濟州大學校 産業技術硏究所 論文集, 第12卷, 1號, pp.147-153, 2001. 6
Cheju Nat'l Univ. Res. Insti. Ind. Tech. Jour., Vol.12, No.1, pp.147-153, 2001. 6

구속조건을 이용한 부정정 구조의 정적 해석에 관한 연구

은 희 창* · 서 일 교*

A Study on Static Analysis of Indeterminate Structures Using Constraints

Hee-Chang Eun* and Ill-Gyo Suh*

ABSTRACT

This paper presents an explicit static-equilibrium equation of indeterminate structures to satisfy the compatibility conditions. The static analysis of indeterminate structures considers the equilibrium of forces as well as the compatibility conditions. The satisfaction of the compatibility conditions also requires the constraint forces. In this paper, the new equilibrium equation to consider the conditions is derived by minimizing the performance index, which is the function of the difference of the real displacements and the displacements of unconstrained structures without the conditions. Through a simple static analysis of indeterminate structure, it was observed that the weight matrix in the performance index takes the stiffness matrix. And Nature takes the constraint forces as the minimum values of all forces to satisfy the given geometric conditions. Also, several examples illustrated the validity of the proposed method.

Key words : Indeterminate structure, compatibility condition, constraint force.

I. 서 론

자연(nature)의 원리를 이용한 모든 구조물이나 장치들은 힘의 평형을 기본적으로 만족하여야 한다. 힘의 불균형은 곧 구조물이나 기타 장치들의 붕괴를 초래하게 된다. 그러나 힘의 평형 조건만을 이용한 구조 해석은 단지 정정 구조물에 국한된다. 부정정 구조는 힘의 평형 조건외에 구조물의 기하학적인 조건을 이용하여 구조 해석을 행한다. 즉, 자연에 의해 요구하는 평형 조건을 만족하고 그 외에는 변형의 적합 조건 등을 고려한다. 이 때에 변형의 적합 조건을 만족하기 위하여는 추가적인 힘인 구속력을 필요로 하며 평형방정식은 새로운 형태를 취한다.

부정정 차수는 구조물의 정적 해석에서 힘의 평형 조건 외에 필요한 기하학적인 조건의 수로 정의할 수 있다. 기하학적인 조건들은 인위적으로 가한 조건들로서, 이들 조건들을 만족하기 위해서는 외력 외에

* 제주대학교 건축공학과, 산업기술연구소
Dept. of Archi. Engineering, Res. Insti. Ind. Tech., Cheju Nat'l Univ.

추가적인 힘을 필요로 한다. 그리하여 부정정 구조는 기하학적인 특성을 포함하여 힘의 평형을 이루어야 한다. 다른 의미로 부정정 구조 해석은 기하학적인 조건을 만족하는 힘들과 외력에 의한 힘의 평형방정식에 의해 해를 얻게 된다.

매트릭스 구조 해석에 의한 부정정 구조의 해석에서 별도로 기하학적인 조건을 고려한 힘을 산정하나 명백한 식에 의해 이들 힘을 산정하지 않는다. 따라서, 본 연구에서는 기하학적인 조건을 만족하는 구속력에 관한 식을 유도하여 용이한 구조 해석법을 제시한다. 그리고 자연에 의해 제공되는 이러한 힘들의 물리적인 의미를 파악한다. 또한, 간단한 부정정 구조물들에 적용하여 제시된 방법의 용이함과 타당성을 검증하여 부정정 차수가 높은 부정정 구조물에의 적용 가능성을 입증한다.

II. 부정정 구조의 평형방정식

부정정 구조는 힘의 평형방정식 외에 기하학적인 조건을 사용하여 해석된다. 부정정 구조 해석에는 여러 방법이 있으나, 이들 방법 중에 이산계(discrete system)에 의한 매트릭스 구조 해석은 여러 개의 요소들에 의한 힘과 변위의 관계를 기본으로 한다. 총 n개의 자유도를 갖는 탄성 범위 내에 이 구조물의 평형방정식은 다음의 형태로 나타낼 수 있다.

$$F = K\hat{x} \tag{1}$$

여기서, F는 $n\times1$ 외력 벡터를, K는 $n\times n$ 강성 행렬을, $\hat{x}$는 $n\times1$ 변위 벡터를 각각 나타낸다. 정정 구조물은 힘의 평형 조건에 의해 반력을 산정할 수 있는 반면에, 부정정 구조물은 부정정 차수 만큼의 기하학적인 조건을 응용하여 반력이나 절점의 변위들을 산정할 수 있다.

부정정 차수가 m인 부정정 구조물이 취하는 기하학적인 조건들은 다음으로 나타낼 수 있다.

$$f(x)_i = c_i \quad i=1,2,\cdots,m, \quad m<n \tag{2}$$

여기서, c는 상수를 나타내며, 이 조건을 만족하기 위해 추가적인 힘을 필요로 하며, 이 힘을 구속력 F_c라 일컫는다. 따라서, 식(1)의 우변에 이 구속력을 추가시킨 다음과 같은 새로운 평형방정식을 만족하여야 한다.

$$F = K\hat{x} + F_c \tag{3}$$

여기서, F_c를 정정 구조물에 작용시킨다면 기하학적 조건을 만족하게 된다. 매트릭스 구조 해석에 의하면 변위 벡터 $\hat{x}$로부터 식(2)의 조건들의 변위를 제거하고 나머지 절점 변위들을 계산한 후에 변위 벡터 $\hat{x}$에 강성 행렬을 곱하여 구속력을 결정한다. 그러나 식(3)은 기지의 변위를 제거하지 않음을 볼 수 있다. 본 연구에서는 이 구속력을 명백하게 결정하는 수식을 유도한다.

기하 조건의 부여로 실제의 변위 벡터 x는 식(2)로부터 다음의 조건을 만족하여야 한다.

$$Ax = b \tag{4}$$

여기서, 행렬 A는 $m\times n$이며, b는 $m\times1$ 벡터를 나타낸다. 식(4)의 일반해는 pseudo inverse '+'를 사용하면 다음과 같다.

$$x = A^{+}b + (I - A^{+}A)r \tag{5}$$

여기서, r은 임의의 벡터이므로 실제의 변위 벡터 x는 무한해를 갖는다.

식(4)의 조건을 충족하는 실제의 변위 벡터 x는 자연에 의해 제공하는 힘의 평형 조건을 만족하는 변위($\hat{x} = K^{-1}F$)에 최소한으로 근접하여야 할 것이다. 이는 인위적인 조건에도 불구하고 자연에 의한 힘의 평형을 요구하고 있기 때문이다. 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$S = (x - \hat{x})^{T} R (x - \hat{x}) \tag{6}$$

여기서, R은 양의 정치성(positive-definite)의 가중 행렬이다.

식(6)은 기하학적인 조건을 고려한 실제의 변위

벡터와 힘의 평형 조건만을 만족하는 정정 구조물의 변위 벡터와의 차이에 의한 함수이다. 정정 구조물은 힘의 평형 조건을 이용한 최소 단위의 구조물이다. 그러므로 인위적인 조건을 고려한 실제 변위를 정정 구조물의 변위에 가장 근접시킴으로서 자연의 법칙을 고수할 수 있다.

식(1), (4), (6)을 사용하여 실제의 변위 벡터를 유도할 수 있다. 먼저, 식(3)은 다음으로 쓸 수 있다.

$$AR^{-1/2}R^{1/2}x = b \tag{7}$$

식(7)의 일반해는 식(5)를 사용하여 다음과 같이 된다.

$$R^{1/2}x = (AR^{-1/2})^{+}b + [I-(AR^{-1/2})^{+}(AR^{-1/2})]y \tag{8}$$

여기서, y는 임의의 벡터가 되어 해는 무한하게 될 것이다. 그러나 임의 벡터 y는 식(8)을 식(6)에 사용하고, $Q = I-(AR^{-1/2})^{+}(AR^{-1/2})$이라 하면 식(6)은 다음으로 나타낼 수 있다.

$$S = \|(AR^{-1/2})^{+}b + Qy - R^{1/2}\hat{x}\|_2^2 \tag{9}$$

식(9)의 최소는 $(AR^{-1/2})^{+}b + Qy - R^{1/2}\hat{x} = 0$을 의미하므로 이 식에서 벡터 y의 일반해는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$y = Q^{+}[R^{1/2}\hat{x} - (AR^{-1/2})^{+}b] + (I-Q^{+}Q)z \tag{10}$$

여기서, z는 또 다른 임의의 벡터이나 식(10)을 식(9)에 사용하면 이들 임의의 벡터는 제거된다. 즉, $Q^{+}QQ^{+} = Q^{+}$와 $QQ^{+}Q = Q$를 사용하면 임의 벡터 z는 제거된다. 그리고 $Q^{+} = Q$는 $QQ^{+} = I-(AR^{-1/2})^{+}(AR^{-1/2})$가 될 수 있다. 그러므로

$$R^{1/2}x = (AR^{-1/2})^{+}b + R^{1/2}\hat{x} - (AR^{-1/2})^{+}A\hat{x}$$

$$x = \hat{x} + R^{-1/2}(AR^{-1/2})^{+}(b - A\hat{x}) \tag{11}$$

식(11)의 양변에 강성 행렬 K를 곱하면

$$Kx = K\hat{x} + KR^{-1/2}(AR^{-1/2})^{+}(b - A\hat{x}) \tag{12}$$

가 되어, 구속력은 다음의 형태를 취한다.

$$F_c = KR^{-1/2}(AR^{-1/2})^{+}(b - A\hat{x}) \tag{13}$$

식(13)과 같이 주어진 구속력에 의하여 부정정 구조물에서 요구하는 기하학적인 조건을 만족하게 된다. 그러나 식(13)의 가중치 행렬 R을 임의로 설정한다면 식(4)의 조건을 만족한다 할지라도 구속력은 무한개의 값으로 나타날 것이다. 자연에 의해 제공되는 구속력은 식(6)을 최소로 하는 힘으로서 가중 행렬 R은 간단한 부정정 구조 해석의 결과와 비교하여 유일해를 얻을 수 있다.

III. 구속력

기하학적 조건을 만족하는 구속력은 식(8)에서 보는 바와 같이 임의 벡터 y의 선택에 의해 여러 값을 가질 수 있으며, 이는 가중 행렬 R의 선택과 관련지을 수 있다. 기하학적 조건을 만족하는 수많은 구속력 중에 자연에 의해 제공되는 구속력은 R과 깊은 관련이 있다. 이를 위하여 경간 중앙에 집중 하중이 작용하는 양단 고정인 보의 해석을 통하여 결정한다.

Fig. 1과 같이 이 보는 2차 부정정 구조물로서 두 개의 기하학적인 조건을 고려할 수 있다. 이러한 부정정 구조물의 해석 방법은 여러 가지를 고려할 수 있으나 매트릭스 구조 해석과 앞에서 유도한 방법에 의하여 각 절점에서의 변위를 결정하도록 한다. 탄성범위를 가정한다면 Fig. 1(a)의 양단 고정인 보는 Fig. 1(b)의 양단 단순지지보와 양단에 모멘트를 작용시킨 보의 합으로 나타낼 수 있다.

매트릭스 구조 해석을 위하여 이 보를 두 개의 요소로 구분하였으며, 각 절점은 수직 변위와 기울기의 2자유도로 고려하였다. 단순지지보의 양단에서의 수직 변위는 0이므로 요구되는 변위 벡터 $\hat{x} = [\theta_A \ \ \Delta_B \ \ \theta_B \ \ \theta_C]^T$가 된다. 따라서, 이 단순지지보의 평형방정식은 식(1)과 같은 형태로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ -6L & 24 & 0 & 6L \\ 2L^2 & 0 & 8L^2 & 2L^2 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_A \\ \Delta_B \\ \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

여기서,

$L=200\,cm$, $E=2\times10^5 kgf/cm^2$, $I=160000\,cm^4$이다. 식(14)로 나타낼 수 있는 정정 보의 양단에 처짐각이 0을 취하면 양단 고정의 보로 볼 수있다. 따라서, 구속 조건은 $\theta_A=0$, $\theta_C=0$이 된다. 이를 식(4)와 같은 행렬의 형태로 쓸 수 있다.

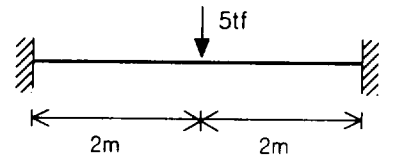
$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad b=0 \tag{15}$$

식(14)와 (15)를 식(11)과 (13)에 사용하면 양단 고정인 보의 절점 변위와 절점의 반력을 얻을 수 있다. 특히, 양의 정치성의 가중 행렬 R의 선택에 관계없이 양단의 처짐각은 0을 만족한다. 그러나 식(13)의 절점 반력에 차이를 나타낸다. 이는 가중치 행렬 R이 구속력의 주요 변수이기 때문이다.

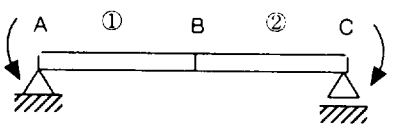
구조 해석에 의하면 경간 중앙에 집중하중이 작용할 경우에 양단부에 절점 모멘트는 다음으로 계산된다.

$$M_A=-M_C=\frac{PL}{4}=\frac{5000\times200}{4}$$
$$=2.5\times10^5 tf\cdot m \tag{16}$$

만약 가중 행렬 R을 강성 행렬 K로 가정한다면, 즉 R=K일 경우에 양단부에서의 기울기는 0일 뿐만아니라, 절점 모멘트는 정확히 구조 해석의 결과와 동일하다. 따라서 가중 행렬 R은 강성 행렬 K로 볼 수 있다.



(a) a beam fixed at both ends



(b) a simply supported beam

Fig. 1. Structural analysis of a beam fixed at both ends.

가중 행렬 R을 K에 의해 대신하면 구속력은 다음으로 쓸 수 있다.

$$F_c=K^{1/2}(AK^{-1/2})^+(b-A\hat{x}) \tag{17}$$

식(17)은 기하학적 조건을 만족하는 구속력을 나타내는 명확한 수식이다.

IV. 구속력의 물리적 의미

식(17)에 의해 주어진 구속력은 단지 주어진 조건을 만족하는 수많은 구속력 중에 자연에 의해 선택된 힘이라고 볼 수 있다. 이 힘의 물리적인 의미는 다음과 같이 볼 수 있다.

식(3)으로부터 구속력은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F_c=Kx-K\hat{x} \tag{18}$$

또한 R=K와 식(19)를 이용하여 식(6)은 다음으로 정의할 수 있다.

$$S=F_c^T K F_c \tag{19}$$

식(4)와 같은 기하학적인 조건들이 부여된다면 R=K를 이용하여 식(7)과 (8)은 각각 다음과 같은 형태를 취한다.

$$AK^{-1/2}K^{1/2}x=b \tag{20}$$

$$K^{1/2}x=(AK^{-1/2})^+ b+[I-(AK^{-1/2})^+(AK^{-1/2})]y \tag{21}$$

여기서, y는 임의의 벡터가 된다.

식(21)의 양변에 $K^{1/2}$을 곱한 후에 $K\hat{x}$을 빼면 구속력에 관한 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$F_c=Kx-K\hat{x}=K^{1/2}(AK^{-1/2})^+b$$
$$+K^{1/2}[I-(AK^{-1/2})^+(AK^{-1/2})]y-K\hat{x} \tag{22}$$

식(22)에서 보는 바와 같이 구속력 F_c는 임의의 벡

터 y로 인하여 무한개를 취할 수 있다. 그러나 식(6)에서와 같이 $x-\hat{x}$를 최소로 하는 것과 유사하게 구속력에 관한 식(22)를 식(19)에 사용하면 결과적으로 구속력의 최소화를 취한다.

$$K^{1/2}(AK^{-1/2})^{+}b+$$
$$K^{1/2}[I-(AK^{-1/2})^{+}(AK^{-1/2})]y-K\hat{x}=0 \quad (23)$$

식(23)에서 $Q=[I-(AK^{-1/2})^{+}(AK^{-1/2})]$이라고 정의하고, $Q^{+}Q=Q$ 인 성질을 이용하면 임의의 벡터 y는 다음과 같은 해를 갖는다.

$$y= K\hat{x}-(AK^{-1/2})^{+}AK^{1/2}\hat{x} +(AK^{-1/2})^{+}(AK^{-1/2})z \quad (24)$$

여기서, z는 또 다른 임의의 벡터가 된다.

식(24)의 벡터 y에 대한 풀이를 식(22)에 사용하면, 구속력에 관한 식(17)을 얻을 수 있다. 따라서, 구속력은 실제의 변위와 평형 조건만을 만족하는 변위 차를 최소로 하기 위해 자연에 의해 제공되는 최소의 힘이라고 볼 수 있다. 즉, 앞선 예제에서 양단부에서 처짐각을 0이 되도록 제공되는 모멘트 2.5×10^{5}tf·m는 자연에 의해 제공되는 최소의 힘이 된다. 즉, 이 모멘트의 값 보다 큰 모멘트에 의해서도 단부의 기울기는 0을 만족하지만 자연은 최소의 힘을 요구함으로 해석될 수 있다.

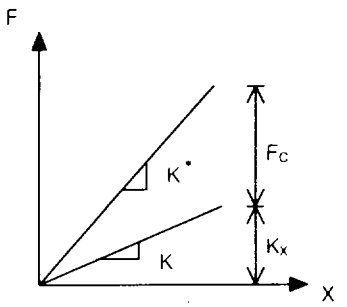


Fig. 2. Graphical interpretation of constraint force.

Fig. 2는 정정 구조물에 의한 힘의 평형방정식과 기하학적인 조건을 포함한 부정정 구조물의 힘의 평형방정식 관계를 도식적으로 나타내고 있다. 이 그림에서 기하학적인 조건으로 강성은 K에서 $K^{*}=K-K^{1/2}(AK^{-1/2})^{+}A$을 취하게 된다. 또한 두 그래프의 차는 구속력을 의미한다.

V. 예 제

5.1. 단순지지보와 켄틸레버 보와의 접합

Fig. 3에서와 같이 양단 단순지지 보1과 캔틸레버 보2가 경간 중앙에서 접합되어 있다고 가정하자. 두 개의 보를 각각 2개의 요소로 이루어졌다 가정하면 이들에 의한 평형방정식은 다음으로 표현된다.

$$\frac{EI}{L_1^3}\begin{bmatrix} 4L_1^2 & -6L_1 & 2L_1^2 & 0 \\ -6L_1 & 24 & 0 & 6L_1 \\ 2L_1^2 & 0 & 8L_1^2 & 2L_1^2 \\ 0 & 6L_1 & 2L_1^2 & 4L_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_A \\ \Delta_B \\ \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25a)$$

$$\frac{EI}{L_2^3}\begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6L_2 \\ 0 & 8L_2^2 & -6L_2 & 2L_2^2 \\ -12 & -6L_2 & 12 & -6L_2 \\ 6L_2 & 2L_2^2 & -6L_2 & 4L_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta_B' \\ \theta_B' \\ \Delta_C' \\ \theta_C' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4\text{tf} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25b)$$

여기서, 보의 물리적인 성질은 전절에서 고려한 보와 동일하며, $L_1=400$ cm, $L_2=300$ cm이다. 이 두 보의 방정식(25)를 벡터 $[\theta_A\ \Delta_B\ \theta_B\ \theta_C\ \Delta_B'\ \theta_B'\ \Delta_C'\ \theta_C']^T$에 관한 방정식으로 조합할 수 있다.

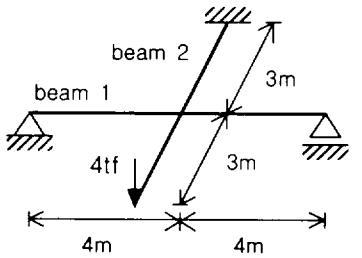
이 두 개의 보는 경간의 중앙점에서 동일한 변위를 나타낸다. 이 조건은 다음으로 정의된다.

$$\Delta_B=\Delta_B' \quad (26)$$

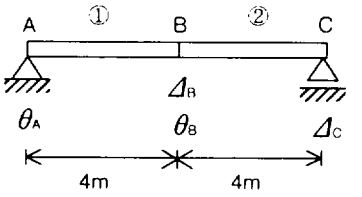
이 조건은 식(4)의 행렬로 나타낼 수 있다.

$$A=[0\ 1\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0],\ b=0 \quad (27)$$

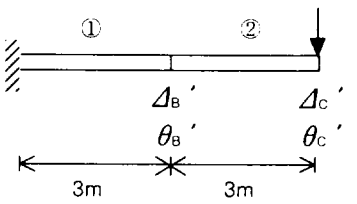
식(25)와 (27)을 식(11)과 (13)에 사용하면 각 절점의 변위와 구속력은 다음으로 계산된다.



(a) a simply supperted beam and a cnatilever beam



(b) a simply supported beam



(c) a cantilever beam

Fig. 3. A structure connected at middle point of a simply supported beam and a cantilever beam.

$$[\theta_A\ \Delta_B\ \theta_B\ \theta_C\ \Delta_B'\ \theta_B'\ \Delta_C'\ \theta_C']^T$$
$$=[0.006\ 1.53\ 0.0\ -0.006\ 1.53\ 0.010\ 5.78\ 0.016]^T$$
$$(F_c)_{\Delta_B}=4.58\text{tf}=-(F_c)_{\Delta_B} \tag{28}$$

여기서, 수직 변위의 단위는 cm, 처짐각은 radian이다. 또한 보1과 보2의 접합점에서의 구속력의 합은 0임을 알 수 있다.

5.2. 단순지지 보와 두 개의 캔틸레버 보

Fig. 4는 단순지지 보가 두 개의 캔틸레버 보의 중앙에 접합된 구조를 나타내고 있다. 두 개의 캔틸레버 보의 자유단에 각각 집중 하중과 모멘트가 작용할 경우에 각 절점의 변위 또한 앞선 방법과 동일하게 얻을 수 있다. 즉, 세 개의 요소로 이루어진 단순지지 보와 각각 두 개의 요소인 캔틸레버 보의 평형 방정식과 접합부의 수직 변위가 동일하다는 조건을 부여하면 각 절점의 변위는 식(11)을 사용하여 계산된다. 보1과 보2의 접합점에서의 수직 변위는 0.127cm, 보1과 보3의 접합점에서의 수직 변위는 0.116cm으로 계산된다. 이 때에 두 접합점에서는 각각 ∓1.01tf와 ±1.20tf의 구속력이 작용한다. 접합점에서 구속력의 합은 0이 되며, 접합점에서 동일의 수직 변위는 이들 힘에 의해 유지됨을 알 수 있다. 물론 이보다 큰 힘에서도 동일의 수직 변위를 보이지만 자연은 이들 힘 중에서 최소의 힘을 나타낸다.

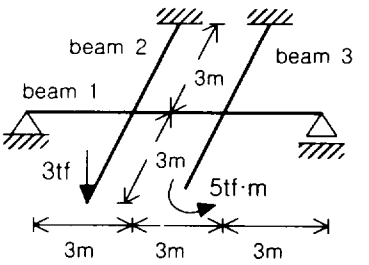


Fig. 4. Two cantilever beams connected with a simply supported beams.

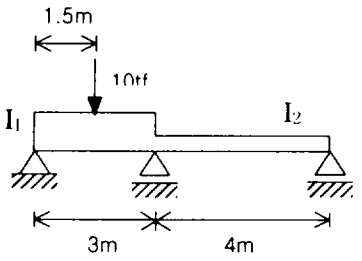
5.3. 단면이 변하는 연속보

앞선 예제들은 식(4)의 우항의 b가 모두 0인 경우를 고려하였다. 이 예제에서는 b가 0이 아닌 경우에 타당성을 검증한다.

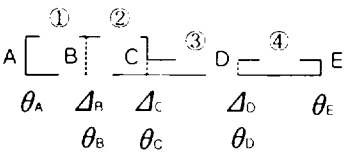
Fig. 4는 단면이 변하는 연속보($I_1=2\times I_2$)를 나타내고 있다. 이 보의 해석은 4개의 요소로 이루어진 단순지지 보의 평형 방정식과 가운데 지점의 구속 조건을 사용하여 절점의 변위를 결정할 수 있다.

만약 Fig. 4의 연속보의 가운데 지점이 30cm 침하가 발생하였다면 가운데 지점의 수직 변위는 더 이상 0이 아니고 30cm가 된다. 즉 이 침하가 구속 조건이 된다. 즉, 식(4)에서 b=30cm가 된다. 이 구조물의 절점 변위 및 처짐각은 다음과 같다.

$$[\theta_A\ \Delta_B\ \theta_B\ \Delta_C\ \theta_C\ \Delta_D\ \theta_D\ \theta_D]^T$$
$$=[0.15\ 20.1\ 0.11\ 30.0\ 0.02\ 17.3\ -0.1\ -0.1]^T \tag{29}$$



(a) a continuous beam



(b) 4 elements

Fig. 5. A continuous beam with two different sections.

가운데 지점의 침하로 인해 식(29)에 대응하는 각 절점들에 구속력은 다음과 같다.

$$(F_C)_{[\theta_A\ \Delta_B\ \theta_B\ \Delta_C\ \theta_C\ \Delta_D\ \theta_D\ \theta_E]^T} = 10^5 \times [0.04\ 0.7\ 0.1\ 1.5\ -0.9\ -0.4\ 0.1\ -0.03]^T$$

여기서, 힘과 모멘트의 단위는 각각 kgf과 kgf · cm 이다.

VI. 결 론

본 연구는 부정정 구조물의 해석에서 정정 구조물의 평형 방정식과 부정정 차수와 동일 수의 기하학적인 조건을 만족하는 구속력을 산정하였다. 그리고 예제를 통하여 그 타당성을 검증하였으며, 이 방법은 정적 해석법에 다양하게 응용될 수 있으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 기하학적 조건을 고려한 실제의 변위 벡터와 자연에 의해 제공하는 힘의 평형 조건을 만족하는 변위의 차를 최소화하여 실제의 변위 산정식을 제시하였다. 이 때에 가중 행렬은 강성 행렬을 취함을 예를 들어 볼 수 있었다.

(2) 기하학적인 조건을 만족하는 구속력을 유도하여 용이한 부정정 구조의 해석 방법을 제시하였다. 이 때에 구속력은 실제의 변위와 평형 조건만을 만족하는 변위 차를 최소로 하기 위해 자연에 의해 제공되는 최소의 힘이 되는 물리적인 성질이 있음을 알 수 있었다.

(3) 매트릭스 구조 해석은 구속력의 명확한 식은 없으나 기하 조건의 수만큼 변위를 제거한 후에 결정되는 과정을 거치며, 이 방법은 변위의 제거없이 명백하게 해를 얻을 수 있었다. 그러나 pseudo inverse의 계산을 필요로 한다.

참고 문헌

1) Udwadia, F. E and Kalaba, R. E., 1992. A New Perspective on Constrained Motion. Peoceedings of the Royal Society of London. pp.407-410.
2) Popov. E.P., 1978. Mechanics of Materials. Prentice-Hall. Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
3) Ben. N. and James. W.D. 1988. Applied Linear Algebra. Third Ed., Prentice-Hall International Inc.
4) Etter. D.M., 1993. Engineering Problem Solving with MATLAB. Prentice-Hall International Inc.
5) Fung. Y.C., 1965. Foundations of Solid Mechanics. Prentice-Hall International Inc.