

# 호프필드 신경회로망의 입력단에서의 안정성 분석

김 용 완\* · 강 민 제\*\*

## Stability Analysis of Input Space for Hopfield Neural Network

Yong-Wan Kim\* and Min-Je Kang\*\*

### ABSTRACT

The negative weight often can be seen in Hopfield neural network, which is difficult to implement negative conductance in circuits. So we replaced the negative weight with the positive by using inverting neurons. And It has been shown that the input conductance affects the stability of the circuits greatly, and this paper offers the way to decide the appropriate value.

**Key words** : Neural network, input analysis

### 1. 서 론

시그모이드 형태의 특성곡선을 갖는 신경세포를 사용한 Hopfield 신경회로망은 계산에너지 함수 즉, 시스템의 Lyapunov 함수를 최소화하면서 안정되게 수렴함을 보였다.<sup>1,2)</sup>

그 이후로 이러한 시스템의 특성을 연상 기억, 패턴 인식, 최적화 문제 등 많은 부문에 응용해왔다.<sup>1-3)</sup> 이러한 응용회로들을 구현하는데 있어서 몇 가지 문제점이 있는데 그 중에 하나가 음의 연결 강도이다. Hopfield 신경회로망에서 음의 연결강도들을 종종 볼 수 있는데, 음의 저항을 회로에서 구현하는 것은 쉽지 않다. 따라서 이것을 양의 연결강도로 바꾸는 방

법을 논의하고 바꾸는 과정에서 고려해야 할 점들을 제기한다.

뉴런의 입력단에 연결된 컨덕턴스가 그 값에 따라 회로의 안정성에 커다란 영향을 미치는데, 이 논문에서 그 컨덕턴스의 값이 어떻게 영향을 미치며 그 값을 적절하게 선택하는 방법에 대해 논의한다.

### II. Hopfield Model for Neural Network

Fig. 1은 궤환성을 갖는 단층신경회로망의 전기적 모델을 보여준다. 이런 형태의 신경망은 궤환성을 가지며 뉴런의 출력들이 다시 다른 뉴런의 입력에 연결 강도( $w_{ij}$ )들을 통하여 연결된다.  $j$ 번째 뉴런의 출력( $v_j$ )과  $i$ 번째 뉴런의 입력( $u_i$ )을 연결하는 연결강도( $w_{ij}$ )들은 전기적 모델에서는 컨덕턴스를 사용하며, 뉴런의 출력값은 입력단에 매핑되는 함수로써 주로

\* 제주대학교 대학원

Graduate School, Cheju Nat'l Univ.

\*\* 제주대학교 전기전자공학부

Dept. of Electronics, Cheju Nat'l Univ.

시그모이드 함수가 쓰인다.<sup>1)</sup>

신경회로망의 전기적 모델에서 뉴론의 입력단에서 새운 KCL(Kirchhoff Current Law)을 이용하여 다음의 공식이 유도된다.

$$C_i \left( \frac{du_i}{dt} \right) = i_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n w_{ij} v_j - u_i \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n w_{ij} + g_i \right) \quad (1)$$

식(1)의 우변은 캐패시터  $C_i$ 로 유입되는 전류의 총량을 나타내며, 노드  $i$  뉴론의 입력에 연결된 전체 컨덕턴스를  $G_i$ 로 다음과 같이 나타내면

$$G_i \equiv \sum_{j=1, j \neq i}^n w_{ij} + g_i$$

식(1)은 다음과 같이 간략히 나타내어진다.

$$C_i \left( \frac{du_i}{dt} \right) = i_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n w_{ij} v_j - u_i G_i \quad (2)$$

벡터형식으로 상태방정식과 출력방정식을 다음과 같이 표현 가능하다.

$$C \left( \frac{du}{dt} \right) = Wv(t) - Gu(t) + i(t) \quad (3)$$

$$v(t) = f(u(t)) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda u}} \quad (4)$$

$n$ 차원의 상태방정식으로 표현되는 시스템의 어떤 계산에너지함수의 값을 따라 점근적으로 안정되게 수렴하여 간다면 그 어떤 계산에너지함수를 그 시스템의 Lyapunov 함수라 한다. Fig. 1에서 신경회로망의 Lyapunov 함수는 다음과 같이 알려져 있다.<sup>2)</sup>

$$E(v) = -\frac{1}{2} v' W v - i' v + \sum_{i=1}^n G_i \int_{\frac{1}{2}}^{v_i} f_i^{-1}(z) dz \quad (5)$$

Fig. 1의 시스템에서 뉴론의 출력  $v$ 는 이 계산에너지함수가 감소하는 방향으로 변하면서 안정되게 수렴해 간다.

식(5)의 세 번째 항은 뉴론 매핑함수의 역함수를

적분한 것으로 이것을 미분하면 다음의 관계가 성립한다.

$$\frac{d}{dv_i} \left( G_i \int_{\frac{1}{2}}^{v_i} f_i^{-1}(z) dz \right) = G_i u_i \quad (6)$$

연결강도 행렬이 대칭인 점을 고려하여 식(5)을 chain rule를 이용하여 시간에 관해 미분해보면 다음과 같다.

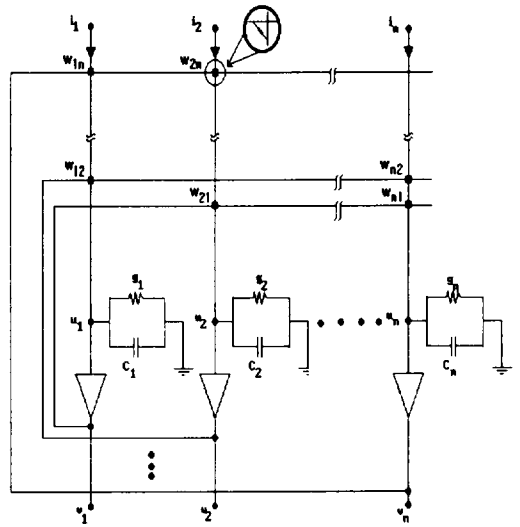


Fig. 1 The electrical model of Hopfield neural network

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{dE}{dv} \frac{dv}{dt} \\ &= (-Wv - i + Gu)' \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (7)$$

식(3)을 이용하여 식(7)을 재정리하면 다음과 같다.

$$\frac{dE}{dt} = - \left( C \frac{du}{dt} \right) \frac{dv}{dt} \quad (8)$$

그런데, 뉴론의 출력  $v$ 는 입력  $u$ 의 함수이므로 chain rule을 사용하면 식(8)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -C \frac{du}{dt} \frac{du}{dt} f'(u) \\ &= -C \left( \frac{du}{dt} \right)^2 f'(u) \end{aligned} \quad (9)$$

$f(u)$ 는 시그모이드 함수이므로 항상 증가 함수이고 미분 값은 양이다. 따라서, 식(9)의 우변은 항상 음이므로 이 시스템은 시간의 흐름에 따라 에너지가 감소하는 방향으로 수렴하는 시스템을 알 수 있다.

### III. Inhibitory Synapses Model

신경의 뉴론과 뉴론을 연결하는 시냅스는 서로 다른 강도로 연결되어 있는데 그 중에는 어떤 자극이 잘 전달되도록 하는 것이 있는가 하면, 자극이 전달되는 것을 억제하는 것이 있다. 신경회로망에 관한 책이나 논문들을 보면 연결강도가 종종 음수인 경우를 볼 수 있는데, 이 경우가 자극 전달을 억제하는 경우이다<sup>4)</sup>. 이 경우 회로로 구현할 때 이 연결강도가 음수인 것 때문에 음의 저항을 써야한다. 하지만 음의 저항을 구현하는 것이 어렵고 복잡하므로 다른 방법을 생각해본다. 연결강도는 다른 뉴론의 출력이 또 다른 뉴론의 입력으로 변환되어 들어오는 신호를 연결할 때의 강도를 말하므로 뉴론의 출력을 inverse 시켜서 다른 뉴론의 입력으로 연결하면 양의 연결강도로 충분히 음의 연결강도의 효과를 낼 수 있다.

시켜서 양의 연결강도를 사용할 때를 비교해 보겠다.

Fig. 2는 뉴론의 출력단에 인버터를 사용해서 만일 변환되는 연결강도가 음이면  $\overline{V_j}$ 로 연결되고 변환되는 연결강도가 양이면  $V_j$ 로 연결시킨다.

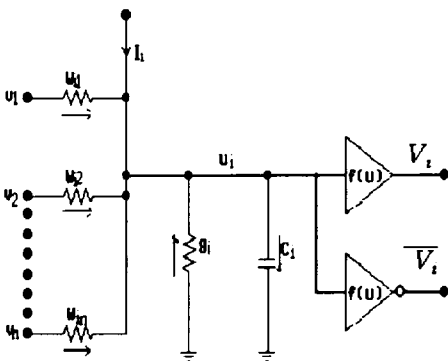
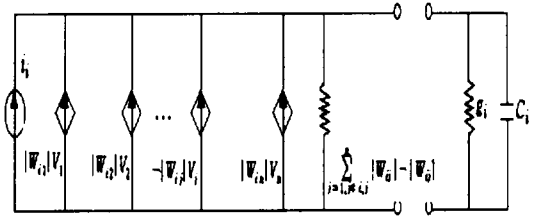
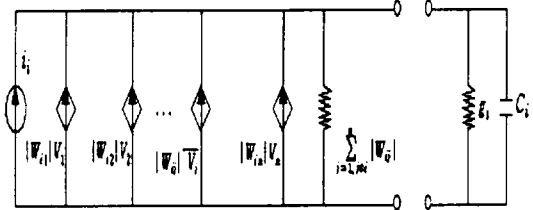


Fig. 2 Neuron using inverter in outspace

하지만 이때 과연 단순히 뉴론의 출력을 inverting 시켜준 것 만으로도 같은가를 생각해 봐야 되는데, 다음 그림에서 음의 연결강도를 사용할 때와 inverting



a) Using non-inverting neuron



b) Using inverting neuron

Fig. 3 Equivalent circuits for the negative  $W_j$

Fig. 3a와 Fig. 3b는 각각 j번째 뉴론의 출력과 j번째 뉴론의 입력을 연결하는 시냅스  $W_j$ 가 음인 경우 non-inverting 뉴론과 inverting 뉴론을 사용한 노턴의 등가회로를 나타낸 것이다. 그런데 자세히 보면 두 그림 모두 변환되어 들어가는 전류량은 서로  $-|W_j|V_j$ ,  $|W_j|\overline{V_j}$ 로 같지만, 뉴론의 입력단에서 들여다 본 등가 컨덕턴스가 다르다는 것을 알 수 있다. 등가 컨덕턴스는 서로 Fig. 3a에서는

$\sum_{j=1,n} |W_j| - |W_j|$ , Fig. 3b에서는  $\sum_{j=1,n} |W_j|$ 이 된다. 이들 연결강도는 뉴론의 입력단에 연결된  $g_j$ 와 함께 뉴론에 연결된 전체 컨덕턴스, 즉  $G_i$ 를 나타내는데, 이것은 식 (5)에서 볼 수 있듯이 Lyapunov 에너지 함수의 제 3항에 있는  $G_i$ 의 값이다.

여기서  $G_i$ 는 뉴론의 입력단에서의 안정성에 크게

영향을 미치고, 또한 신경회로망의 전체 에너지가 극소점으로 수렴해 나가는데 영향을 미친다. 따라서 뉴런의 출력단에 inverter를 달아서 연결강도를 양으로 변환시킬 때는 뉴런에 연결된 전체 컨덕턴스  $G_i$ 의 값이 바뀌지 않도록 뉴런의 입력단에 연결된  $g_i$ 의 값을 적절히 변경해주어야만 한다.

#### IV. Stability Analysis of Input space

이 절에서는 입력단의 컨덕턴스가 뉴런의 입력의 안정성에 얼마나 영향을 끼치는지를 분석한다. Fig. 4에서는  $i$ 번째 뉴런의 입력단에서의 회로를 간략히 보여주고 있다.

뉴런의 입력단으로 들어오는 전체 전류를 표시하면<sup>6)</sup>,

$$I_i = i_i + \sum_{j=1}^n w_{ij}v_j \quad (10)$$

여기서  $i_i$ 는 외부 입력 전류이다.

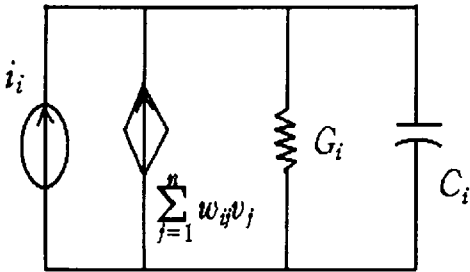


Fig. 4 Equivalent circuit of  $i$ th neuron in input space

식 (1)은 다음과 같이 상태 방정식으로 간략히 표현된다.

$$C_i \frac{du_i}{dt} = -G_i u_i + I_i \quad (11)$$

이전 절에서 보았듯이 시스템의 출력은 시간이 지남에 따라 에너지 함수를 감소시키면서 점근적으로

안정되게 수렴해간다. 따라서 일정한 시간이 지난 후 출력은 안정되고, 제한되어 오는 전류  $\sum_{j=1}^n w_{ij}v_j$ 는 상수로 취급할 수 있다. 따라서 출력이 안정된 후 전체 전류  $I_i$ 는 상수로 취급할 수 있다.

식 (11)은 다음과 같이 행렬 형태로 표시될 수 있다.

$$C \frac{du}{dt} = -Gu + I \quad (12)$$

이 방정식의 해는 Laplace 변환을 취해서 구할 수 있는데,

$$U(s) = [sI + \frac{G}{C}]^{-1} u(0) + [sI + \frac{G}{C}]^{-1} \frac{I}{Cs} \quad (13)$$

$$= \begin{bmatrix} s + \frac{G_1}{c_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s + \frac{G_2}{c_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s + \frac{G_n}{c_n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ \vdots \\ u_n(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{I_1}{c_1 s} \\ \frac{I_2}{c_2 s} \\ \vdots \\ \frac{I_n}{c_n s} \end{bmatrix}$$

여기에서  $u(0)$ 는 출력이 안정되었다고 여겨지는 시간에서의 입력 전압이다.

지금부터 출력이 안정된 후에 입력단에서의 안정성에 대해 논의해 보겠다. 서로 다른 입력 컨덕턴스의 값에 대한 입력단의 안정성을 조사해보면,

i)  $G_i < 0$  ( $g_i < -\sum_{j=1}^n w_{ij}$ )

식 (13)을 다시 정리해보면,

$$U_i(s) = (u_i(0) - \frac{I_i}{G_i}) \frac{1}{(s + \frac{G_i}{C_i})} + \frac{I_i}{G_i} \frac{1}{s} \quad (14)$$

식 (14)을 역 Laplace 변환을 취하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$u_i(t) = (u_i(0) - \frac{I_i}{G_i}) e^{-\frac{G_i t}{C_i}} + \frac{I_i}{G_i} \quad (15)$$

$G_i < 0$  이므로,  $u_i$ 는 지수함수적으로 변한다. 따라서 이 경우의 입력단은 불안정하다.

ii)  $G_i = 0$  ( $g_i = -\sum_{j=1}^n w_{ij}$ )

앞에 언급된 바와 같이 출력이 안정된 후에  $I_i$ 는 상수로 간주할 수 있으므로 식(12)는 다음과 같이 풀 수 있다.

식 (13)을 다시 정리해 보면,

$$U_i(s) = u_i(0) \frac{1}{s} + \frac{I_i}{c_i} \frac{1}{s^2} \quad (16)$$

식 (16)을 역 Laplace 변환을 취하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$u_i(t) = u_i(0) + \frac{I_i}{c_i} t \quad (17)$$

식 (17)에서 알 수 있듯이  $u_i$ 는 시간에 대해서 선형적으로 변한다. 따라서 이 경우도 입력단은 불안정하다.

$$\text{iii) } G_i > 0 \quad (g_i > - \sum_{j=1}^n w_{ij})$$

이 경우는 식 (15)에서 보듯이 자연 응답의 해가 시간에 따라 지수함수적으로 감소하므로 식 (18)과 같이 된다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_i(t) = \frac{I_i}{G_i} \quad (18)$$

따라서 이 경우 입력단은 시간이 일정 시간이 지나면 어떤 특정한 값으로 수렴한다. 따라서 이 시스템의 입력단은 안정하다.

### V. Simulation

시뮬레이션을 위해 2비트 A/D 컨버터가 사용되었다. 2비트 A/D 컨버터는 신경회로망을 이용한 최적화 문제를 해결하는 예제로 종종 사용되는 회로이다. 시뮬레이션은 Microsim's Pspice 버전 8.0으로 수행되었다.

여기서  $x$ 는 아날로그 입력이며, 연결강도와 바이어스 전류는 다음과 같다.

$$w = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \\ 2x - 2 \end{bmatrix}$$

Fig. 5에 이 논문에서 사용된 회로를 나타내었다. 처음에는 연결강도가 음인 뉴론의 출력과 뉴론의 출력에 인버터를 사용해서 연결강도를 양인 컨덕턴스의 뉴론의 출력을 비교하였다. 그 과정에서 연결강도의 등가저항의 변화를 비교하여 그 차이만큼 뉴론의 입력단에 연결된 컨덕턴스의 값을 조정하여 주었다.

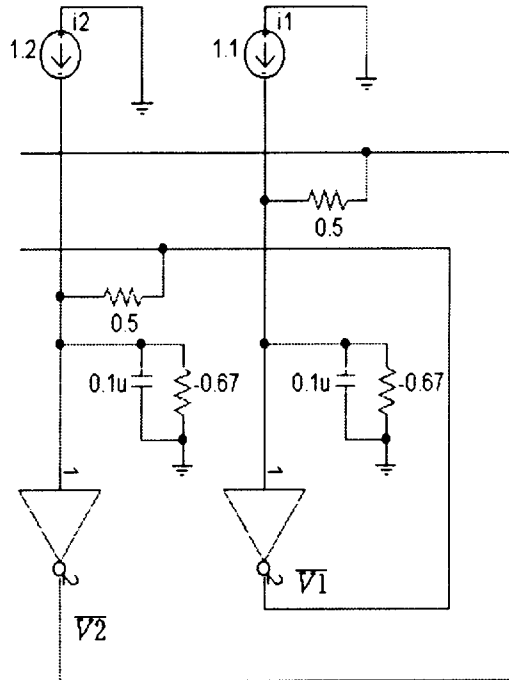
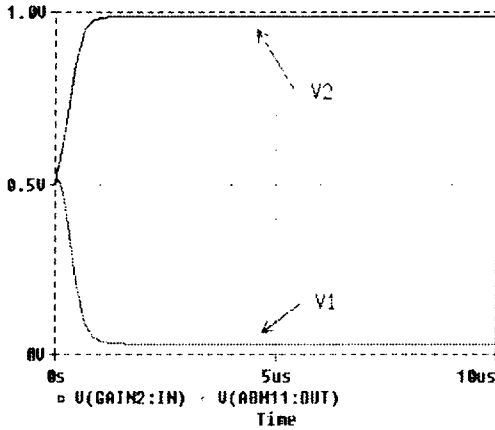


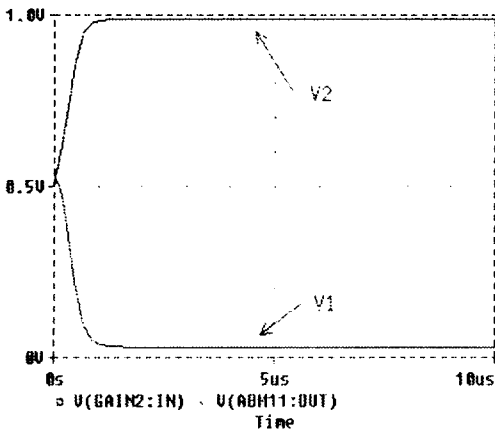
Fig. 5 Two-bit A/D converter using inverting neuron

Fig. 6에서 보는 바와 같이 연결강도가 음인 경우 이것을 뉴론의 출력단에 인버터를 연결하여 연결강도를 양으로 만들어도 상호 변환하는데 문제가 없다. 단, 여기서 주의할 점은 뉴론의 출력단에 단지 인버터만 달아주고 연결강도의 부호만 바뀐다고 끝나는 게 아니다. 뉴론의 입력단에 연결된 컨덕턴스의 값을 적절히 조절해 주어야만 한다. 그렇지 않으면 수렴점이 다르게 나타난다. 이것은 옴의 저항을 만드는 것이 용이하지 않으므로 모든 연결강도를 양으로 만들어주고 단지 뉴론의 입력단에 연결된 컨덕턴스만 옴의 저항을 사용하는 것을 가능하게 한다. 위 그림 6

은 전체 컨덕턴스  $G_i$  값이 양( $G_i = 0.5$ )인 경우만 하였는데,  $G_i$  값이 0인 경우와 음인 경우도 결과가 같게 나왔다.



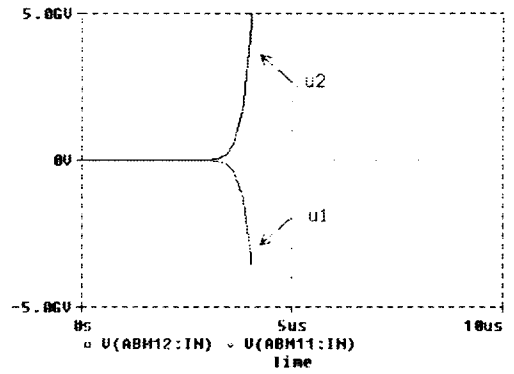
a) Output of circuits using non-inverting neuron



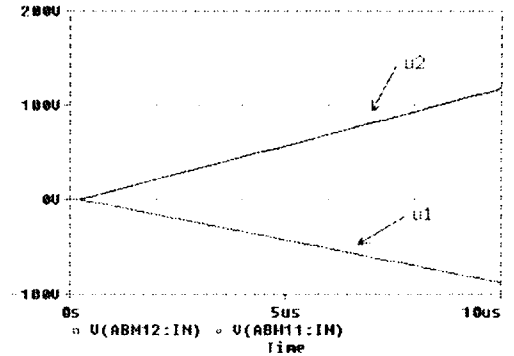
b) Output of circuits using inverting neuron

Fig. 6 Output of circuits using inverting and non-inverting neuron

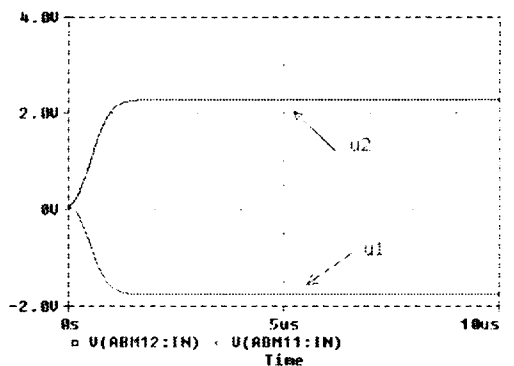
그리고 입력단에서의 안정성 해석을 위해 또한 2-bit A/D 변환기가 선택되었는데 2-bit A/D 변환기의 상태 방정식은 다음과 같이 표현될 수 있는데,  $x=1.6$ ,  $c_1 = c_2 = 0.1u$ 인 식 (11)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.



a) For  $G_i = -0.5$



b) For  $G_i = 0$



c) For  $G_i = 0.5$

Fig. 7 Input space of neuron

$$\begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^7 & 0 \\ 0 & 10^7 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 2-g_1 & 0 \\ 0 & 2-g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1.2 \end{bmatrix} \right) \quad (18)$$

transient 시뮬레이션은 시그모이드 이득률  $\alpha = 2$ . 그리고 서로 다른 입력 컨덕턴스 값을 가지고 행해졌다. 그림 7a에서  $g_1 = g_2 = 1.5$ 일 때는 입력이 지수함수적으로 증가함을 보였고, 그림 7b에서는  $g_1 = g_2 = 2$  일 때 입력이 시간에 대해 선형적으로 증가함을 보였다. 그림 7c에서는  $g_1 = g_2 = 2.5$ 일 때 입력이 어떤 특정한 값으로 수렴하면서 안정함을 보였다. 처음 두 경우에는서  $-\sum_{j=1}^n w_{ij}$  보다 크지 않은 입력 컨덕턴스의 값이 시스템의 입력을 불안정하게 만들었다. 여기에서 한가지 주지할 사항은 처음 두 경우처럼 어떤 조건하에서는 입력단이 불안정할 수 있다. 하지만, 출력단에서는 어떤 경우이든 항상 안정된 값으로 점근적으로 수렴해 간다.

Fig. 7에서 보듯이 뉴런의 입력단이 전체 컨덕턴스의 값에 따라 달라지는 것을 볼 수 있다. 처음 두 경우가 전체 컨덕턴스의 값이 0이거나 음인 경우인데 이 경우에는 회로가 입력단에서 안정하지 못하고 있다. 세 번째 경우, 즉 전체 컨덕턴스의 값이 양인 경우만이 어떤 특정한 값으로 수렴하는 것을 볼 수 있다. 이 경우는 뉴런의 입력단에서 안정하다고 할 수 있다.

## VI. 결 론

Hopfield 신경회로망에서는 연결강도가 음인 경우를 종종 볼 수 있다. 하지만 음의 컨덕턴스를 제작하기란 용이하지 않으므로 뉴런의 출력을 inverting시킨 후 양의 컨덕턴스로 만든 후에 결과를 비교해 보았다.  $g_i$  값을 바꿔 적절한 값으로 정해주니까 음의 연결강도를 사용했을 때와 결과가 같게 나왔다. 이것은 모든 음의 연결강도들을 양으로 바꾸주고 뉴런의 입력단에 연결된 컨덕턴스만 음으로 하면 된다는 것을 의미한다. 즉, 회로에 아무리 많은 음의 연결강도가 있더라도 음의 컨덕턴스는 뉴런의 입력에 연결된 컨덕턴스만 음으로 제작하면 된다. 또한 뉴런의 입력에서의 안정성을 살펴보았는데, 이것은 전체 컨덕턴스의 값과 관계가 깊다는 것을 알 수 있었다. 전체 컨

덕턴스  $G_i$  값이 0이거나 음인 경우는 회로의 입력단에서 불안정하고, 전체 컨덕턴스  $G_i$  값이 양인 경우는 어떤 특정한 값으로 수렴하면서 시스템이 안정해지는 것을 알 수 있었다. 하지만 각 뉴런들의 연결강도들은 이미 정해진 것이기 때문에 뉴런의 입력단에 연결된 컨덕턴스의 값이 회로의 안정성에 커다란 영향을 미친다는 것을 알 수 있다. 아무 의미없이, 단지 회로의 안정성을 위해 달아준 뉴런의 입력단의 컨덕턴스가 사실은 회로의 안정성에 커다란 영향을 미친다는 것을 알 수 있었다.

## 참고문헌

- 1) Hopfield, J. J., 1984. Neurons with Graded Response Have Collective Computational Properties Like Those of Two State Neurons. Proc. National Academy of Sciences 81: 3088-3092.
- 2) Hopfield, J. J., and D. W. Tank, 1985. Neural Computation of Decisions in Optimization Problems. Biol. Cybern. 52: 141-154.
- 3) Hopfield, J. J., and D. W. Tank, 1986. Computing with Neural Circuits: A model. Science 233: 625-633.
- 4) Park, S., 1989. Signal Space Interpretation of Hopfield Circuit and a Linear Programming Circuit. IEEE Trans. Circuits and Systems CAS-33(5): 533-541.
- 5) Bernard C. Levy 1987. Global optimization with Stochastic Neural Network. IEEE, Int. Conf. on NN. Sandiego. CA. USA.
- 6) Anthony N. Michel, Jay A. Farrel and Wolfgang Porod, 1989. Qualitative Analysis of Neural Networks. IEEE Trans. Circuits Syst., vol 36, pp. 229-243, February 1989.
- 7) 고경희, 강민재, 1997. 계산에너지함수 분석을 통한 Hopfield 신경회로망의 성능 개선. 대한전자공학회 논문집 제 34권 C편 12호.