

# On the Optimal Design and Realization of Polyphase Filter Banks Using Lattice Wave Digital Filters\*

Lee Yong-Hak\*\*

격자형 웨이브 디지털필터를 이용한 폴리페이즈  
필터뱅크의 최적설계 및 구현\*

李 鎔 鶴\*\*

## Summary

Realization of multirate Lattice Wave Digital Filter(LWDF)banks on the polyphase structure is presented. For one input signal, the wave digital filter(WDF) has a merit producing two output signals which are complemented each other. The WDF are described in terms of analog LC filters and WDF are classified into LWDF and Ladder WDF depending on their references. Firstly theory of the WDF is summarized and the design procedures are outlined. By introducing examples two types are compared with the conventional IIR filters and the coefficients quantization error are discussed quantitatively. The filter banks of 7th order LWDF is compared with 32 tap FIR filter. It is verified that the characteristics both of transition and stopband attenuation of LWDF are more improved than that of conventional FIR type.

## 서 론

신호전송과 같은 필터의 응용부분에 있어서 필터 응답의 신속성과 정확성은 이용자의 당연한 요구 과제일 것이다. 이같은 기능을 위한 검토는 여러 방법으로 이루어지고 있다(Fettweis, 1986, 1974).

디지털 필터를 구현함에 있어서 필터응답의 산출시간을 최소화 하는 한 방법으로 유한어장 고정 소수점 연산을 주로 이용한다. 그러나 유한어장 연산올 하기 위해서는 필터계수를 양자화 해야하고 이때 나타나는 양자화 오차는 필터의 전달특성을 변화시키고 이로 인해 응답의 정확도가 저하된다.

무손실 4단자 필터의 기능을 발휘하도록 Fettwe-

\* 이 논문은 1992년도 교육부 학술연구조성비 지원에 의한 것임.

\*\* 공과대학 통신공학과(Dept. of Communication Engineering, Cheju Univ., Cheju-do, 690-756, Korea)

is에 의해 제안된 웨이브 디지털필터(Wave Digital Filters : WDF)는 전달 특성이 필터의 계수값의 변화와 무관하다고 알려지고 있다. 아날로그 전달함수를 먼저 구한 다음 디지털 전달함수로의 변환이 디지털 필터 설계의 일반적 순서임에 반해 WDF의 설계는 아날로그 소자를 직접 웨이브 디지털화한 다음 이들을 직렬 및 병렬 어댑터로 연결하는 것이 차이점이라 할 수 있다. WDF의 대표적인 두 형태는 Wave Digital Ladder Filter(WDLF)와 Wave Digital Lattice Filter(LWDF)이다. 이들은 다같이 LC 필터의 변환으로서 전자는 사다리꼴 아날로그 LC 필터로부터 그리고 후자는 아날로그 대칭 LC 필터로부터 유도된다. WDF의 단자는 어느 경우든 직렬 및 병렬 어댑터(Adaptor)에 의해 연결된다.

WDF에서 어댑터는 회로 연결 즉 직렬 및 병렬 연결 부분에서 입사파 및 반사파의 흐름을 나타낸다. WDF의 구성은 일반 형태의 디지털 필터에 비해 많은 수의 가산기를 필요로 하는바 이는 필터의 실현을 복잡하게 하고 pipeline이 쉽지 않으며 적응 필터링의 부적합이 문제점으로 되고 있다. 그러나 낮은 감도계수 특성과 기존의 필터에 비해 차수가 적다는 것이 주 특징이라 할 수 있다. (李鎔鶴 등, 1990)

WDF의 발표 이래 Sedlmeyer와 Fettweis(1973)는 아날로그 LC 사다리형 필터로 WDF를 실현하였고, Wegener(1979)는 승산기와 가산기수를 줄인 WDF를 구하였으며 Gazsi(1985)는 LWDF 설계 공식을 직접 유도하여 어댑터를 최적화 하였다.

본 논문에서는 LWDF 어댑터의 최적화를 Gazsi와 달리 유도하여 폴리페이즈 필터뱅크를 설계 구성하였다. 이론의 타당성을 입증하기 위하여 종래의 32차 FIR 폴리페이즈 필터뱅크와 상호 비교하였으며, 시뮬레이션을 통하여 감도 특성을 확인하였다.

## LWDF 폴리페이즈 필터 뱅크

### 1. LWDF 의 쌍가역성

표본화율의 변화를 이용하고 있는 디지털 신호처리 분야와 Transmultiplexer의 FDM-TDM 변환에

서는 위상 추이의 특성을 이용한 지역통과 특수 디지털 필터를 이용하고 있다(Crochiere 등, 1983; Murru 등, 1979; Bonnerot 등, 1978). 이 필터를 일명 폴리페이즈 필터라 하며 Bellanger(1976)이래 그 다양한 응용을 문헌(Ansari 등, 1983; Fettweis 등, 1985; Drews 등, 1986)에서 찾아볼 수 있다. 특히 음성의 Subband coding 에서는 FIR 구조가 이용되고 FIR 차수는 32차 이상이다. 그러나 폴리페이즈 구조를 WDF로 표현할 수 있다면 기존의 FIR 구조 보다 차수를 줄일 수 있다. 산란 행렬에 의한 웨이브 변수를 표현하기 위하여 Fig. 1 과 같은 4단 자망에서의 산란행렬은

$$\lambda = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (1)$$

이고, 입사파 및 반사파의 정의는 다음과 같다. (Antoniou, 1979)

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

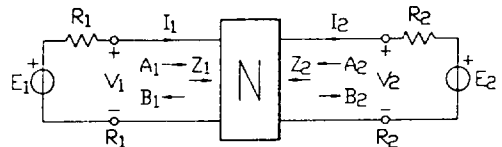


Fig. 1. A two-port N with port resistances  $R_1$  and  $R_2$ .

식(2)의 대칭 격자형 구조는 Fig. 2와 같고 대칭 구조로 인해 Fig. 1의 단자저항  $R_1=R_2=R_0$ 이 되어 다음이 성립한다. (Fettweis, 1972, 1984;

Wegener, 1978)

$$S_{11} = S_{22} \quad (3a)$$

$$S_{21} = S_{12} \quad (3b)$$

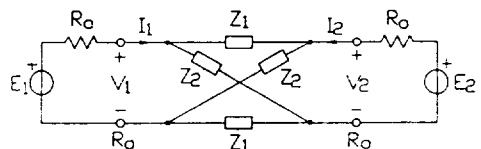


Fig. 2. Lattice reference filter consisting of canonic impedance.

식(3a, b)의  $S_{11}$  과  $S_{21}$ 은 다음과 같은 물리적 의미 지니므로

$$S_{11} = \frac{B_1}{A_1} \Big|_{A_2=0} \quad (4)$$

$$S_{21} = \frac{B_2}{A_1} \Big|_{A_2=0}$$

$S_{11}$ 과  $S_{21}$ 은 전달함수가 되고 Feldtkeller 식에 의하여 다음 조건을 만족하므로

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \quad (5)$$

따라서  $S_1$ 과  $S_2$ 는 서로 상보관계에 있게 된다. 회로망 N의 canonic 격자 임피던스를  $Z_1$  및  $Z_2$ 라 하면  $S_1$ 과  $S_2$ 는 다음과 같게 된다.

$$S_1 = \frac{Z_1 - R}{Z_1 + R} \quad (6a)$$

$$S_2 = \frac{Z_2 - R}{Z_2 + R} \quad (6b)$$

여기서

$$S_1 = S_{11} - S_{21} \quad (7a)$$

$$S_2 = S_{11} + S_{21} \quad (7b)$$

식(7)에 의하여

$$2B_1 = S_1(A_1 - A_2) + S_2(A_1 + A_2) \quad (8)$$

$$2B_2 = S_1(A_2 - A_1) + S_2(A_1 + A_2) \quad (9)$$

식(7)에 다시 쓰면

$$S_{11} = S_{22} = \frac{1}{2} (S_2 + S_1) \quad (10a)$$

$$S_{21} = S_{12} = \frac{1}{2} (S_2 - S_1) \quad (10b)$$

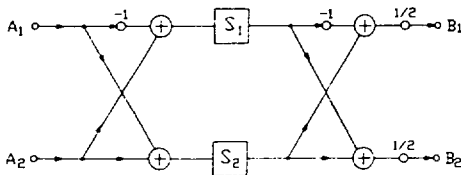


Fig. 3. Wave flow diagram of LWDF.

식(10)을 신호 흐름도로 표현하면 Fig.3 과 같다.

특성함수를  $\Psi$ 라 놓으면

$$\begin{aligned} \Psi &= S_{11} / S_{21} = (S_2 + S_1) / (S_2 - S_1) \\ &= \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \end{aligned} \quad (11)$$

식(11)에서  $S_1$ 과  $S_2$ 는 1차 및 2차 어댑터를 직렬 연결하여 실현할 수 있다.  $\psi$ 가

$$\Psi(1/\psi) = 1/\Psi(\psi) \quad (12)$$

인 쌍가역성을 가지면 식(12)의 성립은  $z$  영역에서 전달함수의 차수가 홀수이므로  $S_1$ 과  $S_2$  중 하나는 홀수가 되고 또 다른 하나는 짝수가 된다. 1차 어댑터 계수값이 0이기 때문에  $S_1$  전대역 부분은 단일 지연기가 되고  $S_2$  전대역 부분의 3차 어댑터 계수값은 0이기 때문에 2차 어댑터의 지연기는 1차 어댑터의 두 배가 된다.

## 2. 표본화율의 변화

LWDF의 표본화율 변화는 Fig.4와 같이 이루어진다. 승산기  $u(n)$ 와  $v(n)$ 를 통해 4단자망 N는  $N_T$ 와 연결된다. 여기서  $N_T = \lambda_T$ 이고  $\lambda$ 의 전치행렬이다.  $u(n)$ 와  $v(n)$ 은 1과 0을 교대로 취하므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

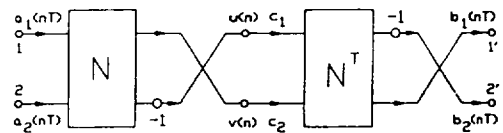


Fig. 4. Connection of N and  $N_T$  via multipliers  $u(n)$  and  $v(n)$ .

$$u(n) = [1 + (-1)^n] / 2 = (1 + e^{jn\Omega T}) / 2 \quad (13)$$

$$V(n) = \begin{bmatrix} u(n) \\ 1 - u(n) = (1 - e^{jn\Omega T}) / 2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서  $\Omega = 2\pi/T$

Fig.4에서 입력이 다음과 같을 때

$$a_1(nT) = A_1 \cdot e^{jn\Omega T}, \quad n = \dots -1, 0, 1, 2, \dots \quad (15a)$$

$$a_2(nT) = 0 \quad (15b)$$

$N^T$ 의 입력은

$$\begin{aligned} c_1(nT) &= -A_1 \cdot S_{21}(\psi) \cdot u(n) \cdot e^{j\omega nT} \\ c_2(nT) &= -A_1 \cdot S_{11}(\psi) \cdot u(n) \cdot e^{j\omega nT} \end{aligned}$$

식 (13) 과 (14)를 위식에 사용하면

$$c_1(nT) = -\frac{1}{2} A_1 \cdot S_{21}(\psi) \cdot (e^{j\omega nT} + e^{j(\omega + \Omega/2)nT}) \quad (16a)$$

$$c_1(nT) = \frac{1}{2} A_1 \cdot S_{11}(\psi) \cdot (e^{j\omega nT} \pm e^{j(\omega + \Omega/2)nT}) \quad (16b)$$

식 (16b)의 (+)와 (-)는 식 (14)로 결정된다. 즉  $v(n) = u(n)$ 이면 (+)을,  $v(n) = u(n)$ 이면 (-)를 택한다. 식 (16)의 두계항이  $j(\omega + \frac{\Omega}{2})$ 이기 때문에 식 (12)가 성립되고 출력  $b_1(nT)$ 와  $b_2(nT)$ 는 다음과 같게 된다.

$$\begin{aligned} b_1(nT) &= \frac{1}{2} A_1 \cdot \det \lambda(\psi) \cdot e^{j\omega nT} \\ &+ \frac{1}{2} A_1 [\pm S_{11}(\psi) S_{22}(1/\psi) \\ &- S_{21}(\psi) S_{12}(1/\psi)] e^{j(\omega + \Omega/2)nT} \quad (17a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1(nT) &= +\frac{1}{2} A_1 [\mp S_{11}(\psi) S_{21}(1/\psi) \\ &+ S_{11}(1/\psi) S_{21}(\psi)] e^{j(\omega + \Omega/2)nT} \quad (17b) \end{aligned}$$

산란 행렬  $\lambda$ 가 다음을 만족하면

$$S_{11}(\psi) S_{22}(1/\psi) = \pm S_{21}(\psi) S_{12}(1/\psi) \quad (18)$$

식 (8)는

$$b_1(nT) = \frac{1}{2} A_1 \cdot \det \lambda(\psi) \cdot e^{j\omega nT} \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} b_2(nT) &= -\frac{1}{2} A_1 \cdot \det \lambda(\psi) \\ &\cdot \left[ \frac{S_{11}(1/\psi)}{S_{12}(\psi)} \right] \cdot e^{j(\omega + \Omega/2)nT} \quad (19b) \end{aligned}$$

식 (16)에 의해 표본화율의 감소와  $A_1$ 의 필터링이 함께 이루어진다. 만일 무손실 4 단자망이면 Fig. 4는 정보 손실없이 신호를 저역 및 고역의 두부분으로 분리시킨다. 따라서 출력으로부터 입력을 재생하기 위해서는 식 (17a) 첫째 항을 보상하고 두계항

은 0이 되어야 한다. 이것은 LWDF의 쌍가역성 때문이다.

$z$ 영역에서 전달함수 차수가 홀수이면  $S_1$ 과  $S_2$  중 하나는 홀수이고 또 다른 하나는 짝수이므로 필터 입력의 표본화율은 감소하고(Decimation) 출력에 입력과 반대로  $S_1$ 과  $S_2$ 를 삽입하면 Interpolation이 이루어진다(Fig. 5).

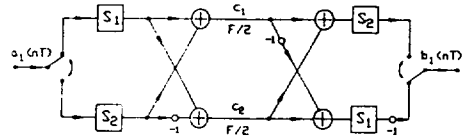


Fig. 5. Arrangement of Fig. 4 in terms of  $S_1$  and  $S_2$ .

이상에 의한 3채널 필터뱅크는 Fig. 6과 같다.

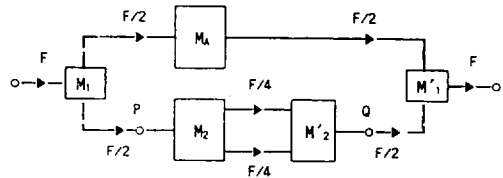


Fig. 6. Filter bank with 3 channels.

### 3. LWDF 폴리페이즈 필터뱅크

LWDF 폴리페이즈 필터뱅크의 전달함수를  $H(\psi)$ 라 하면

$$H(\psi) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} H_m(\psi) \quad (20)$$

여기서  $M$ 은 경로 수이고  $H_m(\psi)$ 은 경로 필터의 전달함수이다. interpolation 또는 decimation은 표본화율  $f_s/M$  이하에서 다음과 같이 이루어진다.

$$H(\psi) = z^{-n} \bar{H}_m(\psi_M) \quad (21)$$

여기서

$$\psi_M = (z^M - 1) / (z - 1)$$

입, 출력을 각각  $X, Y$ 로 표기하면 식 (20), (21)는 Fig. 7과 같다.

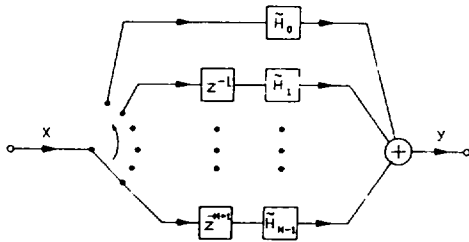


Fig. 7. Polyphase filter with sampling rate decrease.

M채널 필터 뱅크의 실현은 Fig. 7의 출력 가산기 대신 역 DFT (IDFT)를 삽입하게 되므로 프로토타입 저역통과 필터에 의한 폴리페이즈 필터의 m번째 채널 전달함수  $\bar{G}_m(z)$ 의 주파수 변환은 다음과 같이 이루어진다.

$$\omega \rightarrow \omega - \omega_m = \omega - m\Omega/M \quad (22)$$

그러므로 전달함수  $\bar{G}_m(z)$ 는

$$\bar{G}_m(z) = \bar{H}(ze^{j2\pi m/M}) \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} \bar{H}_k(z^M) e^{-j2\pi km/M} \quad (23)$$

폴리페이즈 필터의 입력을 X, 출력을 각각  $Y_i$ 라 하면 식 (23)에 의한 폴리페이즈 필터 뱅크 구성은 Fig. 8과 같다.

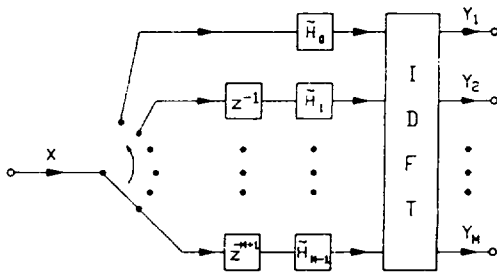


Fig. 8. Polyphase filter bank with sampling rate decrease.

### 결과 및 고찰

Fig. 5를 이용한 저지대역 감쇄 -50dB, 통과대역

리플 0.05dB, 차단주파수  $F_s/4$ 의 2채널 폴리페이즈 LWDF 필터 뱅크의 최종 구성은 Fig. 9와 같다.

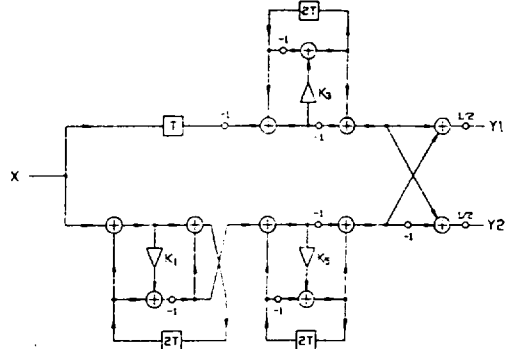


Fig. 9. LWDF of 2 channels.

Fig. 9에서  $S_1$ 과  $S_2$ 는

$$S_1 = \frac{K_1 + z^{-2}}{1 + K_1 z^{-1}} \frac{(1 - K_3) + z^{-2}}{1 + (1 - K_3) z^{-2}} \quad (24a)$$

$$S_2 = z^{-1} \frac{K_2 + z^{-2}}{1 + K_2 z^{-2}} \quad (24b)$$

$$K_1 = 0.1284563, \quad K_2 = 0.4295666, \quad K_3 = 0.2093248$$

따라서 식 (10)에 의해 Fig. 9의 전달함수는 다음과 같다.

$$H_p = \frac{1}{2} (S_2 \pm S_1) \quad (25)$$

윗식에서 +는 저역통과, -는 고역통과이며 그 응답특성은 Fig. 10과 같다.

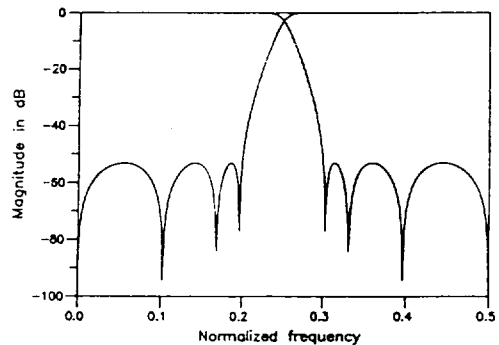


Fig. 10. Response characteristic of Fig. 9.

Johnston 알고리즘 (Johnston 등, 1979)을 이용한 Fig. 10 특성의 32차 FIR실현은 Fig. 11과 같다.

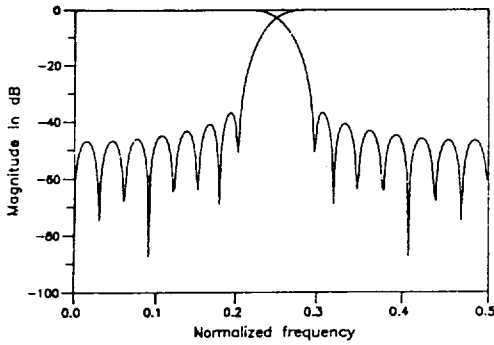


Fig. 11. Response characteristic of 32 tap FIR filter.

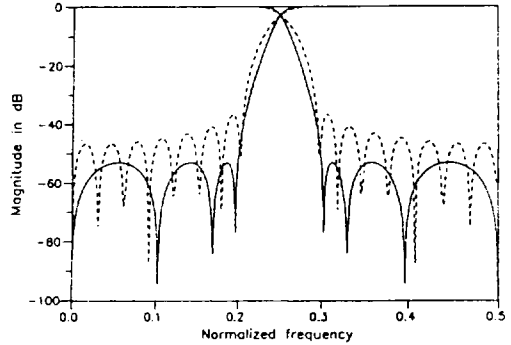


Fig. 12. Characteristic comparison with Fig. 10 and 11. (LWDF : solid line, FIR : dashed line)

Fig. 12는 Fig. 10과 11의 동시 표현으로 LWDF의 천이특성은 FIR에 비해 다소 우수하고, 저지대역 감쇄는 FIR 첫번째 부엽이 -38dB이나 LWDF는 -53dB이므로 LWDF 특성이 양호함을 알 수 있다. 재생오차는 FIR이  $\pm 0.025\text{dB}$ 임에 반해 LWDF는  $\pm 0.1 \times 10^{-3}\text{dB}$ 이므로 7차 LWDF는 32차 FIR 필터뱅크보다 천이 및 감쇄 특성이 우수하다. Fig. 9의 2채널 LWDF 폴리페이즈 필터를 Path 필터로 한 8채널 필터뱅크의 응답특성은 Fig. 13과 같다.

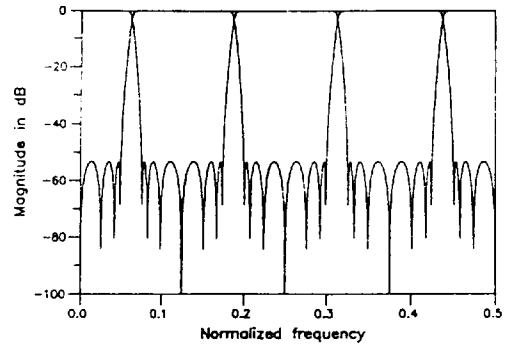


Fig. 13. Response characteristics of 8 channel filter banks

## 적 요

본 논문에서는 격자형 웨이브 디지털필터가 입사파와 반사파를 모두 전달함수로 사용할 수 있기 때문에 하나의 입력에 대해 서로 상보관계에 있는 두 출력의 path 필터 구성이 가능하므로 이의 특성을 이용하여 폴리페이즈 필터 뱅크를 실제 구성하였다. 구성된 필터 뱅크는 기존의 필터 뱅크에 비해 유한 어장에 의한 응답 특성의 감도가 양호하며 한 쪽 path의 출력만 이용하면 저역통과 필터로도 사

용 가능한 장점이 있음을 나타내었다. 제안된 설계 방법을 이용 2채널 LWDF 폴리페이즈 필터를 path 필터로 한 8채널 필터 뱅크는 기존의 32차 FIR 폴리페이즈 필터에 비해 천이영역 특성이 양호하면서도 연산수가 훨씬 감소되는 장점을 보였다. 또한 필터 차수의 증가없이 저지대역 감쇄 특성이 큰 필터로 설계가 가능한 장점이 있음을 나타내었다.

## 참 고 문 헌

Ansari, R., Liu, B. 1983, "A class of low-noise computationally efficient recursive digital filters with applications to sampling rate alternations," IEEE Trans. Acoust., Speech, Speech, Signal Processing vol. ASSP-33. 90-97.  
 Antoniou, A. 1979, "Digital Filters : Analysis and Design," New-York, NY : McGraw-Hill.

- Bellanger, M. G. 1976, "Digital filtering by polyphase network: application to sample rate alteration and filter banks," IEEE Trans. on ASSP, vol. 24, No. 2
- Bonnerot, G., Coudreuse, M., Bellanger, M. G. 1978, "Digital processing techniques in the 60 channel transmultiplexer," IEEE Trans. Circuits Syst., vol. COM-26, 252-259.
- Crochiere, R. E., Rabiner, L. R. 1983, "Multirate Digital Signal Processing", Prentice-Hall.
- Drews, W., Gazsi, L. 1986, "A new design method for polyphase filters using allpass sections," IEEE Trans., vol. CAS-33, No. 3, 346~348.
- Fettweis, A. 1986, "Wave Digital Filters: Theory and Practice," IEEE proceedings, vol. 74, No. 2, 272~327.
- Fettweis, A. 1972, "Scattering properties of wave digital filters," in Proc. Florence Sem. on Digital Filtering, Florence, Italy: Teorema Edizioni, 1~8.
- Fettweis, A. 1984, "On Discrete Scattering Hurwitz Polynomials," Int. J. Circuit Theory.
- Fettweis, A. Levin, H. and Sedlmeyer, A. 1974, "Wave digital lattice filters," Int. J. Circuit Theory Appl., vol. 2, 203~211.
- Fettweis, A. Nossek, J. A. and Meerkotter, K. 1985, "Reconstruction of signals after filtering an sampling rate reduction," IEEE Trans. Acoust, Speech, Signal Processing, vol. ASSP-33, 893-902.
- Fettweis, A. and Sedlmeyer, A. 1973, "Digital filters with trueladder configuration," Int. J. Circuit theory Appl., vol. 1, 5~10.
- Gazsi, L. 1985, "Explicit formulas for Lattice Wave Digital Filters," IEEE Trans., vol. CAS-32, 68~88.
- 李鎔鶴, 劉守鉉, 金在功, 1990, "Wave Digital Filter의 性能에 關한 研究," 韓國通信學會 論文集, 第15卷, 第6號, 526~534.
- Johnston, J. D. and Crochiere, R. E. 1979, "An all digital commentary grade sub-band coder," J. Audio Eng. Soc., Vol. 27, No. 11, 855 '856.
- Murru, E., Dill, H. J. 1979, "Integrated FDM/PCM converter channelbank assembly," IEEE Trans. Commun., vol. COM-27, 1593~1597.
- Wegener, W. 1979, "Wave digital directional filters with reduced number of multipliers and adders," Arch. Elektr. Ubertr., Vol. 33, 239~243.
- Wegener, W. 1978, "On the design of wave digital lattice filters with short coefficient word lengths and optimal dynamic range," IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-25, 1091~1098.