각의 삼등분 문제에 대한 역사적 고찰

강 경 훈* · 박 진 원**

목 차

Ⅰ. 서 론

수학교과의 특성상 교과서의 내용이 매우 형식적이고 연역적인 논리로 체계화 되어있기 때문에 대부분 학생들이 수학이 무미건조하고 어렵다고 생각하게 되는 경향이 있다. 수학의 내용 자체가 논리적 이론으로 전개되어 있어서, 수학이 발견과 창안을 통하여 발전하고 있으며 타 교과와의 관계 속에서 변화하고 있고 또한 수학은 실제생활에 응용할 수 있다는 유용성과 인간 삶의 광범위한 분야에서 활용할 수 있다는 언급이 없는 것이 사실이다. 따라서 학생들은 수학에 대한 매력이나 호기심을 갖지 못하고 수학을 딱딱하고 지루한 교과로만 생각하게 된다.

그러나 수학은 오랜 역사를 통해 많은 수학자들에 의해 창조되어 왔으며 직관적인 추측으로 이론들을 만들어 증명하고, 검토와 검증의 과정을 거쳐 수학적 이론들이 체계적으로 정리되어져 왔고, 또한 지금도 그렇게 창안되고 있다. 수학의 역사를 뒤돌아보면 수학의 발견과 창조는 인류의 삶과 상상 속에서 태어났으며 인간의 삶에 영향을 주고받으면서 변화하고 확대되어 왔다. 그렇지만 학교에서의 수학교육은 연역적으로 구성된 완성된 체계로서의 수학을 가르치게 된다. 이러한 완성된 체계의 교과서를 중심으로 지도할 때의 학습의 결점을 해결하기 위해서는 수학의 발달과정에 따라 수학의 개념을 폭 넓게 이해할 수 있도록 교재를 재구성하는 학습지도 방법이 필요하다.

* 세화고등학교 교사
** 제주대학교 사범대학 수학교육과 교수

중등학교에서 다루는 초등기하 부분은 수학의 여러 내용 중에서도 특히 대부분의 학생들이 흥미를 느끼지 못하는 부분이다. 따라서 이 부분의 지도에 있어서는 학생들의 흥미와 관심을 유발시킬 수 있는 내용의 도입이 무엇보다 중요하다고 생각된다. 삼대 작도 문제는 원적문제, 배적문제 그리고 각의 삼등분 문제를 말한다. 이 중에서도 각의 삼등분 문제는 가장 쉬워 보이는 이유로 많은 사람들의 관심을 끌었던 문제이고 또 그에 따라서 이 문제를 해결하려는 과정에서 많은 수학적 결과와 도구들이 생겨나게 되었다. 이러한 결과들은 매우 깊은 수학적 지식을 필요로 하는 것들이 아니므로 학생들에게 소개시킴으로써 기하에 대한 흥미와 자연스러운 접근을 유도할 수 있으리라고 생각된다. 2000년 동안 이루어진 수많은 연구와 여러 결과들, 그리고 그 속에서의 수학자들의 다양한 인간적인 모습들을 현장 학교교실에 그대로 적용시켰을 때 학생들이 스스로 수학적 개념들을 만들고 구성해 볼 수 있는 창의적인 사고활동을 이루어 낼 수 있으리라고 기대된다.

이러한 관점에서 본 논문에서는 각의 삼등분 문제를 해결하려는 과정에서 얻어진 몇 가지 흥미로운 결과들을 정리해보려고 한다.

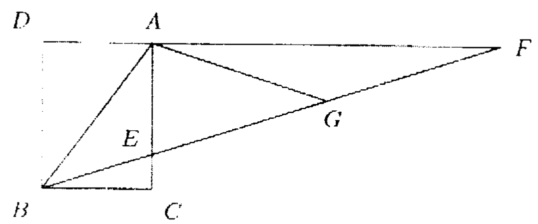
Ⅱ. 본　　론

각의 삼등분 문제는 주어진 임의의 각을 눈금이 없는 자와 컴파스 만을 사용하여 주어진 각의 1/3을 작도하는 문제이다. 이 문제는 삼대 작도 문제 중 가장 이해하기가 간단하고 다루기 쉬운 문제로 생각되어 많은 사람들이 해결하려고 시도하였던 문제이고, 작도가 불가능하다는 사실이 증명이 된 이후에도, 물론 과정이 틀렸지만, 작도법을 발견했다는 아마추어 수학자이 가끔 나올 정도로 많은 사람들의 관심을 끌고 있는 문제이다.

여기서는 이 문제를 해결하기 위한 사람들의 노력과 그 과정에서 발견된 여러 가지 흥미로운 사실들을 정리하려고 한다.

1. 기울음 문제

고대 그리스인들은 각의 삼등분 문제를 기울음 문제라는 것으로 변형해서 생각한 것으로 보인다. 다음 그림을 살펴보자.



(그림 1)

위 그림에서처럼 임의의 예각 ABC 를 직사각형 $BCAD$ 의 대각선 AB 와 변 BC 사이의 각으로 취하자. 그리고 B 를 지나면서 AC 와 E 에서 만나고 AD 의 연장선 위의 한 점 F 에서 만나면서 $EF = 2AB$ 인 직선을 생각보자. G 를 EF 의 중점이라 하면 $EG = GF = GA = AB$ 이다. 따라서

$$\angle ABG = \angle AGB = \angle GAF + \angle GFA = 2\angle GBC$$

이다. 따라서 BEF 는 각 ABC 를 삼등분한다. 따라서 각의 삼등분 문제는 AC 와 AD 의 연장선 사이에 있으면서 길이가 $2AB$ 인 선분 EF 를 작도하는 문제로 바뀌어 지는데 이를 기울음 문제라고 한다.

2. 히피아스 (B.C. 5세기경)

히피아스는 기원전 5세기 후반 아테네에서 활약한 수학자이며, 직선과 원이 아닌 곡선을 수학에 최초로 도입한 사람이다. 히피아스는 각의 삼등분 문제를 해결하기 위해, 초월곡선인 원적곡선(Quadratrix)을 사용했다. 원적곡선은 다음과 같이 정의된다.

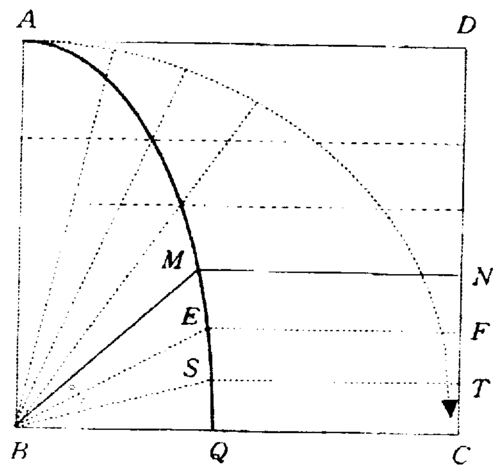
(정의 1) 주어진 정사각형 $ABCD$ 에서 다음과 같은 운동을 한다.

① AD 를 BC 와 평행하게 BC 로 이동한다.

② AB 를 점 B 를 중심으로 시계 방향으로 BC 로 회전시킨다.

운동 ①과 ②가 동시에 시작되며 같은 속도로 움직일 때 생기는 ①과 ②의 자취의 교점을 연결한 곡선을 원적곡선이라 부른다.

원적곡선을 이용하여 각을 삼등분하는 문제를 살펴보자.



(그림 2) 원적곡선을 이용한 각의 삼등분법

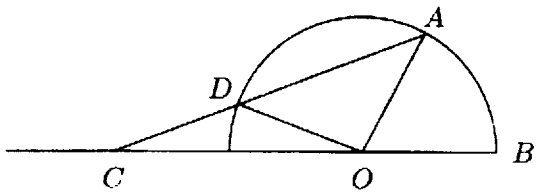
<그림 2>에서 각 MBQ 를 삼등분한다고 하자. 먼저 BC 에 평행하도록 MN을 작도한 후에, NC 를 삼등분하는 점 F 와 T 를 택하자. 그리고 BC 에 평행하도록 EF 와 ST 를 작도하면, BE 와 BS 가 각 MBQ 를 삼등분하는 선분이다.

즉, $\angle SBQ = \angle EBS = \angle MBE$ 이다.

원적곡선이라는 이름은 이 곡선이 주어진 원과 넓이가 같은 정사각형을 작도하는 데에도 쓰이기 때문에 붙여진 이름이다. 물론 이 방법은 자와 컴파스 만을 사용해야 한다는 조건에는 맞지 않으므로 각을 삼등분하는 작도법은 아니다.

3. 아르키메데스 (Archimedes, B.C. 287~212)

아르키메데스는 다음과 같은 방법으로 각의 삼등분 문제를 생각하였다.



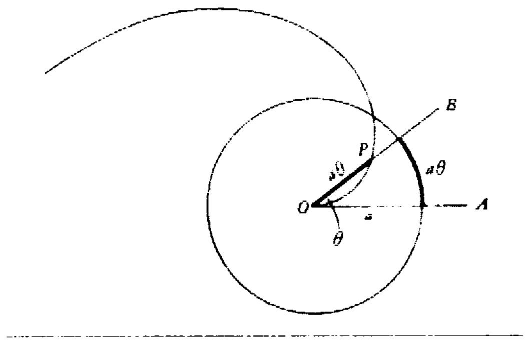
(그림 3)

위의 그림에서 삼등분하려는 각을 AOB 라 하자. 먼저 이 각의 밑변을 왼쪽으로 연장하여 O 를 중심으로 임의의 반지름으로 반원을 그린다. 그리고 CD 의 길이가 반지름과 같아지도록 자를 대고 AC 를 그린다. 그러면 삼각형 CDO 가 이등변 삼각형이므로 각 ADO 는 각 DCO 의 2 배이다. 또한 삼각형 AOD 도 이등변삼각형이므로 각 DAO 도 각 DCO 의 2 배이다. 따라서 각 AOB 는 각 DCO 의 3 배이다.

아르키메데스는 나선을 사용하여 각을 삼등분하는 방법도 생각하였는데, 아르키메데스는 사실 나선을 원적문제 해결을 위하여 만들었다고 전해진다. 원판 위를 일정한 속도로 직선운동을 하는 개미를 생각해보자. 원판이 고정되어 있으면 개미가 움직인 자취는 직선이 될 것이다. 만일 원판이 일정한 각속도로 회전하고 있는 경우 개미가 움직인 자취는 어떤 곡선으로 나타나게 되는데 이 곡선이 나선이다.

(정의 2) 평면상의 원점에서 방출된 한 반직선이 일정하게 회전할 때 이 반직선을 따라 일정하게 움직이는 점의 자취를 나선이라고 한다.

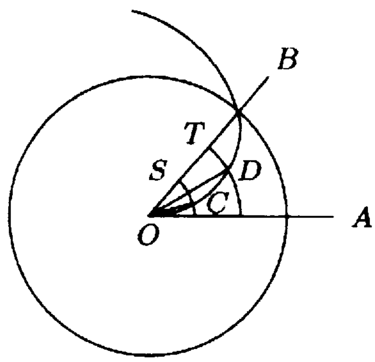
아르키메데스의 나선을 극형식으로 표현하면 $r = a\theta$ (a는 상수)이다.



(그림 4) 아르키메데스의 나선

나선을 사용하여 각을 삼등분하는 방법을 알아보자.

(정리 3) 주어진 각 AOB 에 대하여 O 를 중심으로 반지름 a 인 원을 그리고 아르키메데스의 나선 $r=a\theta$ 를 그린다. 그리고 OB 가 나선과 만나는 점을 P 라 하고 OP 를 삼등분하는 점을 각각 S, T 라 하자. 삼등분한다고 하자. 만일 중심이 O 이고 반경이 각각 OS, OT 인 두 원이 나선과 각각 C, D 에서 만난다고 하면 OC 와 OD 는 각 AOB 를 삼등분한다.



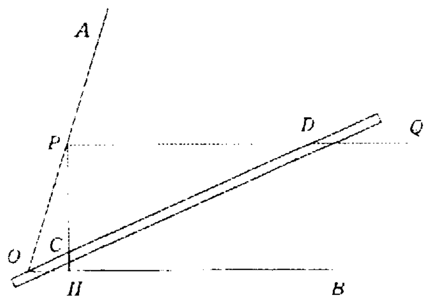
(그림 5) 나선을 이용한 각의 삼등분법

(증명) 위 그림에서 각 AOB 의 크기를 α 라 하면 선분 OP 의 길이는 $a\alpha$ 이다. 그러므로 OS 의 길이는 $\frac{1}{3}a\alpha$ 이고 OT 의 길이는 $\frac{2}{3}a\alpha$ 이다. 따라서 OC 의 길이는 $\frac{1}{3}a\alpha$ 이고 각 AOC 의 크기는 $\frac{1}{3}\alpha$ 이다. 마찬가지로 각 AOD 의 크기는 $\frac{2}{3}\alpha$ 이다. 결국 OC 와 OD 는 각 AOB 를 삼등분한다.

아르키메데스의 나선을 사용하면 주어진 각을 삼등분뿐만이 아니라 임의로 n 등분할 수 있다.

4. 삽입 방법

삽입이란, 어떤 선분을 작도하는 것인데, 이 선분의 끝점이 주어진 두 선에 속하고, 선분(혹은 연장선)이 주어진 점을 지나도록 작도하는 것을 말한다. 삽입을 이용하여 각을 삼등분하는 방법을 알아보자.



(그림 6)

위의 그림에서 각 AOB 를 삼등분하려고 한다. 먼저 변 OA 에 임의의 점 P 를 잡고, 점 P 를 지나 변 OB 와 평행한 직선 PQ 를 작도하자. 그리고 점 P 에서 변 OB 에 수선 PH 를 작도하자. 자에 두 점 사이의 거리가 OP 의 두 배가 되는 점 C, D 를 표시하자. 이 때 CD 가 삽입하는 선분이다. 이제 점 C 가 수선 PH 에 속하고, 점 D 가 직선 PQ 에 놓이고, 직선 CD 가 점 O 를 지나도록 삽입하자. 그러면 각 DOB 가 각 AOB 를 삼등분하는 각이다.

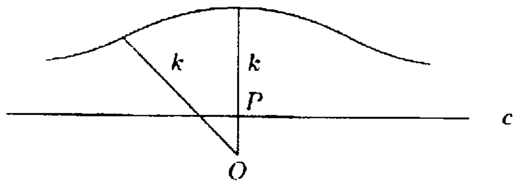
왜냐 하면, $PD \parallel OB$ 이므로, $\angle DOB = \angle PDO$ 이다. 한편, CD 의 중점을 M 이라 하면, PM 은 직각삼각형 PCD 의 중선이 된다. 그러므로 $\overline{MP} = \overline{MC} = \overline{MD}$ 이고, $\angle PDM = \angle MDP$ 이다.

한편, $\overline{CD} = 2\overline{PO}$ 이므로, $\overline{PO} = \overline{MD} = \overline{MP}$ 이다. 그러므로 삼각형 POM 은 이등변삼각형이고, 따라서 $\angle PMO = \angle POM$ 이다. 이로부터, $\angle POM = 2\angle PDO$ 이고, $\angle POM = 2\angle DOB$ 를 얻는다.

5. 니코메데스 (B.C. 240년경)

니코메데스는 각의 삼등분 문제를 해결하기 위하여 콘코이드(conchoid : 나사선)를 발명하였다.

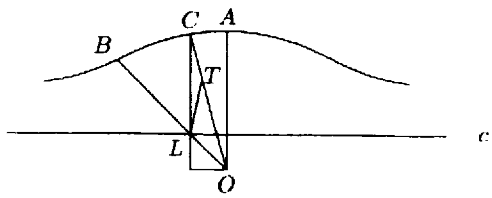
(정의 4) c 를 한 직선이라 하고 O를 c 위에 있지 않은 임의의 점이라 하자. c 위의 한 점 P에 대하여 OP의 연장선 위에 일정한 길이 k를 갖는 PQ 를 표시하자. P 가 c 를 따라 움직일 때 Q의 자취를 극 O와 상수 k에 대한 c의 콘코이드라 한다.



(그림 7) 콘코이드

콘코이드를 이용한 임의의 예각의 삼등분을 알아보자.

(정리 5) 주어진 각 AOB 에 대하여 OA 에 수직인 직선 c 를 그리고 OB 와 만나는 점을 각각 L 이라 하자. 그리고 O 와 상수 $2\overline{OL}$에 대한 c 의 콘코이드를 그린다. L 을 지나서 OA 와 평행인 직선을 그렸을 때 콘코이드와 만나는 점을 C 라 하면 OC 가 각 AOB 를 삼등분하게 된다.



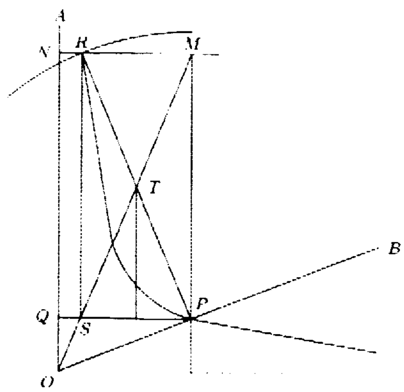
(그림 8) 콘코이드를 이용한 각의 삼등분법

(증명) 직선 c 와 선분 OC 가 만나는 점과 C 의 중점을 T 라 하자. 그러면 삼각형 CLT 는 이등변삼각형이다. 따라서 각 TCL 과 각 TLC 의 크기는 같다. 또한 각 TCL 과 각 AOC 의 크기가 같으므로 $\angle OTL = 2\angle AOC$ 이다. 그런데 삼각형 OTL 은 이등변삼각형이므로 $\angle\ TOL\ =\ 2\angle AOC$ 이다. 즉, 선분 OC 는 각 AOB 를 삼등분한다.

6. 원추곡선을 이용한 각의 삼등분

원추곡선을 이용하면 일반각이 쉽게 삼등분 된다. 다음은 이에 관한 방법이다.

(정리 6) 각 AOB 가 주어졌다고 하자. 중심이 O 이고 OA 를 한 점근선으로 갖는 직각 쌍곡선의 한 분지를 그리고 OB 와 만나는 점을 P 라 하자. 또 중심이 P 이고 반경이 $2\overline{OP}$ 인 원을 그리고 쌍곡선과 만나는 교점을 R 이라 하자. 이 때 PM 이 OA 와 평행하고 이 OA 와 수직이 되는 점 M 을 작도하면 OM 이 각 AOB 를 삼등분하게 된다.

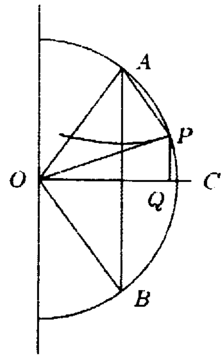


(그림 9)

(증명) Q 와 N 을 각각 P와 M 에서 OA 에 내린 수선의 발이라 하고 PQ 와 OM 의 교점을 S 라 하자. P 와 R 이 쌍곡선 위에 있으므로 $\overline{OQ}\cdot\overline{PQ}=\overline{ON}\cdot\overline{NR}$ 이다. 따라서 $\overline{NR}=\dfrac{\overline{OQ}\cdot\overline{PQ}}{\overline{ON}}$ 이다. 그리고 삼각형 OQS 와 ONM 이 닮은 삼각형이므로 $\overline{QS}=\dfrac{\overline{OQ}\cdot\overline{PQ}}{\overline{ON}}$ 이다. 따라서 $\overline{NR}=\overline{QS}$ 이므로 사각형 PS 는 직사각형이다. T 를 직사각형 PS 의 중심이라 하면, 대각선의 길이 $\overline{PR}$ 은 $\overline{OP}$ 의 두 배이므로 삼각형 TOP 는 이등변삼각형이다. 따라서 $\angle MOP=\angle TOP=\angle PTO$ 이고 또 $\angle PTO$ 는 $\angle AOM$ 의 두 배이므로 증명되었다.

파푸스는 원추곡선을 이용하여 다음과 같은 방법으로 각의 삼등분 문제를 해결하였다.

(정리 7) 각 AOB 를 원의 중심각으로 취하고 OC 를 각 AOB 의 이등분선이라 하자. 초점이 A 이고 준선이 OC 이며 이심률이 2 인 쌍곡선의 한 분지를 그리고 이 쌍곡선이 호 AB와 만나는 점을 P라 하자. 그러면 OP 는 각 AOB 를 삼등분하게 된다.

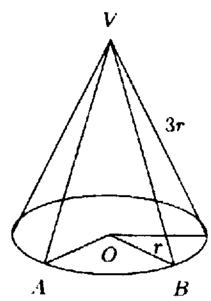


(그림 10)

(증명) P 에서 OC 에 내린 수선의 발을 Q 라 하자. 그러면 A 가 쌍곡선의 초점이고 OC 가 준선이며 이심률이 2 이므로 $\overline{AP} = 2\overline{PQ}$ 이다. 따라서 $\angle AOP = 2\angle POQ$ 이고 결국 $\angle AOB = 3\angle AOP$ 이다 그러므로 OP 는 각 AOB 를 삼등분하게 된다.

원추곡선을 이용하지 않고 직원뿔 자체로부터 각을 삼등분하는 방법이 1896년 오브리에 의하여 고안되었다.

(정리 8) 비탈높이가 밑면의 반경의 세 배인 직원뿔을 생각하고 그 직원뿔의 밑면의 중심을 O 라 하자. 밑면의 원주 위에 삼등분하고자 하는 각을 중심각 AOB 로 표시하자. 종이로 그 원뿔을 감은 후 종이 위에 두 점 A, B 와 원추의 꼭지점 V 를 표시하자. 그리고 종이를 펴면 각 AVB 가 각 AOB의 $\frac{1}{3}$ 이 된다.



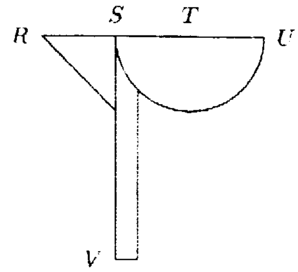
(그림 11)

(증명) 부채꼴 AVB 와 AOB 는 같은 길이의 호를 가지고 있다. 그런데 부채꼴 AVB 의 반지름의 길이가 부채꼴 AOB 의 반지름의 길이의 3 배 이므로 부채꼴

AVB 의 중식각의 크기는 부채꼴 AOB 의 중심각의 크기의 $\frac{1}{3}$ 이다.

7. 토마호크(tomahawk)를 이용한 각의 삼등분

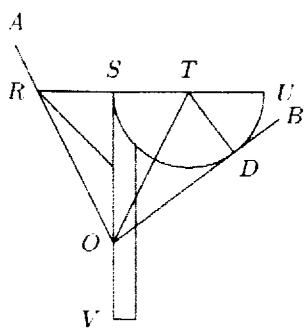
각의 삼등분 문제를 해결하기 위하여 여러 가지 도구들이 고안되었는데 그 중 가장 홍미롭고 초보적인 것이 토마호크이다. 토마호크란 다음과 같은 방법으로 작도된 그림을 말한다. 먼저 주어진 선분 RU 를 삼등분하는 점을 각각 S, T 라고 하자. 그리고 SU 를 직경으로 하는 반원과 RU 에 수직인 직선 SV 를 그린다. 그리고 아래의 그림과 같이 나머지 부분의 부수적인 그림을 그리면 토마호크가 완성된다. 이 도구를 사용하면 주어진 각을 삼등분할 수 있다.



(그림 12) 토마호크

토마호크를 사용하여 주어진 각 AOB 를 삼등분하여보자.

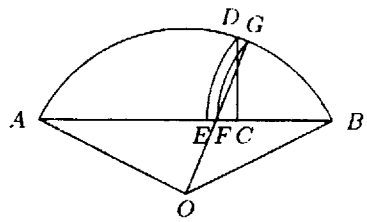
아래 그림과 같이 R 을 OA 위에 놓고 SV 가 O 를 지나고 반원이 OB 에 접하도록 도구를 놓는다. 그리고 반원이 OB 와 접하는 점을 D 라 하자. 그러면 삼각형 RSO, SOT, TOD 가 모두 합동이므로 OT 가 각 AOB 를 삼등분하게 된다.



(그림 13) 토마호크를 이용한 각의 삼등분법

8. 뒤러 (Albrecht Durer)

아래의 그림은 뒤러가 생각한 각의 삼등분법을 설명하는 그림이다. 뒤러의 방법에 의하면 주어진 각을 정확하게 삼등분하는 선분을 구할 수는 없고 근사적으로 삼등분하는 선분을 얻을 수 있다.



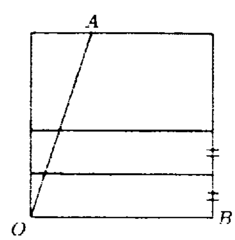
(그림 14)

먼저 주어진 각 AOB 를 원의 중심각으로 취하자. 그리고 C 를 현 AB 를 삼등분하는 점 중 B 에 가까운 점이라 하고 C 를 지나고 AB 에 수직인 직선이 원과 만나는 점을 D 라 하자. 이제 중심이 B 이고 반지름이 BD 인 원을 그렸을 때 AB 와 만나는 점을 E 라 하자. 또 EC 를 삼등분하는 점 중 E 에 가까운 점을 F 라 하자. 다시 중심이 B 이고 반지름이 BF 인 원을 그렸을 때 처음의 원과 만나는 점을 G 라 하자. 그러면 선분 OG 는 각 AOB 를 근사적으로 삼등분하는 선분이다. 이 때의 오차는 각 AOB 의 크기에 따라 증가하는데 크기가 60° 인 경우 오차는 약 $1''$ 에 불과하고 크기가 90° 인 경우 오차는 $18''$ 정도이다.

9. 종이접기에 의한 각의 삼등분법

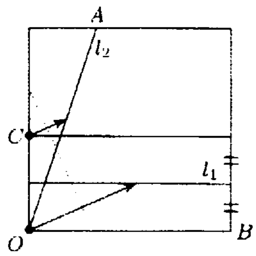
종이접기를 이용하여 주어진 각을 삼등분할 수 있는 방법이 있다. 이 방법은 H. Abe 와 K. Fusimi 에 의하여 발표되었다.

먼저 정사각형의 종이에 삼등분하려는 각 AOB 를 표시하고 아래 그림과 같이 정사각형의 밑면과 평행하게 같은 간격으로 두 번 접는다.

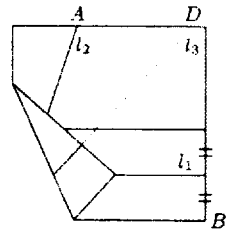


(그림 15)

그리고 아래 (그림 16)과 같이 점 O 와 C 가 각각 직선 l_1 과 l_2 위에 놓이도록 끝부분을 접는다. 접고 난 후 l_1 의 접힌 부분의 연장선을 l_3 라 하고 l_3 가 사각형과 만나는 점을 D 라 하자. 종이를 다시 펼친 후 다시 l_3 를 아래쪽으로 연장하면 O 와 만나게 되는데 이 때 각 AOD 가 각 AOB 를 삼등분하게 된다.

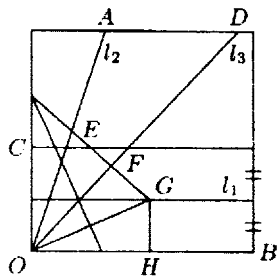


(그림 16)



(그림 17)

위와 같이 종이를 접은 후 다시 펼치고 G 에서 OB 에 수선을 그리면 아래와 같은 모양을 얻게 된다. 그런데 아래 그림에서 세 삼각형 EOF, FOG, GOH 가 합동인 사실은 쉽게 보일 수 있다.



(그림 18)

10. 각의 삼등분의 불가능성

앞에서 살펴본 바와 같이, 각의 삼등분에 관한 문제를 해결하기 위한 왕성한 연구가 결국 그리스 기하학에 심대한 영향을 끼쳤고 원추곡선, 초월곡선과 같은 풍부한 발견을 초래하게 되었다. 이 문제는 약 2천년동안 미해결된 채로 있다가 19세기에 이르러 대수학의 발전에 힘입어 본질적으로 불가능하다는 것이 밝혀지게 되었다. 다음의 정리는 일반각의 삼등분이 자와 컴파스 만으로는 작도가 불가능하다는 사실을 보여준다.

(정리10) 주어진 단위길이로부터 자와 컴퍼스만을 사용하여 작도 가능한 길이를 만족

하는 최저차수의 유리계수다항식의 차수는 1 또는 2 의 거듭제곱이다.

위의 정리를 이용하여 일반각을 삼등분하는 것이 불가능함을 알아보기 위하여 60˚ 를 삼등분할 수 없음을 보이자. 만일 60˚ 를 삼등분할 수 있다면 20˚ 를 작도할 수 있다는 뜻이고 이는 cos20˚ 에 해당하는 실수의 길이를 작도할 수 있게 된다. 그런데 삼각법에 의하여

$$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$$

임을 알 수 있다. 여기서 $\theta = 60^\circ$ 라 두고 $x = \cos\frac{\theta}{3}$ 라 두면, 이 식은

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

이 된다. 그런데 좌변의 식은 유리수 범위 내에서 더 이상 인수분해할 수 없는 3 차 다항식이므로 위의 정리에 의하여 cos20˚ 는 작도할 수 없는 길이이다. 따라서 60˚ 를 삼등분하는 것은 불가능하다.

Ⅲ. 결 론

그리스가 황금시대를 이룰 때 그들의 이성 존중의 경향은 수학의 눈부신 발전을 가져왔다. 이때 그들의 사상체계, 즉 유한과 논리의 범위에서는 해결할 수 없는 문제가 등장하였다. 이 사실은 그들이 스스로의 부족함을 알아차릴 만큼 성실했음을 시사하는 것이다. 그것은 그들이 최고의 진리로 여겨온 수학의 약점을 의식하였기 때문이다. 그 중에서 가장 유명한 것이 이 글에서 논한 3대 작도 불능 문제이다.

본 논문에서는 3대 작도 문제 중의 하나인 각의 삼등분 문제를 해결하기 위한 2000년 동안의 수많은 연구 속에서 얻어진 여러 가지 결과들을 알아보았다. 이 논문에서 언급한 내용들은 아주 고차원적인 수학을 필요로 하는 것이 아니므로 중학교 또는 고등학교 학생들도 충분히 이해할 수 있는 정도의 수준이다. 따라서 일선학교에서 수업시간에 학생들에게 소개시켜 줄 수 있을만한 내용들이고, 또 기하 나아가서는 수학에 대한 흥미를 유발시킬 수 있는 내용들이라고 생각된다. 이와 같은 과정을 통하여 수학의 아름다움을 알게 하고 여러 수학의 개념들을 이해하고 재구성해 볼 수 있는 사고활동으로 창의적이고 역동적인 수업 분위기를 만들 수 있을 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

한인기 (2003), 「교사를 위한 수학사」, 경문사.

Howard Eves (1995), 「수학사」, 이우영, 신항균 역, 경문사.

김용운 (1996), 「수학의 약점」, 도서출판 우성.

김용국, 김용운 (2001), 「도형이야기」, 도서출판 우성.

박순철 (1982), "작도 불가능에 관하여", 조선대 자연과학연구 82-1

http://kahuna.merrimack.edu/~thull/omfiles/geoconst.html