科學敎育, 11, 111~118, 1994
Journal of Science Education
11, 111~118, 1994

2차원 Dilaton-중력 이론의 표준 양자화

강동식* · 강정우* · 박규은*

Canonical Quantization of the 2-dimensional Dilaton-Gravity Theory

Kang Dong-Shik* · Khang Jeong-Woo* · Park Kyu-Eun.*

Abstract

The quantization of the 2-dimensional Dilaton-Gravity theory on a compact spatial section is carried out in a canonical method.

The wave function is obtained for a homogeneous & isotropic universe.

I. 서 론

2차원 중력이론은 주로 두 측면에서 연구의 대상이 되고 있다. 첫째로, 초현이론(Superstring theory)의 기본 단위인 닫힌 현의 운동 궤도가 2차원 세계 면(world sheet)을 이루고 있으며, 이 2차원 세계면의 동력학은 2차원 중력이론으로 기술된다. 따라서 2차원 중력이론에 대한 연구는 초현이론을 통해서 실제 세계와 관련을 가지게 된다. 두번 째로, 현재 연구되고 있는 4차원 중력 이론은 기술적 차원에서 많은 어려움을 지니고 있다. 양자 우주론에서 초기 조건에 대한 문제는 중력 이론이 양자화가 이루어지지 않음으로 인해서 해결이 되질 않고 있다. 2차원 중력이론에서 양자화가 이루어진다면 이를 토대로 4차원 양자 중력이론이 갖추어야 할 특성들을 유추해 볼 수 있을 것이다.

다른 문제로서 4차원 중력이론에서 중요하게 취급되는 black hole 이론이 있다. 양자적으로 볼때 black hole로 사라진 정보는 black hole의 호킹 복사(Hawking radiation)를 통해서 다시 되돌아 오는가 하는 문제이다. 이는 양자역학의 기본 개념과 깊이 관련이 되는 문제로 4차원 중력 이론에서 쉽게 해결되지 않고 있다. 2차원 중력이론으로 제시된 CGHS[1] 모델은 많은 연구에 의해 해가 발견되었으며, 따라서 위에 제시된 문제들에

* 제주대학교 사범대학 과학교육과

대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 본 논문에서는, CGHS 모델의 제시하는 고전적 또는 준 고전적(semiclassical) [2] 해와는 별도로, 양자화 과정을 통해서 파동함수를 구하고자 한다. 제2절에서는 작용과 Hamiltonion, 제3절에서는 표준 양자화 과정을 통해서 파동함수를 구하고, 마지막 절에서는 요약 및 고찰을 할 것이다.

Ⅱ. Hamlltonion

2차원 중력이론은 2+1 중력이론과 3+1 중력이론에 비해 매우 간단하며, 보다 고차원적인 중력이론을 양자화할 때 나타나는 여러 문제들에 대해 해결의 실마리를 제공할 수 있을 것으로 여겨지고 있다. 특히 black hole 증발시에, 이전에 흡수된 정보가 모두 회복이 되는지에 대한 해결 방법을 제시하고 있는 것으로 생각되며[3] 현재 이부분에 대해서 집중적으로 연구가 되고 있다.

Jackiw와 Teitelboim[4]은 우주상수를 포함하는 진공에서의 Einstein방정식과 유사한 방정식을 제안했다.

$$R + \frac{\Lambda}{2} = 0 \tag{1}$$

이 방정식은 여러가지 이론으로 부터 유도될 수 있으며, 특히 dilaton $\phi(x)$를 국소적으로 도입하면 다음과 같은 작용으로 부터 유도 될 수 있다.

$$S = \frac{1}{2}\int d^2x\sqrt{-g}\,(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + 2R\phi + \Lambda) \tag{2}$$

Arnowitt-Deser-Misner[5] (=AMD) 공식화를 이용하여 작용(2)로 부터 Hamiltonion들을 결정하고 Hamiltomion 대수(algebra)가 Schwinger항을 포함하는지 아닌지를 확인할 것이다. 이차원 계량 텐서를 AMD 공식화에 따라서 재매개 변수화(reparametrization)하면

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -N^2+N_1N^1 & N_1 \\ N_1 & a^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

로 주어진다. 여기에서 N와 N^1은 각각 경과 함수(lapse function), 이동 함수(shift function)이고 a^2은 척도 인자(scale factor)로서 공간의 팽창 정도를 나타낸다.

작용을 표준 형태(canonical form)로 나타내기 위해서 2차원에서의 곡률 스칼라(curvature scalar)를 사용한다.

$$\sqrt{-g}R = -2\frac{\partial}{\partial t}(aK) + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(aKN^1 - \frac{1}{a}\frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{4}$$

여기에서 K는 외부곡률 스칼라 (extrinsic curvature scalar)로서

$$K=\frac{1}{a^2N}\left[\ \frac{\partial}{\partial x}(aN^1)-\frac{\partial a}{\partial t}\right] \tag{5}$$

와 같이 주어진다. 작용(2)에 식(3), (4), (5)를 이용하면 표준 형태의 작용은

$$S=\int d^2x\ (P_a\dot{a}+P_\phi\dot{\phi}-NH-N^1H_1) \tag{6}$$

으로 표현되며, P_a, P_ϕ는 a와 ϕ에 대응되는 표준 운동량들이고, $H(x)$와 $H_1(x)$는 각각 초운동량(super-momentum) 구속 조건, Hamitonion구속 조건들로서 다음과 같다.

$$P_a=\frac{2}{N}\left(N^1\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial t}\right), \tag{7}$$

$$P_\phi=\frac{a}{2}P_a+\frac{2}{N}\left(\frac{\partial}{\partial x}(aN^1)-\frac{\partial a}{\partial t}\right), \tag{8}$$

$$H(x)=\frac{1}{8}a\,P_a^{\ 2}-\frac{1}{2}P_aP_\phi-\frac{1}{2a}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2-\frac{\Lambda}{2}a+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right), \tag{9}$$

$$H_1(x)=P_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}-a\frac{\partial P_a}{\partial x}\ . \tag{10}$$

초운동량과 Hamiltonion 사이의 Poisson bracket을 계산해 봄으로서 이들이 1차 구속조건인지 아니면 2차 구속 조건인지를 알 수 있다. 만약 Poisson bracket을 계산해서 Schwinger항이 결과로서 나타나면 고전적으로 이들을 영이 되도록 할 수 없으며, 따라서 작용도 표준 변수(canonical variable)들의 변환에 대해 불변이 되지 않는다[6]. 이들의 Poisson bracket을 계산하면

$$\{H_1(x),H_1(x')\}=(H_1(x)+H_1(x'))\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x')\ , \tag{11}$$

$$\{H(x),H(x')\}=\left(\frac{1}{a^2(x)}H_1(x)+\frac{1}{a^2(x')}H_1(x')\right)\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x')\ , \tag{12}$$

$$\{H_1(x),H(x')\}=(H(x)+H(x'))\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x')$$

로서 계수 $k^{\rho}_{\mu\nu}(x,x';x'')$가 계량 텐서의 성분들을 포함한다. 따라서 작용이 표준 변수들의 변환에 대해 불변이 되기 위해서는

$$H(x) \approx 0 \tag{14}$$

$$H_1(x) \approx 0 \tag{15}$$

를 만족 해야 한다. 이러한 결과는 물론 Schwinger항이 나타나지 않으므로서 얻어진 것이다. 고전적으로 식(14)를 만족시키는 표준 변수들은, P_ϕ를 제외하고, 공간 좌표 x과 무관하며, P_ϕ 역시 작용에 나타나는 공간좌표에 대한 적분결과를 P_ϕ로 재정의 하면 P_ϕ 역시 x에 무관한 표준 변수로 다룰 수 있다. 이는 처음부터 균일하고 등방적인 계량 텐서와 dilaton장을 가정하면 얻어지는 결과와 같으며 다음 절에서 구체적을 제시된다.

Ⅱ. 양자화 및 파동 함수

균일하고 등방적 계량 텐서와 dilaton장을 가정하면 표준 변수들의 공간 미분은 영이 되며, 작용과 표준 운동량, 구속 조건들에서 이들의 공간 미분 항들을 제거시킬 수 있다. 따라서 균일하고 등방적 우주에 대해서 식(7), (8), (9), (10)을 다시 쓰면,

$$P_a = -\frac{2}{N}\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{16}$$

$$P_\phi = \frac{a}{2}P_a - \frac{2}{N}\frac{\partial a}{\partial t} \tag{17}$$

$$H(x) = \frac{1}{8}a\,P_a{}^2 - \frac{1}{2}P_aP_\phi - \frac{\Lambda}{2}a \tag{18}$$

$$H_1(x) = 0 \tag{19}$$

로 표현되며, $H_1(x)$식은 사라져 버린다. 이는 곧 $H_1(x)$식을 사용하여 표준 변수들에 대한 함수 형태를 제한하고, 이 결과들을 P_a, P_ϕ, $H(x)$에 사용 했음을 의미하며, 앞절 끝부분에 언급한 바이다.

양자화로서 Dirac의 방법[7]을 적용하면, 먼저 표준 운동량 P_a, P_ϕ을 각각 $-i\partial/\partial a$, $-i\partial/\partial\phi$ 연산자로 치환하고 식(18)을 파동함수 $\Psi(a, \phi)$에 연산시킨다. 중력 이론은 매개변수 t에 상관없으므로 Schrödinger 방정식은

$$\left(-\frac{1}{8}a\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \gamma\frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{\Lambda}{2}a\right)\Psi(a,\phi) = 0 \tag{20}$$

으로 주어지고, 이때 나타나는 γ항은 중력 이론이 양자화 과정에서 나타나는 normal-ordering 문제와 관련된다. 이는 식(19)에서 a와 P_a을 연산자로 표현해서 곱할 때 어떤 순서로

할 것인가 하는 문제로, 일반적인 해결 방법은 없으며, 사용하는 모델에 따라서 부분적으로 해결되곤 한다. 여기서 다루는 모델(식(2)에서는 표준 변환을 이용하여 식(20)에 나타나는 r항을 제거할 수 있으나, 이 방법이 일반적으로 다른 모델에까지 적용되는 지는 미지수다[8].

표준 변수를 다음과 같이 변환시키자.

$$a \rightarrow z^2 \tag{21}$$

$$P_a \rightarrow \frac{1}{2z} P_z + \frac{2P_y}{z^2} \tag{22}$$

$$\phi \rightarrow y - \Lambda \ln z \tag{23}$$

$$P_\phi \rightarrow P_y. \tag{24}$$

이와 같이 변환된 변수들은 기본 Poisson bracket을 만족시키므로 역시 표준 변수들이다. 변환된 표준 변수들을 이용하여 Hamiltonion을 다시 쓰면

$$H(x) = \frac{1}{32} P_z{}^2 - \frac{1}{2z^2} P_y{}^2 - \frac{z^2}{2} \Lambda \tag{25}$$

식 처럼 변환된다. 이 식으로 부터 알 수 있듯이 P_z^2 항에는 z가 나타나지 않으며, P_y는 z와 Poisson bracket적으로 독립이므로 normal-ordering항은 나타나지 않는다. P_z, P_y를 연산자 표현으로 바꾸어서 $H(x)$에 대입하면

$$\hat{H}(x) = \frac{1}{32} \hat{P}_z{}^2 - \frac{1}{2z^2} \hat{P}_y{}^2 - \frac{z^2}{2} \Lambda \tag{26}$$

로서, $\hat{P}_z = -i\frac{\partial}{\partial z}$, $\hat{P}_y = -i\frac{\partial}{\partial y}$ 를, $\hat{H}$는 $H(x)$에 대응 되는 연산자를 의미한다.

양자계가 unitary하기 위해서는 Hamiltonion연산자 $\hat{H}(x)$는 hermitian이여야 하고 이는 da대신 dz를 measure로 하는 내적(inner product)에 의해서 성립된다. 말하자면,

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \Psi^*(z,y)\,\hat{H}(x)\,\Psi(z,y)\,dz\,dy \\ &= \int_0^\infty (\hat{H}(x)\,\Psi(z,y))^*\,\Psi(z,y)\,dz\,dy \end{aligned} \tag{27}$$

가 성립하여 따라서 $\hat{H}(x)$는 hermitian이다. 이는 곧 원래의 표준 변수를 사용했을 때 measure가 da가 아니라 $da/2\sqrt{a}$ 임을 보여주는 것이다. Hamlitonion (26)을 이용하여 Schrödinger방정식을 다시 쓰면

$$\left(-\frac{1}{32}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{2z^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{z^2}{2}\Lambda\right)\ \Psi(z,y)=0 \tag{28}$$

로서, 표준 변환의 결과로, 방정식이 변수 분리에 의해서 쉽게 해를 구할 수 있는 형태가 됐다. 방정식(28)에 두번째 항의 분모에 z^2이 나타나므로 $\Psi(z,y)$는 z=0에서 영이 되야한다. 정확히 표현하면

$$\lim_{z\to 0} z^{-2}\Psi(z,y)\to finite \tag{29}$$

를 만족시켜야 하고, 이 조건에 의해서 방정식의 해들에 나타나는 매개 변수들의 특성이 어느정도 결정된다. $\Psi(z,y)=W(z)\Theta(y)$로 변수 분리하면, y에 대한 방정식은

$$\frac{d^2}{dy^2}\Theta+k^2\Theta=0 \tag{30}$$

로서 $\Theta\sim e^{iky}$ 와 같은 해를 갖는다. 이때 k^2은 변수 분리 상수로서 영보다 크다. 그 이유는 $H(x)$와 P_y 교환적(commutative)이고, P_y는 식 (27)과 같은 내적에 대해서 hermitian으로 고유치는 실수이기 때문이다. 다라서 파동방정식은 평면파를 중첩시킨 파속으로서 다음과 같은 형태가 된다.

$$\Psi(z,y)=\int dk\ A(k)\ e^{iky}\ W(z) \tag{31}$$

변수분리 상수 k^2을 사용하여 z에 대한 방정식을 쓰면

$$\frac{d^2}{dz^2}W+\frac{16k^2}{z^2}W+16\Lambda z^2 W=0 \tag{32}$$

와 같이 주어지며 해는 다음과 같이 Bessel 함수들로 주어진다.

$$W(z)=c_1\sqrt{z}\ J_\nu(2\sqrt{\Lambda}\ z^2)+c_2\sqrt{z}\ Y_\nu(2\sqrt{\Lambda}z^2) \tag{33}$$

여기에서 J_ν, Y_ν는 각각 제 1종, 제 2종 Vessel 함수들이며, $\nu=\sqrt{1\text{-}64k^2/4}$ 이다. z가 영에 접근할 때, 파동 함수가 정칙성(regularity)을 만족하기 위해서는 c_2가 영이 되어야 한다. 결과적으로 파동함수를, 임의의 상수 c_1을 $A(k)$에 포함시켜서, 다시 쓰면

$$\Psi(z,y)=\int dk\ A(k)\ e^{iky}\sqrt{z}\ J_\nu(2\sqrt{\Lambda}z^2) \tag{34}$$

이 되며, 원래의 표준 변수 a,ϕ로 환산시키면

$$\Psi(a,\phi)=\int dkA(k)e^{ik\phi}a^{1/4+2ik}J_{\nu}(2\sqrt{\Lambda}a) \tag{35}$$

가 된다. 확률 밀도함수

$$|\Psi(z,y)|^2 dz\,dy=|\Psi(a,\phi)|^2\frac{1}{2\sqrt{a}}\,da\,d\phi\equiv P(a,\phi)\,da\,d\phi \tag{36}$$

로서, 식(35)을 이용하면

$$P(a,\phi)da\,d\phi=\frac{1}{2}\int dk\,|A(k)|^2\,J_{\nu}^{2}(2\sqrt{\Lambda}a) \tag{37}$$

이 되며, 이 확률 밀도함수는 파동함수(35)가 규격화가 안될때는 조건부 확률 밀도함수 (conditional probability)가 된다 〔9〕.

Ⅳ. 결과 및 고찰

2차원 중력 이론에서 식(2)에 제시된 모델을 사용하여 Hamiltonian과 초운동량 구속 조건들 사이의 대수를 구했을때 그 결과로서 구조계수 $\chi^{\rho}_{\mu\nu}$는 계량 텐서에 의존함을 알았다. 따라서 고전적 영역에서 구속 조건들을 영으로 놓아야 하며 양자화 과정에서 파동함수에 작용하여 영이 되게 한다. 이는 4차원 양자 우주론에서 Wheeler-DeWit 방정식과 유사한 점이다〔10〕.

차이점은 4차원 양자 우주론에서는 구조계수 $\chi^{\rho}_{\mu\nu}$가 항상 계량텐서에 의존하며 따라서 Hamitonian은 양자화 과정에서 파동 함수에 작용하여 영이 되게 하는 반면, 2차원 양자 우주론에서는 모델에 따라서 구조계수가 계량텐서에 의존하지 않으며, 이 경우 Hamiltonian은 영이 아니어도 된다. 제Ⅲ절에서 정칙성 조건을 이용하여 파동함수를 구했다. $\phi(x)$에 대한 해는 평면파로 나타났으며, 이는 규격화 과정에서 발산되므로 중첩을 시켜서 파속을 형성하도록 했다. 척도인자에 대한 파동함수는 원점에서 해가 정칙이 되도록 함으로서 제1종 Bessel함수로 나타났고, 확률 밀도함수에서는 척도인자에 대한 measure를 $da/2\sqrt{a}$ 로 택했으며 이는 Hamiltonian 연산자가 hermitian이 되도록 하기 위해서다. 만약 파동함수가 규격화가 안되면 이 확률 밀도함수를 조건부 확률 밀도함수로 해석할 수 있다. 이어서 계속되는 연구과제로서 이 파동함수를 ν와 Λ의 여러 범위 값에서 재구성하여 해석을 하는데 있다.

V. 참고문헌

〔1〕C. G. Callan, S. B. Giddings, J. A. Harvey, and A. Strominger, Phys. Rev. D45, 1005 (1992).

〔2〕J. G. Russo, L. Susskind, and L. Thorlacius, Phys. Rev. D46, 3444 (1992).

〔3〕T. Banks, A. Dabholkar, M. R. Douglas, and M. O'Loughlin, Phys. Rev. D45, 3607 (1992).

〔4〕R. Jackiw, in *Quantum Theory of Gravity*, edited by S. Christensen (Hilger, Bristol, 1984), p. 403; C. Teitelboim, ibid, p. 327.

〔5〕R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, Phys. Rev. 116, 1322 (1959).

〔6〕C. Teitelboim, Phys. Lett. B126, 41 (1983).

〔7〕P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, (Yeshiva, New York, 1964).

〔8〕T. Christodoulakis and J. Zanelli, Phys. Rev. D29, 2738 (1984).

〔9〕J. B. Hartle and S. W. Hawking, Phys. Rev. D28, 2960 (1983).

〔10〕J. A. Wheeler, *Geometrodynamics*, (Academic Press, New York, 1962); B. S. DeWitt, Phys. Rev. 160, 1113 (1967).