

무한히 배열된 관군에서 원주방향 Reynolds 응력에 대한 적분해석

김 신*

Integral Analysis on the Azimuthal Reynolds Stresses in Infinitely Arrayed Tube Banks

Sin Kim*

ABSTRACT

The azimuthal Reynolds stresses play an important role in the turbulent flow through non-circular flow domain. In order to obtain the information on the azimuthal Reynolds stresses in infinitely arrayed tube banks theoretically, an integral analysis was performed on the axial momentum equation. The axial momentum equation is integrated from the wall to the maximum velocity line and non-dimensionalized with kinematic viscosity and local friction factor. By the order of magnitude analysis on each term of the integrated equation with well known experimental evidences, a simple and useful relation between integrated azimuthal Reynolds stress and wall shear stress distribution is derived. It is expected that the derived relation can be used to verify the experimental results for azimuthal Reynolds stresses and to understand the turbulent structure in tube banks.

Key words : Azimuthal Reynolds stress, Integral analysis, Infinitely arrayed tube bank

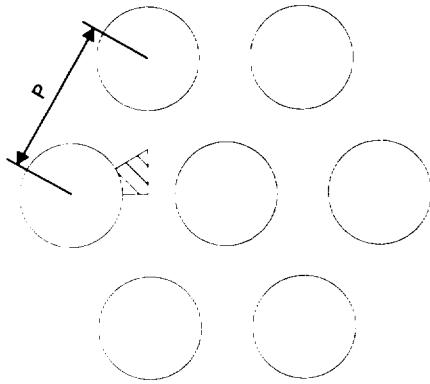
1. 서 론

관군(tube bank)은 공학문제에서 흔히 부딪히게 되는 구조이다. 열교환기나 원자로의 핵연료집합체 등은 관군 구조를 갖는 구조물의 대표적인 경우이다. 따라서, 관군 열유동장에 대한 관심은 오래 전부터

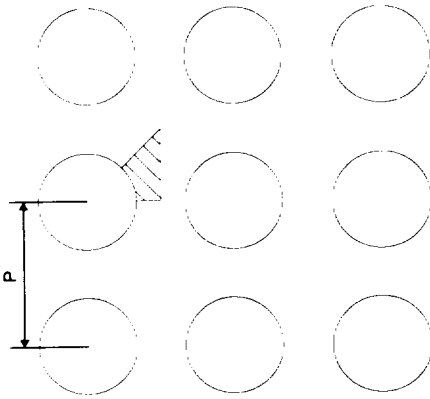
지속되어 왔으며, 층류의 경우에는 1960년경에 Sparrow와 Loeffler¹⁾ 그리고 Sparrow 등에²⁾ 의해 속도장과 온도장에 대한 엄밀해(exact solution)가 각각 유도된 바 있다. 그러나 난류 유동장의 경우에는 그 현상이 매우 복잡하여 이론적인 해석을 시도하기가 쉽지 않다.

비원형 유로에서 난류유동은 벽면과 평행한 방향의 Reynolds 응력 성분을 가지며, 이는 난류 구조에 상당한 영향을 미친다. 특히, Fig. 1과 같이 관군 구조를

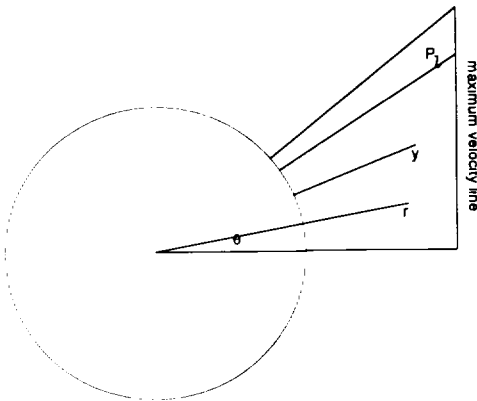
* 제주대학교 에너지공학과
Dept. of Nuclear and Energy Eng., Cheju Nat'l Univ.



(a) Triangular



(b) Square array



(c) Definition of problem domain

Fig. 1 Schematic of tube bank geometry

갖는 핵연료집합체의 경우에 원주방향 Reynolds 응력(azimuthal Reynolds stress) $-\rho \overline{uw}$ 은 난류 확산의 비등방성을 유발하므로 운동량 및 열의 난류 수송 구조에 있어서 중요한 구실을 한다. 따라서, 이 물리량을 측정하기 위한 많은 실험이 수행되어 왔다. 지금까지 관군 구조를 갖는 유동장에 대한 실험에 의하면 벽면과 평행한 방향의 Reynolds 응력(원주방향 Reynolds 응력) $-\rho \overline{uw}$ 은 벽면에 수직한 방향의 Reynolds 응력(반경방향 Reynolds 응력: radial Reynolds stress) $-\rho \overline{uv}$ 와는 매우 다른 경향을 보인다. 즉, 국부 마찰속도(friction velocity)와 벽면에서 최대속도선까지 거리인 프로파일 길이(profile length)로 무차원화된 반경방향 Reynolds 응력의 분포는 원주방향 각도에 관계없이 거의 일치하나, 원주방향 Reynolds 응력 분포는 각도에 의존적이다.³⁾ 또한, 반경방향 Reynolds 응력은 P/D (pitch-to-diameter)에 무관하게 거의 일정한 분포를 보이나, 원주방향 Reynolds 응력은 그 크기나 분포가 모두 P/D 에 민감하게 반응한다.

본 연구에서는 관군 구조의 난류 유동장에서 이러한 원주방향 Reynolds 응력을 축 방향 운동량 방정식에 기초해 적분해석(integral analysis)하여 적분된 원주방향 Reynolds 응력 정보를 추출하고자 한다.

II. 적분해석

관군은 혼합날개나 지지격자가 없는 맨 봉으로 구성되어 있다고 보았으며, 삼각형 또는 사각형 형태로 무한히 배열되어 있다고 가정하였다. 그리고 완전히 발달된 난류 유동장에 대한 해석을 시도하였다. 문제를 단순화하기 위하여 이차유동은 무시하였다.

반경방향 및 원주방향 전단응력을 τ_r 과 τ_θ 라하고, 각 방향의 Reynolds 응력을 각각 $-\rho \overline{uv}$ 과 $-\rho \overline{uw}$ 라 하자. 그리고 p 를 압력이라 하자. 그러면 이차유동이 무시된 완전히 발달한 유동장의 축 방향 운동량 방정식은

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\tau_r - \rho \overline{uv})] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_\theta - \rho \overline{uw})$$

$$= \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{4\rho \overline{u_*^2}}{D_H} \quad (1)$$

로 표현할 수 있으며, 두 번째 등호는 운동량 균형식

$$-\frac{\partial p}{\partial z} A_{xs} = \overline{\tau_w} P_w = \rho \overline{u_*^2} P_w, \quad (2)$$

과 수력학적 지름(hydraulic diameter)에 대한 정의식

$$D_H = \frac{4A_{xs}}{P_w} \quad (3)$$

으로부터 얻을 수 있다. 여기에서 A_{xs} 와 P_w 은 유동 단면적과 젖은 둘레길이(wetted perimeter)이다. 그리고 $\overline{\tau_w}$ 은 평균 벽면 전단응력(wall shear stress)이고 $\overline{u_*}$ 는 $\overline{u_*} = \sqrt{\overline{\tau_w}/\rho}$ 로 정의된 평균 마찰속도(friction velocity)이다.

식 (1)에 r 을 곱하고 봉 표면 $r=R$ 에서 최대속도선 $r=R+P_f(\theta)$ 까지 적분하기로 하자. 여기에서 $P_f(\theta)$ 는 프로파일 길이(profile length)로 θ 의 함수이다. 식 (1)의 좌변 첫 번째 항에 대한 적분은

$$\begin{aligned} & \int_R^{R+P_f} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\tau_r - \rho \overline{uw})] r dr \\ &= [r(\tau_r - \rho \overline{uw})]_R^{R+P_f} \\ &= (R+P_f)(\tau_{rM} - \rho \overline{uw}_M) - R\tau_w \end{aligned} \quad (4)$$

으로 얻을 수 있다. 하첨자 M 은 최대 속도선에서의 값을 의미한다. 좌변 두 번째 항에 대한 적분은 Leibnitz 규칙에 의해

$$\begin{aligned} & \int_R^{R+P_f} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_\theta - \rho \overline{uw}) r dr \\ &= \int_R^{R+P_f} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_\theta - \rho \overline{uw}) dr \\ &= \frac{d}{d\theta} \left\{ \int_R^{R+P_f} (\tau_\theta - \rho \overline{uw}) dr \right\} \\ & \quad - \frac{dP_f(\theta)}{d\theta} (\tau_{\theta M} - \rho \overline{uw}_M) \end{aligned} \quad (5)$$

으로 바꿔 쓸 수 있다. 그리고 우변은

$$-\int_R^{R+P_f} \frac{4\rho \overline{u_*^2}}{D_H} r dr =$$

$$-\frac{4\rho \overline{u_*^2}}{D_H} \frac{1}{2} [(R+P_f)^2 - R^2] \quad (6)$$

이 된다. 한편 프로파일 길이의 정의로부터

$$P_f(\theta) = R \left(\frac{P/D}{\cos \theta} - 1 \right), \quad (7)$$

$$\frac{dP_f(\theta)}{d\theta} = \frac{P \sin \theta}{2 \cos^2 \theta} = \tan \theta (R+P_f)$$

이고, 최대 속도선에서 수직방향 응력이 0이라는 대칭조건으로부터

$$\begin{aligned} \tau_n - \rho \overline{uw}_n &= (\tau_{rM} - \rho \overline{uw}_M) \cos \theta \\ -(\tau_{\theta M} - \rho \overline{uw}_M) \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

을 얻을 수 있다. 따라서, 식 (7)과 (8)을 이용하여 식 (4)-(6)을 결합하면 적분 운동량 식은

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\theta} \left\{ \int_R^{R+P_f} (\tau_\theta - \rho \overline{uw}) dr \right\} - R\tau_w \\ &= -\rho \overline{u_*^2} \frac{R}{D_H/D} \left[\left(\frac{P/D}{\cos \theta} \right)^2 - 1 \right] \end{aligned} \quad (9)$$

이 된다. 원주방향 전단응력이 속도의 함수로

$$\tau_\theta = \frac{\mu}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad (10)$$

와 같이 표현되므로, 이를 식 (9)에 대입하고 다시 한번 더 Leibnitz 규칙을 적용하면

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\theta^2} \int_R^{R+P_f} \frac{\mu}{r} U dr - \frac{d}{d\theta} \int_R^{R+P_f} \rho \overline{uw} dr \\ & \quad - \mu \frac{d}{d\theta} (U_M \tan \theta) - R\tau_w \\ &= -\rho \overline{u_*^2} \frac{R}{D_H/D} \left[\left(\frac{P/D}{\cos \theta} \right)^2 - 1 \right] \end{aligned} \quad (11)$$

을 얻는다.

한편, 평균 마찰속도에 대한 국부 마찰속도의 비율

$$F(\theta) = \frac{u_*}{u_*} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho u_*^2}} \quad (12)$$

로 정의하고, 식 (11)을 국부 마찰속도 u_* 와 동점성 계수 ν 로 무차원화하면 무차원화된 적분 운동량 방정식은

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2}{d\theta^2} \left[F \int_0^{P_i} \frac{U^+}{R^+ F + y^+} dy^+ \right] \\
 & - \frac{d}{d\theta} \left[F \int_0^{P_i} \overline{uw^+} dy^+ \right] \\
 & - \frac{d}{d\theta} (U_M^+ F \tan \theta) - \overline{R^+} F^2 \\
 & = - \left[\left(\frac{P/D}{\cos \theta} \right)^2 - 1 \right] \frac{\overline{R^+}}{D_H/D}
 \end{aligned} \quad (13)$$

이 된다. 여기에서, 상첨자 +는 무차원화된 양임을 나타내며 y^+ 는 무차원화된 벽면으로부터의 거리이다. $\overline{R^+}$ 는 R 을 무차원화할 때 평균 마찰속도가 사용되었음을 나타내는데,

$$\overline{R^+} = \frac{R\overline{u_*}}{\nu} = \frac{fRe}{16D_H/D} \quad (14)$$

로 쓸 수 있으며 상수이다. 여기서 f 는 Darcy 마찰인자(friction factor)로 $f = 8\overline{\tau_w}/\rho U^2$ 이다. 일반적으로 마찰인자는 Re 수의 함수로 다음과 같이 표현되므로 $\overline{R^+}$ 는 Re 수와 P/D 의 함수이다:

$$f = aRe^{-\beta} \quad (15)$$

여기에서, a , β 는 실험상수로 Rehme는⁴⁾ 각각 $a = 0.18$, $\beta = 0.2$ 를 제시하고 있다.

Table 1 Empirical coefficients for wall shear distribution function of Eq. (20a)

Triangular array			
P/D	1.05	1.1	1.2
a	0.25	0.12	0.02
b	0.02	0.02	0.01
Square array			
P/D	1.11	1.15	1.19
a	0.20	0.09	0.07
b	0.02	0.02	0.02

식 (13)의 각 항의 크기를 비교하기 위하여 $P/D = 1.1$ 인 삼각 봉배열을 예로 살펴보기로 하자. 많은 실험자료에 의하면 큰 오차 없이 무차원 속도분

포가 보편 속도분포(universal velocity profile)을 따른다고 가정할 수 있다. Reynolds 수가 충분히 크다면 적분 구간 내의 대부분 영역에서 무차원 속도분포는

$$u^+ = 2.5 \ln(y^+) + 5.0$$

를 따른다고 볼 수 있다. 그리고 표 1에 나타나 있듯이 Lee가⁵⁾ 인용한 바에 의하면 $P/D = 1.1$ 인 삼각 봉배열인 경우에 실험적으로 얻어진 벽면 전단응력 분포는

$$F^2(\theta) = 1 - 0.12 \cos 6\theta - 0.02 \cos 12\theta$$

으로 근사할 수 있다. 이상을 이용하여 $Re = 100000$ 이라 할 때 식 (13)의 좌변 첫 번째, 세 번째, 네 번째, 그리고 우변의 분포는 Fig. 2와 같다. 좌변 네 번째 항과 우변의 크기정도(order of magnitude)는 $O(100)$ 이고, 좌변 첫 번째 및 세 번째 항의 크기 정도는 $O(10)$ 이다. 특히, Fig. 2a에서 볼 수 있듯이 좌변 첫 번째 항과 세 번째 항의 합은 크기정도가 $O(1)$ 이므로 이 두 항은 무시하여도 타당하다:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left[F \int_0^{P_i} \frac{U^+}{R^+ F + y^+} dy^+ \right] \sim O(10), \quad (16a)$$

$$- \frac{d}{d\theta} \left[F \int_0^{P_i} \overline{uw^+} dy^+ \right] \sim ?, \quad (16b)$$

$$- \frac{d}{d\theta} (U_M^+ F \tan \theta) \sim O(10), \quad (16c)$$

$$- \overline{R^+} F^2 \sim O(100), \quad (16d)$$

$$- \left[\left(\frac{P/D}{\cos \theta} \right)^2 - 1 \right] \frac{\overline{R^+}}{D_H/D} \sim O(100), \quad (16e)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2}{d\theta^2} \left[F \int_0^{P_i} \frac{U^+}{R^+ F + y^+} dy^+ \right] \\
 & - \frac{d}{d\theta} (U_M^+ F \tan \theta) \sim O(1).
 \end{aligned} \quad (16f)$$

이상을 정리하면 식 (13)을

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{d\theta} \left[F \int_0^{P_i} \overline{uw^+} dy^+ \right] + \overline{R^+} F^2 \\
 & = \left[\left(\frac{P/D}{\cos \theta} \right)^2 - 1 \right] \frac{\overline{R^+}}{D_H/D}
 \end{aligned} \quad (17)$$

로 근사할 수 있다. 새로운 변수

$$\eta = \frac{y}{P}$$

을 도입하여 식 (17)을 다시 쓰면

$$\frac{d}{d\theta} \left[F^2 \overline{R^+} \left(\frac{P/D}{\cos \theta} - 1 \right) \int_0^1 \overline{uw^+} d\eta \right] + \overline{R^+} F^2 = \left[\left(\frac{P/D}{\cos \theta} \right)^2 - 1 \right] \frac{\overline{R^+}}{D_H/D}$$

이 되므로, Re 수에 대한 의존도를 포함하는 상수 매개변수인 $\overline{R^+}$ 는 사라지게 된다:

$$\frac{d}{d\theta} \left[F^2 \left(\frac{P/D}{\cos \theta} - 1 \right) \int_0^1 \overline{uw^+} d\eta \right] + F^2$$

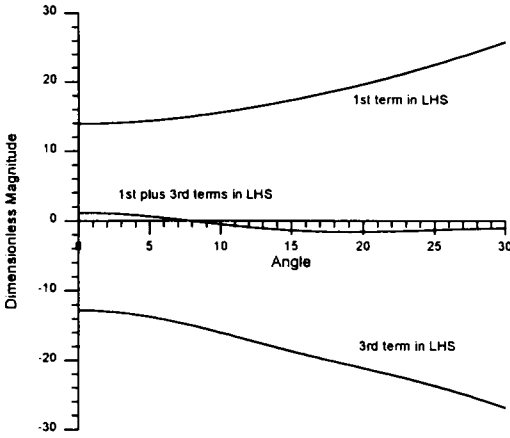


Fig. 2a Evaluation of integrated momentum equation : Eqs. (16a) and (16c)

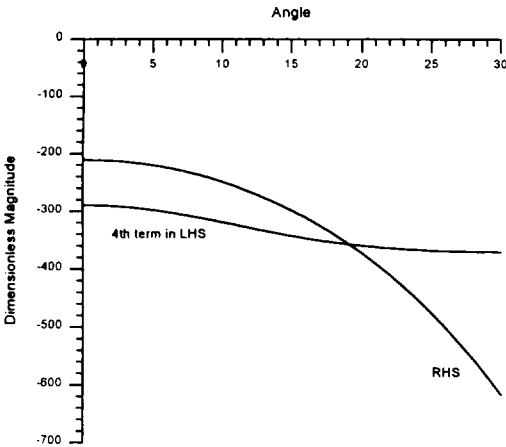


Fig. 2b Evaluation of integrated momentum equation : Eqs. (16d) and (16e)

$$= \left[\left(\frac{P/D}{\cos \theta} \right)^2 - 1 \right] \frac{1}{D_H/D} \quad (18)$$

따라서, 벽면 전단응력 분포함수인 $F^2(\theta)$ 가 Re 수와 무관하다면 원주방향의 적분 Reynolds 응력 분포는 Re 수와 무관함을 알 수 있다. 실제로 Lee가⁵⁾ 언급하였듯이 많은 실험 증거들은 벽면 전단응력 분포가 Re 수에 무관하다는 것을 알려주고 있으므로, 식 (18)은 $-\overline{uw^+}$ 분포가 Re 수에 무관하다는 정보를 제공해 주고 있다.

식 (18)을 적분하고 $\theta = 0$ 과 $\theta = \theta_{max}$ 에서 $-\overline{uw^+} = 0$ 이라는 경계조건을 부여하면 원주방향의 적분 Reynolds 응력 분포를 벽면 전단응력 분포함수의 항으로 표현할 수 있다:

$$\int_0^1 \overline{uw^+} d\eta = \frac{\int F^2 d\theta - \left[(P/D)^2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \theta \right] \frac{1}{D_H/D}}{F^2 \left(\frac{P/D}{\cos \theta} - 1 \right)} \quad (19)$$

많은 실험 증거들에 의하면 P/D 가 작은 경우에는 ($P/D < \sim 1.2$) 벽면 전단응력 분포가 일정하다고 보기 어려우나, 대체로 $P/D > \sim 1.3$ 의 범위에서는 벽면 전단응력 분포를 일정하다고 볼 수 있다. 따라서, $P/D \leq 1.2$ 인 경우에는 Lee가⁵⁾ 제시한 실험적인 분포식

$$\begin{aligned} F^2(\theta) &= 1 - a \cos 6\theta - b \cos 12\theta \\ &\quad (\text{triangular array}) \\ &= 1 - a \cos 4\theta - b \cos 8\theta \\ &\quad (\text{square array}) \end{aligned} \quad (20a)$$

을 사용하고, 그 이상인 경우에는

$$F^2(\theta) = 1 \quad (20b)$$

를 사용하여 원주방향의 적분 Reynolds 응력 분포를 구하면 Fig. 3과 같다. Fig. 3에서 보듯이 P/D 가 증가하면 원주방향 Reynolds 응력의 크기는 급격히 줄어들며, 사각배열의 경우가 삼각배열의 경우보다 원주방향 Reynolds 응력이 큼을 알 수 있다. 이는 사각

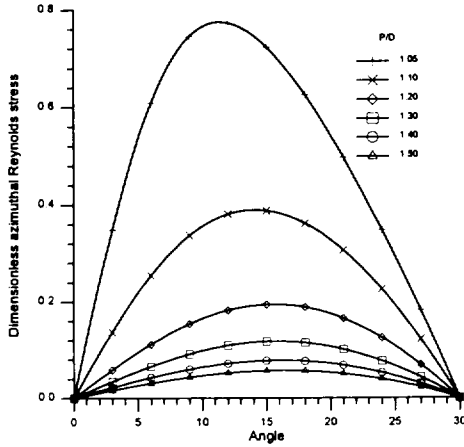


Fig. 3a Dimension azimuthal Reynolds stress distribution (triangular array)

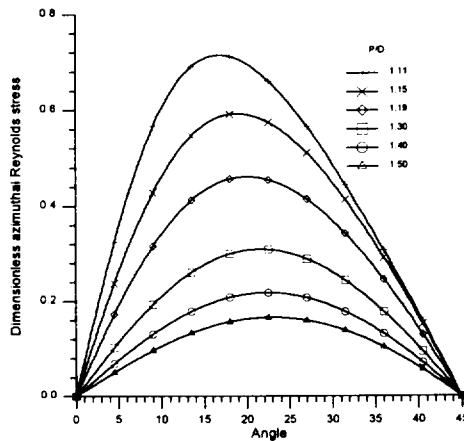


Fig. 3b Dimension azimuthal Reynolds stress distribution (square array)

배열에서 원주방향 난류 수송이 보다 활발함을 의미하는 것으로, 같은 P/D 에서 비교할 때 사각배열의 경우가 삼각배열에 비해 와류확산의 비등방성이 상대적으로 강력하다는 것을 알려주고 있다. 이는 Kim과 Park이⁶⁾ 유동맥동 현상에 기초해 비등방성 인자 척도평가식을 유도하면서 얻은 결과와도 일치한다. 그리고, 벽면 전단응력의 분포가 무시될 수 있을 정도로 P/D 가 큰 경우에도 사각배열의 경우에는 $P/D < 1.4$ 에서 원주방향 Reynolds 응력의 최대값이 대략 0.2 이상의 값을 가지므로 원주방향 난류 수송

에 상당한 기여를 하고있음을 알 수 있다.

V. 결론

무한히 배열된 관군에서 원주방향 Reynolds 응력에 대해 이론적인 해석을 시도하였다. 이차유동이 무시된 축 방향 운동량 방정식을 적분하고, 각 항에 대한 크기 비교를 통해 크기정도가 작은 항들을 무시함으로써 원주방향 Reynolds 응력 분포와 벽면 전단응력 분포식을 얻었다. 이 식에는 단지 매개변수 P/D 만이 나타날 포함할 뿐 Re 수와 관련된 매개변수를 포함하지 않으므로 이들 분포의 관계가 Re 에 무관함을 알 수 있었다. 또한 실험적으로 벽면 전단응력 분포가 Re 수에 무관함이 알려져 있으므로 원주방향 Reynolds 응력 분포 역시 Re 수에 무관하다는 결론을 내릴 수 있다.

실험적으로 알려진 벽면 전단응력 분포식을 이용하여 삼각 및 사각배열에서 P/D 의 변화에 따라 원주방향 Reynolds 응력 분포의 변화를 살펴보았다. 그 결과 사각배열의 경우가 삼각배열의 경우에 비해 원주방향 Reynolds가 큼을 알 수 있었으며, 따라서 동일한 P/D 에서 사각배열의 경우가 와류확산의 비등방성이 보다 강력하다는 결론을 내릴 수 있었다.

그리고, P/D 가 충분히 큰 경우에는 벽면 전단응력 분포가 무시될 수 있으므로 본 연구에서 얻어낸 관계식을 이용해 벽면 전단응력에 대한 정보없이도 적분 원주방향 Reynolds 응력 분포를 구할 수 있다. 따라서, 이러한 경우에는 실험 결과를 평가하는데도 유용하게 이용될 수 있으리라 판단된다.

인용부호

- A_{cs} cross sectional flow area
- D tube diameter
- D_H hydraulic diameter ($= 4A_{cs}/P_w$)
- F distribution function for friction velocity ($= u_* / \bar{u}_*$)

f	friction factor ($= 8\overline{\tau_w}/\rho U^2$)	and ν over bar averaged value
p	pressure	
P/D	pitch-to-diameter	
P_f	profile length	
P_w	wetted perimeter	
r	radial coordinate	
R	tube radius	
Re	Reynolds number ($= UD_H/\nu$)	
U	mean axial velocity	
u, v, w	velocity fluctuation for axial, radial, and azimuthal velocity component	
u_*	friction velocity ($= \sqrt{\tau_w/\rho}$)	
y	distance from the wall	
z	axial coordinate	

Greek

α, β	empirical constants for friction factor correlation
η	relative distance from the wall ($= y/P_f$)
θ	azimuthal coordinate
μ	viscosity
ν	kinematic viscosity
ρ	density
$-\rho\overline{uv}$	radial Reynolds stress
$-\rho\overline{uw}$	azimuthal Reynolds stress
τ	shear stress
τ_w	wall shear stress

Subscript

M	value at the maximum velocity line
r	radial direction
θ	azimuthal direction

Symbol

+ non-dimensionalized value based on u_*

감사의 글

본 연구는 과학기술부에서 시행한 원자력기초연구사업의 지원을 받아 수행되었습니다. 지원에 감사드립니다.

REFERENCES

- 1) Sparrow, E.M., Loeffler, A.L., 1959, Longitudinal Laminar Flow between Cylinders Arranged in Regular Array, A.I.Ch.E. J., Vol. 5, pp. 325-330.
- 2) Sparrow, E.M., Loeffler, A.L., Hubbard, H.A., 1961, Heat Transfer to Longitudinal Laminar Flow between Cylinders, Trans. ASME J. Heat Transfer, Vol. 83, pp. 415-422.
- 3) Meyer, L., 1991, Measurements of Turbulent Velocity and Temperature in a Central Channel of a Heated Rod Bundle, KfK Report 4818, Kernforschungszentrum Karlsruhe, Germany.
- 4) Rehme, K., 1992, The Structure of Turbulence in Rod Bundles and the Implications on Natural Mixing between the Subchannels, Int. J. of Heat Mass Transfer, Vol. 35, pp. 567-581.
- 5) Lee, K.B., 1995, Analytical Prediction of Subchannel Friction Factor for Infinite Bare Rod Square and Triangular Arrays of Low Pitch to Diameter Ratio in Turbulent Flow, Nucl. Eng. Des., Vol. 157, pp. 197-203.
- 6) Kim, S. and Park, G.-C., 1997, Estimation of Anisotropic Factor and Turbulent Mixing Rate in Rod Bundles Based on Flow Pulsation Phenomenon, Nucl. Tech., Vol. 117, pp. 340-352.