一般的 Gamma 分布와 그 特性函数들의 관계

金 益 贊

Condition of Generalized Gamma Distribution and the Characteristic Function

Ik chan Kim

Summary

The exponential density is a special case of the generalized gamma distribution given by b = 1, m = 1.

Let $X_1, X_2, \cdots X_n$, be the positive, nondegenerate random variables, and the X's mutually independent. Then for each X, $(\Pi Xi)^{\frac{1}{n}}$ has a lognormal distribution with the same parameter σ, ΣXi has a gamma distribution with the same parameter, and $(\Sigma Xi^{b})^{\frac{1}{b}}$, b > 0 has a generalized gamma distribution with the same parameters b and a.

緖 言

一般的인 分布函數들의 여러 性質을 받아 들이고 거기서부터 Gamma 分布를 中心으로 하여 指數分布와 對數正規分布와의 관계를 考察하고 이들의 性質을 알아 보기로 한다.

分布函數

連續確率變數 $X = (X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n)$는 密度函數가

$$f(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu(x-a)} & ; x \geq a \\ o & ; x < a \end{cases}$$

여기서 母數 $\mu > o$일때 指數分布를 갖는다고 한다.

X가 Gamma 分布를 가지면 確率密度函數는

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

$$; \alpha > -1,\ \beta > 0,\quad 0 \leq x < \infty$$

이다.

Log X가 正規分布를 가질때 다시 Log (X - a)가 正規分布를 가지면 變數 X에 對한 密度函數는

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma(x-a)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\log(x-a)-m]^2}{2\sigma^2}} & ; x > a \\ o & ; x \leq a \end{cases}$$

물론 Log X는 期待値 m, 標準偏差 σ를 갖는 正規分布이다. 이때 X는 對數正規分布를 갖는다고 한다.

分布의 性質

對數正規分布

X를 連續確率變數라 하고 Y = Log X가 期待値 m, 標準偏差 σ를 갖는 正規分布 N(m, σ^2)을 갖는다면 X는 對數正規分布 LN(m, σ^2)를 갖는다고 한다.

Y = h(X)에서 m_1, m_2를 確率變數 X, Y의 各各의 期待値라고 하면 X의 函數期待値는

$$M = h^{-1}(m_2)$$

이고 또 여기서 μ[X], μ[Y]를 각각 X, Y의 中央값이라고 하면 函數中央값은 $\widetilde{M} = h^{-1}(\mu[Y])$이며 여기서 h가 單調이면

$$\widetilde{M} = \mu(x)$$

이다.

指數分布의 變數變換

두개의 密度函數 $f_1(x)$, $f_2(x)$가 혼합된 $\lambda(x) = pf_1(x) + (1-p)f_2(x)$의 評價比 p에 대하여 생각하자.

여기서 X를 密度函數 $\lambda(x)$를 갖는 確率變數라 하자.

즉 $\lambda(x) = pf_1(x) + (1-p)f_2(x)$
$= pf_1(x) + qf_2(x)$

은 X의 密度函數이고

$$S(p : f_1, f_2) = S(p) = E\left[\left\{\frac{f_1(x) - f_2(x)}{\lambda(x)}\right\}^2\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[f_1(x)-f_2(x)]^2}{[pf_1(x)+qf_2(x)]^2}[pf_1(x)+qf_2(x)]\,dx$$

$$=-\frac{1}{pq}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[\lambda(x)-f_1(x)][\lambda(x)-f_2(x)]}{\lambda(x)}\,dx$$

$$=\frac{1}{pq}\left[1-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{\lambda(x)}\,dx\right]$$

$$\therefore\ 0\le\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{\lambda(x)}\,dx\le 1$$

따라서 $S(p)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{\lambda(x)}\,dx$ 에서 생각한다. 또 $f_1(x)$, $f_2(x)$에 對해 $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$가 단조증가하는 경우를 생각하자.

$f_1(x), f_2(x)$와 p가 고정된 값이고 만일 根이 存在하면 C를 $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{q}{p}$의 유일한 根이라 하자.

그러면

$$S(p)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{\lambda(x)}\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{c}\frac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{\lambda(x)}\,dx+\int_{c}^{\infty}\frac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{\lambda(x)}\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{c}\frac{f_1(x)}{\dfrac{pf_1(x)+qf_2(x)}{f_2(x)}}\,dx+\int_{c}^{\infty}\frac{f_2(x)}{\dfrac{pf_1(x)+qf_2(x)}{f_1(x)}}\,dx$$

$$=\frac{1}{q}\int_{-\infty}^{c}\frac{f_1(x)}{1+\dfrac{pf_1(x)}{qf_2(x)}}\,dx+\frac{1}{p}\int_{c}^{\infty}\frac{f_2(x)}{1+\dfrac{qf_2(x)}{pf_1(x)}}\,dx$$

그런데 $0\le\frac{pf_1(x)}{qf_2(x)}\le 1 \qquad ;\ x\le C$

$0\le\frac{qf_2(x)}{pf_1(x)}\le 1 \qquad ;\ x\ge C$

有界이고 收斂하는 性質에 의해서

$$S(p)=\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{-\infty}^{c}\left[\frac{pf_1(x)}{qf_2(x)}\right]^k f_1(x)\,dx+\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{c}^{\infty}\left[\frac{qf_2(x)}{pf_1(x)}\right]^k f_2(x)\,dx$$

여기서 $f_1(x)=\alpha e^{-\alpha x}$, $f_2(x)=\beta e^{-\beta x}$ $\quad ;\ x\ge 0,\ 0<\alpha<\beta$

그런데 $p\alpha\le q\beta$일때 $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{q}{p}$의 根을 C라하면

$C=\frac{1}{\beta-\alpha}\ ln\frac{q\beta}{p\alpha}$이고

$$S(p)=\int_{0}^{\infty}\frac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{pf_1(x)+qf_2(x)}\,dx$$

$$=\frac{1}{q}\int_{0}^{c}\frac{f_1(x)}{1+\dfrac{pf_1(x)}{qf_2(x)}}\,dx+\frac{1}{p}\int_{c}^{\infty}\frac{f_2(x)}{1+\dfrac{qf_2(x)}{pf_1(x)}}\,dx$$

$$=\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{0}^{c}\left[\frac{pf_1(x)}{qf_2(x)}\right]^k f_1(x)\,dx+\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{c}^{\infty}\left[\frac{qf_2(x)}{pf_1(x)}\right]^k f_2(x)\,dx$$

그런데 $\int_{0}^{c}\left[\frac{pf_1(x)}{qf_2(x)}\right]^k f_1(x)\,dx=\int_{0}^{c}\left[\frac{p\alpha e^{-\alpha x}}{q\beta e^{-\beta x}}\right]^k\alpha e^{-\alpha x}dx$

$$=\begin{cases}\alpha\left[\dfrac{p\alpha}{q\beta}\right]^k\cdot C & ;\ k(\beta-\alpha)-\alpha=0\\[2ex] \alpha\left[\dfrac{p\alpha}{q\beta}\right]^k\dfrac{1}{k\beta-(k+1)\alpha}\left[e^{\{k(\beta-\alpha)-\alpha\}c}-1\right] & :\ \text{그밖에서}\end{cases}$$

같은 方法으로

$$\int_{c}^{\infty}\left[\frac{qf_2(x)}{pf_1(x)}\right]^k f_2(x)\,dx=\beta\left(\frac{q\beta}{p\alpha}\right)^k\int_{c}^{\infty}e^{[k(\alpha-\beta)-\beta]x}\,dx$$

$$=\beta\left(\frac{q\beta}{p\alpha}\right)^k\left[\frac{1}{(k+1)\beta-k\alpha}\right]\cdot e^{\{k(\alpha-\beta)-\beta\}c}$$

여기서 $C=\frac{1}{\beta-\alpha}\ ln\frac{q\beta}{p\alpha}$를 代入하면

$C>0$일때

$$S(p)=\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\alpha\left(\frac{p\alpha}{q\beta}\right)^k\left[\frac{1}{k\beta-(k+1)\alpha}\right]\cdot\left[e^{\{k(\beta-\alpha)-\alpha\}\frac{1}{\beta-\alpha}ln\frac{q\beta}{p\alpha}}-1\right]$$

$$+\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\beta\left(\frac{q\beta}{p\alpha}\right)^k\left[\frac{1}{(k+1)\beta-k\alpha}\right]\cdot\left[e^{\{k(\alpha-\beta)-\beta\}\cdot\frac{1}{\beta-\alpha}ln\frac{q\beta}{p\alpha}}\right]$$

$$=\frac{\alpha}{q}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{p\alpha}{q\beta}\right)^k\left[\frac{1}{k\beta-(k+1)\alpha}\right]\cdot\left[\left(\frac{q\beta}{p\alpha}\right)^{k-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}-1\right]$$

$$+\frac{\beta}{p}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{(k+1)\beta-k\alpha}\right]\left(\frac{p\alpha}{q\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}$$

$$=\frac{\alpha}{q}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{p\alpha}{q\beta}\right)^k\left[\frac{1}{k\beta-(k+1)\alpha}\right]$$

$$\cdot\left[\left(\frac{q\beta}{p\alpha}\right)^{k-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}-1\right]$$

$$+\frac{\alpha}{q}\left(\frac{p\alpha}{q\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}\sum_{k=o}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{(k+1)\beta-k\alpha}\right]$$

$$=\frac{\alpha}{q}\left(\frac{p\alpha}{q\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\right)\sum_{k=o}^{\infty}(-1)^k$$

$$\cdot\left[\frac{1}{k-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}+\frac{1}{(k+1)+\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}\right]$$

$$-\frac{\alpha}{q}\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\right)\sum_{k=o}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{p\alpha}{q\beta}\right)^k\frac{1}{k-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}$$

첫제항의 合算은

$$\left[-\frac{\beta-\alpha}{\alpha}-\frac{2\cdot\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}{1^2-\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2}+\frac{2\cdot\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}{2^2-\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2}\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+(-1)^{k+1}\frac{2\cdot\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}{(k+1)^2-\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2}+\cdots\right]$$

$$=-\frac{\beta-\alpha}{\alpha}+\sum_{k=o}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}{(k+1)^2-\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2}$$

$k+1=K$ 라 하고 다시 $K=k$ 라고 쓰면

$$=-\frac{\beta-\alpha}{\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}{k^2-\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2}$$

$$\therefore S(p)=\frac{1}{q}\left(\frac{p\alpha}{q\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)\left[-\frac{\beta-\alpha}{\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\right.$$

$$\left.\cdot\frac{2\cdot\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}{k^2-\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2}\right]-\frac{1}{q}\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)\sum_{k=o}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{p\alpha}{q\beta}\right)^k\frac{1}{k-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}$$

그런데 $\frac{\alpha}{\beta-\alpha}$ 가 整數가 아니면 $\frac{\alpha}{\beta-\alpha}=\theta$ 라고 놓을 때

一般的으로

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2\theta}{k^2-\theta^2}=\frac{1}{\theta}-\frac{\pi}{\sin\pi\theta}$$

이므로

$$S(p)=\frac{1}{q}\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)\left(\frac{p\alpha}{q\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}\left[-\frac{\beta-\alpha}{\alpha}+\frac{\beta-\alpha}{\alpha}\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{\sin\frac{\pi\alpha}{\beta-\alpha}}\right]-\frac{1}{q}\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)\sum_{k=o}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{p\alpha}{q\beta}\right)^k$$

$$\cdot\frac{1}{k-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}$$

$$=\frac{1}{q}\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)\left(\frac{p\alpha}{q\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}\left[-\frac{\pi}{\sin\frac{\pi\alpha}{\beta-\alpha}}\right]-\frac{1}{q}\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{1}{-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}\right)-\frac{1}{q}\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{p\alpha}{q\beta}\right)^k\frac{1}{k-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}$$

$$=\frac{1}{q}\left[1-\left(\frac{p\alpha}{q\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}\frac{\frac{\pi\alpha}{\beta-\alpha}}{\sin\frac{\pi\alpha}{\beta-\alpha}}+\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{p\alpha}{q\beta}\right)^k\left(\frac{1}{k-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}\right)\right]$$

$C=O$ 일때

$$S(p)=O+\frac{1}{p}\sum_{k=o}^{\infty}(-1)^k\beta\left(\frac{q\beta}{p\alpha}\right)^k\frac{1}{(k+1)\beta-k\alpha}$$

$$=\frac{\beta}{p}\sum_{k=o}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{(k+1)\beta-k\alpha}\right]\left(\frac{q\beta}{p\alpha}\right)^{(k+1)-1}$$

$$=\frac{\alpha}{q}\sum_{k=o}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{(k+1)\beta-k\alpha}\right]\left(\frac{q\beta}{p\alpha}\right)^{k+1}$$

$$=\frac{\alpha}{q}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left[\frac{1}{k\beta-(k-1)\alpha}\right]\left(\frac{q\beta}{p\alpha}\right)^k$$

$$=\frac{\alpha}{q}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left[\frac{1}{k(\beta-\alpha)+\alpha}\right]\left(\frac{q\beta}{p\alpha}\right)^k$$

$$=\frac{1}{q}\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left[\frac{1}{k+\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}\right]\left(\frac{q\beta}{p\alpha}\right)^k$$

$C=O$ 이면 $p\alpha=q\beta$ 이므로

$$S(p)=\frac{1}{q}\left(\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left[\frac{1}{k+\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}\right]$$

Gamma 分布와 指數分布

3개의 母數에 對한 一般的인 Gamma 分布의 密度

函數는

$$f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{ba^{bm}}{\Gamma(m)}\right]x^{bm-1}e^{-(ax)^b} & ;\ x>0\\ 0 & ;\ \text{그밖에서}\end{cases}$$

단 $a, m, b>o$

특히 $m=1$, $b=1$ 이면

$$f(x)=\begin{cases}ae^{-ax} & ;\ x>0\\ o & ;\ x\leq 0\end{cases}$$

즉 指數分布는 Gamma 分布의 特殊한 경우중의 하나이다.

Gamma 分布와 對數正規分布

〔定理 1〕 X, Y가 두개의 確率變數이고 確率變數 $\frac{X}{Y}$가 퇴화하지 않고 $\frac{X}{Y}$가 X와 獨立的이면 $\frac{X}{Y}$는 Y와도 獨立的이고 그 逆도 成立한다.

〔定理 2〕 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$이 確率變數이고 서로 獨立이면 各 X가 같은 母數를 가질때, 그리고 그때에 만

(a) $\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}}$은 對數正規分布를 갖는다.

(b) $\sum_{i=1}^{n} X_i$는 Gamma 分布를 갖는다.

(c) $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,b}\right)^{\frac{1}{b}}, b>o$은 一般的인 Gamma 分布를 갖는다.

(證明) (a) 各 X_i는 같은 變動係數를 갖는 對數正規分布를 갖는다. Y_i 들의 서로 獨立인 것은 X_i 들의 單位 Vector를 $\sum=\sigma^2 I$ 라 하면 여기서 I는 $(k\times k)$의 單位行列이고 따라서 $\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}}$은 모든 Vector와 獨立이다.

다음에 Vector가 $\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}}$과 獨立이라고 하자. 그러면 모든 Vector, 즉 $\left(1, \frac{X_2}{X_1}, \cdots\cdots, \frac{X_n}{X_1}\right)$은 $\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}}$과 獨立이다. Y, 즉 $Y_1, Y_2 \cdots\cdots Y_n$가 서로 獨立 이면 確率變數의 線型結合 $\sum a_i Y_i$와 $\sum b_i Y_i$는 獨立分布이다.

따라서 $Y_i - Y_1$이 $i=2, \cdots, n$ 일때 $\sum Y_i$와 獨立이면 $i=1, \cdots, n$일때 各 Y_i는 正規分布이다. 따라서 X_i는 對數正規分布이다.

(b) $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$은 陽의 퇴화하지 않는 確率變數라 하자, 또 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$가 각각 獨立이면

$$P_i=\frac{X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \qquad i=1,2,\cdots\cdots, n.$$

은 $\sum_{i=1}^{n} X_i$와 獨立이고 그때에만 각 X_i는 같은 母數를 갖는 Gamma 分布를 갖는다.

$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$가 같은 母數를 갖는 서로 獨立인 Gamma 確率變數라면

Vector $P=\frac{X_1}{\sum X_i}, \cdots\cdots\cdots, \frac{X_n}{\sum X_i}$ 은 $\sum X_i$와 獨立이다.

(c) Vector $\left(1, \frac{X_2}{X_1}, \cdots\cdots, \frac{X_n}{X_1}\right)$가 $G=\left(\sum X_i^{\,b}\right)^{\frac{1}{b}}$과 獨立이면 Vector $\left(1, \frac{X_2^{\,b}}{X_1^{\,b}}, \cdots\cdots, \frac{X_n^{\,b}}{X_1^{\,b}}\right)$은 $\sum X_i^{\,b}$과 獨立이다. 따라서 앞 定理에서 Vector $\left(\frac{X_1^{\,b}}{\sum X^b}, \cdots\cdots, \frac{X_n^{\,b}}{\sum X^b}\right)$은 $\sum X^b$와 獨立이다. $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$가 각각 獨立이므로 $X_1^{\,b}, X_2^{\,b}, \cdots\cdots, X_n^{\,b}$도 각각 獨立이다.

앞의 (b)에 의해 (c)의 條件이 만족될 때 確率變數 $X_i^{\,b}$, $i=1,2,\cdots\cdots, n$가 이러한 條件에서만이 Gamma 分布를 갖는다. 故로 確率變數 X_i, $i=1,2,\cdots\cdots n$은 같은 母數 a, b를 갖는 一般的 Gamma 分布를 갖는다.

結　　論

이상의 分布函數에서 指數分布는 Gamma 分布의 하나의 特殊한 경우이고 確率變數의 幾何平均을 確率變數로 하는 確率變數는 對數正規分布를 가지며 이 두 分布는 特殊한 條件下에서만 分布變換이 可能하다.

摘　　要

指數密度函數는 $b=1$, $m=1$로 주어진 一般的 Gamma 分布의 特殊한 경우이다.

$X_1, X_2 \cdots\cdots X_n$을 陽의 퇴화하지 않은 確率變數이고 그들은 서로 獨立이라하자. 그러면 $\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}}$은 같은 母數 σ를 갖는 對數正規分布를, $\sum_{i=1}^{n} X_i$는 같은 母數를 갖는 Gamma 分布를, 그리고 $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,b}\right)^{\frac{1}{b}}$은 같은 母數 b와 a를 갖는 一般的 Gamma 分布를 갖는다.

引 用 文 獻

1. Bain, L. J. and Weeks, D. L. 1965, Tolerance Limits for the Generalized Gamma Distribution, Journal of the American Statistical Association, Vol. 60, No. 312, pp 1142-52.
2. Birnbaum, Z. W. 1964, Int. to Probability and Mathematical Statitics. Part 1. Chapter 10.
3. Cramer, H. 1954, Mathematical Methods of Statistics. Chapter 17.
4. Hager, H. W. and Bain, L. J. 1970, Inferential Procedures for the Generalized Gamma Distribution, Journal of the American Statistical Association, Vol. 65, No. 332, pp 1601-9.
5. Munro, A. H. and Wixley, R. A. J. 1970, Estimators Based on order Statistics of Small Samples from a Three-Parameter Lognormal Distribution, Journal of the American Statistical Association, Vol 65, No. 329, pp 212-25.