은 감쇠항이 없는 단조화 운동에 비교하여 조금 더 실제적인 물체의 운동에 접근한다고 간주할 수 있다. 그러면 이 두 가지 감쇠항이 운동하는 물체에 동시에 작용하는 경우에 앞에서 고찰한 여러 가지 결과들에 어떤 변화가 일어나겠는가? 물리학의 실험 과정 대부분이 미끄럼 마찰이 있고 점성의 매질이 없는 경우나 또는 점성의 매질이 있고 미끄럼 마찰이 거의 없는 경우를 연구한다는 점을 고려하면 이러한 의문은 실제 세계의 물체의 운동을 이해하는데 매우 유용한 해답을 줄 것이다.

속도 비례 감쇠와 속도에 무관한 감쇠가 동시에 일어날 수 있는 유사한 상황은 미끄러지는 질량-용수철 계의 조화 진동이다. 질량 m인 물체가 힘의 상수가 k인 이상적인 용수철에 연결되어 마찰계수가 μ인 수평면을 속도에 비례하는 점성매질의 저항을 받으면서 진동하는 경우를 생각하자. 이 용수철 계의 운동의 방정식은 다음과 같다.

$$m\ddot{x}=-2\beta\dot{x}-kx\pm\mu mg \qquad (36)$$

여기서 우변의 첫 번째 항은 점성력, 두 번째 항은 복원력, 세 번째 항은 미끄럼 마찰력 그리고 β, k, μ는 모두 상수이며 양의 값을 갖는다. (12)식에서처럼 변수들을 정의하면 식(36)은

$$m\ddot{x}_{n+1}(\tau) = -2\beta\dot{x}_{n+1}(\tau) - kx_{n+1}(\tau) \pm \mu mg \qquad (37)$$

이 된다. 마찬가지로 마찰력 앞에 있는 부호를 $(-1)^n$으로 나타내면 (37)식의 두 개의 방정식은 다음과 같이 하나의 식으로 줄일 수 있다.

$$\ddot{x}_{n+1}(\tau)+2\lambda\dot{x}_{n+1}(\tau)+\omega_0^2 x_{n+1}(\tau)+(-1)^n\mu g=0 \qquad (38)$$

여기서 $n = 0, 1, 2,\cdots$,(40)식은 (14)식을 이용하여 다시 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\ddot{y}_{n+1}(\tau)+2\lambda\dot{y}_{n+1}(\tau)+\omega_0^2 y_{n+1}(\tau)=0 \qquad (39)$$

(39)식의 일반해는

$$y_{n+1}(\tau) = \left(\frac{B_{n+1}}{\cos\phi}\right)[\exp(-\lambda\tau)]\cos(\omega\tau-\phi) \qquad (40)$$

이 된다. 여기서 $\omega^2=\omega_0^2-\lambda^2$, B_{n+1}은 임의의 순간에 감쇠 진폭, $\cos\phi$는 초기 조건으로부터 결정되는 상수이다. (14)식으로부터

$$x_{n+1}(\tau)= \left(\frac{B_{n+1}}{\cos\phi}\right)[\exp(-\lambda\tau)]\cos(\omega\tau-\phi) + (-1)^n\frac{\mu mg}{k} \qquad (41)$$

와 같이 표현할 수 있다. B_{n+1}을 구해기 위해서 n=0일 때 초기 조건 $x_1(0)=A_0$)0 그리고 $\dot{x}_1(0)$ =0을 식(41)에 대입하여 정리하면

$$B_1= A_0-\frac{\mu mg}{k}\ ,\ \cos\phi=\frac{T_0}{T} \qquad (42)$$

이 된다. 여기서 $T_0=2\pi/\omega_0$, $T=2\pi/\omega$ 그리고 $\tan\phi=\lambda/\omega$이다. 진자의 진동은 연속적이어야 하므로 다음 조건을 만족시켜야 한다

$$x_{n+1}(0)= x_n(T/2) \qquad (43)$$

이 식과 (41)식으로부터 감쇠 진폭 B_n에 대한 점화식을 얻을 수 있다.

$$B_{n+1}=-B_n\exp\left(\frac{-\lambda T}{2}\right)-2(-1)^n\left(\frac{\mu mg}{k}\right) \qquad (44)$$

그리고 (42)식을 변형하여 초기의 감쇠 진폭 B_1에 대한 식을 다음과 같이 정리하자.

$$B_1=\left(A_0+\frac{\mu mg}{k}\right)-2\left(\frac{\mu mg}{k}\right) \qquad (45)$$

위의 (44)식과 (45)식을 이용하여 B_{n+1}에 대한 일반적인 표현을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$B_{n+1} = (-1)^n\left(A_0+\frac{\mu mg}{k}\right)\exp\left(\frac{-\lambda nT}{2}\right) - (-1)^n\frac{2\mu mg}{k}\sum_{j=0}^{n}\exp\left(\frac{-\lambda jT}{2}\right) \quad (46)$$

식을 간단히 하기 위하여 $\alpha=\mu mg/(kA_0)$, $\gamma=\lambda T/2$로 놓으면 $B_{n+1}=(-1)^n A_0[(1+\alpha)\exp(-\gamma n)-2\alpha\sum_{j=0}^{n}\exp(-\gamma j)]$ (47)

이 된다. (47)식을 (41)식에 대입하여 정리하면 해는 다음과 같다.

$$x_{n+1}(\tau) = (-1)^n A_0[(\frac{T}{T_0})\{(1+\alpha)\exp(-\gamma n) -2\alpha\sum_{j=0}^{n}\exp(-\gamma j)\}\exp(-\lambda\tau)\cos(\omega\tau-\phi)+\alpha] \quad (48)$$

이 식은 마찰력 $(-1)^n\mu mg$ 크기에 상관없이 임의의 시간 t에 대한 진자의 위치를 나타낸다. 그러나 마찰력 $(-1)^n\mu mg$의 물체의 운동을 방해하는 성질 때문에 물체의 운동에 대한 마찰력의 영향을 나타내는 어떤 조건을 도입해야할 필요가 있다.

진자가 멈추기 전에 지나가는 마지막 전환점을 b_n라고 하면, 이 경우에 $kb_n>\mu mg$와 $kb_{n+1}\leq=\mu mg$의 관계가 성립한다. 여기서 $b_n=|x_{n+1}(0)|$이고, $b_{n-1}=|x_{n-2}(0)|$이다. 이 부등식과 $\sum_{j=0}^{n}\exp(-\gamma j)$이 기하학적인 급수의 합이라는 사실로부터 n에 대한 다음 조건식을 얻을 수 있다.

$$\delta/\gamma-1\leq n<\delta/\gamma \quad (49)$$

여기서 $\delta=\log\{[1+\exp(-\gamma)]/2+[1-\exp(-\gamma)]/(2\alpha)\}$, n은 진자가 정지하기 전 완성된 반진동의 횟수를 나타낸다.

그리고 식(48)으로부터 유도할 수 있는 다음과 같은 유용한 표현을 얻을 수 있다.

$$\frac{|x_{n+1}(\tau)|-|x_{n+2}(\tau)|}{|x_1(\tau)|-|x_2(\tau)|}=\frac{|x_{n+1}(\tau)|-|x_{n+3}(\tau)|}{|x_1(\tau)|-|x_3(\tau)|}=\exp(-\gamma n) \quad (50)$$

$\tau=0$ 이라고 하면 결과는 다음과 같다.

$$\frac{b_n-b_{n+1}}{b_0-b_1}=\frac{b_n-b_{n+2}}{b_0-b_2}=\exp(-\gamma n) \quad (51)$$

여기서 $b_0-b_2=b_0\{[1-\exp(-2\gamma)]+\alpha[1+\exp(-2\gamma)]^2\}$ (52)

이다. (b_0-b_1)에 대한 유사한 표현은 식(48)으로부터 구할 수 있다. 비록 연속되는 진폭의 차가 점성 마찰력과 쿨롱 마찰력에 의존하지만 (51)식으로부터 이러한 차와 초기값 사이 비율은 쿨롱 마찰과 무관하고 점성 마찰에만 관계된다는 것을 알 수 있다. T를 실험적으로 측정하고 얻은 자료와 식(51)에 의하여 점성 마찰의 상수 λ의 값을 구할 수 있으며, 이 값을 다시 식(52)에 사용하면 μ의 값 역시 찾을 수 있다.

이제 점성력이 작용하는 경우, 쿨롱 마찰력이 작용하는 경우, 그리고 점성력과 쿨롱 마찰력이 동시에 작용하는 질량-용수철 계의 변위와 시간에 대한 지금까지의 결과들을 그래프를 그려서 비교 분석하여 보기로 하자.

그림 4는 $T_0=1.23$s, $T=1.88$s, $\lambda=0.042^{-1}$, $\alpha=0.03718$, $A_0=0.44$m일 때 쿨롱 마찰력과 점성력이 작용하는 질량-용수철 계의 물체 운동에 대한 그래프이다. 쿨롱 마찰력이 작용하는 물체의 운동에 대한 그래프 그림2와 거의 같은 모양인데 진폭 감쇠 시간이 쿨롱 마찰력만 작용하는 경우보다 빠르다는 것을 알 수 있다.

그림 5는 쿨롱 마찰력과 점성력이 동시에 작용하는 경우에 α값에 따른 물체의 운동에 대한 비교 그래프이다. α값이 주어지면 δ값이 결정되고, 또한 n값이 결정되므로 (49)식을 이용하여 물체의 운동 시간을 얻을 수 있다. α의 값이 증가함에 따라 물체의 운동시간이 점점 감소하여 진폭의 감쇠가 선형으로 진행됨을 알 수 있다.

그림 6은 점성력이 작용하는 경우, 쿨롱 마찰

력이 작용하는 경우, 그리고 점성력과 쿨롱 마찰력이 동시에 작용하는 질량-용수철 계의 변위와 시간에 대한 그래프를 비교한 것이다. T_0 = 1.23s, T=1.88s, α=0.03718, A_0=0.44m, λ=0.042s^{-1}인 동일한 조건에서 시간에 따른 변위의 감소는 점성력과, 쿨롱 마찰력 그리고 두 힘이 동시에 작용하는 경우의 순서로 진행되고 있다.

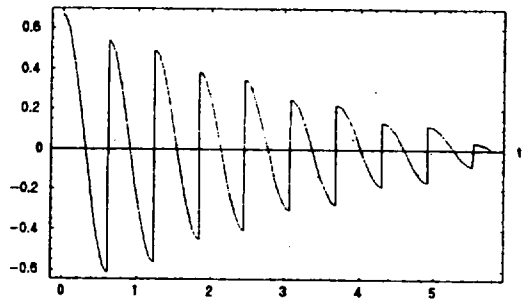

그림 4. T_0=1.23 s, T=1.88 s, λ=0.042s^{-1}, α=0.03718, A_0=0.44 m일 때 점성력과 쿨롱 마찰력이 동시에 작용하는 질량-용수철 계의 운동에 대한 그래프

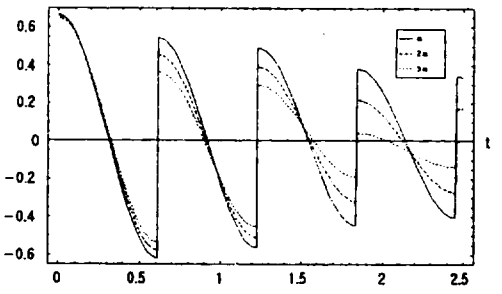

그림 5. T_0=1.23 s, T=1.88 s, λ=0.042s^{-1}, α=0.03718, A_0=0.44m 일 때 쿨롱 마찰력과 점성력이 동시에 작용하는 질량-용수철 계의 α의 값에 대한 진폭의 감쇠 변화그래프

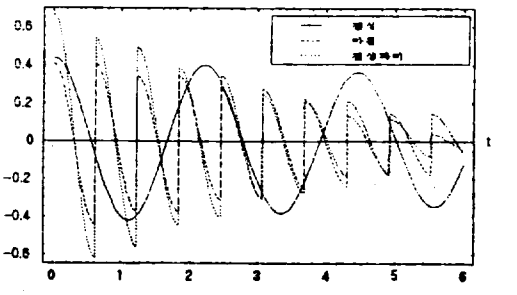

그림 6. T_0=1.23 s, T=1.88 s, λ=0.042s^{-1}, α=0.03718, A_0=0.44 m일 때 세 가지 감쇠 모형에 대한 비교 그래프

V. 결 론

점성력, 쿨롱 마찰력, 점성력과 쿨롱 마찰력이 있는 질량-용수철 계의 진폭 변화를 해석적으로 구하여 그래프를 이용해서 비교해 보았다..

1. 점성력이 작용하는 질량-용수철계의 시간에 대한 진폭 변화는 지수적으로 감소하는 데 비하여, 쿨롱 마찰력, 점성력과 쿨롱 마찰력이 동시에 작용하는 질량-용수철 계의 진폭 변화는 선형으로 감소한다는 것을 확인할 수 있었다.

2. 쿨롱 마찰력, 점성력과 쿨롱 마찰력이 작용하는 질량-용수철 계에서 마찰계수가 주어진 경우 진폭은 시간의 함수로 구할 수 있다. 마찰계수가 증가함에 따라서 진동의 횟수는 감소하여 전체 운동의 시간도 감소하여 진폭이 감쇠하는 정도가 점점 빠르게 진행하고 있음을 알 수 있었다.

3. 점성력이 작용하는 경우, 쿨롱 마찰력이 작용하는 경우, 그리고 점성력과 쿨롱 마찰력이 동시에 작용하는 질량-용수철 계의 변위와 시간에 대한 그래프를 비교하면 동일한 조건에서 세 가지 감쇠력의 시간에 대한 변위의 감소는 점성력과, 쿨롱 마찰력 그리고 두 힘이 동시에

작용하는 감쇠력의 순서로 빨리 진행되고 있다.

4. 점성 매질이 있는 감쇠, 물체가 운동하는 표면의 마찰에 의한 감쇠, 이 두 가지 감쇠가 동시에 작용하는 경우에 물체는 동일 조건에서(같은 질량, 같은 용수철) 한 종류의 감쇠만 작용하는 경우에 비해 더 큰 저항을 받으므로 정지하는데 걸리는 시간은 보다 빨라지게 된다. 이것은 감쇠항에 대하여 동일한 조건을 주었을 때 같은 시간에 진폭이 감쇠하는 정도를 그래프를 이용하여 확인할 수 있다.

현실적으로는 이들 세 가지 감쇠력만을 가지고 진동하는 진자의 운동이 완벽하게 해결되지는 않는다. 점성의 매질 속에서 진동하는 진자는 속도에 비례하는 감쇠력 뿐만 아니라 속도의 제곱에 비례하는 감쇠력도 가질 수가 있다. 속도의 제곱에 비례하는 감쇠력을 추가하면 운동의 방정식은 비선형 미분 방정식이 되어 수학적으로 쉽게 해결되지는 않을 것이다. 그러나 속도의 제곱에 비례하는 감쇠력을 추가함으로써 보다 실제 계에 가까운 진자의 운동을 해석할 수 있을 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

1) S. Wolfram, MATHEMATICA 3.0 (Wolfram Research).

2) K. Symon, Mechanics (Addison Wesley, Reading, MA,1971) 3rd, problem 54, pp.46−50.

3) I. Ripidus, "Motion of Haromonic Oscillator With Sliding Friction", Am. J. Phys. 38, 1360−1361(1970).

4) C. Barratt and G. L. Strobel, "Sliding friction and the harmonic oscillator", Am. J. Phys. 49, 500(1981)

5) C. Clark and C.Swartz, "Analytic Solution for the oscillator with classical friction", Phys. Teach. 34, 550−554(1996).

6) Randall D. Peters and T. Pritchett, "The not-so-simple harmonic oscillator", Am.J. Phys. 65, pp. 1067−1073(1997)

7) Robert A. Nelson and M. G. Olsson, "The Pendulum Rich Physics from a simple system", Am. J. Phys. 54, pp.112-121 (1986)

8) Patrick T. Squire, "The Pendulum damping", Am. J. Phys. 54, pp 984−991 (1986)

9) K. Symon, Mechanics (Addison Wesley, Reading, MA,1971) 3rd, problem 54, pp.70

10) 김종오 譯 (D. Halliday and R. Resnick 저), 물리학 총론, 교학사, pp.337−338(1987).