석 사 학 위 논 문

초등영재 학생의 수학화 활동 사례 연구

-이산수학 문제 탐구-

A Case Study on Mathematising Activities
of Elementary Gifted Students

-Inquiry into Discrete Mathematics Problem-

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

김 사 훈

2018년 8월

초등영재 학생의 수학화 활동 사례 연구

-이산수학 문제 탐구-

A Case Study on Mathematatising Activities
of Elementary Gifted Students

-Inquiry into Discrete Mathematics Problem-

지도교수 최 근 배

이 논문을 교육학 석사학위 논문으로 제출함

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

김 사 훈

2018년 5월

김 사 훈의

교육학 석사학위 논문을 인준함

심사위원장 김해규 인

심사위원 현종익 인

심사위원 최근배 인

제주대학교 교육대학원

2018년 6월

목 차

표 목 차

그 림 목 차

국 문 초 록

초등영재 학생의 수학화 활동 사례 연구
-이산수학 문제 탐구-

김 사 훈

제주대학교 교육대학원 초등수학교육전공
지도교수 최 근 배

본 연구에서는 〈이산수학 문제 탐구〉를 주제로 초등영재 학생의 수학화 활동 사례를 연구하였다. 최근배와 안선영(2010)이 개발한 영재교육 프로그램을 실제 수업에 적용해보고 학생들의 반응을 분석하였다. 이를 통한 본 연구의 방향은, 첫째, 학습자의 수학적 사고를 돕는 수업자의 발문과 수업자료를 찾았다. 둘째, 탐구문제에 대하여 학생들이 어떤 사고의 오류를 보이는지 알아보았다. 셋째, 학습자의 수업결과물을 바탕으로 학습 프로그램에서 수정하고 보완할 부분을 찾았다. 마지막으로, 본 영재 프로그램에 관심 있는 영재 강사가 수업의 흐름과 수업 시 주의할 점을 한 눈에 파악할 수 있는 유용한 자료를 제공하였다.

참고한 영재교육 프로그램의 주제는 총 13가지였으며 연구자에게 주어진 수업 시수와 탐구주제 간의 계열성에 맞추어 8개의 주제를 선택하였다. 따라서 비둘기집의 원리, 모임의 분할, 자연수의 분할, 그래프의 기초, 한 붓 그리기, 최단경로 문제, 최소연결 문제, 정다면체의 분류의 8가지 이산수학 탐구주제에 대하여 연구가 진행되었다.

이와 같은 연구 방법에 따라 진행하여 얻게 된 교육적 시사점을 몇 가지로 요

약하면 다음과 같다.

첫째, 영재학생 대부분은 추론 문제를 해결하기 위해 특수한 사례에서 공통된 특성을 발견하여 일반법칙을 도출하는 귀납적 추론 방법을 사용하였다. 뿐만 아니라 학생들은 귀납적 추론에서 시작하여 낮은 수준의 연역적 추론도 하였다. 따라서 학생들에게 적절한 수준의 탐구문제를 제공해야하며, 학생들이 놓치는 반례가 없는지 수업자가 확인하여 제시할 필요가 있었다.

둘째, 수업 결과물에서 수직적 수학화보다 수평적 수학화의 과정을 더 많이 발견할 수 있었다. 영재학생들은 현실의 문제 장면을 형식적인 수학적 처리가 가능하도록 변화시키는 것에 익숙했지만, 이를 추상화된 기호를 사용하여 좀 더 높은 수학적 처리를 하는 데는 미숙했다.

셋째, 학생들에게 이산수학 탐구 주제에 대한 친근한 문제 상황을 제시하여 일상생활에서 동떨어진 학문 분야가 아니라는 것을 알게 해야 한다. 이를 통해 학생들은 이산수학을 학습해야 하는 이유와 동기를 가질 수 있다.

넷째, 영재수업에서 학생들의 폭넓은 수학적 의사소통은 높은 수준의 수학적 사고를 이끌어낼 수 있다. 학생들이 서로 의견을 주고받는 과정에서 아이디어가 새롭게 발전하였으며, 한 학생의 참신한 문제해결 아이디어가 다른 학생들의 문제에 대한 이해력을 높이는 데 큰 도움이 되었다.

다섯째, 해결방법이 직접적으로 드러나는 문제는 학생들의 다양한 사고를 방해할 수 있다. 문제를 해결하는 방법은 한 가지가 아니며 학생들이 다양한 해결 전략을 찾는 과정에서 학생들의 개방적 사고가 발전할 수 있다.

여섯째, 수업자는 학생들의 문제해결에 필요한 수학적 개념을 적시에 알려주어야 하며, 잘못된 방향으로 해결해갈 경우에 적극적인 안내자가 되어야 한다. 학생들은 중요한 개념을 모른 채로 문제를 해결하는 것이 어려운 경우가 있으며, 이런 경우에 수업자가 적극적으로 수업에 개입해야 한다.

일곱째, 이산수학 탐구 문제의 문제해결 전략에 사용될 수 있는 적절한 교구를 만들어 활용할 수 있다. 예를 들어, 정다면체를 평면적인 그래프로 나타내는 교구 등 학생들의 이해를 돕는데 필요한 수학적 교구를 발견할 수 있었다.

주요어 : 이산수학, 초등영재교육, 수학화 활동

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

우리나라는 21세기에 들어서며 정보화 사회의 흐름에 맞춰 영재교육의 진흥을 위한 영재교육진흥법(2000. 1. 28., 법률 제6215호)을 마련하였다. 그 후 영재학교 및 영재학급을 비롯하여 다양한 영재교육기관이 설치되었으며, 현재까지 영재교육의 목적에 맞는 제 기능을 하며 내실 있게 운영되고 있다. 뿐만 아니라 영재교육에 대한 관심과 수요가 증가하면서, 영재교육을 위한 프로그램을 개발하거나 영재학생들의 반응을 분석하는 연구들도 수없이 진행되어왔다.

본 연구에서는 안선영(2005)이 개발한 ‘초등 영재교육에 적용 가능한 이산수학 프로그램’을 실제 수업자료로 활용하였다. 그의 연구에서는 수학과 교육과정에 포함되어 있는 이산수학 내용을 분석하여 초등 영재교육에서 적용 가능한 학생용 학습 프로그램을 개발하였고, Polya의 문제해결 수업모형에 따른 교사용 교수·학습 과정안도 제시하였다. 하지만 그의 연구는 프로그램의 개발에 그쳤으며 실제 영재수업에 적용했을 때 학생들이 어떤 반응을 보이는지 분석하는 단계까지 진행되지 않았다. 따라서 본 연구에서는 그가 개발한 프로그램을 실제 수업에 적용하여 학생들의 반응을 알아보았다. 이를 통해 초등영재 학생의 수학화 활동 사례를 분석하고자 한다. 특히, 이 연구는 초등영재교육에 관심이 있는 영재강사들에게 의미 있는 자료로 활용될 수 있다.

본 연구는 이산수학 문제를 학습소재로 한 수학화 활동의 사례 분석과 관련되어 있으며, 그 이론적 바탕은 ‘수학화(mathematisation; Freudenthal, 1973)’이다. 최근배(2017)에 따르면 ‘수학화는 수학자가 수학을 만드는 과정과 같은 활동’이라고 하였다. 순수수학에서는 수학화의 과정보다 결과물을 중시하는 경향이 있지만, 수학교육의 관점에서는 조직화의 과정이 결과보다 더 강조되어야 한다. 다시 말해서, 학습자 스스로가 수학자가 되어 자신만의 결과물을 만들어 가는 과정을 경험할 수 있도록 하는 것이 수학교육의 핵심이 되어야 한다는 것을 의미한다(최근배, 2017). 따라서 영재수업에 적용한 학습 프로그램은 초등영재 학생들의 수학화 학습에 도움이 되어야 한다.

한편, 학습소재인 이산수학 문제는 영재를 위한 수학교육에서 충분한 교육적 가치가 있다. Hart(1991)는 이산수학의 교육적 가치를 다음과 같이 들고 있다. 첫째, 이산수학의 많은 주제들은 새롭고 흥미로운 것들이며 수학적 배경이 거의 없는 학생들도 배울 수 있어서 학생들에게 수학의 활력과 흥미를 불어넣을 수 있다. 둘째, 문제해결에서 알고리즘적으로 사고하는 능력을 키울 수 있으며, 새로운 수학적 모델링을 풍부하게 제시한다. 셋째, 상업, 산업, 정치 등 실생활 문제에 폭넓게 사용된다. 넷째, 전통적인 교육과정을 보충하며 향상시키고 수학교육과정을 폭넓고 풍부하게 한다(안선영, 2005, 재인용).

본 연구는 이산수학 문제를 소재로 한 영재수업에서 초등 영재학생들의 실제적인 수학화 활동 사례를 분석하는 데 목적이 있다. 이를 위해서, 특수한 사례에서 공통된 특성을 발견하여 일반법칙을 도출하는 귀납적인 추론 방법을 사용하여 수업하였다. 또한, 영재학생들이 탐구문제를 해결하는 과정에서 나타나는 사고과정을 분석한 내용을 바탕으로 의미 있는 연구를 진행하였다.

2. 연구 내용 및 방법

본 연구는 이산수학에서 다루는 비둘기 집의 원리, 모임의 분할, 자연수의 분할, 그래프의 기초, 한 붓 그리기, 최단경로 문제, 최소연결 문제, 정다면체의 분류의 8가지 주제로 영재수업을 하고난 후 '초등 영재학생들의 수학화 결과물'과 '수업 후 수업자와 수업멘토(지도교수)의 논의'를 통해서 영재학생들의 수학화 활동 사례를 분석하였다.

이산수학 문제를 바탕으로 한 초등영재 학생의 수학화 활동 사례 분석은 다음과 같이 진행되었다. 먼저, 안선영(2005)의 논문에서 소개된 영재수업 자료를 실제 영재수업에서 활용할 수 있도록 재구성하였다. 둘째, 재구성한 이산수학 문제를 영재학생들에게 제시하고 풀게 하였다. 실제로 학생들에게 한 주제 당 3시수씩 총 24시수를 수업하였다. 학생들은 탐구문제를 각 모둠별로 협의하여 해결하였고 결과를 발표하였다. 초등학생의 수준에서 연역적으로 증명하는 것은 무리가 있기 때문에 대부분의 문제에서 귀납적 추론 방법으로 사용하였다. 이 과정을 통하여 학생들의 수학적 사고과정을 알아보았다. 셋째, 두 번째 단계에서 나타난 학생들의 사고과정을 바탕으로 수업자와 수업멘토(지도교수)가 수업분석을 하였고, 이를 통하여 수학화 활동 및 학습 프로그램에 대한 실제적인 논의를 하였다.

3. 연구의 제한점

본 연구는 제주대학교 과학영재교육원 초등부 MASTER 트랙 과정의 수학영재 학생을 대상으로 하고 있으므로 연구 대상이 지극히 제한적이며, 연구의 결과가 영재교육기관의 형태나 지역적 특성 등에 따라 달라질 가능성이 있다. 또한 본 연구는 질적 사례연구의 방법을 사용하여 학생들의 수학적 사고과정을 분석하였기 때문에 연구자의 주관적인 견해가 포함되었다. 따라서 본 연구의 결과를 일반화 시키는 데에는 한계가 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학영재

본 연구의 대상인 수학영재 학생들은 영재교육진흥법에 의거하여 설치・운영되는 영재학급 또는 영재교육기관에서 영재교육을 이수한 학생 중 영재수업을 담당하는 교사 또는 담임교사의 추천으로 지원하였고, 서류 심사, 창의적 문제해결력 검사, 창의인성 면접을 통하여 최종 선발되었다. 이 영재학생들이 수업에서 주어진 문제를 어떻게 생각하고 해결하고 있는지 그 사고과정을 밝히는 것은 본 연구에서 상당히 중요한 부분이다. 이를 위해서 수학영재의 정의란 무엇이며, 수학영재는 어떤 특성을 갖는지 파악할 필요가 있다.

가. 수학영재의 정의

한국의 영재교육진흥법 제2조에 따르면 “영재”란 재능이 뛰어난 사람으로서 타고난 잠재력을 계발하기 위하여 특별한 교육이 필요한 사람이라고 하였다. 또한, 제5조에 따르면 선발될 영재교육대상자는 일반 지능, 특수 학문 적성, 창의적 사고 능력, 예술적 재능, 신체적 재능, 그 밖의 특별한 재능 중 어느 하나의 사항에 대하여 뛰어나거나 잠재력이 우수한 사람이라고 하였다. 따라서 이를 바탕으로 “수학영재”란 일반 지능, 수학에 대한 적성, 창의적 사고 능력 중 어느 하나의 재능이 뛰어난 사람으로서 타고나 잠재력을 개발하기 위하여 특별한 교육이 필요한 사람이라고 할 수 있겠다. 위와 같이 수학영재를 정의하려는 시도는 많이 이루지고 있으나 아직 이에 대한 합의된 의견은 없다. 여러 학자들은 수학영재에 대해 다음과 같이 정의하고 있다.

Gardner(1983)는 9가지 지능 중 논리 수학적 지능영역에서 뛰어난 능력을 가진 학생이 수학영재라고 하였다. Krutetskii(1976)는 창의적 수학능력을 사회적 가치를 지니는 독창적인 산출물을 창조해내는 능력이자 학문으로서의 수학을 하는 능력이라고 보고 수학적 사고과정을 정보 수집, 정보 처리, 정보 파지의 3가지 과정으로 파악하였다. 또한, 그는 수학영재를 모든 조건이 동일한 경우에 학교에서 요구하는 수학적 행동을 수행하고 학교 교과목으로서의 수학을 창의

적으로 숙달하기 위해서 특히 수학적인 지식, 기능, 습관 등을 비교적 신속하고 용이하며 철저하게 숙달하는데 영향을 주는 개인의 심리적 특성이 있는 아동이라 하였다. 수학영재는 '수학적 성향'이라는 신경학적 조직이 있으며 어떤 문제든지 수학적인 방법으로 해결하려 하며 수학적 안목을 지닌 사람이라고 하였으며 수학영재를 신속한 계산 능력, 공식의 기억능력, 유용한 생각과 관련된 추상화의 시각화 능력을 소유한 아동으로 정의하였다(송병섭, 2014, 재인용).

김홍원 외(1997)는 광범위한 문헌 연구를 종합하여 수학영재를 정의하고 있는데, 수학영재는 수학적인 영역에서 뛰어난 업적을 이루었거나 이룰 것으로 예상되는 사람으로 수학적 사고 능력, 수학적 과제 집착력, 수학적 창의성, 배경지식의 요인에서 평균 이상의 높은 능력을 지닌 아동이라고 하였다. 미국의 존스 홉킨스 대학의 재능아 청소년연구 센터에서 실시한 수학 영재아 교육 연구(SMPY)에서는 '수학 영재란 뛰어난 정보 처리 속도, 기초 수학 정보의 활용 능력, 새로운 개념을 새로운 과제에서 적용하는 능력 등을 소유하고 있는 자'로, 미국교육부와 한국 영재진흥법 정의에서는 특수 학문 적성 중 수학 적성 영역 즉, '수학 영역에서 뛰어난 업적을 이루었거나 이룰 것으로 예상되는 사람으로 정규 학교 프로그램 이상의 특별한 교육 프로그램과 서비스를 필요로 하는 자'로 정의하고 있다(송병섭, 2014, 재인용).

또한, 송상헌(1998)은 수학 영재성을 선천적으로 타고난 소질과 적성 및 후천적으로 학습한 수학에 대한 기초 지식을 배경으로 문제를 해결하고자 하는 지적, 정의적인 행동특성이 수학적 사고 기능과 긍정적으로 조화롭게 작용하여 특별한 수학적 과제를 창의적으로 수행해낼 수 있는 잠재적 가능성으로 정의하였다(송병섭, 2014, 재인용).

이상의 연구를 종합하여 보면, 수학영재는 선천적으로 타고난 수학에 대한 학문적 소질과 적성을 가지고 있으며 후천적으로 학습한 수학에 대한 기초 지식을 배경으로 문제를 해결하고자 하는 지적 능력을 지닌 사람이다. 또한, 수학적인 영역에서 뛰어난 업적을 이루었거나 잠재력을 지녀 성과를 이룰 것으로 기대되어야 한다. 뿐만 아니라 수학적 과제를 창의적으로 수행해낼 수 있도록 하는 정의적인 행동특성도 지니고 있어야 한다.

나. 수학영재의 특성

수학영재를 정의하려는 다양한 연구가 이루어지는 것처럼 수학영재에 대한 특성을 확인하려는 연구도 다양하게 이루어지고 있다.

Krutetskii(1979)는 수학적 재능이 있는 학생들의 능력에 대해 13년 동안 연구를 한 결과 수학적 능력을 두 가지로 구분하여 설명하였다. 첫째, 사회적 가치를 지닌 독창적인 산출물을 혼자서 창조하면서 학문으로서의 수학을 하는 데 필요한 '창조적 능력'과 둘째, 학교 수학 과정을 학습하고 이에 적당한 지식과 기능을 익히는 데 필요한 '학교능력'으로 구분하면서 특히 수학적 능력과 관련 있는 지적 변인을 일반 요인, 수적 요인, 공간 요인, 언어적 요인, 추론 요인으로 나누어 요인 분석법에 따라 분석하였다. 또한, 수학 능력에 대해 수학적 사고 과정을 정보 수집, 정보 처리, 정보 파지의 3가지 과정으로 구분하였으며, 각 과정에 속하는 수학적 능력이 무엇인지 알아보기 위한 목적을 가지고 산술, 대수, 기하의 내용을 포함하는 26개의 시리즈로 구성된 실험문제를 이용하여 6~7학년 학생들의 수학적 능력을 조사하였다. 그 결과 수학적으로 재능 있는 학생들의 중요한 지적·행동적 특성을 요약하면 <표 Ⅱ-1>과 같다(김양권, 2009; 송병섭, 2014, 재인용).

<표 Ⅱ-1> Krutetskii(1979)이 제시한 수학영재의 지적·행동적 특성

수학영재의 지적·행동적 특성
·수학적 제재의 형식화된 인식과 문제의 형식적인 구조의 이해
·수량과 공간적 관계에 대한 사고의 논리성, 체계성, 순차성
·수학적 대상 및 관계 그리고 연산에 대한 신속하고 광범위한 일반화
·수학적 추론의 간략화와 단축된 구조를 이용한 사고 능력
·사고의 유연성
·문제 해결 과정에서의 답의 명확성, 단순성, 경제성, 합리성 추구
·수학적 추론의 가역성뿐 아니라 사고 과정의 신속함과 자유로운 재구성
·수학적 관계, 특성, 주장, 증명, 해법 및 문제 해결의 원리에 대한 일반화된 가설
·실세계의 현상들을 논리적·수학적 범주에서 인식하려는 경향성
·문제 해결 과정에서의 힘과 인내력

NCTM(1989)에서는 영재들의 행동특성을 크게 일반적 행동 특성, 학습 행동 특성, 창의적 행동 특성, 수학적 행동 특성의 4가지로 나누고 각각의 특성을 제시하였다. 그 내용은 <표 Ⅱ-2>와 같다(신문진, 2004; 안선영, 2005, 재인용).

<표 Ⅱ-2> NCTM(1989)에서 제시한 수학영재의 행동 특성

구분	수학영재의 행동 특성
일반적 행동 특성	· 조기에 뛰어난 이해력과 풍부한 어휘력을 가지고 독서에 열중함 · 시, 노래, 이야기 등을 빨리 기억함 · 기본 기술 습득이 빠름 · 공간 지각력이 뛰어남 · 다른 사람들을 이끌고 조직하는 능력이 뛰어남 · 올바르고 공정한 판단력을 가짐 · 통찰력이 뛰어남 · 추상적인 것을 조작하는 능력이 우수함 · 오랫동안 독립적으로 작업하고 집중하는 능력이 있음 · 자발적으로 계획을 시행하는 능력을 수유하고 있음 · 호기심이 많고 활동적인 학습자임 · 어떤 일을 행할 때 새로운 것과 새로운 방법을 즐김 · 체계화를 잘하고 능률적임
학습 행동 특성	· 지적 활동을 즐거워함 · 관찰력이 예리함 · 추상화, 개념화, 종합화하는 능력이 뛰어남 · 원인과 결과의 관계에 대한 통찰력이 뛰어남 · 주어진 문제에 대해 의문을 가지고 정보를 찾으며 다양한 수단을 사용함 · 의문을 많이 가지고 비판적이며 가치를 검토함 · 기초지식과 회상하는 능력이 뛰어남 · 중요한 원리를 파악하고 일반화하는 능력이 뛰어남 · 유사성과 차이점 그리고 예외적인 것에 대한 지각력이 뛰어남 · 효과적으로 사고를 전환하는 능력이 뛰어남

구분	수학영재의 행동 특성
창의적 행동 특성	· 유창한 사고자: 많은 가능성과 결과들을 인식하는 능력이 뛰어남 · 유연한 사고자: 대안적인 접근방법을 사용하는 능력이 뛰어남 · 조직적 사고자: 관계를 파악하는 능력이 뛰어남 · 정교한 사고자: 새로운 응답을 발견하는 능력이 뛰어남 · 추측과 가설을 잘 세움 · 고도의 호기심을 가짐 · 풍부한 지적 활동과 상상력이 뛰어남 · 창의력이 풍부함 · 심미적인 것에 예민함 · 충동적이고 감정적으로 예민함 · 가끔 판에 박힌 과업을 싫어함
수학적 행동 특성	· 수에 대한 조기의 호기심과 이해력이 높음 · 수와 공간적 관계에 대한 논리적이고 상징적인 사고 능력이 뛰어남 · 수학적 패턴, 구조, 관계, 그리고 연산에 대한 지각과 일반화하는 능력이 뛰어남 · 분석적, 연역적, 귀납적으로 추론하는 능력이 뛰어남 · 수학적 추론을 간략화하고, 합리적이고 경제적인 해를 찾는 능력이 뛰어남 · 수학적 활동에서 지적 처리과정의 유연성과 가역성이 높음 · 수학적 기호, 관계, 증명, 풀이방법 등을 기억하는 능력이 뛰어남 · 학습한 것을 새로운 상황에 적용하는 능력이 뛰어남 · 수학적 문제를 풀이하는데 있어서의 활동력과 지속성이 뛰어남 · 수학적 지각력이 뛰어남

남승인(1998)은 여러 학자들의 연구를 종합하여 수학적 영재아에 대한 특성을 <표 Ⅱ-3>과 같이 정리하고 있다(안선영, 2005, 재인용).

<표 Ⅱ-3> 남승인(1998)이 제시한 수학영재의 특성

수학영재의 특성
· 제시된 어떤 활동을 선택해야 할 때 수학과 관련 있는 활동을 선택하는 경향이 있음
· 전통적인 학습내용을 보다 빨리 숙달하며 동료에 비해 어린 나이에 이를 이루어 냄

수학영재의 특성
· 학습한 내용을 새로운 상황에 적용시킬 수 있으며, 일반적 수준의 문제 해결에서 적용되는 알고리즘을 빨리 일반화함
· 문제해결 과정에서 중간 단계를 생략하는 경향이 있으며 예상치 못한 방식으로 문제를 해결하는 경향이 있음
· 문제를 보다 구체적인 자료의 활용에 의존하기보다 추상적으로 다루려는 경향과 그러한 능력을 가지고 있음
· 규칙성과 관계를 발견하기를 즐기며, 이에 대해 성공적이고 그것을 설명하려 함
· 수학적인 추론 과정을 단축할 수 있고 또한 사고의 과정을 뒤바꿀 수도 있음
· 기억력이 뛰어나며 수학적 사실이나 관계, 증명, 문제해결방법 등에 대한 기억을 장시간 유지할 수 있음
· 자신이 흥미를 갖는 한 문제에 대해 장시간 집중할 수 있으며, 문제해결방법이 만족스럽지 않을 경우 그 대안을 빨리 찾음
· 이미 해결한 문제와 새로 해결해야 할 문제 사이의 관계를 보다 잘 파악하며 독창적인 문제에 대해 관심을 많이 가지고 글한 문제해결을 즐김
· 실생활이나 문제해결 장면에서 좀 더 독립적이고 자기 주도적 활동을 할 수 있음
· 일찍 양에 대한 호기심을 가지며, 수학 퍼즐과 수학적 게임에 도전 의욕이 강하고 실제로 즐겨함

이상의 내용을 정리해보면, 수학영재는 수와 공간적 관계에 대한 논리적이고 뛰어난 사고능력을 가지고 있으며 자신이 관심 있는 대상에 대하여 오랫동안 작업하고 집중할 수 있는 특성을 가진다. 또한, 수학 활동을 즐거워하며 논리를 바탕으로 예상하지 못한 방향의 창의적인 문제해결이 가능한 점이 수학영재가 가지는 주요한 특성이라고 할 수 있다.

2. 수학화

본 연구는 초등영재 학생의 수학화 활동을 분석하는 데 목적이 있다. 올바른 수학교육법은 학습자가 기성화된 수학을 전달받고 암기하는 것이 아니라 학습자가 현상 안에서 스스로 수학을 발견해내고 나름대로의 방법을 통해 창의적으로 수학화하는 과정이다. 교사는 학생들이 이런 과정을 통해 수학적 안목을 기르도록 도

움을 주는 조력자의 역할을 해야 한다. 그렇다면 영재학생에게 올바른 수학 학습을 가능하게 하는 수학화란 무엇이며, 수학화 활동에는 어떤 것들이 있는지 자세히 살펴볼 필요가 있다.

가. 수학화의 의미

Freudenthal은 수학을 인간의 정신적 활동이라고 하였고, 이런 수학적 활동의 본질적인 특징을 바로 수학화 활동으로 보고 있다. 수학화란 수학적 수단에 의해 현상을 정리하고 조직하는 활동이며, 현실상황이든 수학적 상황이든 현상 가운데에서 그 정리수단을 찾는 활동, 즉 수학의 본질을 통해 현상에 질서를 부여하는 활동을 말한다. 다시 말해, 수학화란 현상이 수학을 포함한 다양한 것들의 영향을 받아서 변하고, 넓어지고, 깊어짐이 계속되는 과정이다. 즉 현상이 수학을 포함한 어떤 수단에 의하여 조직되는 과정이라고 할 수 있다. 여기서 현상이란 실생활 소재일 수도 있으며, 이미 알고 있는 수학일 수도 있다(임유진, 2009, 재인용).

이처럼 수학화에서는 수학적 활동이 중시되고 있고, 활동을 하면서 현실세계에서 현상을 관찰하여 그것을 정리하는 수단으로 수학의 법칙, 개념 또는 구조가 발명된다는 것이다. 또한 이때 조직된 본질(현상의 정리 수단인 수학적 원리나 개념)이 다시 현상이 되어 수학화를 통한 또 다른 본질이 되는 일련의 교대 과정을 통하여 학습자들은 수학적 사고 능력의 상승을 가져오고 수학학습의 본질은 이러한 불연속성이라는 것이다. 이때 같은 현상을 관찰하여도 학습자 각자가 조직하는 본질이 달라질 수 있으므로 교사의 적절한 지도가 필요하다(임유진, 2009).

수학화는 수평적 수학화와 수직적 수학화로 구분되는데, 수평적 수학화란 문제를 수학적으로 처리할 수 있게 하는 것이다. 즉 학생들이 실생활에서 수학적 현상을 접했을 때 그것을 수학의 원리나 기호를 도입하여 수학적으로 형식화하여 해결할 수 있도록 하는 것이다. 수직적 수학화는 수평적 수학화를 통하여 도입된 기호체계가 더 높은 수학적 처리가 가능하도록 세련된 기호 체계로 조작하고 발전시켜 나가는 것이다(임유진, 2009).

나. 수학화 활동

수학화 활동을 경험시키고자 하는 근본적인 의도는 학생들에게 의미를 갖지 못하는 수학의 형식을 처음부터 제시하는 것이 아니라 수학의 여러 가지 내용을 재발명해 보게 함으로써 그 필요성을 알게 하여 점진적으로 형식화해 나가고자 하는 것이다. 학생들은 이러한 과정을 통하여 수학의 유용성을 체험하게 된다. 학교 수학에서 경험할 수 있는 기본적인 수학화 활동으로 규칙과 패턴 찾기, 추론하기, 정의하기, 일반화, 단축화와 점진적 도식화, 형식화, 알고리즘화, 국소적 조직화 등을 들 수 있다(임유진, 2009, 재인용).

1) 규칙과 패턴 찾기

규칙과 패턴 찾기는 인간이 선천적으로 타고난 특징이며 여러 영재교육원 커리큘럼에서도 이 부분에 많은 시간이 할당되어 있다. 그러나 수학 내적인 문제뿐만 아니라 좀 더 현실적인 상황에서 여러 가지 수학적인 패턴과 규칙을 찾는 기회를 제공해야 할 것이다(임유진, 2009, 재인용).

2) 추론하기

추론은 크게 분석적 추론과 직관적 추론으로 나눌 수 있으며 직관적 추론과 분석적 추론은 상보적인 관계에 있다. 수학교육에서는 분석적 추론을 강조해 왔으나, 직관적 추론 또한 강조되어야 하며, 수학의 역동적인 측면을 경험시키기 위해서는 학습 구성에서 추측과 예상을 위한 여지를 남겨 두어야 한다(임유진, 2009, 재인용).

3) 정의하기

정의하는 과정은 국소적인 조직화 활동 중의 하나이며, 암묵적인 아이디어를 사용하다가 정의의 필요성이 대두되면서 정의가 도입되는 경우가 많다. 형식적인 정의가 주어지기 전에 학습자 스스로 정의를 발명해 보는 경험을 통해서 정의의 필요성과 의미 그리고 방법 등을 이해할 수 있도록 해야 한다(임유진, 2009, 재인용).

4) 일반화

일반화는 하나의 맥락 속에서 혹은 여러 맥락 속에서 공통적인 성질, 유사성, 서로 유추할 수 있는 것, 동형성 등을 발견하는 이른바 핵심적 요소를 찾는 과정에서 이루어진다. Freudenthal은 수학적 지식의 구조를 이해하기 위한 전형적인 예를 패러다임이라 부르며 이러한 패러다임을 통해 수학화 과정이 이루어지기를 기대했다. 그러므로 교사는 적절한 예를 제공하여 다소 시간이 걸리더라도 학생들 스스로 일반화할 수 있는 충분한 시간과 기회를 주는 것이 필요하다(임유진, 2009, 재인용).

5) 단축화와 점진적 도식화

도식화란 좁은 의미로는 수학에서 풀이 공식이나 절차를 간소화, 간결화, 단축화하는 것을 의미하지만, 넓은 의미로는 현실에 적합한 수학적 도식 즉 모델을 찾는 것을 의미한다. 수학은 점진적인 도식화로 발달해왔으며, 아동들은 인류의 역사를 그대로 반복할 필요는 없지만 우리가 이미 알고 있는 것을 수학자들이 알았더라면 일어났을 역사를 반복해야 한다(임유진, 2009, 재인용).

6) 형식화

Freudenthal에 따르면 형식화는 정확한 표현을 위한 도구로서 언어를 의식적으로 사용하는 것이다. 형식화는 발견된 내용을 수학적으로 적절하게 표현하기 위해 언어를 손질하고 조정하고 변형시키는 과정을 의미하는 것이다. 아동들은 문자에 의한 형식화에 큰 어려움을 느끼기 때문에 형식적인 기호를 도입하기 전에 그 필요성을 인식하면서 기호를 발명해 보는 등 형식화의 경험을 제공하는 것이 필요하다(임유진, 2009, 재인용).

7) 알고리즘화

알고리즘은 절차의 단축화를 강조하면서 간편한 절차를 만들어 가는 과정을 의미한다. 알고리즘은 수학의 핵심적인 부분이지만 알고리즘 자체가 자동적으로 이루어지기 때문에 기계적인 학습이 이루어질 가능성이 높다. 그러므로 알고리즘을 자동화하는 것도 중요하지만, 알고리즘의 과정을 아동들의 수준에 맞

게 재발명하는 기회를 제공하여 더 높은 수준으로 전이될 수 있도록 해야 한다(임유진, 2009, 재인용).

8) 국소적 조직화

공리체계로 수학을 조직화하는 것이 전체적인 조직화라면, 공리에서 출발하는 것이 아니라 참이라고 인정되는 사실로부터 시작해서 부분적으로 조직해나가는 것이 국소적 조직화이다. 아동들이 자명해 보이는 사실에 대해 처음부터 엄밀성을 추구하기는 어려울 것이다. 그러므로 학생들 스스로 자명하다고 생각한 것을 의심하는 경험을 통해 공리의 의미를 파악할 수 있고 전체적인 조직화의 필요성도 인식하게 될 것이다(임유진, 2009, 재인용).

3. 귀납적 추론

가. 귀납적 추론의 의미

수학에서의 귀납은 관찰된 개개의 특수한 사례로부터 나타나는 공통된 특성을 포함하는 일반법칙을 도출하는 추론형식으로 본다. 귀납에서 전제가 되는 개개의 특수한 사례는 결론에 대한 확실하고 결정적인 근거가 되지 못하며 단지 결론의 당연성에 대한 잠정적, 확률적인 근거가 될 뿐이며, 전제를 바탕으로 이끌어낸 결론도 단지 개연적인 사실일 뿐이다. 즉, 귀납은 현재까지 경험하고 관찰한 사실만을 바탕으로 특수한 사례를 수집한 것이지 미래에 나타날 수 있는 사실까지도 전부 수집한 것이 아니기 때문에 귀납에서 도출된 일반법칙을 미래의 사실에까지 적용하는 것은 불가능하다. 따라서 귀납적인 결론이 적용될 수 있는 대상은 전제로서 열거되고 관찰된 사실 뿐이며, 그 외의 사실에 더 적용된다는 보장이 없다. 귀납은 절대적 의미에 있어서 보편타당한 일반적 법칙을 이끌어 낼 수 없고 단지 여러 번의 동일한 관찰과 경험을 통해서 얻은 상대적인 경험적 법칙에 도달할 뿐이다(정가영, 2008).

그러나 귀납은 전제와 결론 사이의 필연성을 포기함으로써 전제의 내용을 넘어서 지식을 확장해 갈 수 있다. 실제로 우리가 세상에 대하여 새롭게 알아내는 지식은 대부분 귀납을 통해 발견된 것이다. 특히 수학에서의 증명들 대부분은

특수한 경우들을 관찰하고, 관찰된 사실들 뒤에 숨겨져 있는 규칙성과 일관성을 찾는 귀납적 추론을 통해서 발견된 것이다(정가영, 2008).

귀납은 몇 가지 예에 대한 충실한 관찰로 시작되므로, 귀납을 용이하게 해주는 적절한 교수학습 방법이 필요하며, 교사는 학생들이 의도된 추측에 이르도록 하고 나아가 발견적 사고습관이 들도록 도와주는 적절한 질문과 권고를 통한 안내자가 되어야 한다(정가영, 2008).

나. Polya의 귀납추론

Polya는 수학이란 교과는 논증적 추론인 연역적 추론을 배우는 데 좋은 기회를 제공하지만, 개연적 추론에 있어서도 그 기회를 제공하는 데 중요하다고 하면서 논증과 더불어 개연적인 수학적 추론 지도의 필요성을 언급하였다. 수학자의 창조적인 연구 결과는 연역적 추론에 의해 만들어진 것이지만, 그 증명은 개연적 추론에 의해 발견되는 것이다. 따라서 수학 학습이 수학적 지식을 발견하는 방법이라면, 수학교실에서 개연적 추론을 할 수 있는 기회를 학생들에게 풍부하게 제공해 주어야 한다(정가영, 2008).

Polya는 귀납을 관찰된 사실 뒤의 규칙성과 일관성을 찾으려고 하는 것으로 보고 있으며, 엄밀하게 제시된 수학은 체계적인 연역과학이지만 만드는 과정의 수학은 실험적인 귀납적 과학인 것으로 보고 있다(우정호, 1986; 정가영, 2008 재인용). 즉, 귀납적 추론은 몇 개의 예를 충실히 관찰하고 난 뒤, 유추를 이용하거나 일반화된 내용의 새로운 확장을 통해 추측을 하고, 이러한 추측을 다른 특수한 예로 확인해 보고 난 뒤, 다시 일반화에 도달하는 과정을 거치는 것으로 보고 있다(정가영, 2008).

Polya는 귀납을 하기 위한 가장 중요한 도구로 일반화, 특수화, 유추를 말하고 있는데 각각에 대한 반응을 살펴보면 다음과 같다(정가영, 2008).

1) 일반화

일반화(Generalization)에 대해 Polya는 ‘하나의 대상에 대한 고찰에서 그 대상을 포함하는 집합의 고찰로 이행하는 것’이라고 하면서 일반화에서 고찰의 대상을 구체적인 대상에서 그 대상을 품는 집합으로 넓히는 것으로 설명하고

있다(Polya, 1954; 정가영, 2008, 재인용). 일반화는 문제해결에 관계되는 경우에도 자주 이용된다. 문제를 해결할 때 몇 개의 구체적이고 특수한 경우에서 나타나는 법칙을 일반화하여 적용하는 것이 도움이 되는 경우가 많다. 문제해결을 위해 거기에서 볼 수 있는 일반성을 알아내거나 해결된 문제를 바탕으로 그 문제를 포함하는 집합 전체에서 성립되는 일반성을 알아내는 생각은 수학에서 매우 유용하게 사용되는 것이다. 또한 일반화는 긴장을 주는 인지적 변화의 수반 없이 넓은 범위의 응용을 다룰 수 있게 하기 때문에 학교 수학의 학습과 지도에서 필요할 때마다 채택할 수 있는 하나의 좋은 교수 기술로 다루어질 수 있다(정가영, 2008).

2) 특수화

특수화(Specialization)란 주어진 대상들의 집합 전체에 대한 연구로부터 그 집합 안에 포함된 더 작은 집합에 대한 연구로 나아가는 것이다. 이는 일반화의 접근방법과 밀접하게 연관되지만 논리적으로는 역에 해당하는 귀납의 도구가 특수화이다. 어떤 문제를 풀 때 일반화와 특수화는 같이 사용되는 경우가 많기 때문에 일반화가 보다 잘 이루어지기 위해서는 특수한 경우를 생각하지 않을 수 없다. 특수화는 문제의 일반성이 보존되는 범위에서, 문제의 변수 등을 특수한 수치로 손질하여 문제를 이해하려 하거나 해결방법을 발견하려는 생각을 한다던가, 얻어진 해결방법이 바른 것인지 검토하려고 할 때 특수한 경우의 값을 적용하여 확인해보려는 것이 특수화의 생각이다(정가영, 2008).

3) 유추

유추(Analogy)란 유사성을 바탕으로 어떤 대상에 대하여 성립하는 성질로부터 그와 유사한 대상의 성질을 추측하는 것을 말하는데 결과를 유추하는 경우와, 방법을 유추하는 경우, 이 두 가지를 함께 유추하는 경우를 볼 수 있다. 이외에도 유추를 이용하는 경우는 매우 많다. 교과서에서 예제의 해법을 알았을 때 그 다음에 나오는 유사문제에서 그 방법을 적용해보는 것도 유추이다. 수학이 패턴을 연구하는 학문이라는 점을 생각할 때 유추는 수학에서 발견 도구 이상의 본질적인 의미를 갖는다. 학생들은 유추에 의해 추상적인 개념, 원리, 법칙

을 쉽게 파악할 수 있으며 때론 해답을 찾아내는데 큰 도움을 받을 수도 있다. 따라서 학생들이 문제를 해결하고자 할 때 ‘이 문제와 유사한 것이 없을까?’ ‘그와 유사한 방법은 없을까?’ ‘지금까지 알고 있는 것 가운데 유사한 것을 사용할 수 없을까?’ 등과 같이 사고한다면 많은 도움이 될 것이다(정가영, 2008).

다. 귀납 추론의 교수·학습 지도 모형

정가영(2008)은 학생들이 단순 암기에 의해서 문제를 해결하는 과정에서 많은 오류를 겪는다는 사실을 바탕으로 체계적인 귀납 추론의 교수·학습방법이 필요하다고 생각하였다. 따라서 Polya의 문제해결 교육론을 바탕으로 하여 다음과 같은 모형과 각 단계에 따른 주요 활동을 제안하고 있다.

<표 Ⅱ-4> 정가영(2008)이 제시한 귀납 추론의 교수·학습 지도 모형

<표 Ⅱ-5> 정가영(2008)이 제시한 귀납 추론 교수·학습 지도의 주요 활동

단계	주요 활동
문제제시	·학생들에게 실생활과 관련된 문제 제시하기 ·문제 해결의 동기 유발하기 ·관련된 선수 학습 확인하기
자료수집 및 탐구활동	·문제 상황을 해결할 수 있는 적절한 탐구활동 제시하기 ·문제 조건, 정보 파악하기 ·문제 조건에 맞는 자료 수집 ·학생들간 자유롭게 활동하고 의사소통하기
규칙성 발견	·탐구활동 결과 관찰하기 ·탐구활동의 공통점과 차이점 찾기 ·관찰을 통해 공통 규칙·성질 발견하기 ·발견된 규칙으로 가설 설정하기

단계	주요 활동
규칙성 확인 및 검토	· 특수한 예로 가설을 확인·검토하기 · 가설의 반례를 찾았을 경우, 조건을 확인하고 조건 수정하기 · 가설 자체가 잘못됐을 경우 다시 탐구활동으로 돌아가기 · 가설을 사실로 받아들이기
일반화하기	· 가설을 수학적으로 표현하고 일반화하기 · 제시된 문제 해결하기 · 일반화된 사실을 확장하여 적용해보기 · 다른 해결 전략 알아보기

본 연구는 초등학생을 대상으로 하므로 귀납적 추론을 사용하여 수업을 진행하였으며, 구체적인 실행 방법은 정가영(2008)의 모형을 참고하였다. 모든 탐구문제에 대하여 귀납 추론 모형을 적용할 수 있었던 것은 아니지만, 대다수의 탐구문제에 유용하게 적용하여 학생들의 사고과정이 자연스럽게 일어날 수 있었다.

4. 이산수학

가. 이산수학의 소개

이산(discrete)의 사전적 정의는 '따로따로 떨어진, 분리된, 별개의' 등으로 나타낼 수 있다. 따라서 이산수학(discrete mathematics)은 대부분의 해석학과 관련된 분야에 토대가 되는 연속수학(continuous mathematics)의 고전적인 개념과 대조되는 의미로서, 이산적인 대상을 이산적인 방법으로 다루는 수학의 한 분야로 정의할 수 있다. 즉, 이산구조와 그 관계에 대한 해석과 관련된 수학 분야이다(안선영 2005).

해석학의 주된 주제들은 수 체(number field)를 근거로 하는 반면, 이산수학의 주체들은 개별적이거나 양의 정수와 같은 수들의 집합을 주로 다룬다. 다시 말해서, 원소들의 개수를 셀 수 있는 집합(countable set)인 이산 집합 위에 정의된 수학적 체계에 대하여 연구하는 학문 분야를 이산수학이라 할 수 있다. 이산수학은 수학분야뿐만 아니라 자연과학, 공학, 사회과학 등의 다양한 분야에 응용될 수 있다는 점에서 최근에 급속히 발전하고 있는 현대 수학의 한 분야이

다(안선영, 2005).

이산수학은 옛날에는 수학적 게임 등에 숨어있는 수학으로서 흥미 추구 내지는 오락 정도에 그쳤지만, 20세기 후반 이후로 순수 및 응용 수학에서 대단히 중요한 위치를 정하고 있는바, 근년에 이산수학이 그토록 각광을 받게 된 데는 다음과 같은 중요한 두 가지 이유가 있다(안선영, 2005).

전 시대에는 자연현상을 연속적인 모델로 보았지만 컴퓨터의 재배를 받고 있는 오늘날에는 오히려 연속적인 현상마저도 이산적 모델로 분석한다. 지난 반세기 동안 컴퓨터가 대형 문제를 많이 해결했지만, 컴퓨터는 프로그램에 의하여 움직이고 프로그램은 이산적 알고리즘에 의하여 작성된다는 것이 첫째 이유이다. 그리고 옛날에는 무심코 간과했던 교육적 측면이 이산수학 속에 들어있다는 것이 두 번째 이유이다. 이산수학은 정해진 틀을 따르기보다는 수학적 센스를 요구하는 경우가 많고, 보통의 수학문제도 이산적인 아이디어를 사용하면 쉽고 멋지게 풀리는 경우가 많다(황석근 외, 2001; 안선영, 2005, 재인용).

Dossey(1991)는 이산수학의 세기에 관련되는 문제(계수(計數)문제) 상황을 다음과 같은 세 가지 범주로 나누어 생각하였다. 첫째, 주어진 문제의 해가 있느냐 없느냐를 다루는 존재성 문제(existence problem). 둘째, 해가 있다고 알려진 문제에 대하여 얼마나 많은 해가 존재하느냐를 밝히는 세기의 문제(counting problem). 셋째, 특별한 문제에 대한 최선의 해를 발견하는데 초점을 두는 최적화의 문제(optimization problem)이다. 이런 문제들에 대한 해를 구하는 알고리즘의 개발과 분석이 이산수학의 핵심이다(안선영, 2005, 재인용).

NCTM(1989)은 고등학교 수학과 교육과정의 열두 번째 규준으로 이산수학을 설정하고 있는데 그 구체적인 내용은 다음과 같다. 첫째, 학생들은 유한그래프, 행렬, 수열과 재귀관계와 같은 이산 구조를 사용하여 문제 상황을 표현할 수 있어야 한다. 둘째, 행렬을 사용하여 유한그래프를 표현하고 분석할 수 있어야 한다. 셋째, 알고리즘을 개발하고 분석할 수 있어야 한다. 넷째, 세기와 유한 확률문제를 풀 수 있어야 한다. 다섯째, 대학 진학 학생들은 선형프로그래밍과 계차방정식을 이용하여 문제를 표현하고 해결할 수 있어야 한다. 여섯째, 알고리즘의 응용과 컴퓨터 타당화 과정에서 생기는 문제 상황을 탐구할 수 있어야 한다(안선영, 2005, 재인용).

나. 초등학교 2015 개정 교육과정에 포함되어 있는 이산수학의 내용

2015년 교육부는 2015 개정 교육과정을 확정 발표하였다. 2017년에 초등학교 1・2학년에 적용한 것을 시작으로 하여, 2018년에는 초등학교 3・4학년 및 중・고등학교 1학년에, 2019년에는 초등학교 5・6학년 및 중・고등학교 2학년에, 2020년에는 중・고등학교 3학년까지 점진적으로 적용할 예정이다. 이전 교육과정에서의 이산수학에 대한 연구는 상당히 이루어져 왔으나, 아직 2015 개정 교육과정에 포함된 이산수학을 분석한 연구는 없다. 따라서 초등 영재교육에 적용 가능한 이산수학 프로그램의 내용을 파악하기 위하여 초등학교 2015 개정 교육과정에 나타난 이산수학의 내용을 수학과 영역 및 학년(군)별로 다음과 같이 분석하였다.

<표 Ⅱ-6> 초등학교 2015 개정 교육과정에 포함된 이산수학 내용

영역	내용	학년(군)
수와 연산	・네 자리 이하의 수 ・한 자리 수의 덧셈과 뺄셈 ・두 자리 수 범위의 덧셈과 뺄셈 ・한 자리 수의 곱셈	1~2학년
	・다섯 자리 이상의 수 ・세 자리 수 범위의 덧셈과 뺄셈 ・곱하는 수가 한 자리 수 또는 두 자리 수인 곱셈 ・나누는 수가 한 자리 수 또는 두 자리 수인 나눗셈	3~4학년
	・자연수의 혼합 계산	5~6학년
도형	・쌓기나무를 이용하여 여러 가지 입체도형의 모양 만들기	1~2학년
	・평면도형의 이동을 이용하여 규칙적인 무늬 꾸미기 ・원을 이용하여 다양한 모양 꾸미기 ・삼각형, 사각형, 다각형의 성질 ・주어진 도형을 이용하여 여러 가지 모양을 만들거나 채우기	3~4학년
	・쌓기나무로 만든 입체도형을 보고 사용된 쌓기나무 개수 구하기 ・직육면체와 정육면체의 성질	5~6학년

영역	내용	학년(군)
측정	해당 내용 없음	
규칙성	· 규칙적인 배열에서 규칙 찾기 · 자신이 정한 규칙에 따라 배열하기	1~2학년
	· 규칙적인 계산식의 배열에서 계산 결과의 규칙 찾기	3~4학년
	· 대응 관계를 나타낸 표에서 규칙 찾기 · 문제를 규칙 찾기의 방법으로 해결하기	5~6학년
자료와 가능성	· 정해진 기준으로 사물 분류하기	1~2학년
	· 평균 구하기 · 사건이 일어날 가능성을 수로 표현하기	5~6학년

Ⅲ. 연구의 방향

1. 영재수업에 적용한 이산수학 프로그램 소개

연구자가 영재수업에 적용한 이산수학 프로그램은 안선영(2005)의 논문에 처음 소개되었으며, 최근배와 안선영(2010)이 공동 저술한 교재1)의 내용을 토대로 하였다. 이 교재에 소개된 13가지 주제의 프로그램과 본 연구자가 실제 영재수업에서 적용했던 8가지 프로그램의 목록은 다음의 표 <Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 이산수학 영재 프로그램 목록

자료 번호	탐구 주제	활동 내용	영역	적용 여부
1	비둘기 집의 원리	· 비둘기 집의 원리(평균의 원리) 발견하기 · '삼각형 만들지 않기' 게임 · 머리카락의 개수가 같은 사람이 있을까?	자료와 가능성	○
2	이중계수 문제	· 모임에서 악수 한 횟수 구하기 · 악수보조정리 이해하기	자료와 가능성	
3	모임의 분할	· 모임 분할하기 · 서로 다른 색의 구슬을 빈 상자에 나누어 넣는 방법 구하기 · 표에서 구슬 수와 상자 수에 따른 규칙 찾기	자료와 가능성 규칙성	○
4	자연수의 분할	· 주어진 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 표현하기 · 서로 같은 구슬을 빈 상자에 나누어 넣는 방법 구하기 · 표에서 구슬 수와 상자 수에 따른 규칙 찾기	수와 연산 자료와 가능성 규칙성	○

1) 최근배와 안선영(2010)은 '선생님, 이산수학이 뭐예요?: 수학적 창의력 업그레이드'라는 영재교육 교재를 공동으로 저술하였으며, 기존 연구(2005)를 바탕으로 내용을 집약시켰다.

자료 번호	탐구 주제	활동 내용	영역	적용 여부
5	그래프의 기초	· 그래프의 정의 이해하기 · 그래프의 기본 성질 발견하기	규칙성 도형	○
6	한 붓 그리기	· 한 붓 그리기 경로 찾기 · 한 붓 그리기가 가능한 조건 찾기	규칙성 도형	○
7	최단경로 문제	· 최단경로 찾는 방법 발견하기 · 딕스트라 알고리즘 이해하기	자료와 가능성 규칙성 도형	○
8	최소연결 문제	· 그래프에서 최소 비용의 길을 찾는 방법 발견하기 · 무게표에서 알고리즘 찾기	자료와 가능성 규칙성 도형	○
9	정다면체의 분류	· 정다면체는 몇 종류가 있을까? · 축구공 만들기	도형	○
10	직사각형 구조물	· 직사각형 구조물을 지지하기 위한 지지대의 개수 구하기 · 구조물을 그래프로 표현하기	도형	
11	채색 문제	· 지도 색칠하기 · 지도를 그래프로 바꾸기 · 그래프의 채색수 구하기	자료와 가능성 도형	
12	사다리 타기	· 일대일 대응을 통해 사다리 타기의 비밀 발견하기 · 조건을 만족하는 사다리 만들기	자료와 가능성	
13	무게 재기	· 최소의 회수로 다른 무게의 구슬 찾기	자료와 가능성	

교재에 소개된 모든 주제를 수업하지 못한 이유는 연구자에게 주어진 수업 시간에 제한이 있었기 때문이며, 교재에 소개된 13가지 주제 중 8개의 주제를 선택한 기준은 탐구주제 간의 계열성에 있다. 서로 관련되거나 의미 있는 주제를 선정하여 학습자가 내용을 잘 연계할 수 있도록 하였다.

2. 연구의 방향

본 연구는 이미 개발되어 있는 이산수학 영재 프로그램으로 영재수업을 하고 난 후 '초등 영재학생들의 수학화 결과물'과 '수업 후 수업자와 수업멘토(지도교수)의 논의'를 통해서 수학화 활동 사례를 분석하는 데 초점을 두고 있다.

또한, 영재 프로그램을 적용하는 교수법에 차이를 두었다. 안선영(2005)은 이산수학이 문제해결력을 신장시키는데 적합한 분야라는 점에 착안하여 문제해결력 신장에 초점을 두었으며, 그에 따라 프로그램의 학습활동은 Polya의 문제해결 학습모형을 따르고 있다. 반면에, 본 연구에서는 대상이 초등학생이므로 연역적 추론을 쉽게 하지 못할 것이라 판단하였기 때문에 정가영(2008)의 귀납 추론 교수・학습 지도 모형을 적용하였다. 이 모형에 따라 초등학생도 개연적 추론을 통한 실험적인 수학적 사고가 가능하였다.

기존의 영재 프로그램을 그대로 사용하였지만 교육환경이나 교수법에 맞게 내용을 재구성한 부분도 있다. 일부 수업자료에 수학사에 대한 스토리텔링을 넣어 학습자가 관심을 가지고 수업에 참여할 수 있게 하였고, 일부는 귀납적 수업 모형에 맞게 탐구문제를 수정하기도 하였다. 또한, 대부분의 문제에 대해서 학생의 반응을 분석하였으나 특별한 반응을 보이지 않은 경우에는 생략하였다.

이를 통하여 연구자가 이루고자하는 연구의 방향은 다음과 같다.

첫째, 학습자의 수학적 사고를 돕는 수업자의 발문과 수업자료를 찾는다.

둘째, 탐구문제에 대하여 학생들이 어떤 사고의 오류를 보이는지 알아본다.

셋째, 학습자의 수업결과물을 바탕으로 학습 프로그램에서 수정하고 보완할 부분을 찾는다.

넷째, 본 영재 프로그램에 관심 있는 영재 강사가 수업의 흐름과 수업 시 주의할 점을 한 눈에 파악할 수 있는 유용한 자료를 제공한다.

Ⅳ. 연구의 실제

1. 비둘기 집의 원리

수업에 적용한 학습 프로그램

자료 번호	1	탐구 주제	비둘기 집의 원리(평균의 원리)
학습 목표	· 비둘기 집의 원리를 이해하고 발견할 수 있다. · 비둘기 집의 원리를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.		
관련 영역	자료와 가능성		
학습 교구	비둘기 모형, 비둘기 집 모형, 2가지 색 색연필		

목표문제 : 세상에 머리카락 개수가 같은 사람이 있을까요?

탐구문제 1

① 3마리의 비둘기들이 2개의 비둘기 집에 들어가는 모든 경우를 찾아봅시다.
② 4마리의 비둘기들이 3개의 비둘기 집에 들어가는 모든 경우를 찾아봅시다.
③ 5마리의 비둘기들이 4개의 비둘기 집에 들어가는 모든 경우를 찾아봅시다.
(단, 비둘기나 비둘기 집은 서로 구별하지 않는다.)

보충 1 : 위의 모든 경우에서 공통적으로 발생하는 특징을 찾아보고, 타당한 가설을 세워봅시다.

연습문제 1 : 7명의 초등학생 중 같은 학년의 학생이 반드시 2명 이상 있음을 보이시오.(단, 학년 구분은 하지 않는다.)

비둘기 집의 원리 1

□+1마리의 비둘기를 □개의 비둘기 집에 넣으면
반드시 2마리 이상 들어간 집이 있다.

탐구문제 2

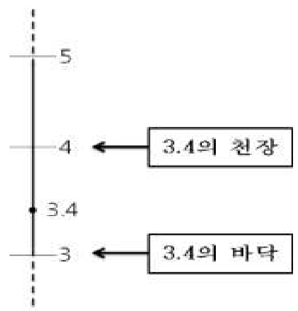
① 5마리의 비둘기들이 2개의 비둘기 집에 들어가는 모든 경우를 찾아봅시다.
② 6마리의 비둘기들이 3개의 비둘기 집에 들어가는 모든 경우를 찾아봅시다.
③ 7마리의 비둘기들이 3개의 비둘기 집에 들어가는 모든 경우를 찾아봅시다.
(단, 비둘기나 비둘기 집은 서로 구별하지 않는다.)

보충 2 : 위의 모든 경우에서 공통적으로 발생하는 특징을 찾아보고, 타당한 가설을 세워봅시다.

약속하기

어떤 수 □에 대해서 □보다 작지 않은 가장 작은 자연수를 □의 천장이라고 합니다.

㉠ 3.4의 천장 = 4, $\frac{7}{2}$의 천장 = 4, 3의 천장 = 3



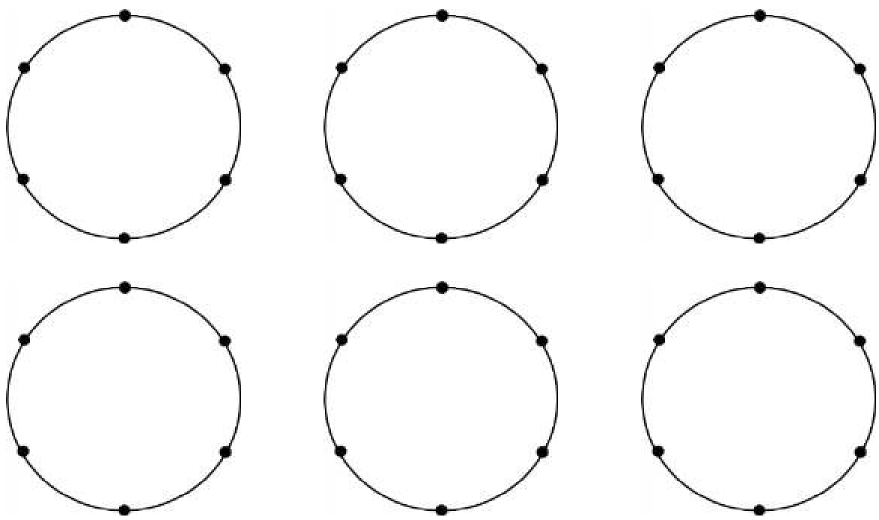
연습문제 2 : 어느 세 수의 합이 13이라면, 이 중 하나는 5 이상이 됨을 생각해봅시다.

비둘기 집의 원리 2

□마리의 비둘기를 △개의 비둘기 집에 넣으면

$\frac{\square}{\triangle}$의 천장 마리 이상 들어간 집이 반드시 있다.

연습문제 3 : 원 위에 6개의 점이 찍혀있습니다. 두 사람이 짝이 되어 서로 다른 색의 색연필을 가집니다. 두 사람이 번갈아 가면서 원 위의 두 점을 연결하는데, 이 때, 변의 색이 같은 삼각형을 만드는 사람이 게임에서 지게 됩니다. 짝과 함께 게임을 하고 난 후, 이 게임을 비둘기 집의 원리와 연관 지어 생각해봅시다.



수학화 활동 사례 분석

자료 번호	1	탐구 주제	비둘기 집의 원리(평균의 원리)
학습 목표	· 비둘기 집의 원리를 이해하고 발견할 수 있다. · 비둘기 집의 원리를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.		
문제해결도구	비둘기 모형, 비둘기 집 모형, 2가지 색의 색연필 등		
수학적 문제	· 세상에 머리카락 개수가 같은 사람이 있을까? · □마리의 비둘기가 △개의 비둘기 집에 들어가는 모든 경우는? · 공통된 특징으로부터 어떤 가설을 만들 수 있을까? · '삼각형 만들지 않기' 게임에서 왜 비기는 경우가 없을까?		
배경지식	평균의 의미, 천장의 정의		

목표문제 세상에 머리카락 개수가 같은 사람이 있을까?

초등학생에게 '세상에 머리카락 개수가 같은 사람이 있을까?'라는 질문을 한다면, 타당한 근거를 들어 대답할 수 있는 학생이 그리 많지 않을 것이다. 성인들도 쉽게 대답하기 어려운 문제이다. 수업을 도입하면서 간단해 보이지만 해결하기 쉽지 않은 목표문제를 학생들에게 제시하여 학습주제에 관심을 가지도록 하였다.

예상한데로 수업에 참여한 학생들은 목표문제를 해결하는 명쾌한 답을 주지 못했다. 여기에서 목표문제를 끝까지 해결하기 위해 매달리지 말고, 자연스럽게 탐구문제를 제시하여 수업을 전개하였다. 탐구문제를 해결하는 과정에서 '비둘기 집의 원리(평균의 원리)'를 발견할 수 있으며, 이 원리는 목표문제를 간단히 해결할 수 있게 하는 단순하지만 유용한 수학적 원리가 된다.

수업자는 수업을 마무리할 때 위의 목표문제를 다시 한 번 제시할 것이다. 학생들은 이미 비둘기 집의 원리에 대해서 완벽하게 이해하였기 때문에 목표문제를 해결하기 위한 아이디어를 쉽게 얻을 수 있을 것이다.

탐구문제 1

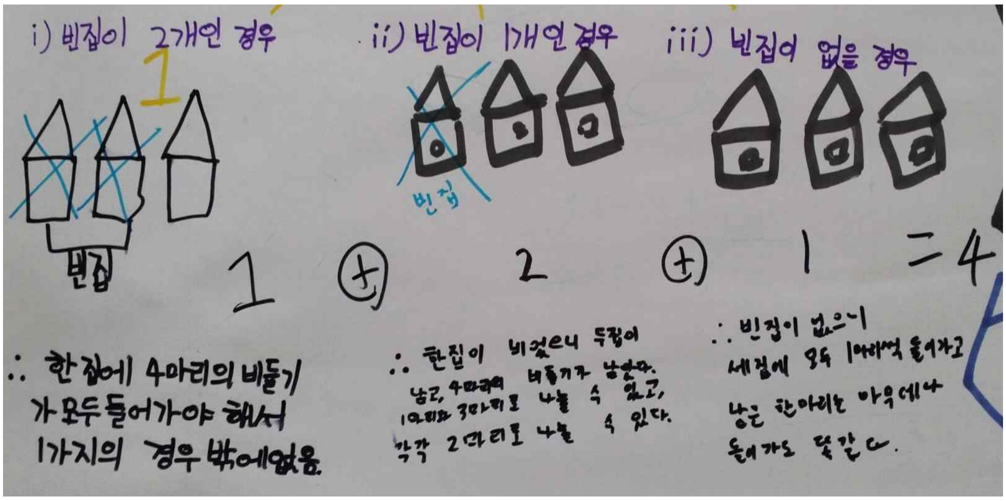
① 3마리의 비둘기들이 2개의 비둘기 집에 들어가는 모든 경우를 찾아봅시다.
② 4마리의 비둘기들이 3개의 비둘기 집에 들어가는 모든 경우를 찾아봅시다.
③ 5마리의 비둘기들이 4개의 비둘기 집에 들어가는 모든 경우를 찾아봅시다.
(단, 비둘기나 비둘기 집은 서로 구별하지 않는다.)

가. 학생들의 반응 분석

학생들을 세 모둠으로 나누어 수업을 진행하였는데, 세 모둠 모두 비둘기가 비둘기 집에 들어갈 수 있는 모든 경우를 그림으로 그려서 '탐구문제 1'을 해결하였다. 하지만 세 모둠의 아이디어에는 차이점도 있었다.

1모둠은 '탐구문제 1-②'을 해결하기 위해서, [그림 Ⅳ-1]처럼 빈집이 2개인 경우, 빈집이 1개인 경우, 빈집이 없는 경우로 나누어 생각하였다.

1) 빈집이 2개라면, 1개의 집에 4마리가 모두 들어가야 한다(4).
2) 빈집이 1개라면, 2개의 집에 1마리와 3마리로 나누거나(1,3), 각각 2마리로 나누어 들어가야 한다(2,2).
3) 빈집이 없다면, 2개의 집에 각각 1마리씩 들어가고 나머지 1개의 집에는 2마리가 들어가야 한다(1,1,2).

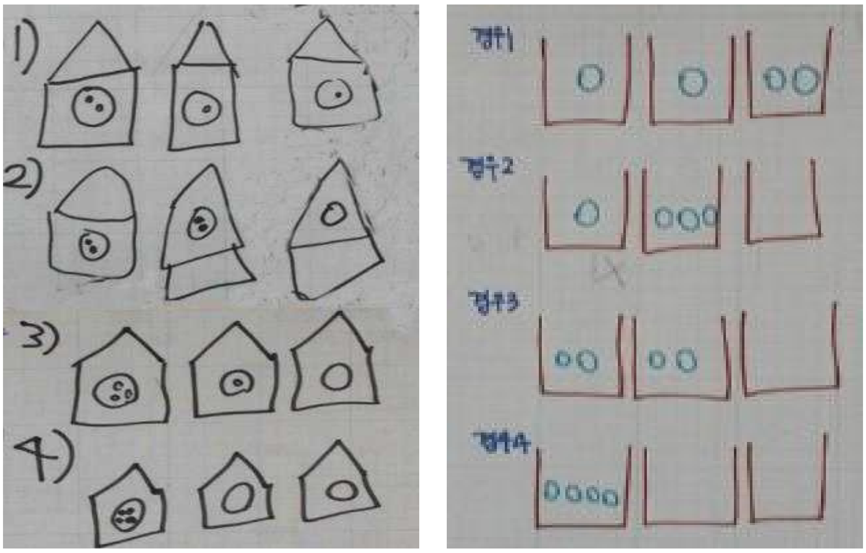


[그림 Ⅳ-1] 1모둠의 문제해결 아이디어(자료번호1-탐구문제1-②)

2모둠과 3모둠은 [그림 Ⅳ-2]처럼 ‘빈집의 수’가 아니라 ‘첫 번째 집에 들어가는 비둘기의 수’를 기준으로 경우를 구했다. 즉, 2모둠은 첫 번째 집에 들어가는 비둘기의 수를 2마리, 3마리, 4마리인 경우로 나누었다.

1) 첫 번째 집에 2마리가 들어간다면, 남은 집에는 1마리씩 들어가거나(2,1,1), 한 집에 2마리가 들어갈 수 있다(2,2).
2) 첫 번째 집에 3마리가 들어간다면, 남은 집에 1마리가 들어가야 한다(3,1).
3) 첫 번째 집에 4마리 모두 들어가는 경우도 있다(4).

3모둠도 2모둠의 아이디어와 같이 ‘첫 번째 집에 들어가는 비둘기의 수’를 기준으로 했다. 첫 번째 집에 들어가는 비둘기의 수를 1마리, 2마리, 4마리로 나누어 모든 경우를 구했다. 첫 번째 집에 들어가는 비둘기의 수가 3마리인 경우를 제외한 이유는 앞에서 구한 것과 겹쳤기 때문이다.



[그림 Ⅳ-2] 2모둠(앞) 및 3모둠(뒤)의 문제해결 아이디어(자료번호1-탐구문제1-②)

‘탐구문제 1-②’에 대한 세 모둠의 문제해결 아이디어를 보았다. 세 모둠은 각자의 아이디어를 이용하여 ‘탐구문제 1-①’과 ‘1-③’도 쉽게 해결하였다.

보충 1 위의 모든 경우에서 공통적으로 발생하는 특징을 찾아보고, 타당한 가설을 세워봅시다.

'보충 1'은 '탐구문제 1-①', '1-②', '1-③'에서 구한 모든 사례에서 공통적인 특징을 찾아 가설을 세우는 단계이다. 수업자는 학생들이 가설을 세우기 위한 직접적인 힌트를 제공해서는 안 된다. 타당한 가설을 세우기 위해 학생 스스로 사고해야 한다. 단, 문제해결을 위한 실마리를 전혀 찾지 못하는 학생에게 도움이 될 만한 조언을 줄 수는 있다.

가. 탐구문제의 이해

'탐구문제 1'과 '보충 1'은 비둘기 집의 원리(평균의 원리)를 발견하는 과정이다. 그렇다면 학생들의 반응을 분석하기 전에 비둘기 집의 원리가 무엇인지 간단히 살펴보자.

[그림 Ⅳ-3]에서 보이는 것처럼 3마리의 비둘기를 2개의 비둘기 집에 넣으면 2마리 이상 들어간 집이 반드시 생긴다. 마찬가지로 4마리의 비둘기를 3개의 비둘기 집에 넣는 경우에도 2마리 이상 들어간 집이 반드시 있다. 이런 사례를 분석하여 공통점을 찾으면, 「(n+1)마리의 비둘기를 n개의 비둘기 집에 넣으면, 2마리 이상 들어간 집이 반드시 있다.」라는 사실로 일반화할 수 있다. 이러한 원리를 비둘기 집의 원리라고 한다(최근배, 강문보, 2005).

[그림 Ⅳ-3] 비둘기 집의 원리

나. 학생들의 반응 분석

'탐구문제 1-②'에서 가능한 경우는 (1,1,2), (1,3), (2,2), (4)의 네 가지인데, 네 가지 경우에서 모두 '공통'으로 만족하는 명제를 만들어 가설을 세우게 하였다. 아래의 <표 Ⅳ-1>은 모둠별로 생각해낸 명제를 정리한 것이다.

<표 Ⅳ-1> '공통'으로 만족하는 명제(자료번호1-탐구문제1-②-보충1)

모둠	모든 경우를 공통으로 만족하는 명제
1모둠	·비둘기가 4마리이다. ·비둘기 집이 3개이다. ·비둘기 집이 튼튼하다. ·비둘기가 닭처럼 생겼다. **·적어도 한 집에 2마리 이상의 비둘기가 있다.**
2모둠	·비둘기의 합이 4마리이다. ·비둘기 집보다 비둘기가 한 마리 많다. **·적어도 한 집에는 2마리의 비둘기가 있다.**
3모둠	·비둘기의 집이 3개이다. ·비둘기의 개수가 4마리이다. **·한 집에 비둘기의 개수가 2마리 이상이다.**

학생들이 생각해낸 명제 중에는 '비둘기가 3마리이다'나 '비둘기의 집이 4개이다'와 같이 문제에서 제시된 내용을 그대로 쓴 것도 있었고, '비둘기의 집이 튼튼하다'나 '비둘기가 닭처럼 생겼다'와 같이 주관적인 견해가 들어가기도 했다. 하지만 세 모둠에서 모두 수업자가 의도한 '적어도 한 집에 2마리 이상의 비둘기가 있다.'라는 명제를 찾아내었다.

'탐구문제 1-①', '1-②', '1-③'에서 또한 위의 방법대로 '공통으로 만족하는 명제'를 만들어보게 하였고, 모든 경우를 만족시킬 수 있는 가설을 각자 세워보도록 하였다. 아래는 학생들이 세운 가설을 정리한 것이다.

·가설 1 : **비둘기의 수가 비둘기 집의 수보다 하나 더 많을 때, 적어도 한 개의 비둘기 집에 2마리 이상의 비둘기가 들어갈 것이다.**

·가설 2 : 빈 비둘기 집의 개수가 +3, +5, +7, +9, …로 늘어날 것이다.

·가설 3 : 비둘기 한 마리만 들어가 있는 비둘기 집의 개수가 +2, +4, +6, +8, …로 늘어날 것이다.

1모둠과 2모둠의 학생들은 수업자의 의도대로 <가설 1>과 같은 비둘기 집의 원리를 잘 발견하였다. 하지만 3모둠의 학생들은 <가설 2>와 <가설 3>과 같이 잘못된 가설을 세우고 있었다. 다음은 가설을 찾아가는 3모둠의 모습을 관찰한 에피소드이다.

S_1: 어떻게 하지?

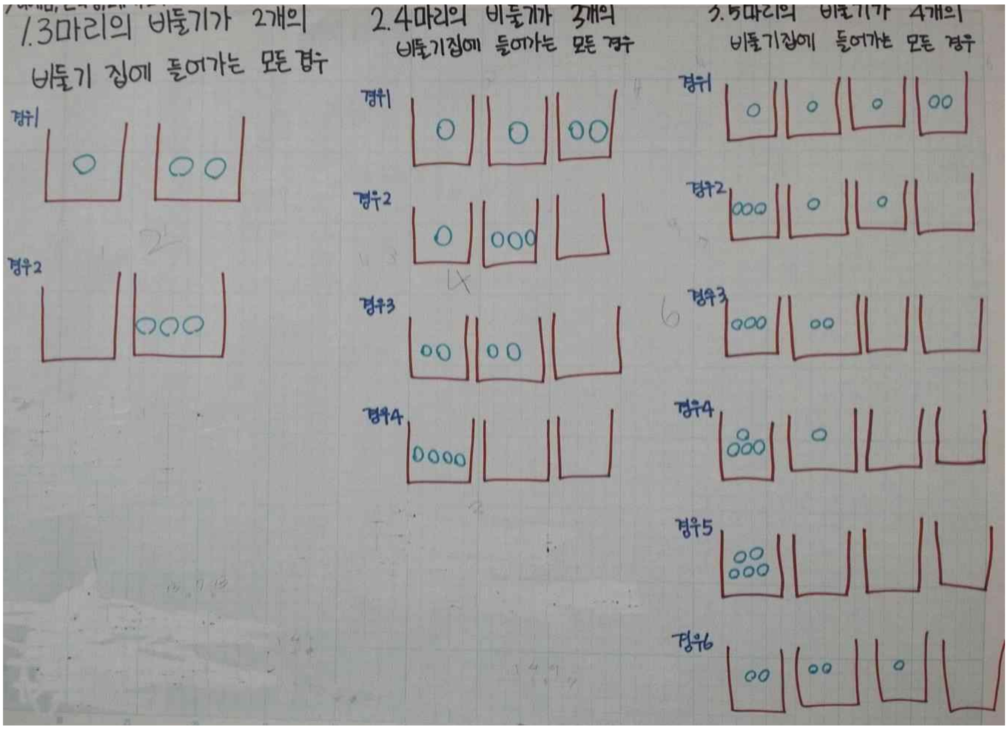
S_2: 첫 번째 문제에서 비어있는 비둘기 집이 1개인데, 두 번째 문제에서는 4개이고, 세 번째 문제에서는 9개가 되니깐…

S_1: 빈 비둘기 집의 개수에 규칙이 있을까?

S_2: 4는 1보다 3만큼 크고, 9는 4보다 5만큼 크니깐, 다음은 7만큼 클 것 같아.

S_1: 그런데, 이게 우리가 발견한 명제와 무슨 관련이 있지?

S_2: …



[그림 Ⅳ-4] 3모둠의 문제해결 아이디어(자료번호1-탐구문제1)

결론적으로 이 학생의 예상은 틀렸다. 6마리의 비둘기가 5개의 비둘기 집에 들어가는 모든 경우는 10가지이며, 이 때 위와 같이 비어있는 비둘기 집의 수를 구한다면 21개이다. 3모둠의 학생들은 이미 발견한 '공통으로 만족하는 명제'를 가설을 세우는 데 전혀 연관시키지 못하고 있었다.

이 모둠 학생들은 '탐구문제 1-①', '1-②', '1-③' 사이에서 규칙을 찾고 가설을 세우려는 오류를 범하고 있으므로, [그림 Ⅳ-4]에서 찾은 12가지 경우에 대한 공통점 및 규칙을 찾고 가설을 세우도록 지도를 해야 한다.

연습문제 1 7명의 초등학생 중 같은 학년의 학생이 반드시 2명 이상 있음을 보이시오.(단, 학년 구분은 하지 않는다.)

귀납적 추론 모형에 따르면 [문제제시]-[자료수집 및 탐구활동]-[규칙성 발견]-[규칙성 확인 및 검토]-[일반화하기]의 단계를 거치는데, 연습문제를 해결하는 과정이 [규칙성 확인 및 검토]라고 할 수 있다. 연습문제를 해결하면서 학생들이 스스로 세운 가설에 대한 반례는 없는지 점검하는 것이다. 가설이 타당하지 않다면 앞의 탐구과정을 다시 되풀이하여 올바른 가설을 세워야 하며, 가설이 타당하다면 연습문제는 바르게 해결될 것이다.

수업에 참여한 모든 학생들은 '7명의 초등학생'과 '6개의 학년'이라는 수학적 단서를 가지고 비둘기 집의 원리를 이용하여 연습문제를 쉽게 해결하였다.

탐구문제 2

① 5마리의 비둘기들이 2개의 비둘기 집에 들어가는 모든 경우를 찾아봅시다.
② 6마리의 비둘기들이 3개의 비둘기 집에 들어가는 모든 경우를 찾아봅시다.
③ 7마리의 비둘기들이 3개의 비둘기 집에 들어가는 모든 경우를 찾아봅시다.
(단, 비둘기나 비둘기 집은 서로 구별하지 않는다.)

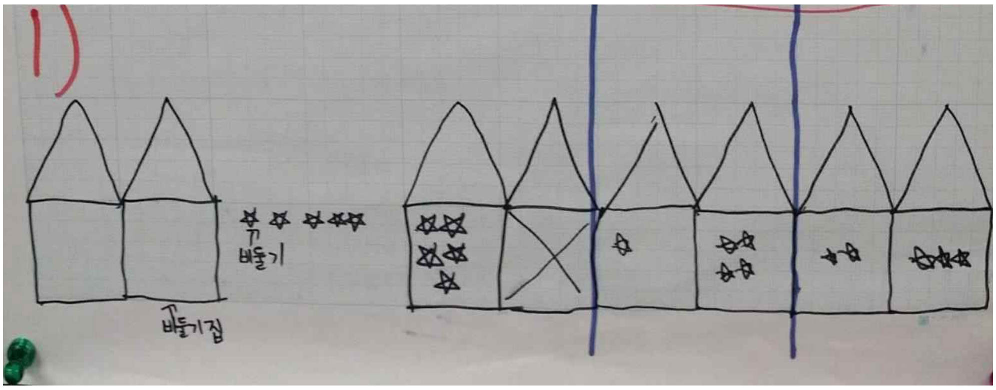
가. 학생들의 반응 분석

1모둠은 '탐구문제 2-①'을 해결하기 위해서 '탐구문제 1'의 아이디어를 사용

했다. [그림 Ⅳ-5]는 1모둠의 문제해결 아이디어이다.

1) 빈집이 1개라면, 1개의 집에 5마리가 모두 들어가야 한다(5).

2) 빈집이 없다면, 2개의 집에 1마리와 4마리로 나누거나(1,4), 2마리와 3마리로 나누어 들어가야 한다(2,3).



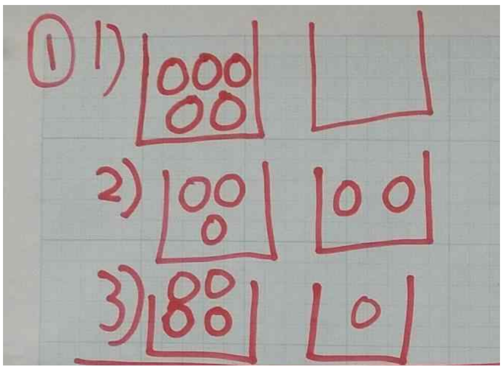
[그림 Ⅳ-5] 1모둠의 문제해결 아이디어(자료번호1-탐구문제2-①)

마찬가지로 2모둠도 ‘탐구문제 1’을 해결할 때 사용했던 아이디어를 썼다. [그림 Ⅳ-6]는 2모둠의 문제해결 아이디어이다.

1) 첫 번째 집에 5마리 모두 들어가는 경우가 있다(5).

2) 첫 번째 집에 4마리가 들어간다면, 남은 집에는 1마리가 들어가야 한다(4,1).

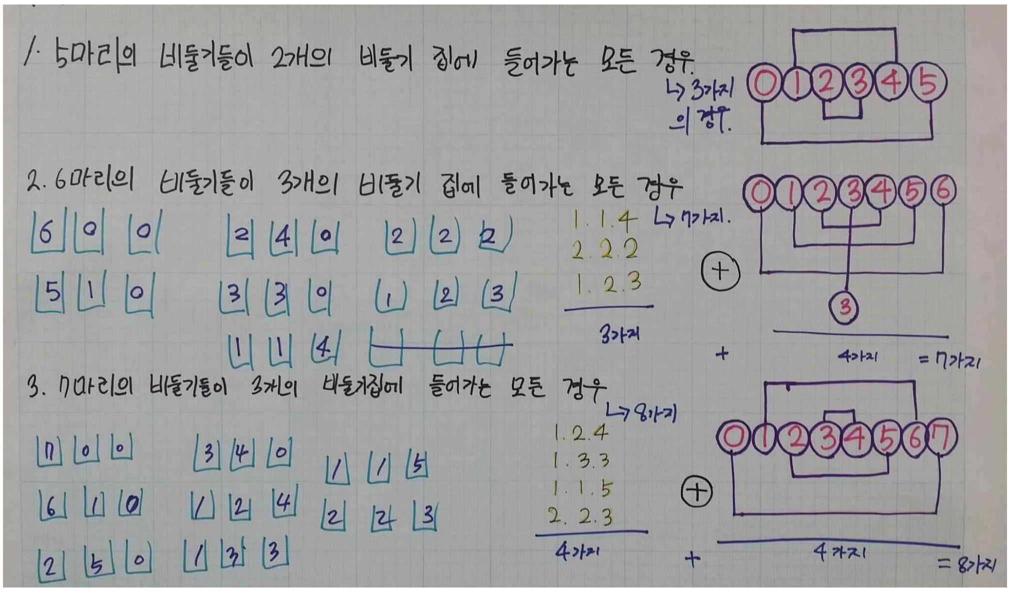
3) 첫 번째 집에 3마리가 들어간다면, 남은 집에 2마리가 들어가야 한다(3,2).



[그림 Ⅳ-6] 2모둠의 문제해결 아이디어(자료번호1-탐구문제2-①)

그러나 3모둠은 이전과 다른 방법으로 문제를 해결하였다. [그림 Ⅳ-7]은 3모둠의 문제해결 아이디어이다.

아래의 풀이방법을 살펴보면, 두 개의 숫자를 선으로 연결하는 방법으로 경우를 구하고 있다. 이 방법은 비둘기 집이 2개 이하인 경우에는 유용하지만, 비둘기 집이 3개 이상일 경우에는 사용할 수 없다. 따라서 3모둠은 비둘기 집이 3개일 때에는 추가로 경우를 찾고 있었다.



[그림 Ⅳ-7] 3모둠의 문제해결 아이디어(자료번호1-탐구문제2)

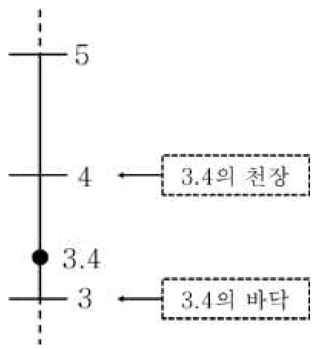
보충 2 위의 모든 경우에서 공통적으로 발생하는 특징을 찾아보고, 타당한 가설을 세워봅시다.

‘보충 2’도 귀납적 추론 방법에 따라, ‘탐구문제 2-①’, ‘2-②’, ‘2-③’에서 발견한 사례들로부터 공통적인 명제를 찾아 가설을 세운다. 공통적인 명제를 찾는 것은 앞선 ‘보충 1’에서 했었기 때문에 어렵지 않을 것이다. 하지만 이 문제에서 학생들 스스로 가설을 세우기란 쉽지 않다. 왜냐하면 학생들은 아직 ‘천장’의 의미를 모르기 때문이다(이 용어의 의미는 다음 장에 자세히 설명되었다). 학생들에게 가설을

세울 수 있는 충분한 시간을 줬음에도 불구하고 가설을 세우지 못한다면, 수업자는 '천장'의 의미를 설명해줘야 한다. '천장'의 정의는 가설을 세우기 위한 중요한 힌트가 될 것이다.

가. 탐구문제의 이해

5마리의 비둘기를 2개의 비둘기 집에 넣으면 비둘기가 3마리 이상 들어간 집이 반드시 생긴다. 그러면 여기에서 3마리는 그냥 우연히 나온 수일까, 아니면 어떤 수학적인 의미가 있을까? 이를 이해하기 위해 '천장'이라는 용어에 대한 이해가 필요하다. 최근배와 안선영(2010)은 '천장'을 '어떤 수 n에 대해서 n보다 작지 않은 가장 작은 자연수'라고 말하고 있다. [그림 Ⅳ-8]을 참고하여 이해하면, 3.4의 천장은 4이고, 3의 천장은 3이 된다. 따라서 '천장'이란 용어를 도입하여 정리하면, 「m마리의 비둘기를 n개의 비둘기 집에 넣으면, $\frac{m}{n}$의 천장 마리 이상 들어간 집이 반드시 있다.」로 일반화할 수 있다(최근배 외, 2010).



[그림 Ⅳ-8] '천장'의 의미

나. 학생들의 반응 분석

'탐구문제 2'는 '탐구문제 1'처럼 비둘기의 수가 비둘기 집의 수보다 1만큼 더 큰 것이 아니라, 비둘기의 수와 비둘기 집의 수의 차이가 다르기 때문에 공통점을 찾는 데 어려움을 보였다. 결국 수업자의 도움 없이 가설을 세울 수 있는 학생은 아무도 없었다. 수업자가 '천장'이라는 용어를 설명하고 난 후, 2모둠에 속

한 단 한 명의 학생만이 올바른 가설을 만들어냈다. 다음은 이 학생의 문제해결 에피소드이다.

T: 천장의 의미에 대해서 이해했나요? 이제 다시 가설을 생각해봅시다.

S: …

S_1: 아. 알겠다!

T: '천장'이 어떤 관련이 있지?

S_1: 비둘기의 수가 5마리이고 비둘기 집의 수가 2개일 때, $\frac{5}{2}$의 천장은 3이잖아요. '적어도 한 집에 3마리 이상의 비둘기가 있다.'라는 명제에 숫자 3이 있어요.

T: 그래서 가설은 어떻게 세우면 좋겠니?

S_1: 음, 잠시 만요…. '비둘기의 수가 □이고 비둘기 집의 수가 △일 때, 적어도 한 집에 $\frac{\square}{\triangle}$의 천장 마리 이상 들어간 집이 반드시 있다.'라고 할 수 있어요.

S: 그게 무슨 말이지?

이 학생은 '천장'에 대해서 이해하자마자 문제해결 아이디어를 생각해냈다. 하지만 나머지 학생들은 여전히 별다른 아이디어를 보여 주지 못하였다. 수업자가 '사례에서 찾을 수 있는 공통적인 명제'와 '천장'을 연관시켜 보라고 직접적인 도움을 주었을 때에야 추가로 4명의 학생이 올바른 아이디어를 생각해냈다. 그러나 여전히 나머지 학생은 가설을 세우지 못하였다. 다음은 수업자가 도움을 주어 문제를 해결한 과정을 보여주는 에피소드이다.

T: 모둠별로 찾았던 공통으로 만족하는 명제가 뭐였죠?

S: '적어도 한 집에 3마리 이상의 비둘기가 있다.'에요.

T: 그러면 문제에서 비둘기의 수와 비둘기 집의 수를 천장을 사용하여 나타내보세요.

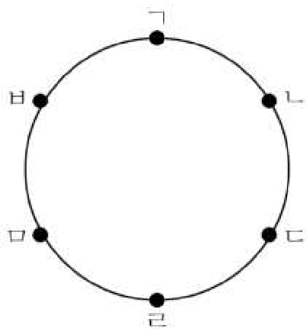
S: 비둘기는 5마리이고 비둘기 집은 2개니까… 아! 3이 나오는구나.

연습문제 3 원 위에 6개의 점이 찍혀있습니다. 두 사람이 짝이 되어 서로 다른 색의 색연필을 가집니다. 두 사람이 번갈아 가면서 원 위의 두 점을 연결하는데, 이 때, 변의 색이 같은 삼각형을 만드는 사람이 게임에서 지게 됩니다. 짝과 함께 게임을 하고 난 후, 이 게임을 비둘기 집의 원리와 연관 지어 생각해봅시다.

가. 연습문제의 이해

이 문제는 왜 비기는 경우가 없고 항상 게임이 끝나는가를 설명하는 것이 핵심이다. 이를 비둘기 집의 원리와 관련지어 알아낼 수 있다. 다음은 '연습문제 3'에 대한 해설이다.

편의상 색연필의 두 가지 색을 빨간색과 검은색이라고 하고, [그림 Ⅳ-9]와 같이 6개의 점을 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ, ㅂ이라고 하자.



[그림 Ⅳ-9] '연습문제 3'의 원

점 ㄱ에서 연결할 수 있는 선분은 5개로 ㄱㄴ, ㄱㄷ, ㄱㄹ, ㄱㅁ, ㄱㅂ이다. 여기서 5개의 선분을 비둘기로 두 가지 색의 색연필을 비둘기 집으로 생각하면, 비둘기 집의 원리에 의하여 5개의 선분 중 적어도 3개는 같은 색이다. 이 세 개의 선분을 편의상 ㄱㄴ, ㄱㄷ, ㄱㄹ이라고 하고 또한 빨간색이라고 하자. 이제, 세 개의 선분 ㄴㄷ, ㄴㄹ, ㄷㄹ의 색을 생각해보자. 만일 세 개의 선분 중 어느 하나가 빨간색(편의상, ㄷㄹ)이라면, 삼각형 ㄱㄷㄹ은 빨간색 변을 가지는 삼각

형이 된다. 따라서 게임은 끝난다. 만일 세 개의 선분이 모두가 빨간색이 아니라면(즉, 검은색), 삼각형 ㄴㄷㄹ은 검은색 변을 가지는 삼각형이 된다. 따라서 이 경우에도 게임이 끝난다. 따라서 이 게임에서 서로 비기는 방법은 없다고 할 수 있다(최근배, 안선영. 2010).

수업자도 처음 이 문제를 접하고 비둘기 집의 원리와 연관 지어 보라고 했을 때 아이디어를 쉽게 떠올릴 수 없었다. 따라서 수업자와 수업멘토(지도교수)가 수업활동을 계획할 때 학생들 스스로 이 문제를 해결하기는 어려울 것이라고 예상하였다. 그래서 수업멘토는 수업자에게 새로운 분석을 제안하였다. 학생들에게 게임을 여러 번 해보게 하고 사례를 분석하여, 먼저 시작하는 것이 게임에서 이기는데 유리한지 불리한지 알아보기로 하였다.

나. 학생들의 반응 분석

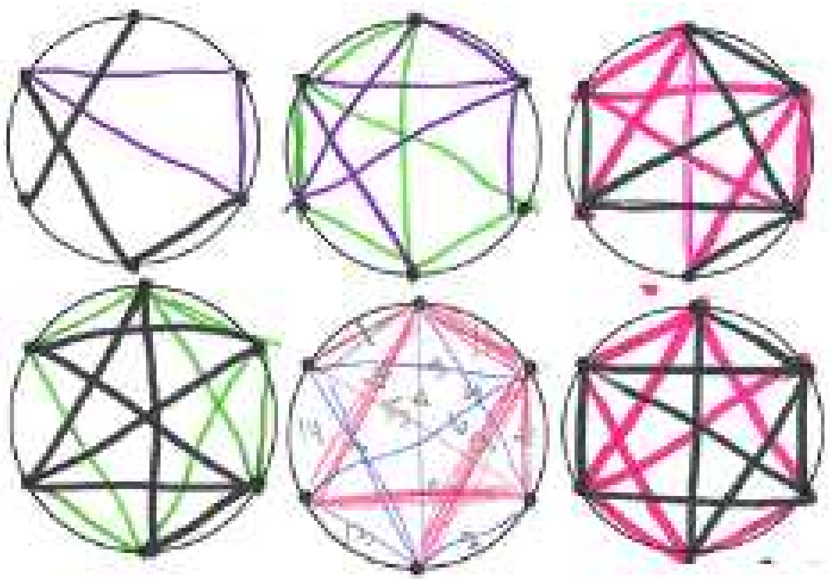
[그림 Ⅳ-10]은 학생들이 게임을 하고 난 후 결과물의 일부를 발췌한 것이다. 수업자가 예상한대로 학생들 스스로 이 게임과 비둘기 집의 원리를 연관시키는 것은 어려웠다. 따라서 문제의 논점을 바꾸어 이 게임에서 먼저 시작하는 것이 유리한지 불리한지 생각해보게 하였다.

처음에 학생들은 선을 끝까지 긋지 못하고 게임이 끝나버렸다. 선을 모두 긋지 못하고 게임이 끝나버리면 먼저 시작하는 것이 유리한지 불리한지 파악할 수 없다. 그러나 게임을 몇 번 해보더니 금세 요령이 생기면서 선을 모두 그을 때까지 게임할 수 있었다. 학생들은 게임을 여러 번 반복하는 과정에서, 게임에서 비기는 경우는 없으며 먼저 시작하는 경우가 불리하다는 것을 자연스럽게 인식하게 되었다.

이 게임에서 먼저 시작하는 것이 왜 불리한 것 같은지 물었을 때, 2모둠의 한 학생 그 이유를 다음과 같이 설명했다.

“선을 모두 그리고 게임이 끝났다면 총 15개의 선을 그릴 수 있어요. 두 명이 한 번씩 번갈아가면서 선을 긋는다고 하면, 먼저 시작하는 사람이 8개의 선을 그리고 나중에 시작한 사람이 7개의 선을 그리게 돼요. 만약 14번째 선을 그을 때가지 게임이 끝나지 않았다면, 15번째 선을 그리는 사람이 변의 색이 같은 삼

각형을 만들게 돼요. 그래서 먼저 시작한 사람이 마지막 선을 긋게 되니깐 게임에서 지게 되는 거예요.”



[그림 Ⅳ-10] 학생들의 게임 결과물

2. 모임의 분할

수업에 적용한 학습 프로그램

자료 번호	3	탐구 주제	모임의 분할
학습 목표	어떤 모임을 분할하는 방법의 수를 구할 수 있다.		
관련 영역	자료와 가능성, 규칙성		
학습 교구	서로 다른 색의 구슬, 빈 상자		

목표문제 : 장미꽃, 맨드라미, 금잔화, 튤립, 해바라기, 국화꽃의 씨앗이 각각 한 개씩 있습니다. 이것을 화분 4개에 빈 화분 없이 나누어 심으려고 합니다. 나누어 심을 수 있는 방법의 수는 모두 몇 가지일까요?

탐구문제 1 : 빨간 색, 파란 색, 검은 색의 구슬 3개를 △개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣는 방법을 그림을 그려서 알아봅시다.(단, 상자는 서로 구별하지 않으며 빈 상자 없이 나누어 담는다.)

① △=1 일 때, 몇 가지 방법이 있나요?
② △=2 일 때, 몇 가지 방법이 있나요?
③ △=3 일 때, 몇 가지 방법이 있나요?
④ △≥4 일 때, 몇 가지 방법이 있나요?
⑤ 위의 ②번을 유심히 살펴보고 빨간 색 구슬과 상자와 관련된 사실을 찾아봅시다.

보충 1 : 1개의 상자에 서로 다른 □개의 구슬을 나누어 넣는 방법은 모두 몇 가지입니까?

보충 2 : 구슬의 수와 상자의 수가 같은 경우에 서로 다른 □개의 구슬을 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣는 방법은 모두 몇 가지입니까?

보충 3 : 서로 다른 □개의 구슬을 0개의 상자에 넣는 방법은 모두 몇 가지입니까?

탐구문제 2 : 서로 다른 4개의 구슬($\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$)을 3개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣는 방법을 알아봅시다.(단, 상자는 서로 구별하지 않으며 빈 상자 없이 나누어 담는다.)

① $\boxed{1}$번 구슬 혼자만 1개의 상자에 들어갈 경우

② $\boxed{1}$번 구슬이 다른 구슬과 같이 상자에 들어갈 경우

③ 모두 몇 가지 방법이 있나요?

탐구문제 3 : [탐구문제 2]의 탐구방법으로 다음의 각 경우를 해결해 봅시다.

① 서로 다른 4개의 구슬을 2개의 상자에 넣는 방법의 수

② 서로 다른 5개의 구슬을 2개의 상자에 넣는 방법의 수

③ 서로 다른 5개의 구슬을 3개의 상자에 넣는 방법의 수

④ 서로 다른 5개의 구슬을 4개의 상자에 넣는 방법의 수

탐구문제 4 : 앞의 탐구문제들의 결과를 참고하여 다음 표의 빈칸을 채워봅시다. 그리고 일반적으로 이러한 표를 만드는 규칙을 찾아봅시다.(편의를 위하여, 0개의 구슬을 0개의 상자에 나누어 넣는 방법의 수는 1이라고 하자.)

상자수 / 구슬수	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

수학화 활동 사례 분석

자료 번호	3	탐구 주제	모임의 분할
학습 목표	어떤 모임을 분할하는 방법의 수를 구할 수 있다.		
문제해결도구	서로 다른 색의 구슬, 빈 상자 등		
수학적 문제	· □개의 서로 다른 구슬을 △개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣는 방법은? · 표의 빈칸이 채워지는 규칙은?		
배경지식	모임의 분할수, '특정한 것 중심으로 생각하기' 전략		

목표문제 장미꽃, 맨드라미, 금잔화, 튤립, 해바라기, 국화꽃의 씨앗이 각각 한 개씩 있습니다. 이것을 화분 4개에 빈 화분 없이 나누어 심으려고 합니다. 나누어 심을 수 있는 방법의 수는 모두 몇 가지일까요?

모든 수업의 도입 부분에서 간단해 보이지만 해결하기 쉽지 않은 목표문제를 학생들에게 제시하여 학습주제에 대한 흥미와 관심을 갖게 하였다. 학생들은 호기심을 가지고 문제를 해결하기 위해 도전하였다.

물론 이 문제는 학생들에게 넉넉한 시간을 준다면 모든 사례를 찾아보는 방법으로 해결할 수 있을 것이다. 그러나 이 문제의 답은 65가지나 된다. 즉, 시간을 어느 정도 제한하였을 때 정확한 답을 찾기란 쉽지 않다. 본 수업에서 수업자는 학생들에게 문제를 풀기 위한 3분의 제한 시간을 주었다. 하지만 결국 학생들은 주어진 시간 안에 문제를 풀지 못했다. 여기에서 수업자는 이 문제를 빠르게 풀 수 있는 수학적 규칙이 있다고 소개하며 수업을 시작하였다.

수업자는 수업의 마무리 단계에서 목표문제를 다시 한 번 제시할 것이다. 이때 학생들은 모임의 분할수와 '특정한 것 중심으로 생각하기' 전략을 학습한 상태이므로 문제를 해결하기 위한 아이디어를 쉽게 찾을 수 있을 것이다.

탐구문제 1 빨간 색, 파란 색, 검은 색의 구슬 3개를 △개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣는 방법을 그림을 그려서 알아봅시다.(단, 상자는 서로 구별하지 않으며 빈 상자 없이 나누어 담는다.)

① △=1 일 때, 몇 가지 방법이 있나요?

② △=2 일 때, 몇 가지 방법이 있나요?

③ △=3 일 때, 몇 가지 방법이 있나요?

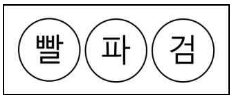
④ △≥4 일 때, 몇 가지 방법이 있나요?

⑤ 위의 ②번을 유심히 살펴보고 빨간 색 구슬과 상자와 관련된 사실을 찾아봅시다.

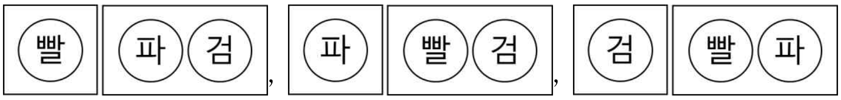
가. 탐구문제의 이해

이 문제는 직접 상자에 구슬을 넣어보면서 방법의 수를 구할 수 있다.[2)]

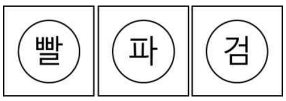
① 상자가 하나인 경우: 1가지, S(3,1)=1



② 상자가 두 개인 경우: 3가지, S(3,2)=3



③ 상자가 세 개인 경우: 1가지, S(3,3)=1



④ 상자가 네 개인 경우: 0가지

⑤ 상자가 두 개인 경우에서 빨간 색 구슬을 중심으로 살펴보면, 빨간색 구슬이 혼자 상자에 있거나 다른 색의 구슬과 같이 상자에 있는 두 가지 경우로만 나누어진다. 물론 다른 구슬을 중심으로 생각해 보아도 마찬가지이

2) '어떤 모임에서 참석자를 몇 개의 조로 나누는 방법의 수'를 구하는 것은 '주어진 □개의 서로 다른 구슬을 구별이 없는 △개의 상자에 빈 상자 없이 담는 방법의 수'를 구하는 것과 같다. 이를 모임의 분할수 또는 제2종 스털링수(Stirling number of the second kind)라고 부르고, 수학적 기호 S(□,△)로 나타낸다.

다. 즉, 어떤 구슬은 혼자 상자에 있거나 다른 구슬과 같이 상자에 있게 된다. 이와 같은 문제해결 전략을「특정한 것 중심으로 생각하기」라고 하며, 이산수학에서 흔히 사용하는 전략 중 하나이다(최근배 외, 2010).

나. 학생들의 반응 분석

학생들은 '탐구문제 1'을 혼자서도 쉽게 구할 수 있었다. 구하는 경우의 수도 3개 이하였고, 실제로 나누어 보거나 그림을 그리는 방법으로 구할 수 있었다. 또한, ⑤번 문제에 대해서 빨간 색 구슬이 상자에 혼자 들어가 있거나 다른 구슬과 함께 들어가 있다는 사실을 잘 발견했다. 하지만 ⑤번 문제의 의도가 뭔지는 알지 못했다. 따라서 수업자는 이산수학에서 흔히 쓰이는 문제해결 전략으로 '특정한 것 중심으로 생각하기' 전략이 있다고 설명했으며, 이번 학습주제를 해결할 때 이 전략을 잘 활용하도록 하였다.

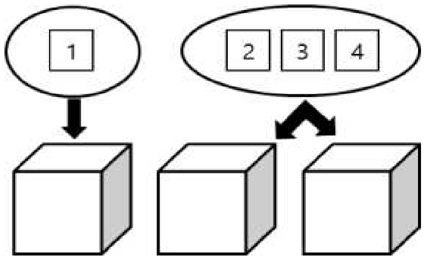
탐구문제 2 서로 다른 4개의 구슬(1234)을 3개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣는 방법을 알아봅시다.(단, 상자는 서로 구별하지 않으며 빈 상자 없이 나누어 담는다.)

① 1번 구슬 혼자만 1개의 상자에 들어갈 경우
② 1번 구슬이 다른 구슬과 같이 상자에 들어갈 경우
③ 모두 몇 가지 방법이 있나요?

가. 탐구문제의 이해

'특정한 것 중심으로 생각하기' 전략을 통해 1번 구슬을 중심으로 생각해본다면, 1번 구슬은 혼자 상자에 들어가거나 다른 구슬과 같이 상자에 들어가는 두 가지 경우 밖에 없다.

① 1번 구슬 혼자만 1개의 상자에 들어가는 경우

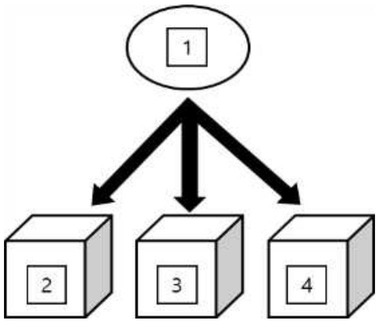


[그림 Ⅳ-11] 1번 구슬 혼자만 1개의 상자에 들어가는 경우

이 경우에는 3개의 구슬 2, 3, 4를 2개의 상자에 나누어 넣는 방법의 수 S(3,2)와 같다. 따라서 '탐구문제 1'에 의해서 답은 3가지이다(최근배 외, 2010).

② 1번 구슬이 다른 구슬과 같이 상자에 들어갈 경우

이 경우에는 1번 구슬을 제외한 다른 구슬들(2, 3, 4)을 우선 빈 상자 없이 3개의 상자에 나누어 담고, 그 후에 1번 구슬을 넣으면 된다. 여기에서 1번 구슬을 제외한 다른 구슬들(2, 3, 4)을 빈 상자 없이 3개의 상자에 나누어 담는 방법의 수 S(3,3)은 1가지이다(최근배 외, 2010).



[그림 Ⅳ-12] 1번 구슬이 다른 구슬과 같이 상자에 들어갈 경우

이제 1번 구슬을 넣어보자. 서로 다른 3개의 구슬을 빈 상자 없이 3개의 상자에 나누어 넣는 방법은 1가지이지만 1번 구슬을 어느 상자에 넣는지에 따라

각각 다른 경우가 되므로, 총 3가지 경우가 된다. 즉, $3 \times S(3,3)=3$이다(최근배 외, 2010).

따라서, ①과 ②에 의해서 서로 다른 4개의 구슬을 3개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣는 방법의 수는 모두 6가지이다. 즉, $S(4,3)=S(3,2)+3 \times S(3,3)=6$이다(최근배 외, 2010).

나. 학생들의 반응 분석

'탐구문제 2'을 개인별로 해결해보도록 했다. 문제에서 $\boxed{1}$번 구슬 혼자만 1개의 상자에 들어갈 경우(①)와 $\boxed{1}$번 구슬이 다른 구슬과 같이 상자에 들어갈 경우(②)로 구분지어 주었기 때문에 학생들은 쉽게 문제를 해결할 수 있었다. 만약 이와 같은 힌트가 없었더라면 '특정한 것 중심으로 생각하기' 전략을 사용하지 않고 모든 경우를 일일이 다 구해보는 학생도 있었을 것이다.

'탐구문제 1-⑤'와 '탐구문제 2'를 통해 '특정한 것 중심으로 생각하기' 전략을 학생들이 스스로 발견하게 하려는 의도였으나, '탐구문제 2'는 이런 의도를 너무 노골적으로 드러내고 있다. 따라서 문제를 수정하여 학생들 스스로 해결방법을 찾게 하는 것이 좋겠다. 반드시 '특정한 것 중심으로 생각하기' 전략을 발견하지 않더라도 다양한 반응에서 괜찮은 아이디어를 발견할 수도 있다.

물론 이 탐구문제에서 오답을 보인 학생도 있었다. '탐구문제 5-①'에서 이 학생은 서로 다른 구슬($\boxed{2}$ $\boxed{3}$, $\boxed{4}$)을 2개의 상자에 넣는 방법이 6가지라고 답했다. 이 학생의 사고과정을 알기 위해 질문하였더니, 2개의 상자를 서로 다른 것으로 생각하여 문제를 해결하고 있었다. 상자의 구별이 없다는 사실을 깜빡한 것이다. 이런 오류에 대해서 설명해주었더니 제대로 답을 찾을 수 있었다.

탐구문제 3 [탐구문제 2]의 탐구방법으로 다음의 각 경우를 해결해 봅시다.

① 서로 다른 4개의 구슬을 2개의 상자에 넣는 방법의 수
② 서로 다른 5개의 구슬을 2개의 상자에 넣는 방법의 수
③ 서로 다른 5개의 구슬을 3개의 상자에 넣는 방법의 수
④ 서로 다른 5개의 구슬을 4개의 상자에 넣는 방법의 수

가. 탐구문제의 이해

'탐구문제 3'은 '탐구문제 2'의 해결방법과 마찬가지로 특정한 한 구슬이 혼자 상자에 들어가거나 다른 구슬과 같이 상자에 들어가는 두 가지 경우로 나누어 생각해보면 된다. 이를 통해 방법의 수를 구하면 다음과 같다.

① $S(4,2)=S(3,1)+2\times S(3,2)=1+2\times3=7$, 7가지

② $S(5,2)=S(4,1)+2\times S(4,2)=1+2\times7=15$, 15가지

③ $S(5,3)=S(4,2)+3\times S(4,3)=7+3\times6=25$, 25가지

④ $S(5,4)=S(4,3)+4\times S(4,4)=6+4\times1=10$, 10가지

나. 학생들의 반응 분석

'탐구문제 3'은 모둠별로 해결하도록 하였다. 경우의 수가 많아지면서 실수가 생길 것으로 예상했기 때문이다.

1모둠과 3모둠은 수업자가 의도했던 방법은 아니었지만 주어진 문제를 잘 해결했다. 처음에 '탐구문제 3-③'에 대해서는 합의된 의견을 찾기 어려웠다. 학생들이 구한 답이 달랐기 때문이다. 그러나 모둠별로 의사소통하는 과정에서 서로의 생각에서 틀린 점을 찾았고 올바른 답을 구해냈다. 모둠별로 의견을 나누는 모습을 자세히 관찰해보니 모둠별로 주도하는 학생이 있었으며, 이 학생의 의견이 합리적이라면 결과물을 만드는데 적극적으로 반영되고 있었다.

아쉽게도 2모둠은 의견이 다른 부분에 대해서 서로 자신의 해결방법만을 주장하다가 시간 안에 결과물을 작성할 수 없었다. 그들의 의견은 타당하지 못했고 상대방을 설득시키기에 합리적이지 못했다.

다음의 [그림 Ⅳ-13]과 [그림 Ⅳ-14]는 1모둠과 3모둠의 문제해결 아이디어이다. 각 모둠이 어떻게 문제를 해결했는지 자세히 살펴보자.

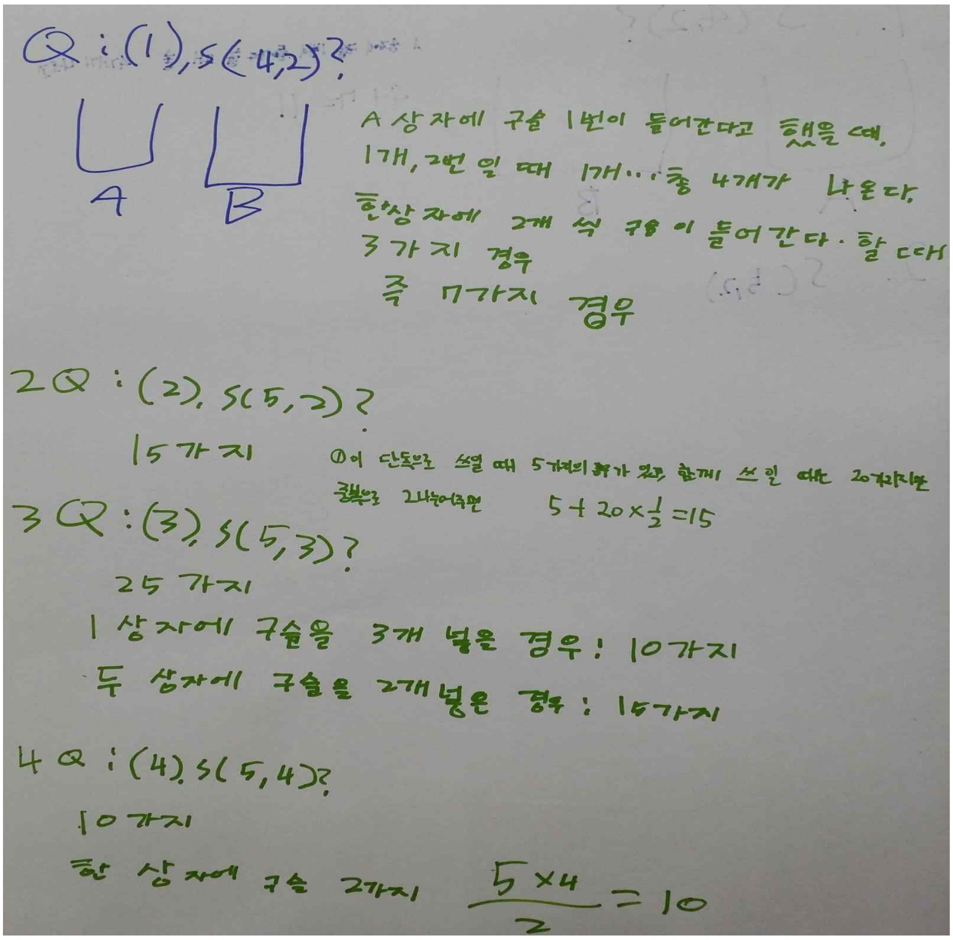
[그림 Ⅳ-13]을 살펴보면, 1모둠은 상자에 구슬이 몇 개씩 들어가는지를 기준으로 하여 답을 찾고 있다.

① A상자에 구슬 1개, B상자에 구슬 3개가 들어가는 경우: 4가지
A상자에 구슬 2개, B상자에 구슬 2개가 들어가는 경우: 3가지

② A상자에 구슬 1개, B상자에 구슬 4개가 들어가는 경우: 5가지
A상자에 구슬 2개, B상자에 구슬 3개가 들어가는 경우: 10가지

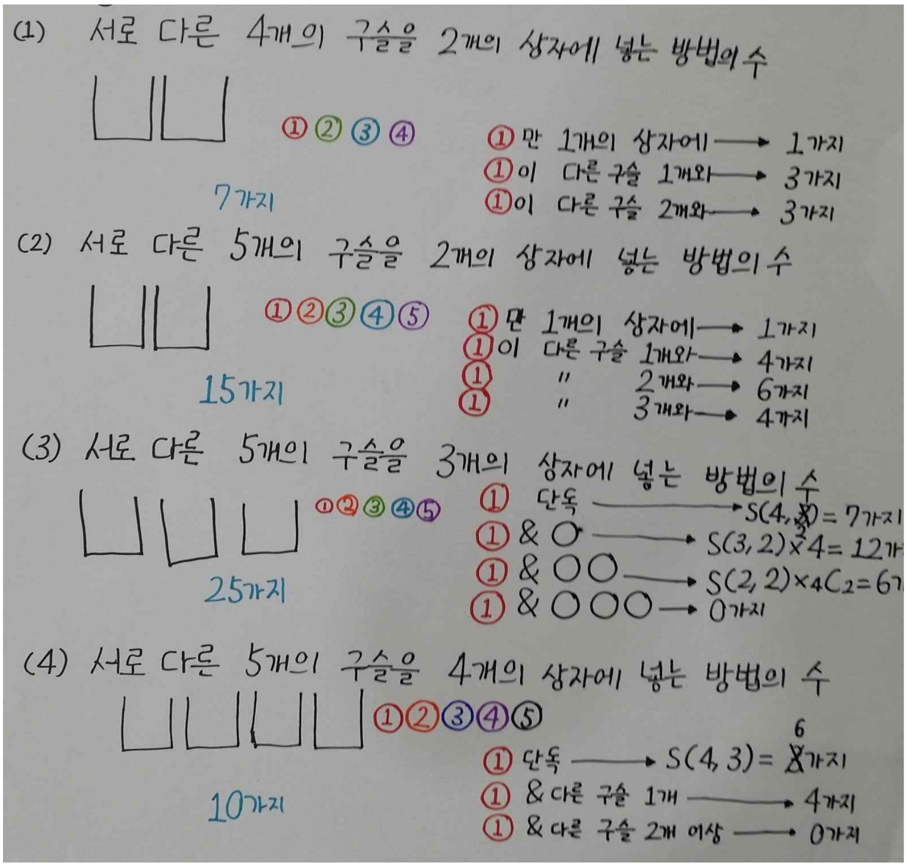
③ A상자에 구슬 3개, B상자에 1개, C상자에 1개가 들어가는 경우: 10가지
A상자에 구슬 2개, B상자에 2개, C상자에 1개가 들어가는 경우: 15가지

④ A상자에 구슬 2개, B상자에 1개, C상자에 1개, D상자에 1개가 들어가는 경우: 10가지



[그림 Ⅳ-13] 1모둠의 문제해결 아이디어(자료번호3-탐구문제3)

[그림 Ⅳ-14]를 보면, 3모둠은 1번 구슬을 중심으로 생각하고 있다. 하지만 1번 구슬이 혼자 상자에 들어가거나 다른 구슬과 같이 상자에 들어가는 두 가지 경우만으로 답을 구한 것은 아니다.



[그림 Ⅳ-14] 3모둠의 문제해결 아이디어(자료번호3-탐구문제3)

① $\boxed{1}$번 구슬이 혼자만 상자에 들어간 경우: 1가지

$\boxed{1}$번 구슬이 다른 구슬 1개와 상자에 들어간 경우: 3가지

$\boxed{1}$번 구슬이 다른 구슬 2개와 상자에 들어간 경우: 3가지

② $\boxed{1}$번 구슬이 혼자만 상자에 들어간 경우: 1가지

$\boxed{1}$번 구슬이 다른 구슬 1개와 상자에 들어간 경우: 4가지

$\boxed{1}$번 구슬이 다른 구슬 2개와 상자에 들어간 경우: 6가지

$\boxed{1}$번 구슬이 다른 구슬 3개와 상자에 들어간 경우: 4가지

③ $\boxed{1}$번 구슬이 혼자만 상자에 들어간 경우: 7가지

$\boxed{1}$번 구슬이 다른 구슬 1개와 상자에 들어간 경우: 12가지

$\boxed{1}$번 구슬이 다른 구슬 2개와 상자에 들어간 경우: 6가지

④ $\boxed{1}$번 구슬이 혼자만 상자에 들어간 경우: 6가지
$\boxed{1}$번 구슬이 다른 구슬 1개와 상자에 들어간 경우: 4가지

탐구문제 4 앞의 탐구문제들의 결과를 참고하여 다음 표의 빈칸을 채워봅시다. 그리고 일반적으로 이러한 표를 만드는 규칙을 찾아봅시다.(편의를 위하여, 0개의 구슬을 0개의 상자에 나누어 넣는 방법의 수는 1이라고 하자.)

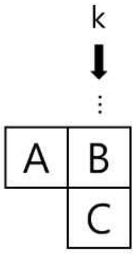
구슬수 \ 상자수	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

가. 탐구문제의 이해

구슬수 \ 상자수	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0
6	0	1	31	90	65	15	1

<표 Ⅳ-2> 빈칸이 모두 채워진 표(자료번호3-탐구문제4)

예를 들어 4개의 구슬을 빈 상자 없이 2개의 상자에 넣는 방법의 수를 규칙을 이용하여 표에서만 구하려고 한다면, <표 Ⅳ-2>에서 색칠된 ㄱ자 모양의 부분을 살펴보자. ㄱ자 모양에서 [1+2×3=7]이라는 것을 알 수 있다. 다른 부분의 ㄱ자 모양을 살펴보아도 마찬가지의 규칙이 적용된다(최근배 외, 2010).

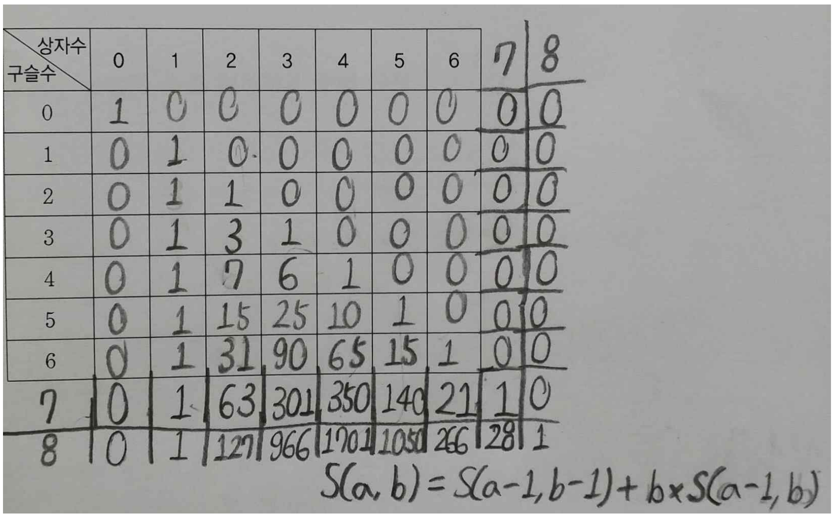


에서 $C = A + k \times B$

[그림 Ⅳ-15] ㄱ자 부분의 규칙(자료번호3-탐구문제4)

나. 학생들의 반응 분석

대다수의 학생이 이제까지 해결했던 탐구문제를 바탕으로 어느 정도 빈칸을 채웠으나 표에서 규칙을 발견하지는 못했다. 오직 2모둠의 한 학생만이 아래의 [그림 Ⅳ-16]과 같이 빈칸을 모두 채우고, 수업자가 의도한 규칙을 발견해냈다.



구슬수 \ 상자수	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1	0
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

$S(a, b) = S(a-1, b-1) + b \times S(a-1, b)$

[그림 Ⅳ-16] 2모둠의 한 학생의 문제해결 아이디어(자료번호3-탐구문제4)

이 학생은 $S(a,b)=S(a-1,b-1)+b\times S(a-1,b)$와 같이 식을 정리했다(여기에서 a는 구슬의 수, b는 상자의 수를 가리킨다). 그리고 나서 자신이 세운 식이 맞는지 표에서 몇 번 확인하더니, 구슬의 수가 7개와 8개일 때의 경우도 빈칸도 만들어 채웠다.

이 학생에게 자신이 발견한 식을 다른 학생들에게 발표할 기회를 주었다. 다른 학생들은 발표를 듣고 난 후 어떤 규칙으로 식을 만들었는지 이해하였고, 주어진 문제를 해결할 수 있었다.

3. 자연수의 분할

수업에 적용한 학습 프로그램

자료 번호	4	탐구 주제	자연수의 분할
학습 목표	자연수를 분할하는 방법의 수를 구할 수 있다.		
관련 영역	수와 연산, 자료와 가능성, 규칙성		
학습 교구	서로 같은 구슬, 빈 상자		

목표문제 : 몇 개의 자연수를 더하여 자연수 10을 만들 수 있는 방법의 수를 모두 찾아봅시다.

탐구문제 1 : 서로 같은 구슬(●) 4개를 구별이 없는 △개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣는 방법은 모두 몇 가지입니까?

① △=1 일 때, 몇 가지 방법이 있나요?

② △=2 일 때, 몇 가지 방법이 있나요?

③ △=3 일 때, 몇 가지 방법이 있나요?

④ △=4 일 때, 몇 가지 방법이 있나요?

⑤ 위의 ①-④번 결과에서 각 상자에 있는 구슬을 숫자로 나타내어, 각 경우에 그 수를 덧셈으로 표현하여 봅시다.

약속하기

서로 같은 구슬 □개를 구별이 없는 △개의 상자에
빈 상자 없이 나누어 넣는 방법의 수를 **자연수의 분할수**라고 합니다.

보충 1 : 1개의 상자에 서로 같은 □개의 구슬을 넣는 방법을 알아봅시다.

보충 2 : 구슬의 수와 상자의 수가 같은 경우에 구슬을 빈 상자 없이 넣는 방법에 대하여 알아봅시다.

탐구문제 2 : 서로 같은 구슬(●) 7개를 3개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣는 방법은 모두 몇 가지입니까? 빈 상자가 없어야 한다는 조건을 염두에 두고 전반적인 아이디어를 생각해봅시다.

탐구문제 3 : [탐구문제 2]의 탐구방법으로 다음의 각 경우를 해결해 봅시다.

① 서로 같은 7개의 구슬을 2개의 상자에 빈 상자 없이 넣는 방법의 수
② 서로 같은 7개의 구슬을 4개의 상자에 빈 상자 없이 넣는 방법의 수
③ 서로 같은 7개의 구슬을 5개의 상자에 빈 상자 없이 넣는 방법의 수
④ 서로 같은 7개의 구슬을 6개의 상자에 빈 상자 없이 넣는 방법의 수

탐구문제 4 : 앞의 탐구문제들의 결과를 참고하여 다음 표의 빈칸을 채워봅시다. 그리고 일반적으로 이러한 표를 만드는 규칙을 찾아봅시다.

상자수 구슬수	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

수학화 활동 사례 분석

자료 번호	4	탐구 주제	자연수의 분할
학습 목표	자연수를 분할하는 방법의 수를 구할 수 있다.		
문제해결도구	서로 같은 구슬, 빈 상자 등		
수학적 문제	· 서로 같은 구슬 □개를 구별이 없는 △개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣는 방법은? · 표의 빈칸이 채워지는 규칙은?		
배경지식	자연수의 분할수, '미리 주고 생각하기' 전략		

목표문제 몇 개의 자연수를 더하여 자연수 10을 만들 수 있는 방법의 수를 모두 찾아봅시다.

이번 수업에서는 몇 개의 자연수를 더하여 자연수 10을 만들 수 있는 방법의 수를 모두 찾는 것을 목표문제로 제시하였다. 학생들은 '1+1+1+1+1+1+1+1+1+1', '2+1+1+1+1+1+1+1+1', '2+2+1+1+1+1+1+1'과 같이 규칙적으로 가능한 방법들을 찾아갔다. 하지만 경우의 수가 너무 많아서 찾는 중에 실수를 많이 했다. 결국 3분의 제한시간 안에 모든 경우를 정확히 찾은 학생은 없었다.

수업자는 이번 수업에서 자연수를 분할하는 방법의 수를 찾을 수 있는 간단한 규칙을 알 수 있다고 안내하였다. 그리고 그 규칙을 알아내는 과정이 직전 학습주제였던 '모임의 분할'과 비슷하다고 설명하자 학생들은 더욱 호기심을 갖고 수업에 참여할 수 있었다.

탐구문제 1 서로 같은 구슬(●) 4개를 구별이 없는 △개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣는 방법은 모두 몇 가지입니까?

① △=1 일 때, 몇 가지 방법이 있나요?

② △=2 일 때, 몇 가지 방법이 있나요?

③ △=3 일 때, 몇 가지 방법이 있나요?

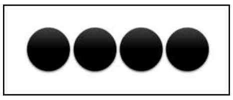
④ △=4 일 때, 몇 가지 방법이 있나요?

⑤ 위의 ①-④번 결과에서 각 상자에 있는 구슬을 숫자로 나타내어, 각 경우에 그 수를 덧셈으로 표현하여 봅시다.

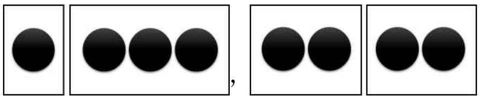
가. 탐구문제의 이해

이 문제는 상자에 구슬을 직접 넣어보면서 경우의 수를 구할 수 있다.[3] 하지만 이전 학습주제였던 '모임의 분할'과의 차이점은 서로 다른 구슬이 아니라 서로 같은 구슬이라는 것이다. 즉, 이 문제에서는 구슬을 구별할 필요가 없다.

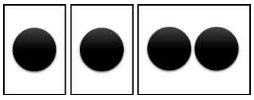
① 상자가 하나인 경우: 1가지, $p(4,1)=1$



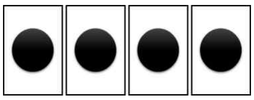
② 상자가 두 개인 경우: 2가지, $p(4,2)=2$



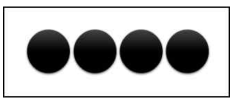
③ 상자가 세 개인 경우: 1가지, $p(4,3)=1$



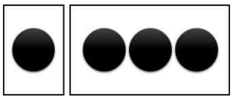
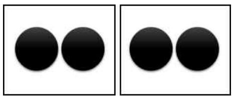
④ 상자가 네 개인 경우: 1가지, $p(4,4)=1$

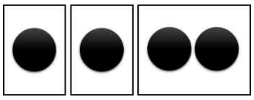


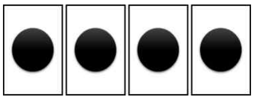
⑤ ①-④번 결과에서 각 상자에 있는 구슬을 숫자로 나타내어, 각 경우에 그 수를 덧셈으로 표현해 보면 다음과 같다.

 : 4

3) 각 상자에 있는 구슬의 수를 숫자로 나타내어 각 경우에 그 수를 덧셈으로 표현하여 보면 '서로 같은 구슬 □개를 구별이 없는 △개의 상자에 빈 상자 없이 담는 방법의 수'를 구하는 것은 '자연수를 분할하는 방법의 수'를 구하는 것과 같다. 따라서 이를 자연수의 분할수라고 부르고, 수학적 기호 $p(\square,\triangle)$로 나타낸다.


: 1+3,

: 2+2


: 1+1+2


: 1+1+1+1

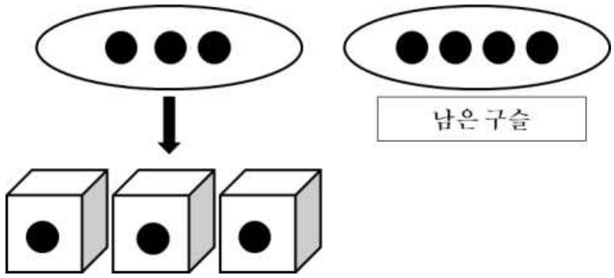
나. 학생들의 반응 분석

'탐구문제 1'을 개인문제로 제시하였지만 모두가 쉽게 해결하였다. 구슬이 서로 같았기 때문에 더 쉽게 분류할 수 있었다. 또한, ⑤번 문제를 해결하면서 자연수 4를 분할하는 방법의 수에 대해서 자연스럽게 이해할 수 있었다. 즉, 구슬이 5개라면 자연수 5를 분할하는 방법을 찾을 수 있고, 구슬이 10개라면 자연수 10을 분할하는 방법을 찾을 수 있다는 사실을 발견했다. 이에 대한 이해가 충분했기 때문에 학생들에게 '자연수의 분할수'에 대한 정의를 다음과 같이 안내하였다.

탐구문제 2 서로 같은 구슬(●) 7개를 3개의 상자에 빈 상자 없이 나누어 넣는 방법은 모두 몇 가지입니까? 빈 상자가 없어야 한다는 조건을 염두에 두고 전반적인 아이디어를 생각해봅시다.

가. 탐구문제의 이해

미리 3개의 상자에 구슬을 하나씩 넣어 주고(빈 상자를 없앰) 문제해결을 시작하면 주어진 문제는 결국 남은 4개의 구슬을 3개의 상자에 담는 문제로 귀착된다. 이러한 전략은 조합론에서 흔히 사용되는 '미리주고 시작하기' 전략이다(최근배 외, 2010).



[그림 Ⅳ-17] 서로 같은 구슬 7개를 3개의 상자에 넣는 방법

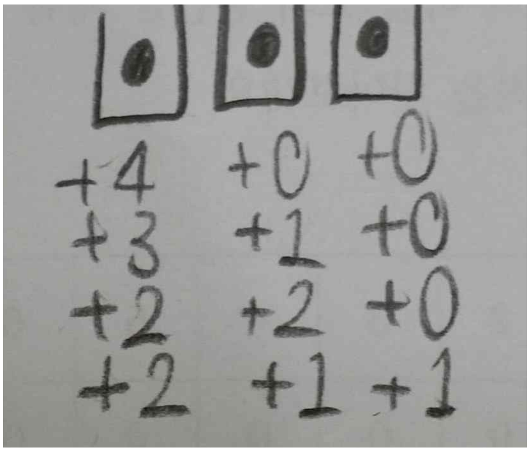
이제 남은 구슬 4개를 3개의 상자에 넣어주면 되는데, 1개, 2개, 3개의 상자에 넣는 세 가지 경우가 있다. 즉, 7개의 구슬을 빈 상자 없이 3개의 상자에 나누어 넣는 방법의 수는 4개의 구슬을 1, 2, 3개의 상자에 나누어 넣는 방법의 수와 같다고 할 수 있다(최근배 외, 2010).

$$p(7,3) = p(4,1) + p(4,2) + p(4,3) = 1 + 2 + 1 = 4$$

나. 학생들의 반응 분석

'탐구문제 2'도 혼자서 풀도록 하였다. 물론 '미리주고 생각하기' 전략에 대한 설명은 미리하지 않았다. 학생들이 창의적으로 문제를 해결하는 과정을 알아보고 싶었기 때문이다. 일반적으로 대다수의 학생들은 7개의 구슬을 모두 3개의 상자에 넣어가면서 방법을 구하고 있었다. 학생들은 몇 가지 경우를 그림으로 그려보더니 정답을 쉽게 찾아냈다.

[그림 Ⅳ-18]은 2모둠의 한 학생이 '탐구문제 2'를 해결한 아이디어이다. 이 학생은 다른 학생들과 문제해결 방법이 달랐는데, 풀이과정을 살펴보니 '미리주고 생각하기' 전략에 대해서 어렴풋이 짐작하는 것으로 보였다. 3개의 상자에 구슬을 하나씩 미리 집어넣고, 나머지 4개의 구슬이 들어갈 수 있는 방법을 숫자로 표시하여 나타내었다.



[그림 Ⅳ-18] 2모둠의 한 학생의 문제해결 아이디어(자료번호4-탐구문제2)

하지만 이 학생을 제외한 대다수는 ‘탐구문제 1’을 이번 문제를 해결하는데 활용하지 못했다. ‘미리주고 생각하기’ 전략에 대해서 파악하지 못한 것이다. 이 전략은 ‘탐구문제 2’보다 복잡한 문제에서 활용도가 높으며, ‘탐구문제 3’을 해결할 때 좋은 힌트가 될 것이다. 따라서 수업자는 학생들에게 ‘미리주고 생각하기’ 전략에 대해서 설명해주었다.

탐구문제 3 [탐구문제 2]의 탐구방법으로 다음의 각 경우를 해결해 봅시다.

① 서로 같은 7개의 구슬을 2개의 상자에 빈 상자 없이 넣는 방법의 수

② 서로 같은 7개의 구슬을 4개의 상자에 빈 상자 없이 넣는 방법의 수

③ 서로 같은 7개의 구슬을 5개의 상자에 빈 상자 없이 넣는 방법의 수

④ 서로 같은 7개의 구슬을 6개의 상자에 빈 상자 없이 넣는 방법의 수

가. 탐구문제의 이해

‘탐구문제 3’은 ‘탐구문제 2’와 같이 ‘미리주고 생각하기’ 전략을 활용하면 쉽게 해결된다. 빈 상자에 구슬을 미리 하나씩 집어넣고 나머지 구슬을 상자에 넣는 방법으로 구한다. 이를 통해 방법의 수를 구하면 다음과 같다.

① $p(7,2)=p(5,1)+p(5,2)=1+2=3$

② $p(7,4)=p(3,1)+p(3,2)+p(3,3)+p(3,4)=1+1+1+0=3$

③ $p(7,5)=p(2,1)+p(2,2)+p(2,3)+p(2,4)+p(2,5)=1+1+0+0+0=2$

④ $p(7,6)=p(1,1)+p(1,2)+p(1,3)+p(1,4)+p(1,5)+p(1,6)$

$=1+0+0+0+0+0=1$

나. 학생들의 반응 분석

'탐구문제 3'은 모둠별로 해결하도록 하였다. 물론 이 문제는 혼자서 해결하기에도 어렵지 않은 수준이며, '미리주고 생각하기' 전략을 활용하지 않더라도 충분히 해결할 수 있다.

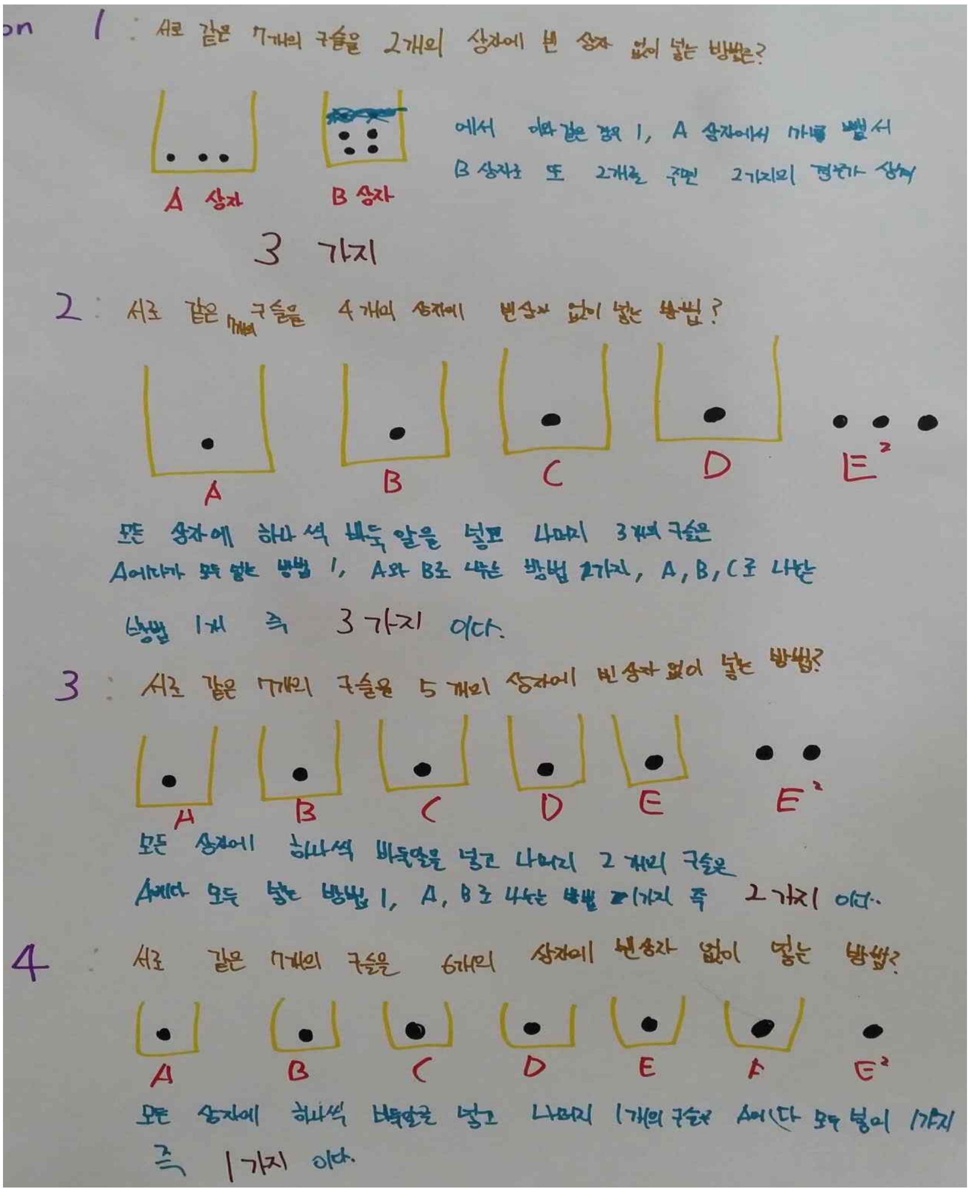
[그림 Ⅳ-19]과 [그림 Ⅳ-21]에서 보이는 것처럼 1모둠과 3모둠은 상자와 구슬을 그림으로 그려 문제를 해결하고 있다. '탐구문제 2'를 해결했듯이 '미리주고 생각하기' 전략을 사용하고 있다. 빈 상자에 구슬을 하나씩 먼저 넣고, 나머지 구슬이 상자에 들어갈 수 있는 방법을 찾았다.

단, 1모둠은 '탐구문제 3-①'에 대해서만 위와 같은 전략을 사용하지 않고 모든 경우를 찾아내는 방법으로 해결하였다. 즉, 서로 같은 구슬 7개를 2개의 빈 상자에 나누어 담는 방법의 수를 '3+4', '2+5', '1+6'의 3가지 방법이 있다고 설명하고 있다. 이런 문제는 직접 경우의 수를 구하기에도 전혀 어렵지 않다.

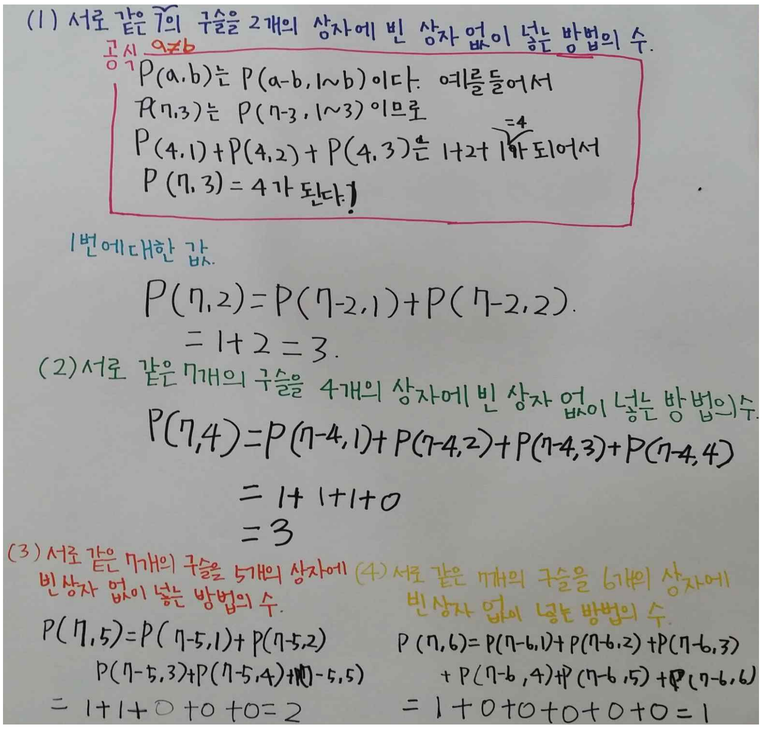
[그림 Ⅳ-20]을 보면 2모둠은 그림을 그려서 문제를 해결하지는 않았지만 결국 풀이는 같다는 것을 알 수 있다. 대신에 미리 공식을 세우고 나서 각각의 문제에 적용하고 있다. 2모둠이 정리한 공식을 정교화하면 다음과 같다.

$$p(a,b)=p(a-b,1)+p(a-b,2)+\cdots+p(a-b,b)$$

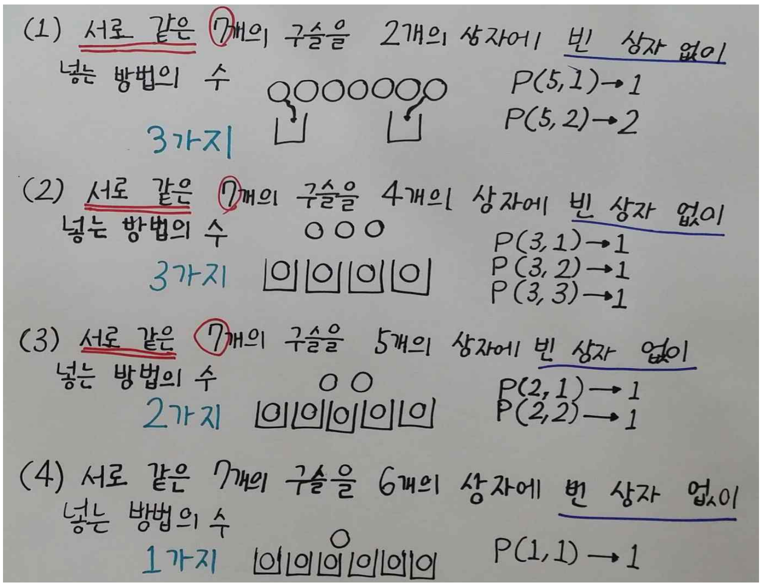
(a: 구슬의 수, b: 상자의 수)



[그림 Ⅳ-19] 1모둠의 문제해결 아이디어(자료번호4-탐구문제3)



[그림 Ⅳ-20] 2모둠의 문제해결 아이디어(자료번호4-탐구문제3)



[그림 Ⅳ-21] 3모둠의 문제해결 아이디어(자료번호4-탐구문제3)

4. 그래프의 기초

수업에 적용한 학습 프로그램

자료 번호	5	탐구 주제	그래프의 기초
학습 목표	그래프에 대하여 알 수 있다.		
관련 영역	규칙성, 도형		
학습 교구	이야기 자료(쾨니히스베르크의 다리), 지하철 노선도, 집 설계도		

들어가기

혹시 '쾨니히스베르크의 다리'에 대해 들어본 적 있나요?

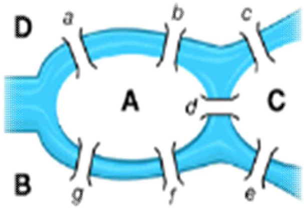
그래요! 프레겔강(江)의 다리 건너기 문제.

쾨니히스베르크(Koonigsberg)는 18세기 동(東)프로이센의 수도이며, 지금은 러시아의 칼리닌그라드입니다. 이 도시는 세계적인 철학자 칸트(Immanuel Kant)와 수학자 힐버트(Hibert)의 고향으로도 유명하지요. 칸트는 평생 쾨니히스베르크 밖으로 한 발자국도 나가지 않았고, 이 도시의 대학교수가 된 후에는 매일 같은 시간에 같은 장소를 걸어 다녔기 때문에 이 도시의 주민들은 칸트를 보고 시계를 맞추었다고 하는 이야기도 전해옵니다. 이런 칸트의 일화처럼 이 도시에는 많은 이야기가 전해지고 있답니다.

이곳은 땅 위치도 묘해서, 폴란드와 리투아니아 사이에 끼어있어요. 발트해 삼국을 사이에 두고 러시아 본토와 끊겨있지요. 이런 땅을 전문적으로 '엑스클라베(Exclave)'라고 한답니다. 물론 러시아 입장에서는 밑도 끝도 없이 영토 분쟁거리가 되어 골치를 썩고 있어요.

퀴니히스베르크는 프레겔강에 의해 아래 그림처럼 섬 또는 육지가 A, B, C, D의 4개 지역으로 나누어지고, 이들 지역을 잇는 7개의 다리가 놓여 있었어요.

수학자 L.오일러는 '섬 또는 육지의 한 지점으로부터 출발하여 모든 다리를 정확히 한번만 지나 원래 출발한 지점으로 돌아올 수 있는가'하는 문제를 질문 받고 즉석에서 답을 했다고 전해지고 있죠.



그러면 지금부터 오늘 학습할 내용에 대해 본격적으로 탐구해볼까요?

탐구문제 1 : 다음 세 가지 문제 상황을 해결하고, 공통점을 찾아봅시다.

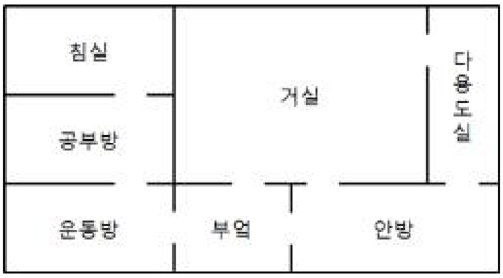
① 지하철 노선도와 관광지가 표시된 지도를 가지고 있다면 어떤 도시든지 자유롭게 이동하면서 관광할 수 있습니다. 나눠주는 부산의 지하철 노선도를 보고, 서면, 해운대, 자갈치시장, 부산대, 센텀시티, 김해공항을 지나는 이동경로를 그림으로 그려보세요.

② 화학분자는 여러 개의 화학적 본드에 의해서 결합된 원자들로 구성되어 있습니다. 예를 들어, 물(H_2O) 분자는 하나의 산소(O)와 두 개의 수소(H)로 결합되어 있고 아래와 같이 나타낼 수 있습니다.

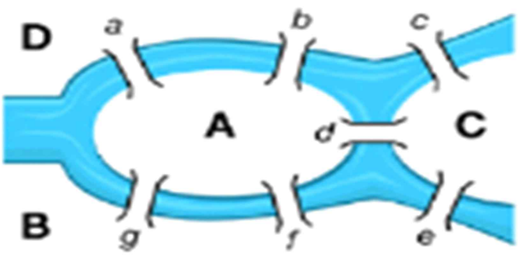
$$H - O - H$$

이와 같은 종류의 그림을 흔히 구조도라고 부릅니다. 에틸렌(ethylene, ethene; C_2H_4) 분자의 구조도를 아래의 빈칸에 그려봅시다. 그리고 이를 통해서 어떠한 정보를 얻을 수 있을지 생각해봅시다.

③ 다음은 어떤 집의 간단한 설계도입니다. 위의 설계도를 사람들이 지나다니는 동선이 나타나게 그림을 그려보세요. 위와 같은 설계도와 비교해서 동선그림의 장점은 무엇일까요?

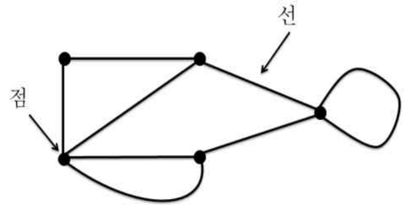


탐구문제 2 : 쾨니히스베르크의 지역과 다리를 점과 선으로 나타내어 봅시다. 그리고 이와 같은 그림을 뭐라고 이름 붙이면 좋을지 생각해 봅시다.



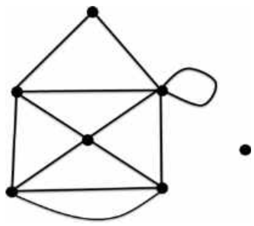
약속하기 1

유한개의 점, 점과 점을 잇는 유한개의 선으로 구성된 도형을 **그래프**라고 부릅니다.



약속하기 2

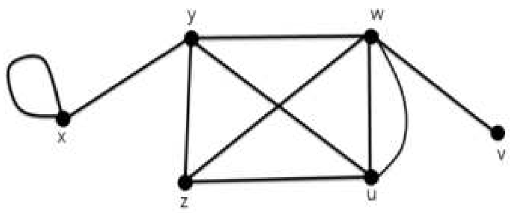
두 꼭짓점을 잇는 변의 수가 두 개 이상인 변을 **다중변**, 한 꼭짓점과 그 자신을 잇는 변을 **고리**라고 합니다. 한 꼭짓점에 연결된 변의 수를 그 꼭짓점의 **차수**라고 하는데, 고리는 두 번 헤아려집니다. 또한 차수가 홀수인 꼭짓점을 **홀수점**, 차수가 짝수인 꼭짓점을 **짝수점**이라고 부릅니다.



약속하기 3

다중변이나 고리가 없는 경우, **단순그래프**라고 합니다.

연습문제 1 : 다음 그래프의 각 꼭짓점의 차수를 구해봅시다.



탐구문제 3 : 꼭짓점의 개수가 2, 3인 경우에 꼭짓점의 차수가 모두 다른 그래프를 각각 찾아봅시다. (단, 다중변은 2중변만 가능하며, 고리는 한 꼭짓점에 한 개만 가능하다.)

보충 1 : 위의 각각 경우에서 공통적으로 발생하는 특징을 찾아보고, 타당한 가설을 세워봅시다.

연습문제 2 : 꼭짓점의 개수가 4개인 경우에 꼭짓점의 차수가 모두 다른 그래프를 찾아보고, 자신이 세운 가설이 맞는지 확인해봅시다.

그래프의 성질 1

꼭짓점의 차수가 모두 다른 그래프는 단순그래프가 아니다.
(= 단순그래프에서는 차수가 같은 꼭짓점이 항상 존재한다.)

탐구문제 4 : 어떤 모임에서 모임의 참석자들이 악수를 할 때, 각 참석자가 악수한 횟수의 합과 모임에서 일어난 악수의 총 횟수와의 관계를 생각해봅시다.(악수를 하지 않는 경우도 있을 수 있다.)

① 참석자가 2명 일 때 ② 참석자가 3명 일 때 ③ 참석자가 4명 일 때

보충 2 : ①~③의 경우에서 공통적으로 발생하는 특징을 찾아보고, 타당한 가설을 세워봅시다.

연습문제 3 : [탐구문제 4]에 대하여 참석자가 5명인 경우도 알아보고, 자신이 세운 가설이 맞는지 확인해봅시다.

그래프의 성질 2

그래프에서 꼭짓점의 차수의 합은 변의 수의 2배이다.

탐구문제 5 : 어떤 모임에서 모임의 참석자들이 악수를 할 때, 홀수 번 악수한 참석자의 총수는 각각 어떻게 되는지 생각해봅시다.(악수를 하지 않는 경우도 있을 수 있다.)

① 참석자가 2명 일 때 ② 참석자가 3명 일 때 ③ 참석자가 4명 일 때

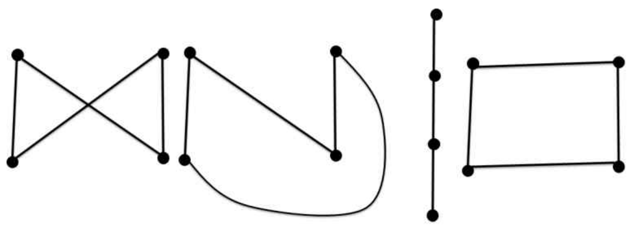
보충 3 : ①~③의 경우에서 공통적으로 발생하는 특징을 찾아보고, 타당한 가설을 세워봅시다.

연습문제 4 : [탐구문제 5]에 대하여 참석자가 5명인 경우도 알아보고, 자신이 세운 가설이 맞는지 확인해봅시다.

그래프의 성질 3

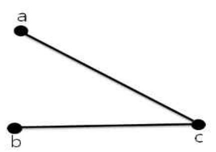
그래프에서 홀수점의 개수는 짝수 개다.

탐구문제 6 : 아래 네 개의 그래프 중에 같다고 생각되는 것을 찾아보고, 왜 같은지 이유를 설명해봅시다.



약속하기 4

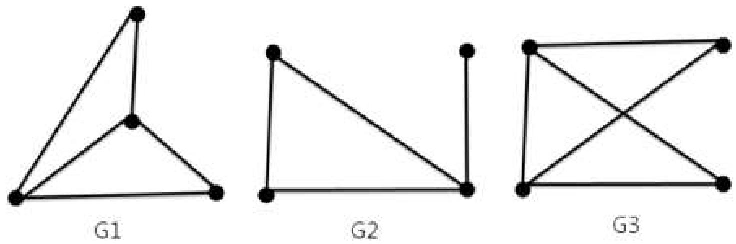
꼭짓점 u, v가 변으로 이어졌을 때 'u, v는 서로 인접하다'라고 합니다.



꼭짓점 a, c는 서로 인접하다.
꼭짓점 b, c도 서로 인접하다.
하지만 꼭짓점 a, b는 서로 인접하지 않다.

꼭짓점의 개수가 같고 꼭짓점 사이의 인접성이 같은 두 그래프를 서로 **동형**이라고 합니다. 즉, 두 그래프가 '그래프로써 서로 같다'는 말이기도 합니다.

연습문제 5 : 다음의 그래프에서 동형인 것은 어느 것일까요? 동형이 아닌 것은 왜 그런지 이유를 설명해봅시다.



탐구문제 7 : 어떤 모임에서 모임의 참석자들이 악수를 할 때, 모든 참석자들이 서로 악수를 했다면 모임에서 일어난 악수의 총 횟수는 어떻게 되는지 생각해봅시다.

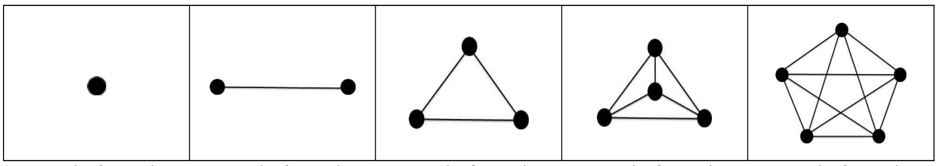
① 참석자가 2명 일 때 ② 참석자가 3명 일 때 ③ 참석자가 4명 일 때

보충 4 : ①~③의 경우에서 공통적으로 발생하는 특징을 찾아보고, 타당한 가설을 세워봅시다.

연습문제 6 : [탐구문제 7]에 대하여 참석자가 5명인 경우도 알아보고, 자신이 세운 가설이 맞는지 확인해봅시다.

약속하기 5

모든 꼭짓점이 서로 인접한 단순그래프를 **완전그래프**라고 합니다.



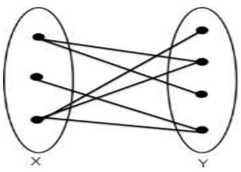
꼭짓점 1개 꼭짓점 2개 꼭짓점 3개 꼭짓점 4개 꼭짓점 5개

탐구문제 8 : 3명의 사람 x1, x2, x3가 4가지의 물건 y1, y2, y3, y4를 선택할 수 있는 방법이 다음 표와 같을 때, 이를 그래프로 나타내어 봅시다.

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	×	○	○	×
x_2	×	×	○	×
x_3	○	○	×	○

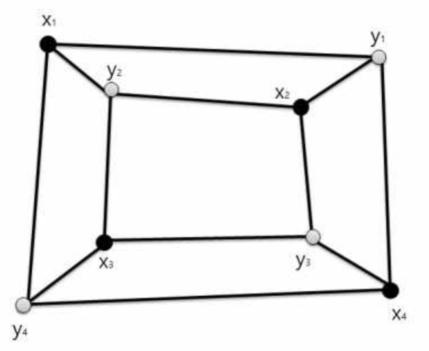
약속하기 6

[탐구문제 8]의 그래프에서는 사람과 물건 사이의 선택은 가능하지만, 사람끼리 선택하거나 물건끼리 선택하는 것은 불가능 합니다. 이처럼 그래프 G의 꼭짓점이 두 그룹 X, Y로 나누어져, 같은 그룹의 꼭짓점끼리는 서로 인접하지 않을 때, G를 **이분그래프**라고 합니다.



특히, 임의의 $x \in X$와 임의의 $y \in Y$가 인접한 이분그래프를 **완전이분그래프**라고 부릅니다.

연습문제 7 : 아래의 그래프를 이분그래프라고 할 수 있는지 생각해봅시다.



▣ 참고 자료 ▣
1. 네이버블로그. (2007). 쾨니히스베르크의 다리 건너기 문제. 2016. 10. 15.
https://bum94.blog.me/30025209727.html
2. 네이버블로그. (2010). 쾨니히스베르크의 현재. 2016. 10. 15.
https://blog.naver.com/scintillum/40103309567.html
3. 두산백과. (n.d.). 쾨니히스베르크의 다리 건너기 문제. 2016. 10. 15.
http://terms.naver.com/entry.nhn?docId=1150679&cid=40942&categoryId=32223.html

수학화 활동 사례 분석

자료 번호	5	탐구 주제	그래프의 기초
학습 목표	그래프에 대하여 알 수 있다.		
문제해결도구	이야기 자료(쾨니히스베르크의 다리), 지하철 노선도, 집 설계도		
수학적 문제	· 여러 가지 문제 상황을 어떻게 점과 선으로 나타낼 수 있을까? · 그래프는 어떤 성질을 가지고 있을까? · 악수 문제와 그래프를 어떻게 연관 지을 수 있을까?		
배경지식	프레겔강의 다리 건너기 문제, 점 · 선 · 꼭짓점의 정의		

들어가기 이야기 자료(쾨니히스베르크의 다리)[4]

이번 수업에서는 그래프에 대해서 다루었다. 학생들에게 그래프라고 설명하니 서로 관계가 있는 2개 이상의 자료를 점, 직선, 곡선, 막대, 그림 등을 사용하여 나타낸 것, 예를 들어 막대그래프, 그림그래프, 줄기와 잎 그림, 꺾은선그래프, 비율그래프 등을 떠올렸다. 그래서 이산수학에서 말하는 그래프는 학교교육과정에서 배우는 그래프와 다르다고 알려주었다.

그래프라는 용어가 기존에 알던 것과 달라서 생소해했기 때문에 수업자는 스토리텔링으로 수업을 시작하였다. 수학에 관심 있는 학생이라면 한 번쯤 들어봤을 '쾨니히스베르크의 다리'에 관한 이야기를 도입하였다. 수학사에 대한 스토리텔링으로 수업에 참여한 학생들의 흥미와 참여도가 높아졌다.

그래프 이론에 관한 첫 논의는 18세기로 거슬러 올라갈 수 있다. 동프로히센의 수도인 쾨니히스베르크(지금은 러시아의 칼리닌그라드)에는 프레겔강이 있었는데, 강에 의해 육지가 4개의 지역으로 나누어지고 이들 지역을 잇는 7개의 다리가 놓여있었다. 문제는 '섬 또는 육지의 한 지점으로부터 출발하여 모든 다리를 정확히 한 번만 지나 원래 출발한 지점으로 돌아올 수 있는가'였다. 1736년

4) '쾨니히스베르크의 다리'에 관한 이야기 자료는 본 논문의 pp. 64-65에 있으며, 인터넷 두산백과 등 인터넷 자료를 참고하여 제작하였다. 이에 대한 출처는 참고문헌에 밝히고 있다.

수학자 오일러는 이 문제를 해결하였고, 이것이 그래프 이론의 시초이다. 현재에는 그래프 이론이 순수 수학적 분야에만 그치지 않고 유전학, 사회학, 화학, 정보통신, 생태학, 교통문제 등 다양한 학문에서 사용되고 있다.

이번 수업은 수학자 오일러처럼 ‘쾨니히스베르크의 다리 문제’를 해결하는 것이 아니라, ‘쾨니히스베르크의 다리’의 모양을 이용하여 그래프가 무엇인지 이해하고, 귀납적 추론 과정에 따라 그래프의 성질을 밝혀내는 과정이다. ‘그래프의 기초’는 다음의 학습주제인 ‘한 붓 그리기’, ‘최단경로 문제’, ‘최소연결 문제’, ‘정다면체의 분류’ 등 다양한 이산수학 수업에서 유용하게 활용되었다.

탐구문제 1 다음 세 가지 문제 상황을 해결하고, 공통점을 찾아봅시다.

① 첫 번째로 학생들에게 부산광역시의 지하철 노선도를 나눠주고, 서면, 해운대, 자갈치시장, 부산대, 센텀시티, 김해공항을 지나는 이동경로를 그려보게 하였다. 이 때, 학생들은 이동경로를 선으로만 긋거나, 화살표로 나타내거나, 점과 선으로 나타내는 등 다양하게 문제를 해결하고 있었다.

② 두 번째로 학생들에게 분자의 구조도에 대해 설명해주고, 에틸렌(C_2H_4)의 분자 구조도를 그려보라고 하였다. 학생들은 이중결합[5] 등 원자들이 결합하는 원리를 모르기 때문에 화학적으로 정확한 답을 하진 못했지만, 탄소(C) 2개와 수소(H) 4개를 선으로 이어 표현하였다.

③ 세 번째로 학생들에게 집의 설계도를 보여주고, 동선[6]이 나타나게 그림을 그려보도록 하였다. 학생들은 설계도의 문의 위치를 확인하고, 사람이 이동할 수 있는 방향을 선으로 나타내었다.

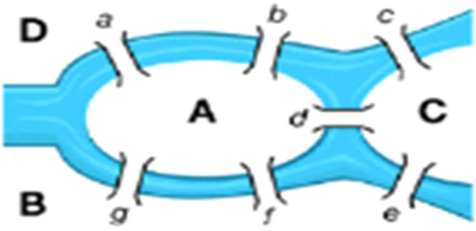
‘탐구문제 1’은 학생들에게 유한개의 점과 유한개의 선으로 이루어진 도형인 ‘그래프’에 대해서 짐작하게 하고, 더 나아가서 그래프가 지하철 노선도, 분자의 구조도, 집의 설계도 등 일상생활의 다양한 분야에서 활용되고 있음을 알게 하였다. 그

5) 분자 내의 두 원자가 결합선 둘로 연결되는 결합. 기호 =로 표시한다.

6) 건축물의 내외부에서 사람이나 물건이 어떤 목적이나 작업을 하기 위하여 움직이는 자취나 방향을 나타내는 선

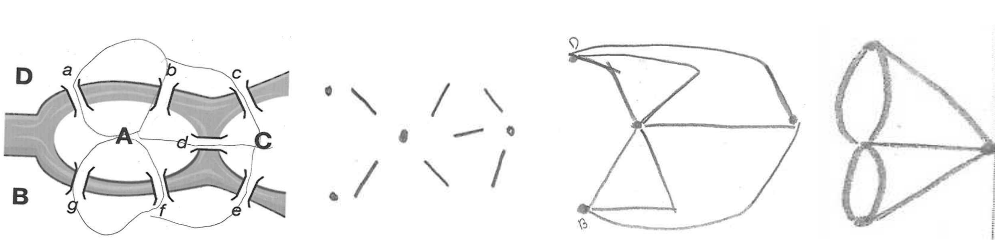
러나 아직 그래프에 대해서 정확하게 이해한 상황은 아니기 때문에, '탐구문제 2'를 제시하여 그래프의 정의와 이를 그리는 방법에 대해서 더 생각해보게 하였다.

탐구문제 2 쾨니히스베르크의 지역과 다리를 점과 선으로 나타내어 봅시다. 그리고 이와 같은 그림을 뭐라고 이름 붙이면 좋을지 생각해 봅시다.



처음에 학생들은 위의 그림을 어떻게 점과 선으로 나타내야 하는지 어려워했다. 무엇을 점으로 나타내고, 무엇을 선으로 나타내야 하는지 알아내지 못했다. 한참을 기다린 후 수업자는 학생들에게 문제해결을 위한 힌트를 제공했다. 점은 지역인 A, B, C, D로 나타내고, 선은 다리인 a, b, c, d, e, f, g로 나타내어 보라고 했다. 힌트를 받고나서도 학생들은 문제를 해결하는데 꽤 시간이 걸렸다.

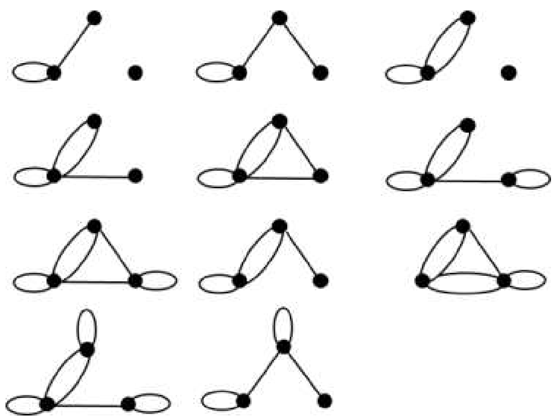
[그림 Ⅳ-22]는 '탐구문제 2'에 대한 문제해결 아이디어이다. 첫 번째처럼 그림에 바로 선을 연결하는 학생들이 가장 많았으며, 두 번째처럼 제대로 된 그래프를 그리지 못하는 학생도 있었다. 그리고 세 번째처럼 모양은 복잡하지만 그래프를 점과 선으로 잘 나타낸 학생들도 있었다. 마지막 네 번째는 가장 단순한 모양의 완성된 그래프이다.



[그림 Ⅳ-22] 학생들의 문제해결 아이디어(자료번호5-탐구문제2)

탐구문제 3 꼭짓점의 개수가 2, 3인 경우에 꼭짓점의 차수가 모두 다른 그래프를 각각 찾아봅시다. (단, 다중변은 2중변만 가능하며, 고리는 한 꼭짓점에 한 개만 가능하다.)

<표 Ⅳ-3> 학생들이 발견한 꼭짓점의 차수가 모두 다른 그래프(자료번호5-탐구문제3)

꼭짓점의 개수	발견한 그래프의 종류	발견한 그래프의 수
2개		3가지
3개		11가지

‘탐구문제 3’은 가능한 그래프를 모두 찾아내는 것이 목표이기 때문에 학생들이 서로 의견을 나눌 수 있도록 모둠별로 해결하게 하였다. <표 Ⅳ-3>는 학생들이 직접 발견한 꼭짓점의 차수가 모두 다른 그래프를 꼭짓점이 2개일 때, 3개일 때로 나누어 정리한 표이다.

학생들은 꼭짓점이 2개일 때는 세 가지 그래프를 모두 찾아냈다. 그러나 꼭짓점이 3개일 때는 열한 가지 경우밖에 찾아내지 못했다. [그림 Ⅳ-23]은 꼭짓점이 3개일 때 학생들이 미처 발견하지 못한 나머지 다섯 가지 그래프이다. 학생들은 그래프를 찾기 위한 어떤 규칙을 세우지 않고 생각나는 대로 찾았기 때문에 몇 가지 그래프를 놓치게 되었다. 따라서 ‘탐구문제 3’에서 그래프를 찾기 위한 규칙이나 기준에 대해서 연구해 보는 것도 가치가 있을 것이다.

[그림 Ⅳ-23] 학생들이 발견하지 못한 그래프(자료번호5-탐구문제3)

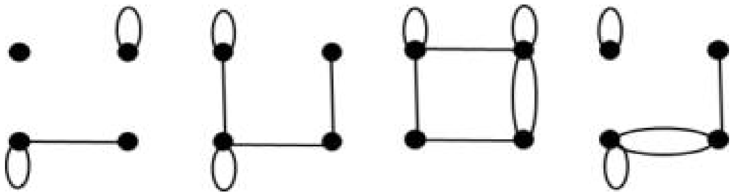
보충 1 위의 각각 경우에서 공통적으로 발생하는 특징을 찾아보고, 타당한 가설을 세워봅시다.

'보충 1'은 귀납적 추론 모형에 따라 미리 발견한 각각의 경우에 대해서 공통적인 특징을 찾고 가설을 세우는 단계이다. 이 문제에서 학생들이 생각한 공통점은 '반드시 고리가 있어야 한다.'였다. <표 Ⅳ-3>를 보면 학생들이 찾은 모든 그래프에 고리가 있다. 하지만 이것은 틀렸다. 왜냐하면 고리가 없어도 조건을 만족하는 그래프가 있기 때문이다. [그림 Ⅳ-23]의 두 번째 그래프가 그것이다.

따라서 수업자는 이 그래프를 제시하여 고리가 없어도 꼭짓점의 차수가 모두 다른 그래프가 있을 수 있음을 보이고 공통점을 어떻게 수정할지 고민하게 하였다. 수업자의 도움으로 학생들은 '꼭짓점의 차수가 모두 다른 그래프에는 고리 또는 이중변이 반드시 있다.'라는 가설을 세울 수 있었다. 즉, 꼭짓점의 차수가 모두 다른 그래프는 단순그래프가 아니다.

연습문제 2 꼭짓점의 개수가 4개인 경우에 꼭짓점의 차수가 모두 다른 그래프를 찾아보고, 자신이 세운 가설이 맞는지 확인해봅시다.

꼭짓점의 개수가 4개인 경우에 꼭짓점의 차수가 모두 다른 그래프를 찾아보면서 '보충 1'에서 세운 가설이 타당한지 확인하였다. [그림 Ⅳ-24]처럼 학생들은 꼭짓점이 4개인 경우에 대해서 네 가지 그래프 밖에 찾지 못하였다. 찾을 수 있는 그래프가 너무 많아 복잡했고, 활동 시간도 촉박했다. 더 이상의 그래프를 찾는데 어려움을 보이자 발견한 그래프만으로 가설을 점검하도록 하였다. 학생들이 발견한 그래프에 대해서 '보충 1'의 가설은 성립하였다.



[그림 Ⅳ-24] 학생들이 발견한 그래프(자료번호5-연습문제2)

추가로, 수업자는 학생들에게 '단순그래프에서는 차수가 같은 꼭짓점이 항상 존재한다.'가 옳은지 생각해보라고 하였다. 이 명제는 위에서 밝힌 명제인 '꼭짓점의 차수가 모두 다른 그래프에서는 고리 또는 이중변이 반드시 있다'의 대우에 해당하므로 당연히 옳다. 하지만 학생들은 아직 대우의 개념을 모르기 때문에 이 명제가 왜 당연히 옳은 것인지 좀처럼 이해하지 못했다. 유일하게 2모둠의 한 학생만이 이 명제가 옳다는 것을 이해하고 설명할 수 있었다. 다음은 이 학생의 문제해결 에피소드이다.

S: 같은 뜻이네~

T: 같은 뜻이라고? 왜 그렇게 생각하지?

S: 꼭짓점의 차수가 모두 다르면 그래프에 고리나 다중변이 있다고 증명했어요. 그런데 모든 그래프에서 고리나 다중변이 있는 그래프를 전부 빼버리면 단순그래프만 남잖아요. 그러면 당연히 단순그래프는 차수가 같은 꼭짓점이 반드시 있겠죠.

탐구문제 4 어떤 모임에서 모임의 참석자들이 악수를 할 때, 각 참석자가 악수한 횟수의 합과 모임에서 일어난 악수의 총 횟수와의 관계를 생각해봅시다. (악수를 하지 않는 경우도 있을 수 있다.)

① 참석자가 2명 일 때 ② 참석자가 3명 일 때 ③ 참석자가 4명 일 때

보충 2 ①~③의 경우에서 공통적으로 발생하는 특징을 찾아보고, 타당한 가설을 세워봅시다.

연습문제 3 [탐구문제 4]에 대하여 참석자가 5명인 경우도 알아보고, 자신이 세운 가설이 맞는지 확인해봅시다.

가. 탐구문제의 이해

최근배와 안선영(2010)은 교재에 '그래프에서 꼭짓점의 차수의 합과 변의 수와의 관계를 찾으세요.'라는 문제를 제시하고 있다. 이것은 그래프의 어떤 성질을 발견하기 위한 문제이다. 수업자는 수업멘토와의 협의를 통해 이 문제를 '탐구문제 4'와 같이 수정하기로 하였다. 왜냐하면 학습자들은 이전에 '이중계수 문제'에 대하여 배웠으므로 기존의 문제를 악수문제로 바꾸면 이를 더 잘 해결할 수 있을 거라 기대했기 때문이다. 또한, 그 과정은 귀납적 추론 모형에 따라 '탐구문제 4', '보충 2', '연습문제 3'의 순서로 진행되었다.

이 문제를 통해 학생들은 '각 참석자가 악수한 횟수의 합은 모임에서 일어난 악수의 총 횟수의 2배와 같다.'라는 사실을 알아낼 수 있다. 즉, '꼭짓점의 차수의 합은 변의 수의 2배이다.'라는 그래프의 성질을 알 수 있다.

나. 학생들의 반응 분석

학생들은 '탐구문제 4'를 해결할 때 참석자를 점으로, 악수를 선으로 나타내고 있었다. 즉, 그래프로 나타내어 문제를 해결하고 있음을 알 수 있다.

참석자가 2명일 때와 3명일 때(꼭짓점이 2개일 때와 3개 일 때)에 해당하는 그래프는 실수 없이 잘 찾아냈다. 그러나 참석자가 4명일 때(꼭짓점이 4개일 때)는 겹치는 그래프가 너무 많았다. 학생들은 아직 동형[7]인 그래프에 대해서 모르기 때문이었다(참고로 동형에 대한 설명은 '탐구문제 6'에서 나온다). 동형인 그래프가 있더라도 그래프의 성질을 발견하는 데는 상관없지만, 순서를 바꾸어 '탐구문제 4' 전에 '탐구문제 6'을 미리 해결하는 것도 좋겠다. 그러면 학생

7) 꼭짓점의 개수가 같고 꼭짓점 사이의 인접성이 같은 두 그래프를 동형이라고 한다.

들이 [그림 Ⅳ-25]와 같이 동형인 그래프는 제외하며 문제를 해결할 수 있을 것이다.

[그림 Ⅳ-25] 학생들이 그린 동형인 그래프(자료번호5-탐구문제4-③)

동형인 그래프를 포함하여 학생들이 발견한 몇 가지 그래프만을 가지고도 '각 참석자가 악수한 횟수의 합은 모임에서 일어난 악수의 총 횟수의 2배'라는 사실은 쉽게 알아내었다. 또한, 그래프를 통해 '꼭짓점의 차수의 합의 변의 수의 2배'라는 사실도 이해하였다.

탐구문제 5 어떤 모임에서 모임의 참석자들이 악수를 할 때, 홀수 번 악수한 참석자의 총수는 각각 어떻게 되는지 생각해봅시다.(악수를 하지 않는 경우도 있을 수 있다.)

① 참석자가 2명 일 때 ② 참석자가 3명 일 때 ③ 참석자가 4명 일 때

보충 3 ①~③의 경우에서 공통적으로 발생하는 특징을 찾아보고, 타당한 가설을 세워봅시다.

연습문제 4 [탐구문제 5]에 대하여 참석자가 5명인 경우도 알아보고, 자신이 세운 가설이 맞는지 확인해봅시다.

가. 탐구문제의 이해

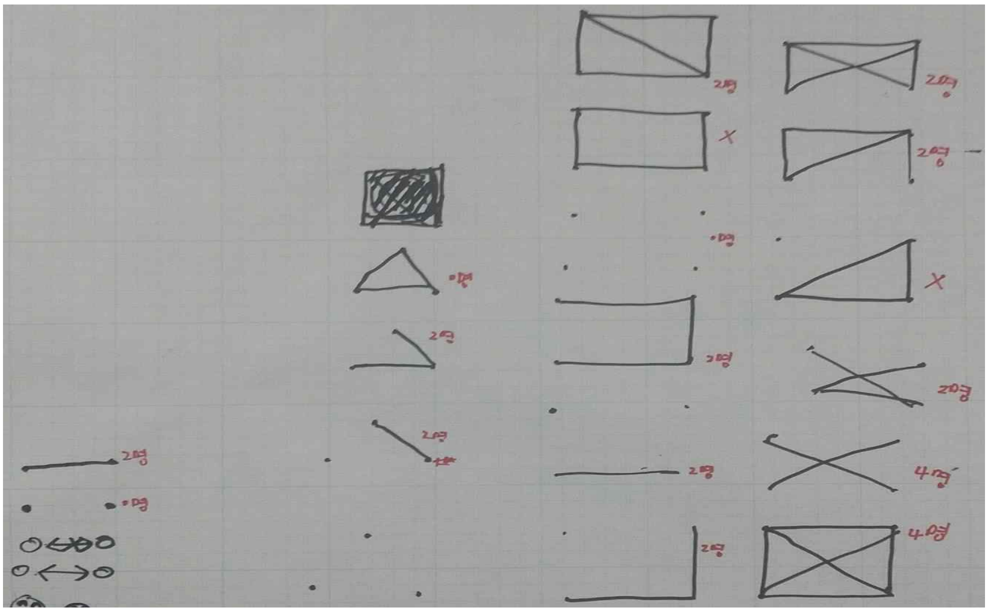
이번 탐구문제도 원래 교재의 내용에서 수정하였다. 최근배와 안선영(2010)의 교재에는 '그래프에서 홀수점의 개수는 짝수 개입니다.'라고 제시되어있다. 이 문제를 '어떤 모임에서 모임의 참석자들이 악수를 할 때, 홀수 번 악수한 참석

자의 총수는 각각 어떻게 되는가?’와 같이 악수문제로 변환하였다. 또한, 그 과정은 귀납적 추론 모형에 따라 ‘탐구문제 5’, ‘보충 3’, ‘연습문제 4’의 순서로 진행되었다.

이 문제를 해결하면서 학생들은 ‘홀수 번 악수한 참석자의 총수는 짝수이다.’라는 사실을 알아낼 수 있다. 즉, 원 교재의 탐구문제인 ‘그래프에서 홀수점의 개수는 짝수 개이다.’라는 그래프의 성질을 알 수 있다.

나. 학생들의 반응 분석

학생들은 ‘탐구문제 4’에서 찾아냈던 그래프를 이 문제에서 다시 활용하였다. [그림 Ⅳ-26]과 같이 1모둠은 각각의 그래프 옆에 홀수점의 개수를 모두 적었다. 이를 통해 홀수점의 개수가 짝수 개라는 사실을 발견했으며, 다른 모둠의 문제해결과정도 유사했다.



[그림 Ⅳ-26] 1모둠의 문제해결 아이디어(자료번호5-탐구문제5)

탐구문제 7 어떤 모임에서 모임의 참석자들이 악수를 할 때, 모든 참석자들이 서로 악수를 했다면 모임에서 일어난 악수의 총 횟수는 어떻게 되는지 생각해봅시다.

① 참석자가 2명 일 때 ② 참석자가 3명 일 때 ③ 참석자가 4명 일 때

보충 4 ①~③의 경우에서 공통적으로 발생하는 특징을 찾아보고, 타당한 가설을 세워봅시다.

연습문제 6 [탐구문제 7]에 대하여 참석자가 5명인 경우도 알아보고, 자신이 세운 가설이 맞는지 확인해봅시다.

가. 탐구문제의 이해

이번에도 원래 교재의 내용을 수정하였다. 최근배와 안선영(2010)의 교재에는 '꼭짓점의 수가 n인 완전그래프의 변의 수를 구하여라.'라고 제시되어있다. 이것은 완전그래프라는 용어를 알아야 해결할 수 있는데, 완전그래프를 몰라도 문제를 해결할 수 있도록 '어떤 모임에서 모임의 참석자들이 악수를 할 때, 모든 참석자들이 서로 악수를 했다면 모임에서 일어난 악수의 총 횟수는 어떻게 되는가?'와 같이 악수문제로 변환하였다. 또한, 그 과정은 귀납적 추론 모형에 따라 '탐구문제 7', '보충 4', '연습문제 6'의 순서로 진행되었다.

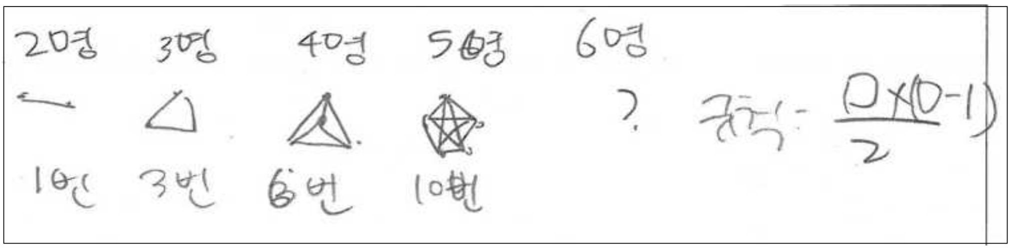
이 문제를 해결하면 '참석자가 n명일 때, 모든 참석자들이 서로 악수를 했다면 모임에서 일어난 악수의 총 횟수는 $\frac{n(n-1)}{2}$'이라는 사실을 알아낼 수 있다. 즉, 원 교재의 탐구문제인 '꼭짓점의 수가 n인 완전그래프의 변의 수는 $\frac{n(n-1)}{2}$'라는 그래프의 성질도 알 수 있다.

나. 학생들의 반응 분석

학생들은 모든 참석자들이 악수를 하는 경우를 [그림 Ⅳ-27]과 같이 그래프로 나타내었다. 2명일 때는 1번 악수를 하게 되고, 3명일 때는 3번, 4명일 때는

6번 한다는 사실을 그래프에서 알아낼 수 있었다. 이를 통해 학생들은 참석자 수가 □명일 때, $\frac{\square(\square-1)}{2}$번 악수를 한다는 규칙을 발견하였다. 참석자가 5명인 경우를 통해서 다시 증명해보니 바르게 성립하였다.

최근배와 안선영(2010)의 교재처럼 완전그래프를 먼저 정의하고 이를 통해 탐구문제를 해결하는 것도 좋겠지만, 수업자처럼 탐구문제를 통해 완전그래프에 대해서 자연스럽게 이해시키는 것도 좋은 방법이다.



[그림 Ⅳ-27] 학생들의 문제해결 아이디어(자료번호5-탐구문제7)

5. 한 붓 그리기

수업에 적용한 학습 프로그램

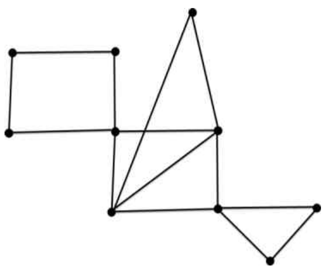
자료 번호	6	탐구 주제	한 붓 그리기
학습 목표	한 붓 그리기의 조건과 그 수순을 알 수 있다.		
관련 영역	규칙성, 도형		
학습 교구	그림(쾨니히스베르크 지역의 프레겔강과 7개의 다리), 구글 지도 캡쳐 사진(칼리닌그라드 지역)		

목표문제

현재는 러시아에 속해있지만 그 때 당시에는 독일 영토였던 쾨니히스베르크라는 마을을 가로질러 흐르고 있는 프레겔강에는 오른쪽 그림과 같은 모양으로 7개의 다리가 놓여 있었습니다.

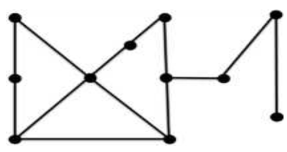
과연 이 마을에서 육지의 어느 한 지점에서 출발하여 7개의 다리를 꼭 한 번씩만 건너서 원래의 출발점으로 돌아오는 산책이 가능할까요?

탐구문제 1 : 다음 그래프에서 한 붓 그리기가 가능한지 경로를 찾아봅시다.

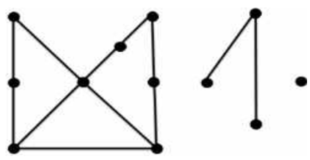


약속하기 1

주어진 그래프에서 임의의 두 꼭짓점에 대하여, 변들의 이음 경로가 있을 때, 이 그래프를 **연결그래프**라고 부른다.



O



X

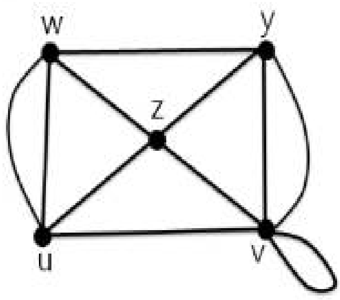
약속하기 2

어느 한 꼭짓점을 출발하여 그래프의 모든 변을 단지 한 번씩만 지나 원래의 출발점으로 돌아오는 길이 존재하는 그래프를 **오일러그래프**라고 합니다.

탐구문제 2 : 모든 꼭짓점의 차수가 짝수인 연결그래프는 오일러그래프임을 증명하세요.

탐구문제 3 : 오일러그래프에서는 모든 꼭짓점의 차수가 짝수일까요?

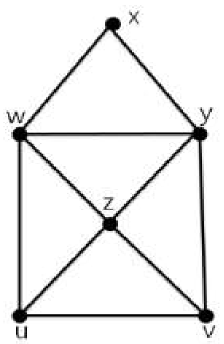
연습문제 1 : 다음의 그래프를 통해 한 붓 그리기 경로를 찾는 방법을 생각해 봅시다.



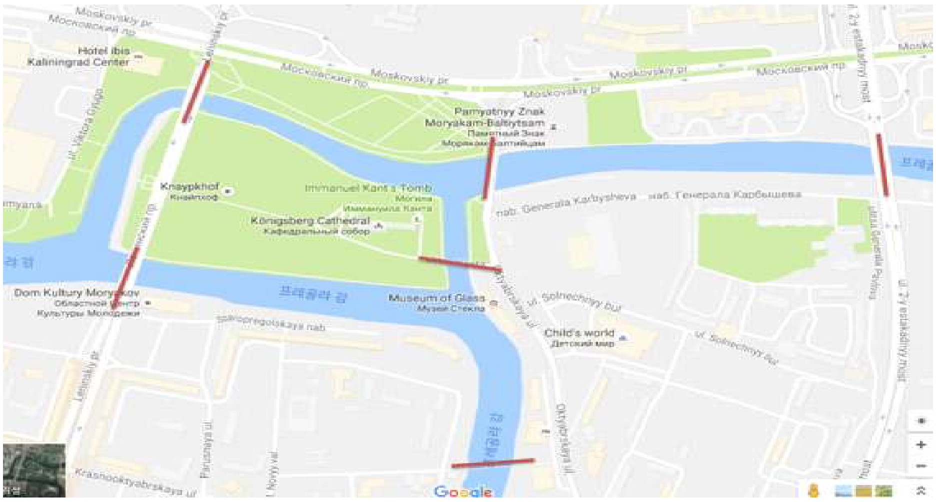
탐구문제 4 : 홀수점이 정확히 2개인 연결그래프는 항상 한 붓 그리기가 가능할까요? 즉, 출발점과 도착점이 다르면서 그래프의 모든 변을 한 번씩만 지나가는 길이 존재할까요?

탐구문제 5 : 출발점과 도착점이 다르면서 그래프의 모든 변을 한 번씩만 지나가는 길이 있다면, 이 그래프는 정확히 2개의 홀수점을 가질까요?

연습문제 2 : 다음 그래프의 한 붓 그리기 순서를 찾아봅시다.



생각해보기 : 아래의 지도는 러시아의 칼리닌그라드입니다. 독일의 영토인 쾨니히스베르크였을 때보다 다리의 위치가 많이 바뀌었습니다. 그러면 지금은 육지의 한 지점에서 출발하여 6개의 다리를 꼭 한 번씩만 건너서 원래의 출발점으로 돌아오는 산책이 가능할까요?



▣ 참고 자료 ▣

1. 내일신문. (2015). 쾨니히스베르크의 다리. 2016. 10. 15.
http://www.naeil.com/news_view/?id_art=163398.html
2. 구글지도. (2010). 러시아의 칼라닌그라드 위성사진. 2016. 10. 15.
https://www.google.co.kr/maps.html

수학화 활동 사례 분석

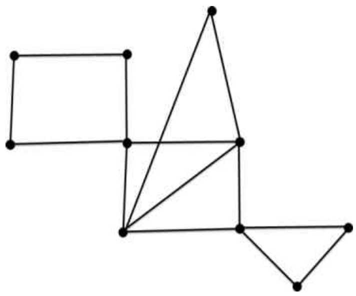
자료 번호	6	탐구 주제	한 붓 그리기
학습 목표	한 붓 그리기의 조건과 그 수순을 알 수 있다.		
문제해결도구	그림(쾨니히스베르크 지역의 프레겔강과 7개의 다리), 구글 지도 캡쳐 사진(칼리닌그라드 지역)		
수학적 문제	· 연결그래프와 오일러그래프는 어떤 성질을 가지고 있을까? · 어떤 그래프에서 한 붓 그리기가 가능할까? · 한 붓 그리기가 가능한지 어떻게 증명할 수 있을까?		
배경지식	프레겔강의 다리 건너기 문제, 지도를 그래프로 나타내기		

목표문제 이야기 자료(쾨니히스베르크의 프레겔강과 7개의 다리 문제)

이 문제는 1736년에 수학자 오일러(Euler)에 의해 해결되어 유명해졌으며, 한 붓 그리기를 학습할 때 대표적으로 언급되는 이야기이다. 수업에 참여한 학생들도 대다수가 이 문제에 대해서 들어본 적이 있었다. 하지만 다행히도 이 문제의 해결방법에 대해서 알고 있는 학생은 없었다.

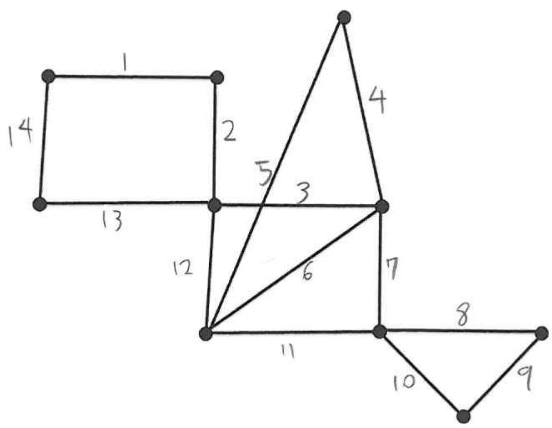
학생들은 저번 시간에 프레겔강과 7개의 다리를 수학적 추상화에 의해 그래프로 나타내는 방법을 학습하였다. 따라서 그래프를 이용하여 목표문제를 해결할 거라고 짐작하고 있었다. 하지만 아직은 한 붓 그리기가 가능한 그래프의 조건을 모르기 때문에, 그래프에서 여러 번 한 붓 그리기를 시도해볼 뿐 이 그래프가 가능한 것인지 불가능한 것인지 구별하기는 어려웠다.

탐구문제 1 다음 그래프에서 한 붓 그리기가 가능한지 경로를 찾아봅시다.



한 붓 그리기는 붓을 한 번도 종이에서 떼지 않고 같은 곳을 두 번 지나지 않으면서 어떤 도형을 그릴 수 있는가 하는 문제이며, 평소에 학생들이 쉽게 접할 수 있는 문제이기 때문에 친숙하게 접근할 수 있었다.

'탐구문제 1'의 경우에도 이 그래프가 왜 한 붓 그리기가 가능한가에 대해서는 모르지만, 반복과 시행착오를 통해서 한 붓 그리기가 가능한지는 판단할 수 있다. 또한, 한 붓 그리기가 가능한 경로는 한 가지가 아니므로 학생들이 답을 찾기는 더욱 쉽다. 이 수업에도 학생들은 빠른 시간 내에 한 붓 그리기 경로를 찾아냈다. 아래의 [그림 Ⅳ-28]은 학생들이 찾은 한 붓 그리기 경로이며, 선 위의 숫자는 그 순서를 의미한다.



[그림 Ⅳ-28] 학생들의 문제해결 아이디어(자료번호6-탐구문제1)

탐구문제 2 모든 꼭짓점의 차수가 짝수인 연결그래프[8]는 오일러그래프[9]임을 증명하세요.

가. 탐구문제의 이해

'탐구문제 2'에서 꼭짓점의 차수가 짝수이므로 어떤 꼭짓점으로 들어오는 길이 있었다면 반드시 나가는 길도 있어야 한다. 그리고 꼭짓점은 유한하기 때문에 처음 출발한 꼭짓점으로 반드시 돌아오게 된다. 따라서 모든 꼭짓점의 차수가 짝수인 연결그래프에서는 임의의 꼭짓점에서 출발하여 모든 변을 단지 한번씩만 지나 원래의 꼭짓점으로 돌아오는 길이 존재한다(최근배 외, 2010).

이제까지의 수업에서는 학생들이 자연스럽게 귀납적 추론 방법에 따라 문제를 해결할 수 있도록 [탐구문제] → [보충] → [연습문제]로 나누어 제시하였지만, 이제부터는 학생들이 증명하는 탐구문제에 대해서 스스로 귀납적 추론 방법을 찾을 수 있도록 따로 문제 구성을 하지 않았다.

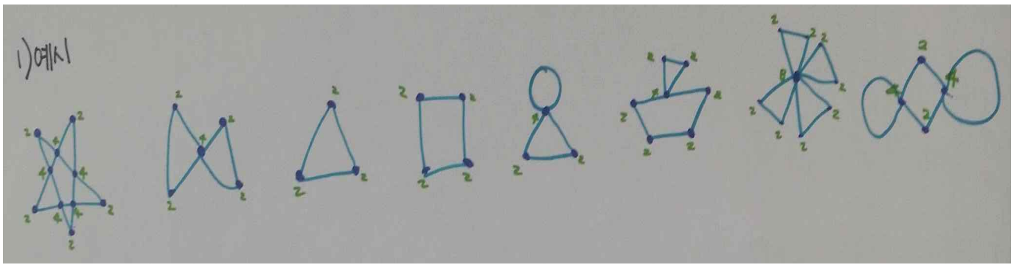
나. 학생들의 반응 분석

수업자는 학생들이 꼭짓점이 2개, 3개, 4개일 때 꼭짓점의 차수가 짝수인 그래프를 모두 그려봄으로써 체계적으로 '탐구문제 2'를 증명하길 기대했다. 그러나 학생들은 [그림 Ⅳ-29]와 같이 꼭짓점의 차수가 짝수인 그래프를 특별한 기준 없이 생각나는 대로 그리면서 탐구문제를 증명하고 있었다.

[그림 Ⅳ-29]는 1모둠의 문제해결 아이디어이며, 2모둠과 3모둠의 문제해결 방법도 같았다. 학생들은 자신들이 그려본 다양한 그래프에서 반례를 찾지 못했으며, 모든 꼭짓점의 차수가 짝수인 연결그래프는 어느 한 꼭짓점을 출발하여 그래프의 모든 변을 단지 한 번씩만 지나 원래의 출발점으로 돌아온다고 생각하게 되었다.

8) 그래프에서 임의의 두 꼭짓점에 대하여, 변들의 이음 경로가 있을 때, 이 그래프를 연결그래프라고 부른다.

9) 어느 한 꼭짓점을 출발하여 그래프의 모든 변을 단지 한 번씩만 지나 원래의 출발점으로 돌아오는 길이 존재하는 그래프를 오일러그래프라고 한다.



[그림 Ⅳ-29] 1모둠의 문제해결 아이디어(자료번호6-탐구문제2)

탐구문제 3 오일러그래프에서는 모든 꼭짓점의 차수가 짝수일까요?

'탐구문제 3'은 '탐구문제 2'의 역문제이다. 따라서 '탐구문제 3'이 옳다는 사실을 증명하면 모든 꼭짓점의 차수가 짝수인 연결그래프에 대해서, 이 그래프가 오일러그래프가 될 필요충분조건이 성립하게 된다.

'탐구문제 3'을 증명하면, 오일러그래프의 꼭짓점이 '도중에 통과하는 꼭짓점'인 경우에는 들어가는 변과 나가는 변이 반드시 있으므로 그 꼭짓점에 모이는 변의 수는 짝수이다. 한편, 꼭짓점이 '출발점'이라면 이 점은 동시에 종점이 되어야 하므로 당연히 짝수점이다(최근배 외, 2010).

학생들은 이와 같이 연역적으로 탐구문제를 증명하는 것을 어려워했다. 심지어 '탐구문제 2'와 '탐구문제 3'이 왜 서로 역문제인가를 이해하지 못하는 학생도 있었다. 따라서 수업자는 이 문제의 의도와 증명하는 방법을 자세히 설명해 줘야 했다.

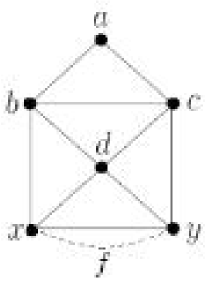
탐구문제 4 홀수점이 정확히 2개인 연결그래프는 항상 한 붓 그리기가 가능할까요? 즉, 출발점과 도착점이 다르면서 그래프의 모든 변을 한 번씩만 지나가는 길이 존재할까요?

가. 탐구문제의 이해

아래의 [그림 Ⅳ-30]은 '탐구문제 4'를 해결하기 위해 최근배와 안선영(2010)이 제안한 문제해결 아이디어다. 홀수점이 정확히 2개인 그래프에서 두 홀수점

을 x, y라고 하고, 두 꼭짓점을 잇는 가상의 선을 f라고 하자. 가상의 선 f를 이은 이 그래프는 모든 꼭짓점이 짝수점이므로 '탐구문제 2'에 의해서 오일러그래프가 된다. 그리고 x에서 출발하는 한 붓 그리기 경로를 찾는데, x와 y를 임시로 이은 선(f)이 가장 먼저 지나는 길이 되는 길을 찾는다.

$$f(x \to y) \to x \to d \to c \to y \to d \to b \to a \to c \to b \to x$$



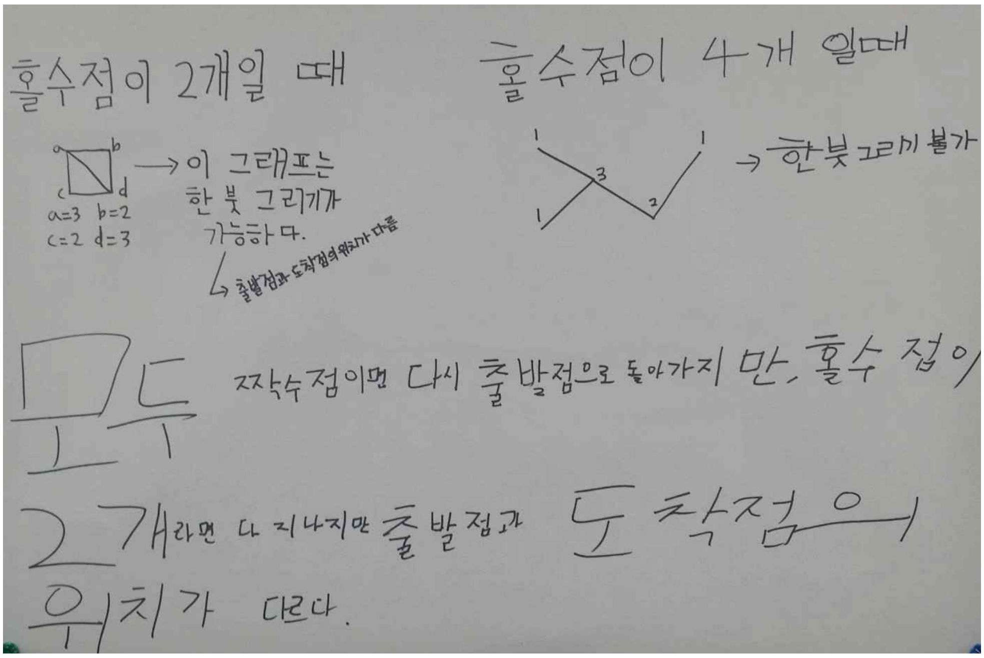
[그림 Ⅳ-30] 문제해결 아이디어(자료번호6-탐구문제4)

그리고 나서 x와 y를 임시로 이은 선(f)을 지우면, y에서 출발하여 x로 끝나는 한 붓 그리기 경로가 되는 것이다. 따라서 홀수점이 정확히 2개인 연결그래프는 항상 한 붓 그리기가 가능하다(최근배 외, 2010).

$$y \to x \to d \to c \to y \to d \to b \to a \to c \to b \to x$$

나. 학생들의 반응 분석

우선 1모둠은 아래의 [그림 Ⅳ-31]처럼 홀수점이 2개일 때 한 붓 그리기가 가능한 그래프를 찾기는 했지만 항상 성립하는가는 밝혀내지 못하였다. 그리고 문제와 관계없지만 홀수점이 4개일 때 한 붓 그리기가 불가능한 반례를 찾아내기도 하였다. 또한, '꼭짓점이 모두 짝수점이면 원래 출발점으로 다시 돌아가지만, 꼭짓점의 홀수점이 2개가 있다면 출발점과 도착점이 다르다.'라는 성질도 발견하였다.

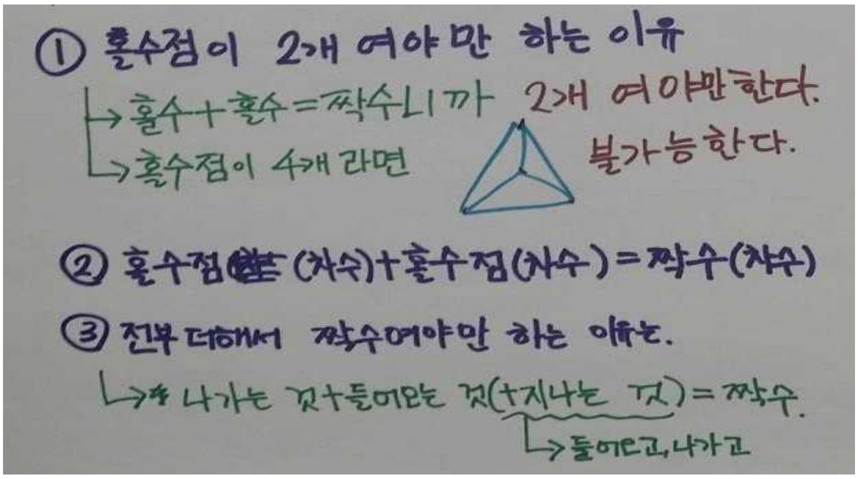


[그림 Ⅳ-31] 1모둠의 문제해결 아이디어(자료번호6-탐구문제4)

2모둠은 홀수점이 2개만 있는 다양한 그래프를 찾으려고 하였다. 그리고 1모둠과 유사하게 '두 개의 점이 홀수점이 있는 경우에는 한 홀수점에서 출발하여 다른 홀수점에서 끝난다.'라는 성질을 찾아냈다. 하지만 1모둠과 마찬가지로 '탐구문제 4'를 해결할만한 그럴듯한 아이디어를 보여주지는 못하였다.

마지막으로 홀수점이 2개인 연결그래프는 항상 한 붓 그리기가 가능한지에 대해 3모둠이 생각한 논리는 [그림 Ⅳ-32]와 같다.

1) 꼭짓점의 차수를 전부 더하면 짝수여야 한다. 왜냐하면 꼭짓점에서 나가는 변들과 꼭짓점으로 들어오는 변들(지나가는 것도 포함)을 모두 합치면 짝수여야 하기 때문이다.
2) 만약 홀수점이 있다면 홀수점은 짝수 개여야 한다. 1)에 의하면 꼭짓점의 차수를 전부 더하면 짝수여야 한다고 했기 때문이다. 즉, 홀수점의 개수는 '2개, 4개, 6개, …'여야 한다.
3) 홀수점은 2개여야 한다. 왜냐하면 홀수점이 4개 이상일 때는 반례를 찾을 수 있기 때문이다.



[그림 Ⅳ-32] 3모둠의 문제해결 아이디어(자료번호6-탐구문제4)

3모둠의 학생들은 홀수점이 4개일 때 한 붓 그리기가 불가능한 반례를 찾았지만, 홀수점이 6개일 때나 8개일 때의 반례는 특별히 제시하지 않았다. 탐구문제를 완벽히 증명해 내지 못한 것이다. 수업자는 이에 대해 학생들에게 다음과 같이 질문해 보았다.

T: 그러니까 홀수점은 짝수 개여야 한다는 뜻이니?

S: 네.

T: 그런데 홀수점이 4개일 때는 왜 한 붓 그리기가 안 되지?

S: 한 붓 그리기가 불가능한 그래프를 찾았어요.

T: 그러면 홀수점이 6개거나 8개일 때는 왜 안 되지?

S: …

탐구문제 5 출발점과 도착점이 다르면서 그래프의 모든 변을 한 번씩만 지나가는 길이 있다면, 이 그래프는 정확히 2개의 홀수점을 가질까요?

‘탐구문제 5’은 ‘탐구문제 4’의 역문제이다. 따라서 ‘탐구문제 5’가 옳다는 사실을 증명하면 홀수점이 2개인 연결그래프는 한 붓 그리기가 가능하다는 사실

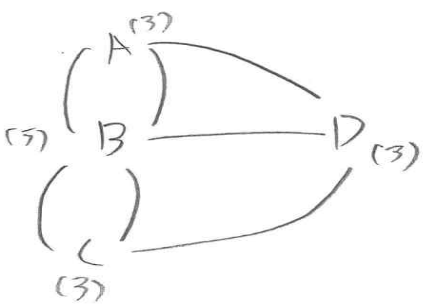
의 필요충분조건이 성립한다.

최근배와 안선영(2010)에 의하면 '탐구문제 5'를 다음과 같이 증명하고 있다. 문제에 따라서 출발점(x)과 도착점(y)이 다르면서 그래프의 모든 변을 한 번씩만 지나는 길이 있다고 하고, 편의상 출발점(x)과 도착점(y)을 잇는 새로운 변 f를 그린다. 그러면 원래의 그래프에 변 f가 첨가된 새로운 그래프는 오일러그래프가 된다. 또한, '탐구문제 3'에 의하여 이 그래프의 모든 꼭짓점의 차수는 짝수가 된다. 이제, 이 그래프에서 변 f를 제거하면 원래의 그래프가 되며, 정확히 두 개의 꼭짓점 x, y만이 홀수점이 된다.

학생들이 이와 같이 연역적으로 증명하는 것은 어려웠다. 따라서 수업자는 '탐구문제 4'와 '탐구문제 5'가 역문제의 관계에 있으며, 어떻게 증명할 수 있는지에 대해서 자세히 설명해야 했다.

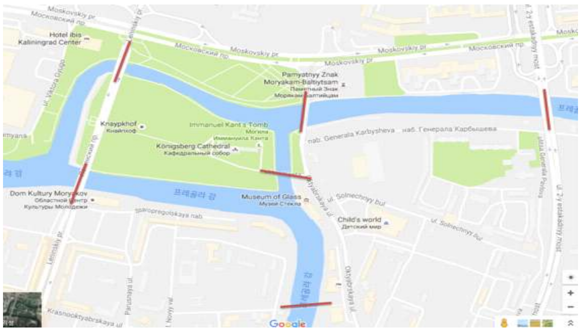
목표문제 이야기 자료(쾨니히스베르크의 프레겔강과 7개의 다리 문제)

학생들은 그림에서 쾨니히스베르크의 4개의 지역과 7개의 다리를 그래프로 나타내는 방법을 이미 전 시간에 학습했다. 따라서 지도를 그래프로 옮기는 것은 어려운 문제가 아니었다. 처음의 목표문제를 다시 학생들에게 제시했을 때, 학생들은 자연스럽게 꼭짓점의 차수를 구하고 있었다. [그림 Ⅳ-33]은 학생들이 목표문제를 해결한 아이디어이며, 4개의 꼭짓점이 모두 홀수점이기 때문에 한 붓 그리기가 불가능하다는 사실을 발견할 수 있었다.



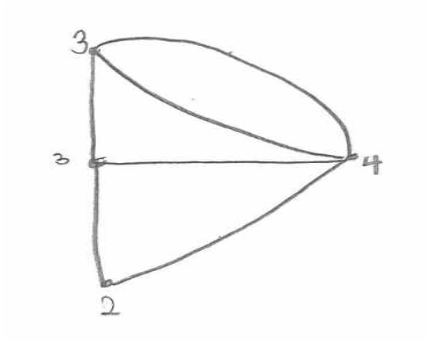
[그림 Ⅳ-33] 학생들의 문제해결 아이디어(자료번호6-목표문제)

생각해보기 아래의 지도는 러시아의 칼리닌그라드입니다. 독일의 영토인 쾨니히스베르크였을 때보다 다리의 위치가 많이 바뀌었습니다. 그러면 지금은 육지의 한 지점에서 출발하여 6개의 다리를 꼭 한 번씩만 건너서 원래의 출발점으로 돌아오는 산책이 가능할까요?



수업 전에 수업멘토와 협의하는 과정에서 과거의 쾨니히스베르크 지역이 현재 러시아의 칼리닌그라드로 바뀌었다는 이야기를 들을 수 있었다. 따라서 현재의 칼리닌그라드 지역에서는 육지의 한 지점에서 출발하여 6개의 다리를 꼭 한 번씩만 건너서 원래의 출발점으로 돌아오는 산책이 가능한지를 알아보는 문제를 제시하기로 하였다.

학생들은 [그림 Ⅳ-34]와 같이 칼리닌그라드의 4개의 지역과 6개의 다리를 그래프로 바르게 나타내었으며, 각 꼭짓점의 차수도 잘 구했다. 이를 통해 홀수점이 단 2개 밖에 없기 때문에 한 붓 그리기가 가능하다는 사실도 알 수 있었다.



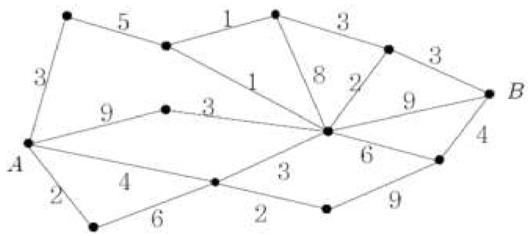
[그림 Ⅳ-34] 학생들의 문제해결 아이디어(자료번호6-생각해보기)

6. 최단경로 문제

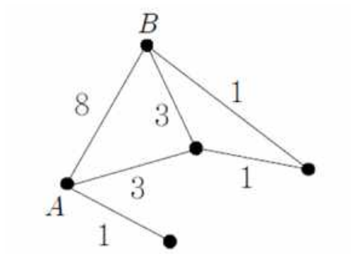
수업에 적용한 학습 프로그램

자료 번호	7	탐구 주제	최단경로 문제
학습 목표	최단경로 문제의 알고리즘에 대하여 알 수 있다.		
관련 영역	자료와 가능성, 규칙성, 도형		
학습 교구	여러 가지 무게그래프[10]		

목표문제 : 아래의 연결망에서 A를 출발하여 B까지 가는 최단경로를 찾고, 최소무게를 구해봅시다.

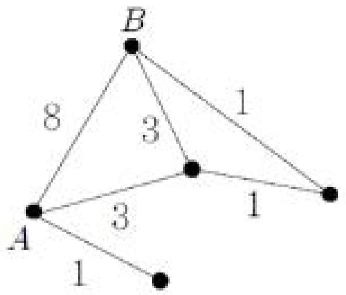


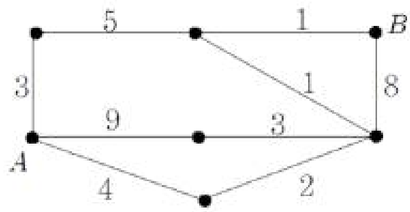
탐구문제 1 : 출발점 A에서 도착점 B까지 가는 최단경로를 찾고 최단거리를 구해봅시다.

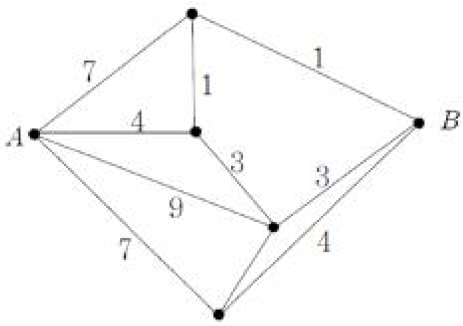


10) 각 변에 무게라고 부르는 양수(positive number)가 할당된 그래프

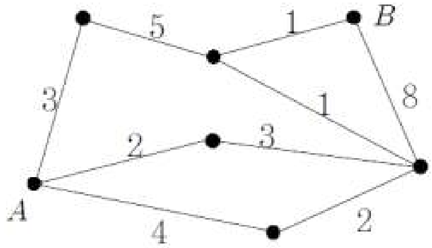
탐구문제 2 : 세 가지 그래프의 최단경로를 찾고 최단거리를 구해봅시다. 그리고 최단경로를 찾는 방법에 대한 아이디어를 탐구하여 봅시다.







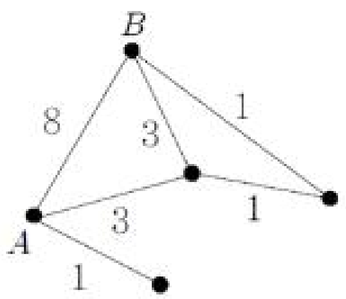
연습문제 1 : 모둠별로 고안한 문제해결 아이디어로 다음 그래프의 최단경로를 찾아봅시다.

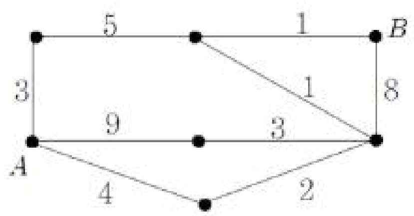


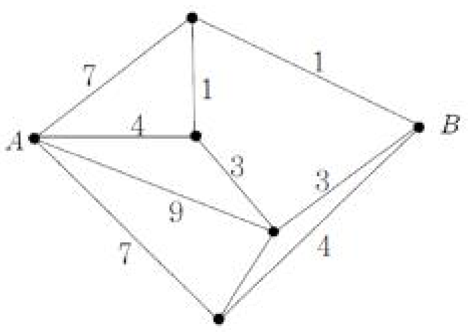
딕스트라(Dijkstra) 알고리즘

(1) 먼저 출발점을 0으로 봅니다.
(2) 출발점과 인접된 각 꼭짓점을 잇는 변의 무게를 살펴보고 그 무게를 잠정적으로 각 지점에 표시합니다. 그 중에서 최소무게인 변을 찾아 표시하고, 또한 최소무게인 변으로 연결된 꼭짓점에 확정된 무게를 표시합니다.
(3) 전 단계에서 선택된 경로의 각 꼭짓점에 인접한 지점을 잇는 변의 무게와 전 단계에 설정된 무게를 더하여 각 꼭짓점에 무게를 표시합니다. 그 중에서 합이 최소무게가 되는 변을 찾아 표시하고, 그 변에 연결된 새로운 꼭짓점에 확정된 무게를 표시합니다.
(4) 이와 같은 활동을 반복하면 도착점까지 가는 최단경로를 찾을 수 있습니다.

연습문제 2 : 딕스트라 알고리즘을 이용하여 아래의 연결망에서 A를 출발하여 B까지 가는 최단경로를 찾고, 최소무게를 구해봅시다.



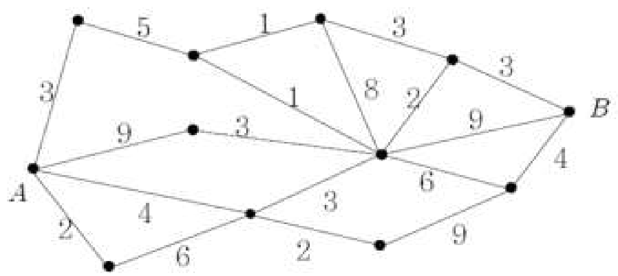




수학화 활동 사례 분석

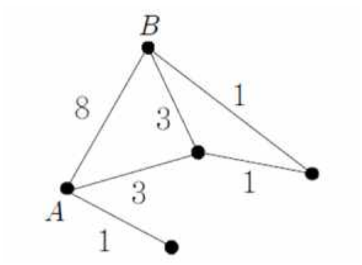
자료 번호	7	탐구 주제	최단경로 문제
학습 목표	최단경로 문제의 알고리즘에 대하여 알 수 있다.		
문제해결도구	여러 가지 무게그래프		
수학적 문제	· 무게그래프란 무엇인가? · 무게그래프에서 최단경로를 찾는 알고리즘이 있을까?		
배경지식	무게그래프, 최단거리, 딕스트라(Dijkstra) 알고리즘		

목표문제 아래의 연결망에서 A를 출발하여 B까지 가는 최단경로를 찾고, 최소무게를 구해봅시다.



목표문제를 제시하자 학생들은 복잡한 무게그래프에서 최단경로를 찾기 위해 노력했다. 무게가 낮은 변을 이어가면서 답을 찾아보았지만, 그 답이 정말 최단경로인지에 대해 확신하지 못했다. 이번 수업에서는 이보다 더 복잡한 무게그래프에서도 최단경로를 찾을 수 있는 알고리즘을 배운다고 안내하였다.

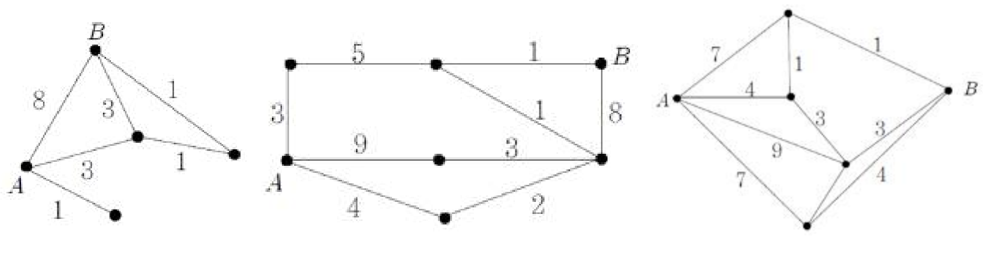
탐구문제 1 출발점 A에서 도착점 B까지 가는 최단경로를 찾고 최단거리를 구해봅시다.



'탐구문제 1'은 무게그래프, 무게변, 최단경로, 최단거리 등의 수학적 용어를 학습하고, 가장 단순한 형태의 무게그래프에서 최단경로를 찾아보면서 그 의미를 이해하기 위해 제시하였다.

출발점 A에서 도착점 B로 한 번에 갈 수 있는 경로가 있지만 변의 무게가 8이므로 최단거리가 아니다. 따라서 한 번에 갈 수 없더라도 최단경로가 되는 다른 길을 찾아야 했다. 학생들은 그래프가 단순했기 때문에 변의 무게가 3, 1, 1이 되는 세 개의 변을 차례로 거쳐 가야 최단경로가 된다는 사실을 쉽게 발견했다. 이 경로는 세 개의 변을 거쳐 가야 하지만 무게의 합의 5밖에 되지 않은 최소거리이다.

탐구문제 2 세 가지 그래프의 최단경로를 찾고 최단거리를 구해봅시다. 그리고 최단경로를 찾는 방법에 대한 아이디어를 탐구하여 봅시다.



가. 연습문제의 이해

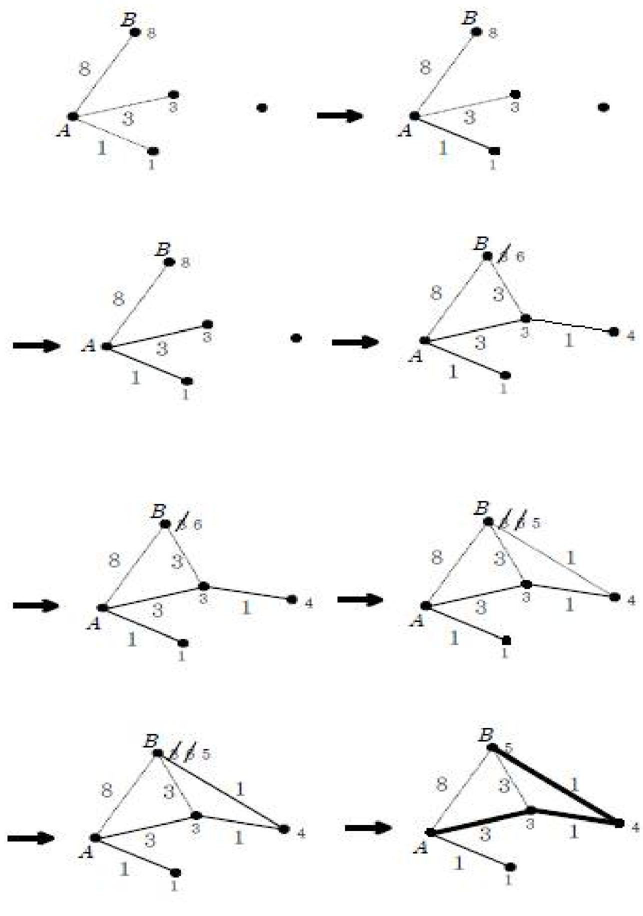
최근배와 안선영(2010)은 최단경로 문제를 해결할 수 있는 방법인 딕스트라 알고리즘에 대해 다음과 같이 설명하고 있다.

1) 먼저 출발점을 0으로 본다.

2) 출발점과 인접된 각 꼭짓점을 잇는 변의 무게를 살펴보고 그 무게를 잠정적으로 각 지점에 표시한다. 그 중에서 최소무게인 변을 찾아 표시하고, 또한 최소무게인 변으로 연결된 꼭짓점에 확정된 무게를 표시한다.

3) 전 단계에서 선택된 경로의 각 꼭짓점에 인접한 지점을 잇는 변의 무게와 전 단계에 설정된 무게를 더하여 각 꼭짓점에 무게를 표시한다. 그 중에서 합이 최소무게가 되는 변을 찾아 표시하고, 그 변에 연결된 새로운 꼭짓점에 확정된 무게를 표시한다.

4) 이와 같은 활동을 반복하면 도착점까지 가는 최단경로를 찾을 수 있다.



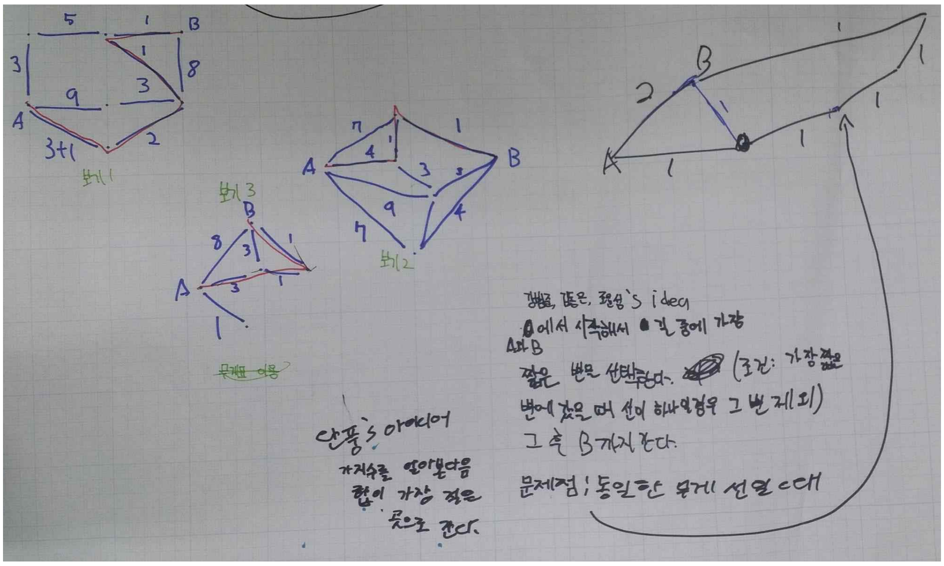
[그림 Ⅳ-35] 딕스트라(Dijkstra) 알고리즘

나. 학생들의 반응 분석

[그림 Ⅳ-36]는 1모둠의 문제해결 아이디어이다. 1모둠의 학생들 사이에서 약간 생각의 차이가 있었지만 대다수가 합의한 방법은 다음과 같다.

1) A와 B를 모두 출발점으로 보고 양쪽 꼭짓점을 잇는 최소무게인 변을 고른다.
2) 전 단계에서 선택된 경로의 도착점을 포함하여, 다시 양쪽 꼭짓점을 잇는 최소무게인 변을 고른다.
3) 2)를 A와 B가 모두 이어질 때까지 반복한다.

1모둠의 알고리즘을 이용하면 세 가지 그래프 모두 최단경로를 바르게 찾을 수 있다. 그러나 양쪽 꼭짓점을 잇는 변의 무게가 동일할 때 어떤 변을 선택해야 하는지에 대한 대안은 제시하지 않았다. 그리고 이 알고리즘은 또 다른 문제점이 있는데 3모둠이 이에 대하여 이야기하고 있다(pp. 105-106).

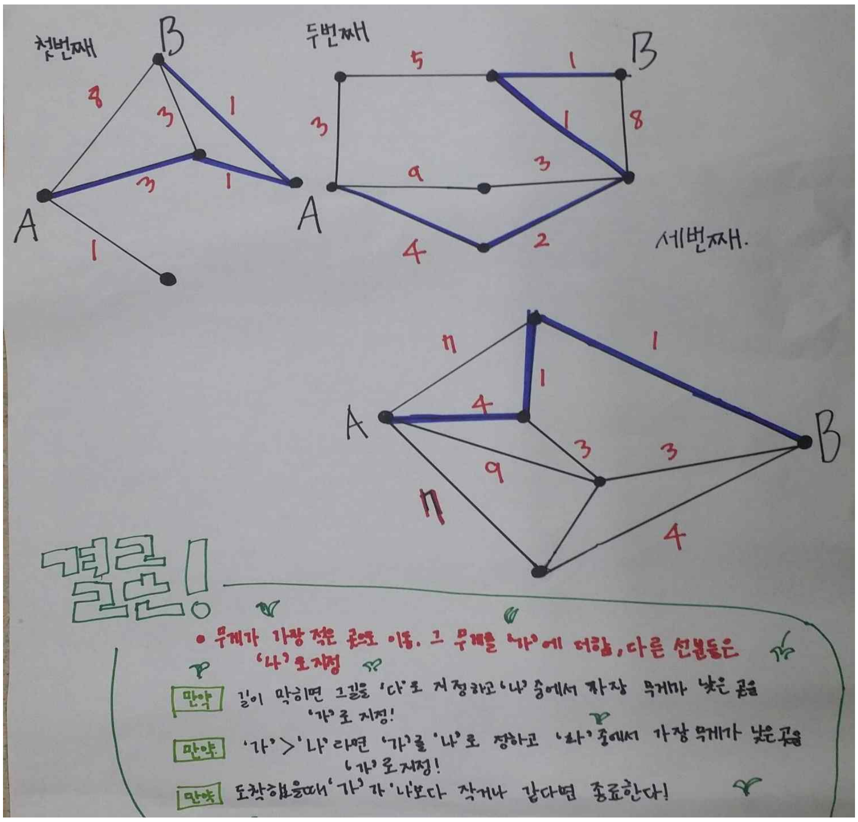


[그림 Ⅳ-36] 1모둠의 문제해결 아이디어(자료번호7-탐구문제2)

[그림 Ⅳ-37]은 2모둠의 문제해결 아이디어이다. 2모둠도 세 가지 그래프에서 최단경로를 잘 찾아냈다. 이 학생들이 합의하여 제시한 최단경로를 찾는 알고리즘은 다음과 같다.

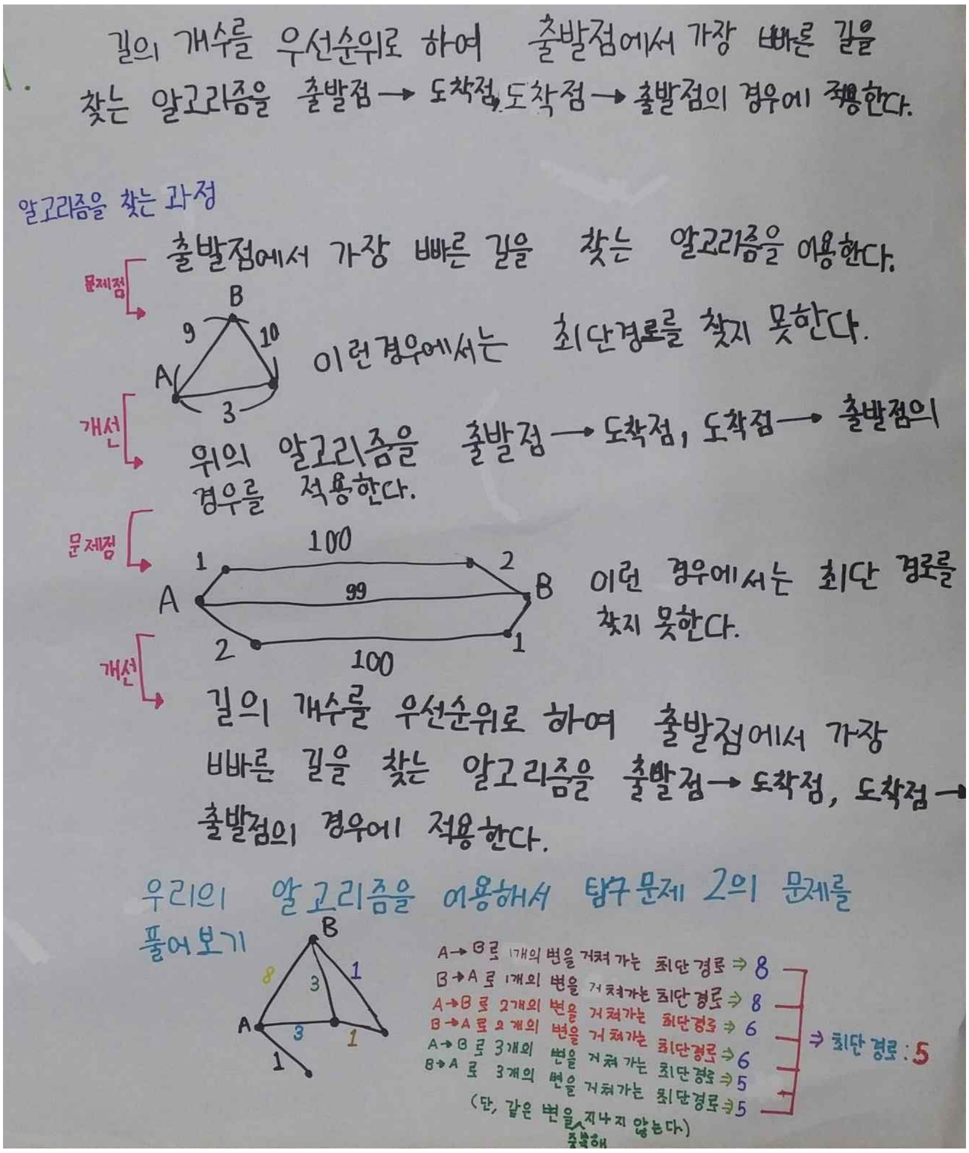
1) 출발점 A에서 최소무게인 변을 '가'로 정하고, 나머지 변은 '나'로 정한다. 그리고 '가'로 지정된 변을 따라간다.
2) 가다가 길이 막히면 그 길은 '다'가 되며, '나' 중에서 최소무게인 변을 새롭게 '가'로 지정한다.
3) 경로를 이어가다가 '가'가 '나'보다 커지면 '가'를 '나'로 바꾸고, 다시 '나' 중에서 최소무게인 경로를 '가'로 바뀐다.
4) 도착점에 왔을 때 '가'가 '나'보다 작거나 같다면 종료한다.

2모둠은 최단거리의 경로를 '가', 잠정적인 길을 '나'. 가지 않을 길을 '다'로 설정하였다. 이 알고리즘도 위의 세 그래프를 모두 만족시킨다. 그러나 그래프가 복잡할 때 '가'와 '나'를 바꾸는 과정이 꽤 어지러울 것으로 예상된다.

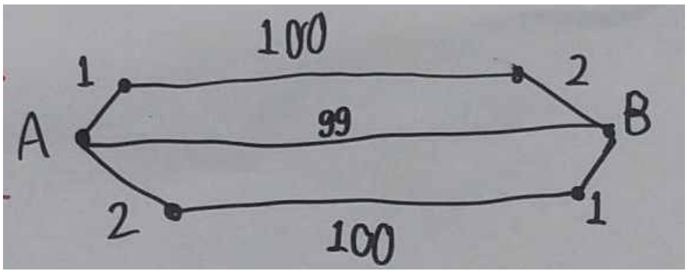


[그림 Ⅳ-37] 2모둠의 문제해결 아이디어(자료번호7-탐구문제2)

[그림 Ⅳ-38]은 3모둠의 문제해결 아이디어이다. 3모둠의 알고리즘도 1모둠이 제안한 방법과 같았다. 꼭짓점 A 또는 꼭짓점 B에서 출발하여 최소무게인 변을 찾으며, 경로가 이어질 때까지 반복하는 방법이다. 하지만 3모둠은 [그림 Ⅳ-39]과 같이 이 알고리즘의 문제점을 발견하였다.



[그림 Ⅳ-38] 3모둠의 문제해결 아이디어(자료번호7-탐구문제2)



[그림 Ⅳ-39] 1모둠과 3모둠이 발견한 알고리즘에 대한 반례

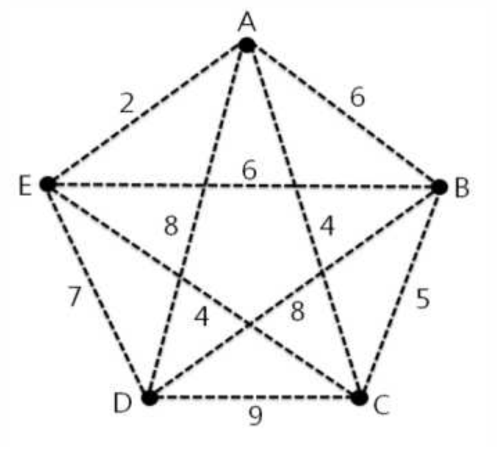
꼭짓점 A와 꼭짓점 B에서 출발하여 최소무게인 변은 1이다. 따라서 1모둠과 3모둠이 제안한 알고리즘에 따른다면 최단거리는 103이 된다. 그러나 실제로 이 그래프의 최단거리는 99이다. 이런 문제점 때문에 3모둠은 길의 개수를 고려하여 [그림 Ⅳ-38]과 같이 알고리즘을 개선하고 있다. 하지만 수정한 알고리즘이 무슨 의미인지 정확히 이해하기 어려웠으며, 복잡한 그래프에서 적용하기는 어려울 것으로 생각되었다.

7. 최소연결 문제

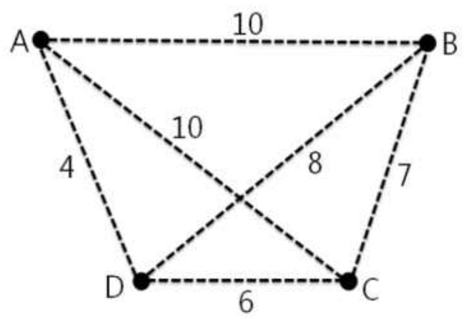
수업에 적용한 학습 프로그램

자료 번호	8	탐구 주제	최소연결 문제
학습 목표	최소 비용의 길을 만드는 문제를 해결할 수 있다.		
관련 영역	자료와 가능성, 규칙성, 도형		
학습 교구	여러 가지 무게그래프		

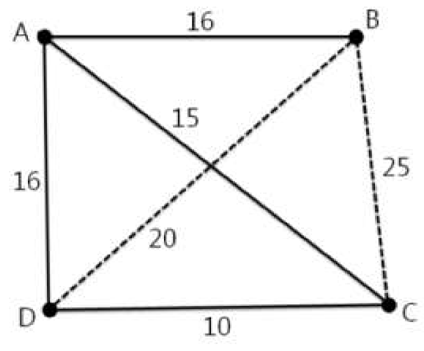
목표문제 : 어떤 도시 A, B, C, D, E를 모두 연결하는 길을 만들려고 합니다. 이 때, 각 도시를 연결하는 비용은 아래의 그림과 같습니다. 어떻게 하면 최소의 비용으로 각 도시를 연결하는 길을 만들 수 있을까요?



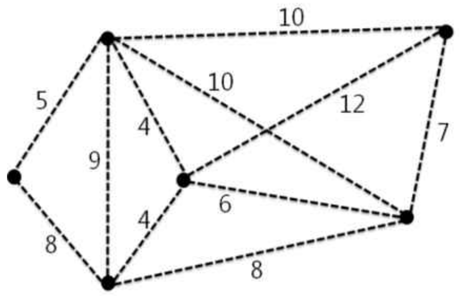
탐구문제 1 : 어떤 도시 A, B, C, D를 모두 연결하는 길을 만들려고 합니다. 이 때, 각 도시를 연결하는 비용은 아래의 그림과 같습니다. 어떻게 하면 최소의 비용으로 각 도시를 모두 연결하는 길을 만들 수 있을까요?



연습문제 1 : 어떤 도시 A, B, C, D를 모두 연결하는 도로망과 그 때의 건설비용을 나타내고 있습니다. 이 때, 실선으로 연결된 길이 최소 비용의 도로망인지 아닌지 생각해보고, 그렇게 생각한 이유를 적어보세요.

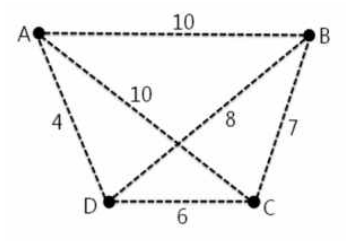


연습문제 2 : Kruskal 알고리즘을 이용해서, 다음 그래프의 최소연결망을 찾으세요.



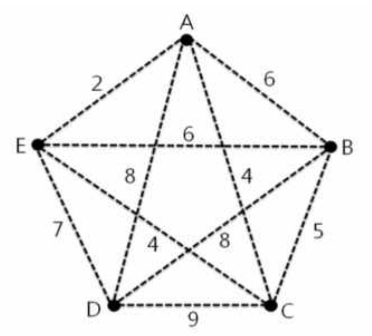
약속하기

각 도시와 도시 사이를 연결하는 길의 비용이 나타난 그래프에서 각 도시 사이의 길의 비용을 원소로 하여 구성한 표를 **무게표**라고 부릅니다.

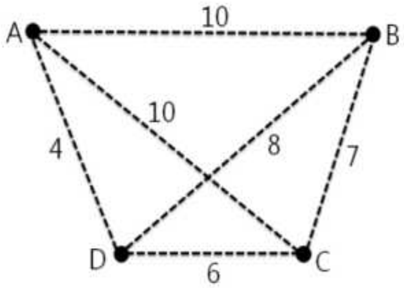


	A	B	C	D
A	-	10	10	4
B	10	-	7	8
C	10	7	-	6
D	4	8	6	-

연습문제 3 : 아래의 무게그래프를 무게표로 바꾸어 보세요.

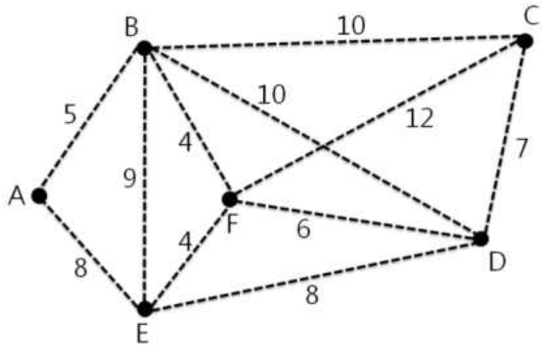


탐구문제 2 : 어떤 도시 A, B, C, D를 모두 연결하는 길을 만들려고 합니다. 이 때, 각 도시를 연결하는 비용은 아래의 그림과 같습니다. 어떻게 하면 최소의 비용으로 각 도시를 모두 연결하는 길을 만들 수 있을까요?



	A	B	C	D
A	-	10	10	4
B	10	-	7	8
C	10	7	-	6
D	4	8	6	-

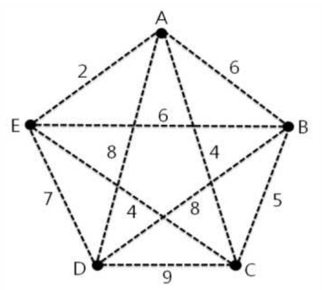
연습문제 4 : Prim의 알고리즘을 이용하여 다음의 도시 A, B, C, D, E, F의 최소연결망을 찾으시오.



수학화 활동 사례 분석

자료 번호	8	탐구 주제	최소연결 문제
학습 목표	최소 비용의 길을 만드는 문제를 해결할 수 있다.		
문제해결도구	여러 가지 무게그래프		
수학적 문제	· 몇 개의 지역을 어떻게 최소 비용으로 연결할 수 있을까? · 그래프에서 최소 비용의 길을 찾는 알고리즘은 무엇일까? · 무게표로 최소연결 문제를 어떻게 해결할 수 있을까?		
배경지식	무게그래프, 최소 비용의 길, Kruskal 알고리즘, 무게표(무게행렬), Prim의 알고리즘		

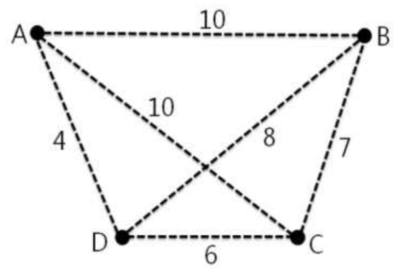
목표문제 어떤 도시 A, B, C, D, E를 모두 연결하는 길을 만들려고 합니다. 이 때, 각 도시를 연결하는 비용은 아래의 그림과 같습니다. 어떻게 하면 최소의 비용으로 각 도시를 연결하는 길을 만들 수 있을까요?



최소연결 문제는 비용, 시간 또는 거리 등을 고려하여 최적화되도록 모든 지역의 연결망을 만드는 문제이다. 각 지역을 꼭짓점으로, 지역끼리의 연결 관계를 변으로 두면 무게그래프로 나타낼 수 있는데, 결국 최소연결 문제는 무게그래프의 꼭짓점들을 연결하면서 최소 비용이 드는 길을 찾는 문제이다.

지난 시간에 무게그래프에 대해서 학습했기 때문에 이번 학습주제에 대한 이해는 빨랐다. 그러나 위의 목표문제를 해결하는 데 혼란스러워 했으며, 답을 찾은 학생도 그 답이 올바른 답인지 확신하지 못했다.

탐구문제 1 어떤 도시 A, B, C, D를 모두 연결하는 길을 만들려고 합니다. 이 때, 각 도시를 연결하는 비용은 아래의 그림과 같습니다. 어떻게 하면 최소의 비용으로 각 도시를 모두 연결하는 길을 만들 수 있을까요?



가. 탐구문제의 이해

모든 변의 무게(거리, 비용 등)가 0이상인 무게그래프에서 최소연결을 구하는 Kruskal 알고리즘은 다음과 같은 과정을 거친다(최근배 외, 2010).

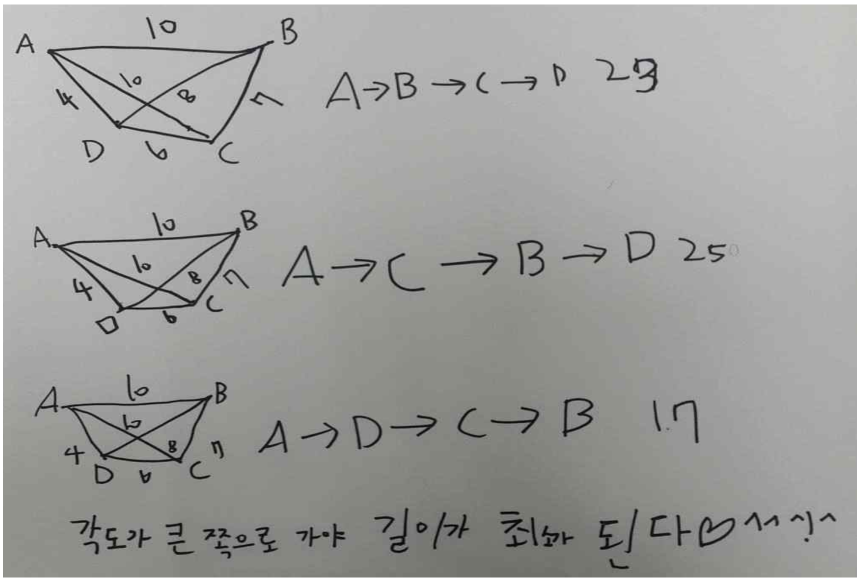
1) 먼저, 최소무게의 변을 선택한다.
2) 선택된 변의 각 꼭짓점에서 연결할 수 있는 변들의 무게를 보고, 그 중에서 최소무게인 변을 선택한다.
3) 전 단계에서 선택된 변들의 각 꼭짓점에서 연결할 수 있는 변들의 무게를 보고, 그 중에서 최소무게인 변을 찾는다. 주의할 점은 전 단계에서 선택된 변들과 새로 선택된 변에는 순환길[11]이 없어야 한다.
4) 이와 같은 활동을 반복하여, 모든 꼭짓점을 연결한다.

나. 학생들의 반응 분석

[그림 Ⅳ-40]은 1모둠의 문제해결 아이디어이다. 1모둠은 출발점을 A로 정하고 가능한 길들을 모두 찾은 후에 그 중에 최소무게인 것을 선택하였다. 이 그래프는 간단한 형태이기 때문에 문제해결이 쉽게 가능하겠지만, 더 복잡한 형태의 그래프에서는 좋은 해결 방법이 아니다. 또한, 무게그래프에서는 변의 무게가 중요하고 변들이 이루는 각의 크기는 의미가 없는데, 각도가 큰 쪽으로 가

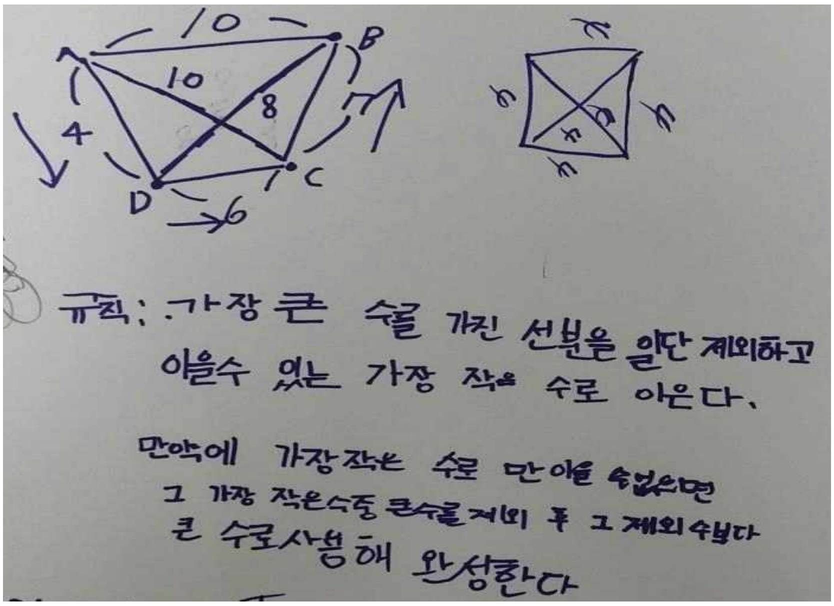
11) 닫힌 길. 어느 한 꼭짓점에서 출발하여 다시 그 꼭짓점으로 돌아오는 형태의 길.

야 무게가 최소가 된다고 잘못 생각하고 있었다. 이와 같은 생각은 '연습문제 1'을 해결하면서 잘못되었다는 사실을 알게 되었다.



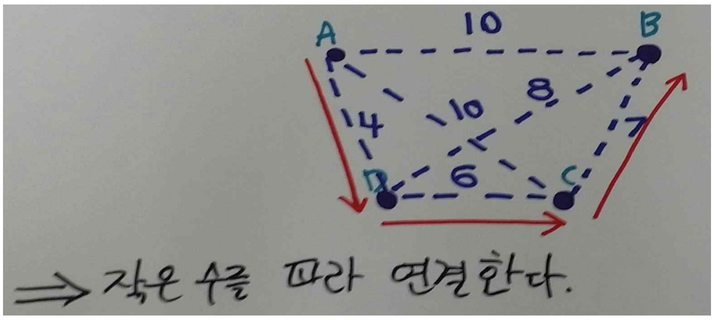
[그림 Ⅳ-40] 1모둠의 문제해결 아이디어(자료번호8-탐구문제1)

2모둠의 문제해결 아이디어는 [그림 Ⅳ-41]과 같다. 먼저 '가장 큰 수를 가진 선분을 제외하고 이을 수 있는 가장 작은 수로 연결한다.'라고 하였다. 그리고 '만약에 가장 작은 수로만 이을 수 없으면, 그 중 가장 큰 수를 제외하고 제외된 수보다 큰 수를 선택하여 연결한다.'라고 하였다. 2모둠의 아이디어도 보완할 부분이 많지만, 가장 작은 수로만 연결했을 때 성립하지 않는 경우에 대한 대안을 제시하고 있다는 점이 의미가 있다.



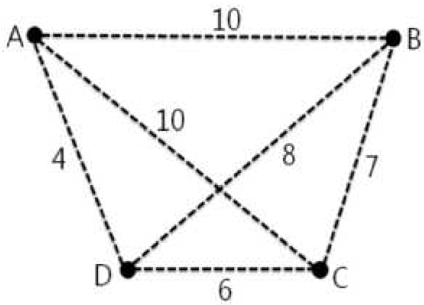
[그림 Ⅳ-41] 2모둠의 문제해결 아이디어(자료번호8-탐구문제1)

3모둠은 '작은 수를 따라 연결한다.'라고 해결 방법을 제시하고 있다. 따라서 작은 수를 따라 연결할 때 순환길이 생겨 최소 비용의 길이 완성되지 않는 경우가 있다는 사실까지는 생각하지 못하였다.



[그림 Ⅳ-42] 3모둠의 문제해결 아이디어(자료번호8-탐구문제1)

탐구문제 2 어떤 도시 A, B, C, D를 모두 연결하는 길을 만들려고 합니다. 이때, 각 도시를 연결하는 비용은 아래의 그림과 같습니다. 어떻게 하면 최소의 비용으로 각 도시를 모두 연결하는 길을 만들 수 있을까요?



	A	B	C	D
A	-	10	10	4
B	10	-	7	8
C	10	7	-	6
D	4	8	6	-

가. 탐구문제의 이해

Kruskal 알고리즘은 변을 선택할 때 순환길이 생기는 것을 항상 염두에 두어야 하지만, Prim의 알고리즘은 무게표에서 이미 선택된 꼭짓점이 있는 행을 제거하고 다음 단계를 생각하기 때문에 순환길이 만들어지는지 일일이 확인할 필요가 없다는 장점이 있다. 무게표를 이용하여 최소연결 문제를 해결할 수 있는 Prim의 알고리즘은 다음과 같은 과정을 거친다(최근배 외, 2010).

1) 모든 점을 연결해야 하므로 A, B, C, D 중에 아무 점이나 먼저 선택한다.
2) 만약 B를 선택했다면 다시 B를 선택하지 않게(순환길을 만들지 않도록) B가 있는 가로줄을 지운다.
3) B가 있는 세로줄에서 최소무게인 7을 선택한다.
4) 7은 B와 C를 잇는 변이므로 C가 있는 가로줄도 지운다.
5) B와 C가 있는 세로줄에서 지운 것을 제외하고 최소무게인 6을 선택한다.
6) 6은 C와 D를 잇는 변이므로 D가 있는 가로줄도 지운다.
7) B, C, D가 있는 세로줄에서 지운 것을 제외하고 최소무게인 4를 선택한다.
8) <표 Ⅳ-4>에서 선택된 7, 6, 4의 변을 이으면 최소연결을 구할 수 있다.

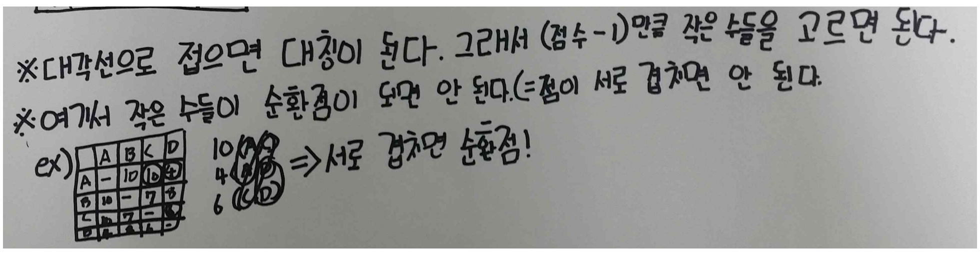
	A	B	C	D
A	-	10	10	4
B	10	-	7	8
C	10	7	-	6
D	4	8	6	-

<표 Ⅳ-4> Prim의 알고리즘에 따른 무게표(자료번호8-탐구문제2)

나. 학생들의 반응 분석

좀 더 단순한 그래프를 그려보거나 숫자에 번호를 매기는 등 다양한 시도를 했지만 모든 모둠이 마땅한 문제해결 아이디어를 생각해내지 못했다. 1모둠은 대각선으로 접으면 대칭이 된다는 점을 활용해보려고 했지만 큰 성과는 없었다. 또한, 변의 수가 꼭짓점의 수보다 하나 적어야 한다는 아이디어를 떠올렸다. 하지만 순환길이 나오지 않게 하기 위한 타당한 아이디어는 떠올리지 못했다. 다음은 1모둠의 활동을 관찰한 에피소드이다.

S_1: 대각선으로 선을 그으면 대칭이 되고 있어.
S_2: 응. 그건 알겠어.
S_1: 점이 총 4개니깐 3개(꼭짓점의 수 - 1)만큼 작은 수들을 고르면 되지 않을까?
S_2: 음…. 그런데 순환길이 나올 수도 있잖아?
S_1: 그럼 순환길이 되는지 일일이 찾아야하나?
S_2: 어떻게?
S_1: …



[그림 Ⅳ-43] 1모둠의 문제해결 아이디어(자료번호8-탐구문제2)

8. 정다면체의 분류

수업에 적용한 학습 프로그램

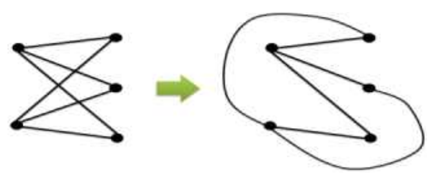
자료 번호	9	탐구 주제	정다면체의 분류
학습 목표	정다면체는 다섯 개 밖에 없음을 증명할 수 있다.		
관련 영역	도형		
학습 교구	정오각형 12개, 정육각형 20개, 스카치테이프		

탐구문제 1 : 정다면체는 모두 몇 종류가 있을까요?

탐구문제 2 : 분류된 정다면체의 구체적인 이름을 지어봅시다. 또한 변의 개수, 꼭짓점의 개수, 면의 개수를 찾을 수 있는 대로 찾아봅시다.

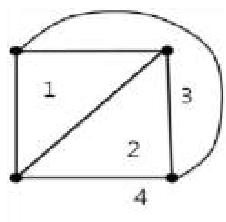
약속하기 1

변이 겹치지 않게 평면 위에 그릴 수 있는 그래프를 **평면그래프**라고 합니다.

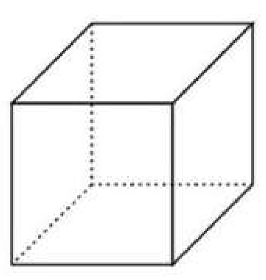


약속하기 2

평면그래프는 평면을 몇 개의 영역으로 나눕니다. 주어진 평면그래프에 의하여 나누어지는 영역을 그 평면그래프의 **면**이라 하고, 면의 개수를 f로 나타냅니다. ($f=4$)



연습문제 1 : 정육면체를 평면그래프로 나타내어 봅시다.

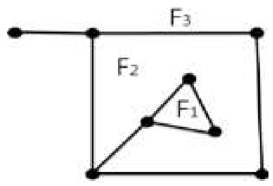


탐구문제 3 : 연결평면그래프에서 꼭짓점의 개수(v), 변의 개수(e), 면의 개수(f)의 관계식을 만들어 보세요.

약속하기 3

F를 평면그래프의 면이라고 하면, 면 F의 가장자리를 돌 때 만나는 변의 개수를 F의 **차수**라고 하고, $d(\mathrm{F})$로 나타냅니다.

예를 들어, 아래의 그래프에서 $d(\mathrm{F}_2)=9$입니다.



연습문제 2 : 위 그래프에서 면 F_1과 F_3의 차수를 구하세요.

탐구문제 4 : 평면그래프에서 면의 차수의 합과 변의 수와의 관계를 찾으세요.

탐구문제 5 : 평면그래프에서 꼭짓점의 차수의 합과 변의 수와의 관계를 찾으세요.

목표문제 : [탐구문제3]~[탐구문제5]에서 구한 세 가지 식을 바탕으로 정다면체가 총 몇 종류 있는지 증명하시오.

보충(축구공은 어떤 모양일까요?)

정다면체 중에서 가장 구면에 가까운 다면체는 무엇일까요? 그렇다면 그 정다면체를 좀 더 구면에 가깝게 만들려면 어떻게 해야 할까요? 축구공을 만들기 위해서 어떤 다각형이 몇 개씩 필요한지 알아보고, 축구공을 직접 만들어봅시다.

수학화 활동 사례 분석

자료 번호	9	탐구 주제	정다면체의 분류
학습 목표	정다면체는 다섯 개 밖에 없음을 증명할 수 있다.		
문제해결도구	정오각형 12개, 정육각형 20개, 스카치테이프		
수학적 문제	· 정다면체는 몇 종류가 있을까? · 연결평면그래프에서 꼭짓점의 개수, 변의 개수, 면의 개수 사이의 관계식을 만들 수 있을까? · 평면그래프에서 면의 차수의 합과 변의 수의 관계는? · 평면그래프에서 꼭짓점의 차수의 합과 변의 수의 관계는? · 축구공의 모양은 어떻게 만들어 졌을까?		
배경지식	평면그래프, 면의 차수, 오일러공식, 평면그래프, 악수보조정리		

탐구문제 1 정다면체는 모두 몇 종류가 있을까요?

가. 탐구문제의 이해

일상생활에서 발견할 수 있는 입체도형은 무수히 많다. 그런데 신기하게도 그 많은 입체도형 중에서 정다면체는 오직 다섯 가지뿐이다. 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체가 그것이다. 이 수업은 그래프 이론을 통하여 정다면체의 개수를 찾아내는 것을 목표로 하고 있다. 또한, 각 정다면체의 꼭짓점의 수, 변의 수, 면의 수에 대해서도 탐구하였다.

나. 학생들의 반응 분석

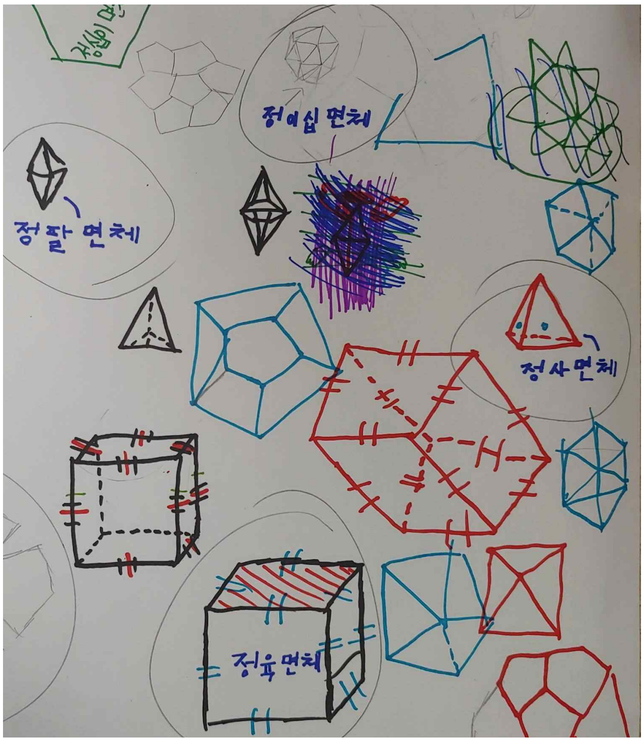
정육면체와 정이십면체 모양의 주사위 사진을 보여주며 주사위가 되기 위한 가장 중요한 조건이 무엇인지 물어보았다. 이에 대하여 한 학생은 주사위 면마다 나올 확률이 같아야 한다고 대답하였다. 따라서 수업자는 학생들에게 주사위는 각 면이 나올 확률이 같아야 하기 때문에 정다면체[12]를 사용한다고 설명

12) 각 면이 서로 합동인 정다각형이고, 각 꼭짓점에 모여 있는 면의 개수가 같은 다면체.

하고, 정다면체는 모두 몇 종류가 있을지 모둠별로 생각해보도록 하였다.

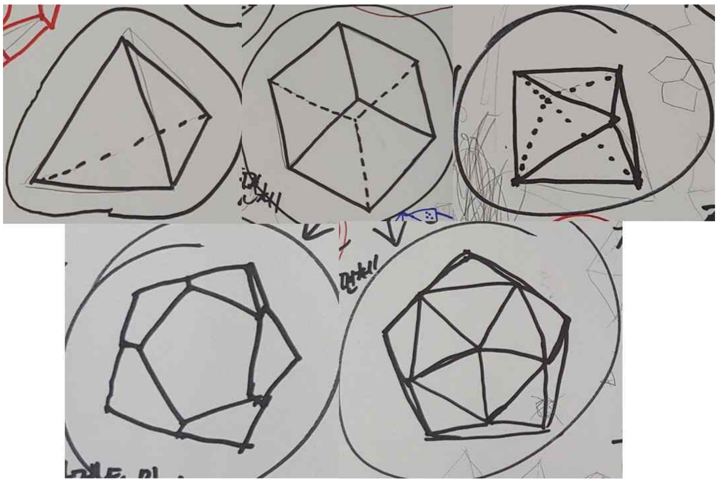
이미 각 모둠의 2~3명의 학생은 정다면체가 몇 개인지 알고 있었다. 따라서 학생들은 활동지에 정다면체의 모양을 입체적으로 그려보았고, 정다면체의 변의 개수, 꼭짓점의 개수, 면의 개수를 찾는 '탐구문제 2'까지 함께 해결하였다. 물론 '탐구문제 2'의 답도 학생들은 대부분 잘 알고 있었다.

[그림 Ⅳ-44]는 1모둠의 문제해결 아이디어이다. 1모둠은 처음에 정사면체, 정육면체, 정팔면체를 입체적인 모양으로 잘 그렸고, 정십이면체와 정이십면체는 그리지 못했다. 수업자는 학생들에게 각 면을 이루는 도형과 각 꼭짓점에 모여 있는 면의 개수가 잘 나타내도록 그리라고 조언해주었다. 그러고 나자 정삼각형이 한 꼭짓점에 5개씩 모여 있는 정이십면체의 모양을 입체적으로 비슷하게 그려내었다. 그러나 결국 정십이면체는 그리지 못하였다. 또한, 1모둠은 정이십면체의 꼭짓점의 개수가 몇 개인지 모르겠다고 발표하였다.



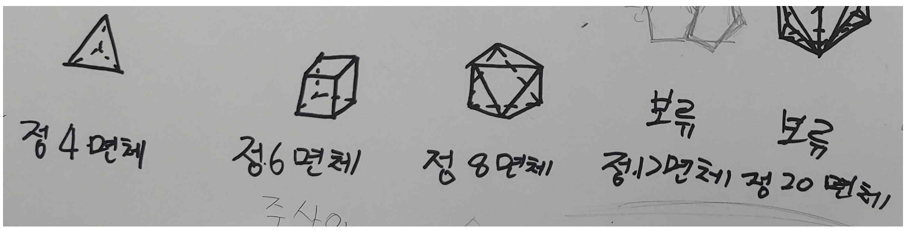
[그림 Ⅳ-44] 1모둠의 문제해결 아이디어(자료번호9-탐구문제1)

[그림 Ⅳ-45]는 2모둠의 문제해결 아이디어이다. 2모둠은 대체적으로 다섯 가지 정다면체를 입체적으로 잘 그려내었다. 각 면을 이루는 도형의 종류와 한 꼭짓점에 몇 개의 면이 모여 있는지를 잘 나타내었다. 또한, 정사면체, 정육면체, 정팔면체는 점선을 활용하여 보이지 않는 변까지 나타내었다. 하지만 정십이면체와 정이십면체는 입체적인 구조가 복잡하여 보이지 않는 변을 점선으로 나타내지 못하였다.



[그림 Ⅳ-45] 2모둠의 문제해결 아이디어(자료번호9-탐구문제1)

[그림 Ⅳ-46]은 3모둠의 문제해결 아이디어이다. 3모둠 또한 정다면체의 종류가 다섯 가지 있다는 사실을 잘 알고 있었다. 정사면체, 정육면체, 정팔면체는 입체적인 모양을 잘 그려냈으나, 정십이면체와 정이십면체는 입체적으로 그려내지 못했다.



[그림 Ⅳ-46] 3모둠의 문제해결 아이디어(자료번호9-탐구문제1)

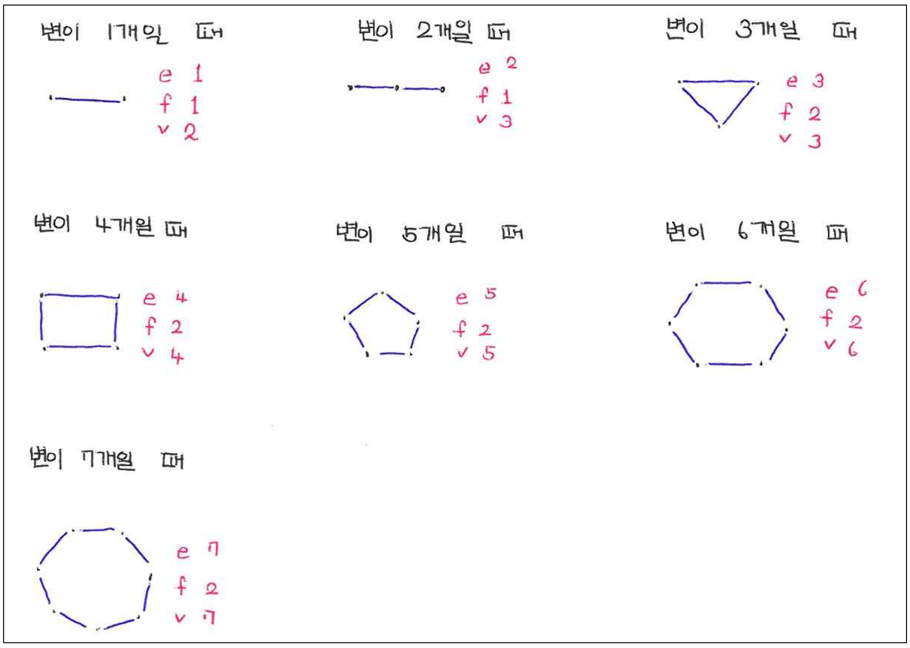
탐구문제 3 연결평면그래프에서 꼭짓점의 개수(v), 변의 개수(e), 면의 개수(f)의 관계식을 만들어 보세요.

가. 탐구문제의 이해

수업자는 학생들에게 귀납적 추론 방법에 따라 문제를 해결하도록 하였다. 예를 들어, 변의 수(e)가 1개일 때, 2개일 때, 3개일 때 등 조건에 맞는 그래프를 그리고, 각 그래프의 꼭짓점의 수(v)와 면의 수(f)를 구하도록 했다. 이를 통해 연결평면그래프에서 오일러공식($v-e+f=2$)이 성립함을 귀납적으로 증명하도록 하였다.

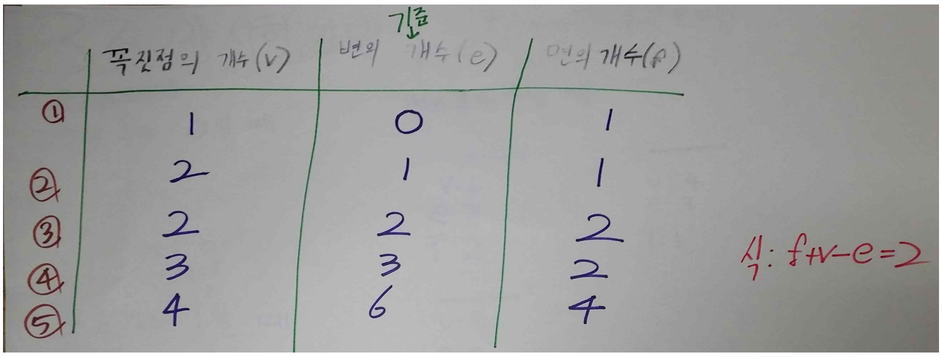
나. 학생들의 반응 분석

1모둠은 [그림 Ⅳ-47]와 같이 변의 수(e)가 1개일 때, 2개일 때, 3개일 때 등 몇 가지 그래프를 그리고 각각의 꼭짓점의 수(v)와 면의 수(f)를 구했다. 그리고 이를 통하여 $v-e+f=2$와 같은 공식을 만들어 내었다.



[그림 Ⅳ-47] 1모둠의 문제해결 아이디어(자료번호9-탐구문제3)

[그림 Ⅳ-48]은 2모둠의 문제해결 아이디어이다. 2모둠은 변의 수(e)가 0개일 때, 1개일 때, 2개일 때, 3개일 때, 6개일 때의 그래프를 몇 개 그려보고, 그래프의 꼭짓점의 수(v)와 면의 수(f)를 표로 정리하였다. 이를 통하여 $f+v-e=2$와 같은 공식을 잘 정리하였다.



	꼭짓점의 개수(v)	기준 변의 개수(e)	면의 개수(f)
①	1	0	1
②	2	1	1
③	2	2	2
④	3	3	2
⑤	4	6	4

식: f+v-e=2

[그림 Ⅳ-48] 2모둠의 문제해결 아이디어(자료번호9-탐구문제3)

[그림 Ⅳ-49]은 3모둠의 문제해결 아이디어이다. 3모둠은 처음에 숫자가 어떻게 증가하는지에만 초점을 두고 생각하여 관계식을 생각해내는데 어려움을 보였다. 수업자는 3모둠의 학생들에게 모든 경우에 들어맞는 관계식이 있을 거라고 힌트를 주니, $f+v-2=e$와 같은 공식을 발견해냈다. 다음은 3모둠의 문제해결 과정을 관찰한 에피소드이다.

S_1: 면의 수는 1, 1, 2, 2, 4, 8로 증가하고 있어.

S_2: 꼭짓점의 수도 2, 3, 3, 4, 4, 6으로 증가하고 있는데?

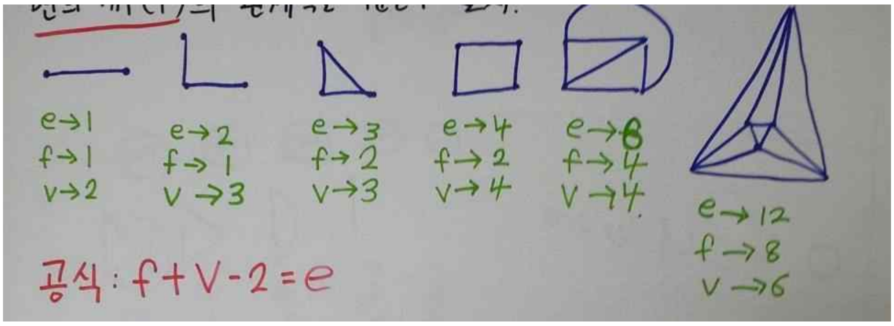
S_3: 어떤 규칙이 있을까?

S: …

T: 숫자가 어떻게 증가하는지가 아니라 모든 그래프에서 성립하는 관계식이 있는지 찾아보세요.

S: …

S_3: 아! 면의 수와 꼭짓점의 수를 더한 게 변의 수보다 2만큼 더 크네.



[그림 Ⅳ-49] 3모둠의 문제해결 아이디어(자료번호9-탐구문제3)

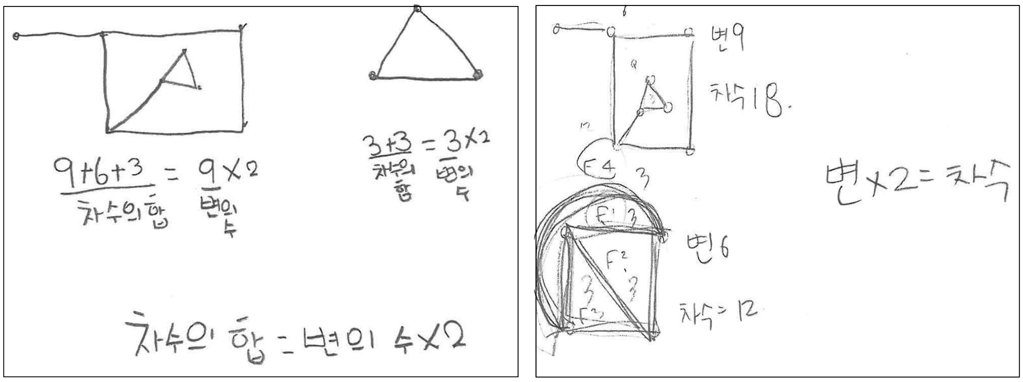
탐구문제 4 평면그래프에서 면의 차수의 합과 변의 수와의 관계를 찾으세요.

가. 탐구문제의 이해

수업자는 학생들에게 귀납적 추론 방법에 따라 문제를 해결하도록 하였다. 다양한 평면그래프를 그려보고, 면의 차수의 합과 변의 수의 관계를 찾게 했다. 이를 통해서 '면의차수의합＝2×변의수'라는 공식을 발견하도록 하였다.

나. 학생들의 반응 분석

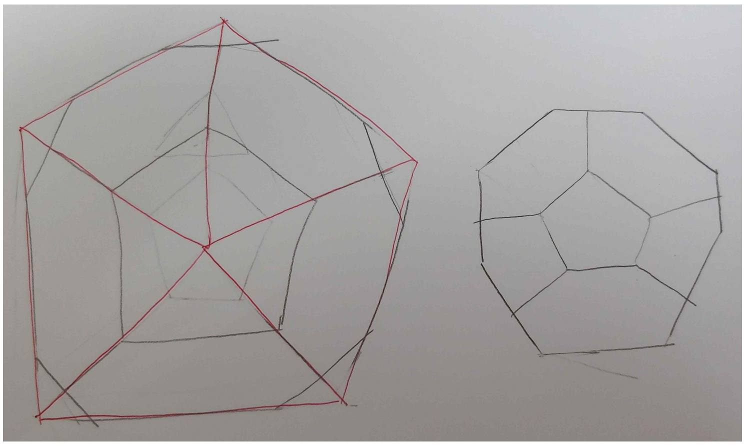
모든 학생들은 다양한 평면그래프를 그려보고, '면의차수의합＝2×변의수'라는 공식을 대체로 쉽게 발견하였다. 또한, 같은 방법으로 '탐구문제 5'인 꼭짓점의 차수의 합과 변의 수와의 관계도 쉽게 발견하였다.



[그림 Ⅳ-50] 학생들의 문제해결 아이디어(자료번호9-탐구문제4)

보충 정다면체 중에서 가장 구면에 가까운 다면체는 무엇일까요? 그렇다면 그 정다면체를 좀 더 구면에 가깝게 만들려면 어떻게 해야 할까요? 축구공을 만들기 위해서 어떤 다각형이 몇 개씩 필요한지 알아보고, 축구공을 직접 만들어봅시다.

학생들에게 정다면체 중에서 가장 구면에 가까운 것이 무엇인지 물어보았다. 대부분의 학생들은 정이십면체라고 대답하였고, 그 이유는 정사면체보다 정육면체가 더 둥글고, 정육면체보다 정팔면체가 더 둥근 것처럼 면의 개수가 많으면 많을수록 더 둥글 것이라고 하였다. 그러면 정이십면체를 어떻게 하면 더 구면에 가깝게 만들 수 있을지 질문하였다. 잠시 고민하다가 한 학생이 정이십면체의 꼭짓점을 평면으로 잘라내면 더 둥글 것 같다고 대답하였다. 그래서 수업자는 학생들에게 정이십면체의 각 꼭짓점을 평면으로 잘라낸 모양이나 정이십면체를 더 구면에 가깝게 만들 수 있는 방법을 그림으로 그려보라고 하였다.

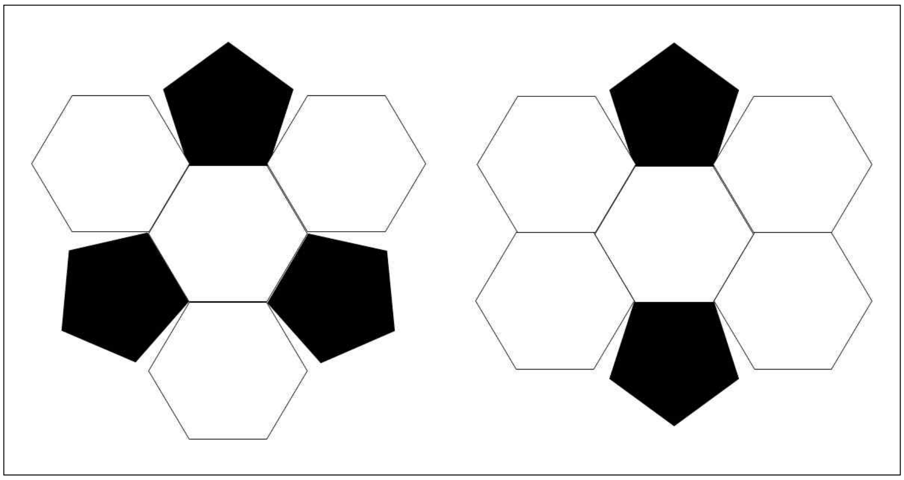


[그림 Ⅳ-51] 축구공 구조에 대한 문제해결 아이디어(자료번호9-보충)

[그림 Ⅳ-51]은 한 학생이 그린 문제해결 아이디어이다. 먼저 정이십면체를 나타내기 위해 한 꼭짓점에 정삼각형 다섯 개가 모여 있는 모양을 그렸다. 그리고 각 꼭짓점을 평면으로 잘라냈더니, 가운데 꼭짓점 부분은 정오각형으로 변하였고 정삼각형 모양이었던 면은 정육각형으로 바뀌었다.

이와 같은 아이디어를 바탕으로 각 꼭짓점을 평면으로 잘라내면 몇 개의 정오각형과 정육각형이 생기겠냐고 학생들에게 질문하였다. 이에 대하여 한 학생은 각 꼭짓점이 정오각형으로, 각 면이 정육각형으로 변했기 때문에 정오각형은 개수는 정이십면체의 꼭짓점의 개수인 12개이며, 정육각형의 개수는 정이십면체의 면의 개수인 20개라고 대답하였다.

축구공의 구조에 대한 탐구를 마치고 학생들에게 정오각형 12개와 정육각형 20개를 이용하여 축구공을 만들어보게 하였다. 대부분의 학생들이 잘 완성했지만 몇 명의 학생의 축구공은 모양이 이상해졌다. 따라서 모양이 이상한 축구공의 구조를 함께 탐구해보기로 하였다. 정오각형을 기준으로 주변에 6개의 정육각형이 둘러싸고 있는 것은 잘 되어있었다. 그런데 축구공이 잘 만들어지려면 [그림 Ⅳ-52]의 왼쪽 그림과 같이 정육각형을 중심으로 정오각형 3개와 정육각형 3개가 번갈아가며 둘러싸고 있어야 하는데, 모양이 이상했던 작품은 [그림 Ⅳ-52]의 오른쪽 그림과 같이 정육각형을 중심으로 정오각형 2개와 정육각형 4개가 둘러싸고 있었다. 따라서 축구공을 만들기 전에 정오각형을 중심으로 한 구조와 정육각형을 중심으로 한 구조를 모두 탐구해볼 필요가 있었다.



[그림 Ⅳ-52] 정육각형을 중심으로 본 학생들이 만든 축구공의 구조

Ⅴ. 요약 및 결론

이 논문은 이산수학에서 다루는 비둘기 집의 원리, 모임의 분할, 자연수의 분할, 그래프의 기초, 한 붓 그리기, 최단경로 문제, 최소연결 문제, 정다면체의 분류의 8가지 주제로 영재수업을 하고난 후 수업에 참여했던 초등영재 학생들의 수업결과물을 통하여 수학화 활동 사례를 분석하였다. 또한, 본 영재 프로그램에 관심이 있는 영재 강사들이 수업의 흐름이나 유의점을 쉽게 알아볼 수 있게 하였다. 수업에서 다뤘던 각 주제에 대해서 교육적 시사점을 줄 수 있는 논의 내용을 요약하면 다음과 같다.

1. 비둘기 집의 원리

첫째, 비둘기 집의 원리는 존재성을 증명할 수 있는 도구가 된다. '목표문제'처럼 비둘기 집의 원리는 구체적이지는 않지만 어떤 상황이 존재하는지를 판단하기 위해서 자주 사용된다. 존재하는지 존재하지 않는지를 모르는 상황에서 무엇인가를 증명하려고 한다면 시간과 노력이 낭비될 수 있다. 즉, 존재한다는 것이 확실해진다면 바로 구체적인 증명으로 들어갈 수 있으므로 그만큼 시간과 노력을 아낄 수 있다.

둘째, 학생들이 문제를 잘못된 방향으로 해결할 때에는 수업자가 적극적으로 개입하여 문제의 의도를 명확하게 안내해줘야 한다. 학생들은 [그림 Ⅳ-4]의 12가지 경우에 대한 공통점을 발견하고 가설을 세워야 하는데, '자료번호 1-탐구문제 1-①', '1-②', '1-③' 사이에서 규칙을 찾고 가설을 세우는 오류를 범하고 있었다. 따라서 수업자는 학생들이 발견한 모든 경우(12가지)에 대해서 공통점을 찾도록 문제해결의 방향을 바로 잡아줘야 한다.

셋째, 수업자는 학생들의 문제해결에 필요한 수학적 개념을 적시에 알려주어야 한다. '자료번호 1-보충 2'에서 '천장'에 대한 개념을 알려주기 전에는 학생들이 문제해결 방법에 전혀 다가가지 못했지만, 후에는 비둘기 집의 원리를 찾아낸 학생이 나타났다. 적정한 시기에 수학적 개념을 도입하는 것은 학생들의 수학적 사고를 확장시킬 수 있다.

2. 모임의 분할

첫째, 문제해결 방법이 직접적으로 드러나는 문제는 학생들의 다양한 사고를 방해할 수 있다. '자료번호 3-탐구문제 2'를 보면 '특정한 것 중심으로 생각하기' 전략으로 문제를 해결하도록 노골적으로 드러내고 있으며, 이는 학생들의 개방적 사고를 방해한다. 따라서 '자료번호 3-탐구문제 2'의 세부 문제 ①~③은 생략하는 것이 낫다.

둘째, 학생들의 다양한 문제해결 방법을 인정해줘야 한다. 답안지에 나온 해결 방법이 문제를 해결하는 데 가장 합리적일 수는 있지만, 반드시 그 방법대로 문제를 해결할 필요는 없다. 오히려 [그림 Ⅳ-13]과 [그림 Ⅳ-14]처럼 덜 합리적인 문제해결 방법이라 하더라도 학생들이 스스로 해결 전략을 찾는 과정에서 수학적 사고력은 점점 깊어질 것이다. 학생들은 서로 다른 문제해결 방법을 공유하며 좀 더 합리적인 방법을 선택할 수 있다.

3. 자연수의 분할

첫째, 한 학생의 참신한 문제해결 아이디어는 다른 학생들의 문제에 대한 이해력을 높이는 데 좋은 영향을 준다. [그림 Ⅳ-18]은 '자료번호 4-탐구문제 2'를 해결하기 위해 한 학생이 생각해낸 문제해결 아이디어이며, 이 문제해결 전략을 발견함으로써 대다수의 학생들이 이를 응용하여 '자료번호 4-탐구문제 3'을 쉽게 해결할 수 있었다.

둘째, 수학 영재학생의 수업결과물에서 수평적 수학화 뿐만 아니라 수직적 수학화의 노력이 많이 발견되었다. 물론 수평적 수학화에 비해 수직적 수학화가 잘 이루어지지는 않았지만, 학생들은 수학 공식을 정립하려는 의지가 강했다. [그림 Ⅳ-20]을 보면 학생들은 '자료번호 4-탐구문제 3'을 해결하고 나서 구슬의 숫자(a)와 상자의 숫자(b)에 따라 문제의 값이 얼마인지 구하는 공식을 세우고 있다. 이렇게 영재학생들은 자신이 알고 있는 수학적 사실을 일반화하여 공식을 정립하려고 했으며, 이 과정에서 많은 흥미를 느끼고 있었다.

4. 그래프의 기초

첫째, 학생들에게 친근한 문제 상황을 제공하여 그래프 이론이 일상생활과 동떨어진 학문 분야가 아니라는 것을 알게 해야 한다. '자료번호 5-탐구문제 1'을 보면 그래프는 지하철 노선도, 분자의 구조도, 집의 설계도 등 일상생활의 다양한 분야에서 활용되는 것을 알 수 있다. 이를 통해 학생들은 그래프 이론을 학습해야 하는 이유와 동기를 가질 수 있다.

둘째, 귀납적 추론은 반례에 의해서 가설이 뒤집히는 경우가 생길 수 있으며, 학생들이 생각지 못한 반례를 찾게 하는 것이 수업자의 역할이다. 학생들은 [그림 Ⅳ-23]의 두 번째 그래프를 찾지 못했기 때문에 올바른 결론을 내리지 못했다. 이처럼 반례를 놓치는 경우는 흔히 일어날 수 있기 때문에 수업자가 학생들의 문제해결 과정을 꼼꼼히 관찰하여 지도 조언해주는 것이 중요하다.

5. 한 붓 그리기

초등 영재학생 대부분은 추론 문제를 해결하기 위해 특수한 예를 사용하는 귀납적인 방법을 사용하였다. 예를 들어, '자료번호 6-탐구문제 2'와 '자료번호 6-탐구문제 4'를 증명하기 위해 조건에 맞는 여러 가지 예를 찾아보고 가설을 세웠으며 이에 대한 반례를 찾으려는 시도를 하였다. 그러나 '자료번호 6-탐구문제 3'과 '자료번호 6-탐구문제 5'처럼 높은 수준의 연역적 추론을 요하는 문제는 해결하지 못했다. 따라서 수업자는 학생들이 귀납적인 추론으로부터 시작하여 낮은 수준의 연역적인 추론으로 발전할 수 있도록 점진적으로 문제를 설계해야 한다.

6. 최단경로 문제

수학 수업에서 학생들의 수학적 의사소통은 높은 수준의 수학적 사고를 이끌어낼 수 있다. 학생들은 '자료번호 7-탐구문제 2'를 모둠별로 해결하였다. 이 과정에서 자신만의 알고리즘을 만들고, 알고리즘의 문제점을 찾고, 문제점에 대한 대안

을 마련해갔다. 학생들이 서로의 의견을 주고받으며 상호작용하는 과정에서 새로운 생각이나 아이디어가 발전해갔다.

7. 최소연결 문제

최소연결 문제는 최소무게의 변을 연결해가면서 어떻게 하면 순환길이 생기지 않도록 하는가가 문제해결의 핵심이다. 최소연결 문제의 해결방법인 Kruskal 알고리즘과 무게표는 어떻게 순환길을 생기지 않도록 하는 가와 관련이 있다. [그림 Ⅳ-41]을 보면 2모둠의 학생들은 순환길이 생기는 경우를 고려하여 문제해결 방법에 좀 더 가까운 아이디어를 제시했으나, [그림 Ⅳ-42]에서 3모둠의 학생들은 순환길이 생기는 경우에 대해서 전혀 인식하지 못한다는 데 한계를 보였다.

8. 정다면체의 분류

첫째, 정다면체가 몇 종류가 있는지 밝히는 문제는 특별한 수학적 배경 또는 지식 없이도 해결할 수 있다. '자료번호 9-탐구문제 1'의 문제 해결과정을 살펴보면 학생들은 이미 배경지식이 있어 문제를 쉽게 해결했지만, 원래 이 탐구문제는 한 꼭짓점에서 합동인 도형을 만나게 하여 입체가 되는 경우를 생각하면 쉽게 해결할 수 있다. 예를 들어, 한 꼭짓점에서 모이는 도형이 정삼각형이라고 하면 정삼각형의 한 각은 60°이므로 3개, 4개, 5개가 만나서 입체도형을 만들 수 있다. 정삼각형이 6개라면 360°가 되어서 평면이 되므로 입체도형이 되지 않는다. 즉, 정다면체의 분류는 학생의 수학적 센스만으로 해결이 가능한 문제이다.

둘째, 정다면체를 평면그래프로 나타내기 위한 교구를 활용할 수 있다. 정사면체나 정육면체를 평면그래프로 나타내는 것은 어렵지 않겠지만, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체를 평면그래프로 나타내라고 한다면 쉽지 않을 것이다. 따라서 그래프의 성질에 따라 변의 모양을 자유롭게 변형시킬 수 있는 재료를 활용한다면 '자료번호 9-연습문제 1' 을 이해하는 데 도움이 될 만한 수학교구를 만들 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

교육부. (2015). 2015 개정 교육과정: 별책8_수학과 교육과정. 교육부 고시 제 2015-74호(2015.9.23.).

송병섭. (2014). 초등수학영재와 일반 학생의 완벽주의 성향과 수학적 성향 비교. 대구교육대학교 교육대학원.

송상헌. (1998). 수학 영재 교육프로그램을 위한 수학적 영재성의 정의와 판별의 이론적 고찰. 대한수학교육학회 논문집, 6(2), 271-294.

안선영. (2005). 초등 영재교육에 적용 가능한 이산수학 프로그램 개발 연구. 제주교육대학교 교육대학원.

영재교육진흥법. (2017). 영재교육진흥법 법률 제 15231호.

이지현. (2012). Lakatos의 관점을 반영한 수학영재 대상 교수단원 개발연구: 데자르그 정리와 무한원점을 중심으로. 한국수학사학회지, 25(2), 57-70.

임유진. (2009). Freudenthal의 수학화 학습 이론과 함수 지도: 중학교 수학1 함수 영역을 중심으로. 한양대학교 교육대학원.

정가영. (2008). 귀납추론을 이용한 중등 수학의 교수-학습지도 방안. 창원대학교 교육대학원.

최근배. (2017). 초등영재 학생의 수학화 학습을 위한 교수단원 설계: 삼·사각형의 등주문제 탐구. 수학교육논문집, 31(2), 223-239.

김진환, 박교식. (2006). 예비중등교사의 수학화 경험을 위한 교수단원의 설계 : 수 분할 모델의 탐구. 한국학교수학회논문집, 9(1), 57-76.

조영준, 신항균. (2010). 초등학교 수학교실에서 나타난 수학적 의사소통 유형 분석. 한국초등수학교육학회지, 14(3), 681-700.

최근배, 강문보. (2005). 시리즈 C: 이산수학적 관점에서의 초등수학교과서 분석 연구. 初等 數學敎育, 9(1), 11-29.

최근배, 안선영. (2010). 선생님, 이산수학이 뭐예요?: 수학적 창의력 업그레이드. 서울: 교우사.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task.

Reidel: Dortrecht.

Wittmann, E. (1984). Teaching Units as the Integrating Core of Mathematics Education. Educational Studies in Mathematics, 15(1), 25-36.

Wittmann, E. (1995). Mathematics Education as a 'Design Science'. Educational Studies in Mathematics, 29(4), 355-374.

Wittmann, E. (2001). Developing Mathematics Education in a Systemic Process. Educational Studies in Mathematics, 48(1), 1-20.

A B S T R A C T *

A Case Study on Mathematising Activities of Elementary Gifted Students

-Inquiry into Discrete Mathematics Problem-

Kim, Sahoon

Major in Elementary Mathematics Education
Graduate School of Education
Jeju National University

Supervised by Professor Choi, Keunbae

This study analyzed the case on mathematising activities of elementary gifted students under the theme of <Inquiry into the Discrete Mathematics Problem>. I applied the gifted education program developed by Choi Keun-bae and Ahn Seon-yeong(2010) to practical classes and analyzed the reaction of students. In doing so, the direction of this study is: first, I found questions and materials from teachers that help students think in math. Second, I saw what mistakes students make in math problems. Third, the learning program has found areas to modify and supplement based on the student's class results.

* A thesis submitted to the committee of Graduate School of Education, Jeju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education conferred in February, 2018.

Finally, it provided useful insight into the flow of classes and a point of caution to a gifted instructor interested in this program.

There were a total of 13 topics for the reference children's education program, and 8 topics were chosen to match both the number of classes given to the researchers and the sequence between the topics of exploration. Therefore, 8 separate topics were explored, including the pigeonhole principle, division of the group, division of natural numbers, basic graphics, one touching drawing, shortest-path problems, minimal connection problems, and classification of regular polyhedrons.

The educational implications of doing so are summarized as follows.

First, most gifted students used inductive reasoning to solve their reasoning problems. In addition, students also produced low deductive reasoning, beginning with inductive reasoning. Therefore, it is necessary for the class to provide students with the right level of exploration problems and to ensure that there are no instances of students missing.

Second, I found more of the horizontal mathematizing than vertical mathematizing in the class results of students. The gifted students were used to transforming the problem scenes of reality into a formal mathematical process, but were inexperienced in performing higher mathematical treatments using abstract symbols.

Third, it should present familiar problems with the topic of exploring discrete mathematics so that it is not a field of learning that is far from everyday life. It gives students a reason and motivation to learn discrete mathematics.

Fourth, extensive mathematical communication among students can lead to high levels of mathematical thinking. The ideas developed in the process of students exchanging opinions with each other. Also, one student's fresh ideas on problem-solving helped to increase understanding of other students' problems.

Fifth, problems that directly reveal solutions can prevent students from thinking differently. There is no one way to solve the problem, and students may develop an open mind as they learn about the different solution strategies.

Sixth, a student must be timely in providing the mathematical concepts necessary to solve a problem, and be an active guide if they are to be addressed in the wrong direction. Sometimes it is difficult for students to solve problems without knowing important concepts, and in such cases, teachers should actively intervene in class.

Seventh, it is possible to create and utilize proper dioceses that can be used to solve problems related to the problem solving. For example, I could find mathematical dioceses needed to help students understand, such as a strategy to represent three-dimensional regular polyhedron in a flat graph.