



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

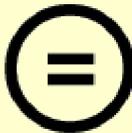
다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

한국학
민족문화연구원
내셔널인문학
연구소
사과
정의
비교
대학
연구
고사
연
2016
년



석사학위논문

한국과 미국(EM교과서)의 도형 영역 내의
용어 사용과 정의 비교에 대한 연구

Comparison study on terms and definitions used
in the geometry of Korea and the United States(EM)

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

고 서 연

2016년 8월

석사학위논문

한국과 미국(EM교과서)의 도형 영역 내의
용어 사용과 정의 비교에 대한 연구

Comparison study on terms and definitions used
in the geometry of Korea and the United States(EM)

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

고 서 연

2016년 8월

한국과 미국(EM교과서)의 도형 영역 내의
용어 사용과 정의 비교에 대한 연구

Comparison study on terms and definitions used
in the geometry of Korea and the United States(EM)

지도교수 최 근 배

이 논문을 교육학 석사학위 논문으로 제출함

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

고 서 연

2016년 5월

고 서 연 의

교육학 석사학위 논문을 인준함

심사위원장 김 해 규 인

심사위원 현 종 익 인

심사위원 최 근 배 인

제주대학교 교육대학원

2016년 6월

목 차

국문 초록	viii
I. 서론	1
1. 연구의 필요성	1
2. 연구내용 및 방법	3
II. 이론적 배경	4
1. 학문에서 사용하는 정의 수준	4
2. 선행연구 분석	7
3. 학교수학에서의 정의 방법	8
III. 연구의 실제	9
1. 한국교과서와 EM교과서의 용어 정의 비교 방법	9
2. 도형별 약속하기 비교(평면도형)	12
3. 도형별 약속하기 비교(입체도형)	50
4. 내용 전반에 대한 비교 분석	62
IV. 결론 및 제언	76
참고 문헌	79
ABSTRACT	82

표 목 차

〈표 Ⅲ-1〉 정의 수준(조영미, 2001, pp.125-129)	10
〈표 Ⅲ-2〉 학년과 차시에 따라 정의수준이 높아지는 예시	62
〈표 Ⅲ-3〉 용어를 기본적인 단어로 분해하여 설명하는 예시	64
〈표 Ⅲ-4〉 EM교과서에서 사용되는 기호들의 예시(Bell,M.,et al., 2012i p.169)	65
〈표 Ⅲ-5〉 도형이 평면도형인지 입체도형인지 제시하는 예시	66

그림 목 차

[그림 Ⅲ-1] 점(교육부, 2014a, p.56)	12
[그림 Ⅲ-2] 점(Bell,M.,et al., 2012c, p.323)	12
[그림 Ⅲ-3] 선분(Bell,M.,et al., 2012c, p.324)	14
[그림 Ⅲ-4] 선분(교육부, 2014a, p.57)	14
[그림 Ⅲ-5] 선분(Bell,M.,et al., 2012e, p.403)	14
[그림 Ⅲ-6] 반직선(교육부, 2014a, p.57)	16
[그림 Ⅲ-7] 반직선(Bell,M.,et al., 2012e, p.404)	16
[그림 Ⅲ-8] 직선(교육부, 2014a, p.59)	17
[그림 Ⅲ-9] 직선(Bell,M.,et al., 2012e, p.404-5)	17
[그림 Ⅲ-10] 각(교육부, 2014a, p.61)	19
[그림 Ⅲ-11] 각(Bell,M.,et al., 2012e, p.416)	19
[그림 Ⅲ-12] 각(Bell,M.,et al., 2012g, p.30)	19
[그림 Ⅲ-13] 각(Bell,M.,et al., 2012g, p.432)	19
[그림 Ⅲ-14] 각의 변화 꼭짓점(Bell,M.,et al., 2012e, p.416)	21
[그림 Ⅲ-15] 직각(교육부, 2014a, p.62)	23
[그림 Ⅲ-16] 직각(Bell,M.,et al., 2012e, p.416)	23
[그림 Ⅲ-17] 직각표시(Bell,M.,et al., 2012c, p.339)	23
[그림 Ⅲ-18] 직각표시(Bell,M.,et al., 2012e, p.422)	23
[그림 Ⅲ-19] 각도(교육부, 2014c, p.80)	24
[그림 Ⅲ-20] 평행(Bell,M.,et al., 2012c, p.328)	26
[그림 Ⅲ-21] 평행(교육부, 2014d, p.60)	26
[그림 Ⅲ-22] 평행(Bell,M.,et al., 2012e, p.409)	26

[그림 III-23] 꼬인 위치(Bell,M.,et al., 2012e, p.410)	27
[그림 III-24] 교차(Bell,M.,et al., 2012e, p.409)	27
[그림 III-25] 수직과 수선(교육부, 2014d, p.55)	28
[그림 III-26] 수선(Bell,M.,et al., 2012i, p.169)	28
[그림 III-27] 삼각형(교육부, 2013c, p.59)	29
[그림 III-28] 삼각형(Bell,M.,et al., 2012e, p.422)	29
[그림 III-29] 변(교육부, 2013c, p.59)	30
[그림 III-30] 꼭짓점(교육부, 2013c, p.59)	30
[그림 III-31] 등변삼각형(Bell,M.,et al., 2012e, p.422)	31
[그림 III-32] 직각삼각형(교육부, 2014a, p.65)	31
[그림 III-33] 직각삼각형(Bell,M.,et al., 2012e, p.422)	31
[그림 III-34] 이등변삼각형(Bell,M.,et al., 2012e, p.424)	32
[그림 III-35] 부등변삼각형(Bell,M.,et al., 2012e, p.424)	33
[그림 III-36] 사각형(교육부, 2013c, p.63)	34
[그림 III-37] 4개의 변인 다각형(Bell,M.,et al., 2012b, p.640)	34
[그림 III-38] 사각형(Bell,M.,et al., 2012c, p.340)	34
[그림 III-39] 사각형(Bell,M.,et al., 2012e, p.428)	34
[그림 III-40] 평행사변형(교육부, 2014d, p.87)	36
[그림 III-41] 평행사변형(Bell,M.,et al., 2012e, p.428)	36
[그림 III-42] 직사각형(교육부, 2014d, p.87)	37
[그림 III-43] 직사각형(Bell,M.,et al., 2012e, p.431)	37
[그림 III-44] 마름모(교육부, 2014d, p.91)	37
[그림 III-45] 마름모(Bell,M.,et al., 2012e, p.431)	37
[그림 III-46] 정사각형(교육부, 2014d, p.91)	38

[그림 III-47] 정사각형(Bell,M.,et al., 2012e, p.431)	38
[그림 III-48] 사다리꼴(교육부, 2014d, p.91)	39
[그림 III-49] 사다리꼴(Bell,M.,et al., 2012e, p.431)	39
[그림 III-50] 연꼴(Bell,M.,et al., 2012e, p.429)	40
[그림 III-51] 원(교육부, 2013c, p.55)	40
[그림 III-52] 원의 중심(교육부, 2014b, p.80)	41
[그림 III-53] 원의 지름(교육부, 2014b, p.84)	43
[그림 III-54] 다각형(Bell,M.,et al., 2012b, p.641)	44
[그림 III-55] 다각형 이름(Bell,M.,et al., 2012e, p.400)	44
[그림 III-56] 정다각형(교육부, 2014d, p.99)	45
[그림 III-57] 정다각형(Bell,M.,et al., 2012e, p.434)	45
[그림 III-58] 합동(Bell,M.,et al., 2012e, p.457)	46
[그림 III-59] 합동 반례(Bell,M.,et al., 2012e, p.457)	46
[그림 III-60] 선대칭도형(교육부, 2015b, p.54)	47
[그림 III-61] 선대칭도형(Bell,M.,et al., 2012e, p.451)	47
[그림 III-62] 점대칭도형(교육부, 2015b, p.54)	48
[그림 III-63] 점대칭도형(Bell,M.,et al., 2012l, p.893)	48
[그림 III-64] 대각선(교육부, 2014d, p.100)	49
[그림 III-65] 입체도형(Bell,M.,et al., 2012h, p.855)	50
[그림 III-66] 모서리와 꼭짓점(Bell,M.,et al., 2012h, p.856)	52
[그림 III-67] 정육면체(교육부, 2015a, p.45)	53
[그림 III-68] 정육면체(Bell,M.,et al., 2012h, p.856)	53
[그림 III-69] 각기둥(교육부, 2015c, p.13)	53
[그림 III-70] 각기둥(Bell,M.,et al., 2012e, p.470)	53

[그림 III-71] 각기둥의 밑면(교육부, 2015c, p.14)	54
[그림 III-72] 각기둥의 밑면(Bell,M.,et al., 2012h, p.861)	54
[그림 III-73] 각기둥의 옆면(교육부, 2015c, p.15)	54
[그림 III-74] 각뿔(교육부, 2015c, p.19)	55
[그림 III-75] 각뿔(Bell,M.,et al., 2012e, p.470)	55
[그림 III-76] 각뿔의 밑면(교육부, 2015c, p.19)	56
[그림 III-77] 각뿔의 밑면(Bell,M.,et al., 2012h, p.861)	56
[그림 III-78] 각뿔의 꼭짓점(교육부, 2015c, p.21)	57
[그림 III-79] 원기둥(Bell,M.,et al., 2012h, p.861)	57
[그림 III-80] 원기둥의 구성요소(교육부, 2015d, p.73)	58
[그림 III-81] 원기둥의 구성요소(Bell,M.,et al., 2012h, p.861)	58
[그림 III-82] 원뿔(Bell,M.,et al., 2012h, p.861)	59
[그림 III-83] 원뿔의 구성요소(교육부, 2015d, p.81)	60
[그림 III-84] 다각형 반례(Bell,M.,et al., 2012b, p.641)	70
[그림 III-85] 평행의 반례(Bell,M.,et al., 2012c, p.328)	70
[그림 III-86] 정육각형의 반례(Bell,M.,et al., 2012e, p.433)	70
[그림 III-87] 정사각형의 반례(Bell,M.,et al., 2012e, p.434)	70
[그림 III-88] 정오각형의 반례(Bell,M.,et al., 2012e, p.434)	71
[그림 III-89] 합동의 반례(Bell,M.,et al., 2012e, p.457)	71
[그림 III-90] 평행사변형의 반례(Bell,M.,et al., 2012e, p.428)	71
[그림 III-91] 정삼각형의 반례(Bell,M.,et al., 2012i, p.184)	71
[그림 III-92] 이등변삼각형의 반례(Bell,M.,et al., 2012i, p.184)	71
[그림 III-93] 부등변삼각형의 반례(Bell,M.,et al., 2012i, p.184)	71
[그림 III-94] 직각표시(Bell,M.,et al., 2012e, p.422)	72

[그림 III-95] 오목팔각형(Bell,M.,et al., 2012e, p.472)	72
[그림 III-96] 빗각기둥(Bell,M.,et al., 2012h, p.874)	72
[그림 III-97] 마름모(Bell,M.,et al., 2012g, p.38)	72
[그림 III-98] 평행한 반직선(Bell,M.,et al., 2012g, p.37)	72
[그림 III-99] 오목이십오각형(Bell,M.,et al., 2012g, p.43)	72
[그림 III-100] 사각형을 삼각형으로 쪼개기(Bell,M.,et al., 2012i, p.202)	73
[그림 III-101] 오각형을 삼각형으로 쪼개기(Bell,M.,et al., 2012i, p.202)	73
[그림 III-102] 한국교과서 내 사각형 포함 관계(교육부, 2014d, p.81)	73
[그림 III-103] EM교과서 사각형 도식화(Bell,M.,et al., 2012i, p.191A)	74
[그림 III-104] 한국교과서 정의에 따른 반원기둥의 모서리와 꼭짓점	75
[그림 III-105] EM교과서 정의에 따른 반원기둥의 모서리와 꼭짓점	75

국 문 초 록

한국과 미국(EM교과서)의 도형 영역 내의 용어 사용과 정의 비교에 대한 연구

고 서 연

제주대학교 교육대학원 초등수학교육전공
지도교수 최 근 배

본 논문은 한국과 미국 교육과정 내에서 나타나는 학교수학의 정의 수준을 탐색하고 비교하여, 정의 지도에 관한 교육적인 시사점을 얻고자 한 것이다.

한국의 2009 개정 교육과정과 미국의 Common Core State Standards for Mathematics를 도형 영역에 중점을 두어, 우리나라의 2009개정 수학교과서와 미국의 EM교과서를 체계적으로 분석하고, 이를 토대로 두 교육과정에 제시되는 정의의 수준, 정의 내용 등을 탐색해 보고자 하였다.

이러한 목적을 위하여, 정의의 수준을 분석하고 제시하였다. 조영미(2001)의 정의수준을 바탕으로 두 교과서에 나온 기하학 용어를 하나씩 구체적으로 비교하였다. 어떤 방법으로 정의하는 지, 어느 정도의 수준으로 어떤 내용을 담아 정의하는 지 각 용어별로 분석한 결과, 두 교육과정에서 사용되는 정의 수준, 정의 내용의 차이를 확인할 수 있었다.

수학적 용어를 정의할 때, 수학 언어 수준의 정도와 기호의 사용, 어떤 내용을 담고 있는 지에 따라 두 나라의 기하학습이 달라지고 있음을 보여주하고자 하

였다.

본 논문은 이상과 같이 두 교육과정의 용어 정의에 대한 구체적 사례를 비교 분석하는 과정을 통하여 교사들에게 바람직한 정의 지도 방법을 탐색할 수 있는 데 보탬이 되리라 생각한다.

주요어 : 정의, 정의 수준, 도형의 이름, 수학 용어

I. 서 론

1. 연구의 필요성

2009 개정에 따른 수학과 교육과정에서 수학 과목의 목표 중에는 수학적 개념을 이해하는 것이 포함되어 있으며, 초등학교 수학 내 ‘도형’ 영역에서는 평면도형과 입체도형의 구성 요소, 개념, 간단한 성질 및 공간 감각을 다룬다. 이는 도형 영역 내 개념 지도가 매우 중요하다는 것을 의미한다. 개념은 그 도형에 대한 보편적인 지식을 의미하며, 개념을 이해한다는 것은 그 도형에 대하여 이해를 한다는 것과 일맥상통할 수 있다.

교과서에 제시된 수학 용어들은 개념을 표현하기 위한 수단으로 사용되며, 수학 용어를 이해하는 것이 곧 그 개념을 이해하는 경우도 있다. 예를 들어, ‘원’이라는 수학 용어를 이해하기 위해서는 ‘한 점으로부터 같은 거리에 있는 점들의 집합’이라는 뜻을 이해해야 한다. 한국교육과정 3학년 1학기 2단원 평면도형 중 3차시 ‘각을 알 수 있어요’를 살펴보면, 활동1에서 실생활에서 각의 형태가 나오는 모습의 공통점을 찾아보고, ‘도형의 이름’을 통해 각을 약속한다. 활동2에서는 각을 그려보고 마무리에서 각을 찾아 표시하는 활동을 한다. 이러한 수업형태는 초등학교 수학 도형영역의 전반적으로 나타나는 모습이다. 교육과정 내에서 ‘어떤 도형일 때, 그 이름을 사용하는 지’, ‘그 수학 용어가 어떤 의미를 나타내는 지’ 알아보는 활동이 중요시 된다는 것을 알 수 있다. 특히 도형 영역에 있어, 개념, 용어, 정의의 중요성을 단적으로 나타내 준다고 할 수 있다.

현재 학교 수학 용어를 살펴보면, 그 정의가 학문으로서의 수학의 정의와 상이한 경우가 많다. 학생들의 인지적 수준과 발달상황을 고려하여 수학 용어를 약속하다보니, 수학적 엄밀성이 덜한 경우가 생기는 것이다. 2009개정 교육과정에서는 초등 수준에서 학습자의 인지적 수준을 고려할 때, 연역적인 방법보다는 직관적인 이해를 목표로 기하 개념을 다루도록 할 필요가 있다고 주장한다. 자연스레 도형 및 구성 요소에 대한 직관적인 이해와 그 도형의 이름을 학습하는 것이 선행되고, 점차 분석을 통해 개념과 성질을 이해하도록 구성되었다.

학습자는 교과서 내의 ‘도형의 이름’만으로는 그 도형의 성질을 정확하게 파

악하기 힘들 수 있다. 따라서 교사는 그 도형에 정의를 정확하게 인지할 필요가 있다. 교사가 정확히 알고 있는 만큼 학습자에게 전달할 수 있고, 교수학습과정이 좀 더 융통성있게 자료를 개발할 수 있기 때문이다.

다른 나라와 '수학 용어를 어떻게 약속하고 정의하는가'에 대한 비교 연구는 교사가 도형 영역 내 수학 용어와 개념을 가르치는 데 필요한 자료가 될 수 있다. 또한 교사의 교수학습의 방향성을 제시할 수 있고, 교육과정을 융통성있게 운영할 수 있도록 하는 데 도움을 줄 수 있다. 또한 현 교육과정을 다양하게 재구성할 수 있도록 하는 데 보탬이 될 수 있다고 생각한다.

2. 연구내용 및 방법

본 연구에서는 한국과 미국의 도형 영역에 대한 개념 학습을 비교하기 위하여 두 나라의 정의 수준과 정의 내용을 연구하였다. 한국의 경우 가장 최근의 교육과정인 2009개정 초등학교 1-6학년의 교과서와 교사용 지도서를 바탕으로 도형의 약속하기에 대한 내용을 추출하고 분석하였다.

미국은 Common Core State Standards for Mathematics에 근거한 Everyday Mathematics 교과서를 비교 대상으로 선정하였다. 이하 CCSSM, EM교과서라고 하겠다. 본 연구의 목적에 부합하도록 초등학교 과정인 EM교과서의 grade1-6의 내용 중 개념을 약속하고 정의하는 부분에 대한 내용을 추출 및 분석하였다. EM교과서의 내용을 추출하는 과정에서, 불가피하게 원문의 내용을 그대로 번역해서 사용하게 되어, 영어와 한국어 표현의 혼용이 다수 존재하게 되었다.

본 연구는 국제간 초등학교 수학교육과정 내 도형 영역의 용어 정의에 대한 비교 연구에 해당하는 것으로 정의수준과 정의내용을 비교하는 측면으로 이루어지고 있다. 한국과 미국의 교육과정인 2009개정 교과서와 CCSSM의 근거한 EM교과서를 다음과 같은 방법으로 비교·분석하였다.

첫째, 각각의 수학적 용어가 한국의 2009개정 교과서와 CCSSM의 근거한 EM교과서에 어떻게 도입하고 있는지 분석한다. 정의수준과 정의내용을 분석한다.

둘째, 평면도형과 입체도형으로 나누어 분석한다.

셋째, 미국 EM교과서의 구성 체제에서의 특이사항을 살펴본다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 학문에서 사용하는 정의 수준

가. Van Hiele의 기하 학습

Hoffer(1983)에 의하면 Van Hiele는 기하 사고 수준을 제1수준부터 제5수준까지 구분하였다. 반복적인 수학적 사고 활동이 가장 기본이 되는데, 이는 한 수준에서 수학적 경험을 정리하고 조직화하면서 다음 수준으로의 비약을 하게 되는 활동이다. 반복적인 수학적 사고 활동을 통하여 불연속적인 사고 수준을 거치면서 수학적 사고를 재발명하는 것을 경험한다고 한다.

1) 제 1수준: 시각적 인식 수준

단순히 도형을 외형만으로 인식하는 수준이다. 그 도형의 이름을 학습할 수는 있으나, 그 도형의 성질을 정확하게 파악하지 못하는 수준이다. 예를 들어, 삼각형과 원을 세모꼴과 동그라미의 형태로 인식하고 그 이름을 말할 수 있으나, 삼각형이 세 변을 갖고 있고, 원의 반지름이 항상 동일하다는 등의 특징을 설명할 수 없다.

2) 제 2수준: 기술적 분석적 수준

비형식적 분석을 통하여 도형의 구성요소와 성질을 파악하는 수준이다. 예를 들어, 평행사변형이 마주보는 두 변의 길이가 같다는 성질을 말할 수 있고, 직사각형이 네 각이 모두 직각이라는 것을 파악할 수 있다. 경험에 의하여 두 도형의 성질들을 파악할 수 있으나, 직사각형이 평행사변형임을 말할 수 없다. 이렇듯 다른 도형과의 연관성을 상호 관련지을 수 없다.

3) 제 3수준: 추상적 관계적 수준

도형의 성질과 도형들 사이의 관계를 파악하는 과정을 통하여 명제를 이해하는 수준이다. 이 수준에서는 도형들 간의 포함관계를 이해할 수 있다. 예를 들어, 직사각형과 평행사변형 사이의 관계를 인식한다. 모든 직사각형은 평행사변

형이지만, 모든 평행사변형은 직사각형이 아니라는 것을 이해하는 수준이다. 하지만, 공리나 정리를 이해하는 것은 아니다.

4) 제 4수준: 형식적 연역적 수준

명제들을 분석하여 공리, 정의, 정리, 증명의 역할과 의미를 알고 기하의 연역 체계를 이해한다. 명제들 간의 연결 속에서 참인 명제를 증명할 수 있다. 예를 들어, '이등변삼각형의 두 변의 길이는 같다.'라는 정의에서 '이등변삼각형의 두 내각의 크기는 같다.'라는 명제가 참임을 증명할 수 있다. 하지만 엄밀한 추론의 필요성을 이해하지 못하며, 다른 연역 체계와의 사고 관계를 파악하지 못한다.

5) 제 5수준: 엄밀, 수학적 수준

여러 가지 공리 체계의 사고 관계를 파악하고, 기하의 형식적 엄밀성을 이해한다. 또한 공리체계의 성질을 이해하는 수준이다.

나. Freudenthal의 수학적 언어 수준

Freudenthal(1978)은 수학적 언어 수준에 따라 수학적 사고가 발달한다고 하였다. 그리고 언어 수준을 4가지로 구분하였다.(Frudenthal, 1978, pp.233-242)

1) 구체적 언어 수준(명시적 언어 수준)

일상적 예, 지시적 언어를 사용하는 수준이다.

2) 관계적 언어 수준

일상적인 언어를 사용하여 수학적 대상을 다른 대상들과의 관계에 의해 기술하는 수준이다.

3) 규약적인 변수 언어 수준(문자 사용)

수학적 대상을 기호로 사용하여 표현하는 수준이다.

4) 함수적 언어 수준

함수를 사용하여 대상을 표현하는 수준이다.

말로 된 언어보다는 문자가, 문자보다는 기호화된 표현이, 기호화된 표현 중에서도 함수를 이용한 표현이 수학적으로 수준이 더 높다고 주장한다.(조영미, 2001, p.125)

다. Dienes의 수학 학습 이론

Dienes는 아래 4가지 수학 학습의 원리를 설정한다.

1) 역동성의 원리

이 원리에 의하면 바람직한 수학 학습을 위하여 역동적인 학습 활동이 전제되어야 한다. 새로운 개념을 학습하는 것은 놀이 단계, 의식하는 단계, 수학적 개념이 형성되는 단계의 순서대로 역동적 정신작용 과정을 거친다. 첫째 단계인 놀이하기 단계에서는 자유로운 분위기, 학습자의 표현 존중이 전제되어야 한다. 이 단계는 비교적 짜임새가 적은 활동을 한다. 둘째 단계인 의식하는 단계는 어느 정도 형식성을 내포하고 있는 활동을 한다. 배우고자 하는 수학 개념과 비슷한 형태의 구조를 갖고 있는 경험을 한다. 셋째 단계인 개념이 형성되는 단계에서는 학습자가 특정 수학적 개념을 형성하는 동시에 다시 응용할 준비가 되어 있는 상태가 된다. 즉, 학습자가 개념을 인지하고, 관련 분야에 적용시킬 수 있는 상태이다.

2) 구성성의 원리

구체물에 대한 활동으로부터 수학적 관계가 추상화되며, 그 관계를 이해하기 위해서는 그 관계에 대한 직관적 구성이 선행되어야 한다. 주의 깊게 준비된 경험은 학습자에게 수학 학습의 기초를 제공한다.

3) 수학적 다양성의 원리

이 원리는 해당 수학적 개념과 관련된 변수는 고정시키고, 관련 없는 변수는 다양하게 변화시키는 경험이 제공되면 수학의 일반화가 잘 이루어진다는 것이다. 이는 학습자가 주어진 개념에 대해 연구하는 과정에서 변수를 체계적으로 분별할 수 있도록 돕고, 수학에서의 일반화를 유도할 수 있도록 한다.

4) 지각적 다양성의 원리

학습자가 지각적으로 다양한 상황에 처한다면, 개념 학습이 극대화될 수 있다는 원리이다. 수학적 개념이 추상적인 경우가 많아 이러한 개념을 지도하기 위해서는 지각적으로 다르지만 구조적으로 동형인 여러 가지 형태의 구체물을 활용해서 지도해야 된다는 원리이다. 이는 수학적 개념 형성을 위하여 각 학습자에게 맞는 개별화된 학습을 구상하는 데 필수적인 요인이다.

2. 선행연구 분석

조영미(2001)는 학교수학에 제시된 정의를 연구하면서, 정의의 특성을 분석하였다. 정의의 수준을 6개의 수준으로 나누어 연구하면서 정의 방법과 정의 기능이 서로 밀접한 관계를 갖고 있다고 하였다. 이를 통하여, 학교수학에서 정의를 가르칠 때, 정의 방법과 정의 기능 모두를 함께 생각해야 함을 강조하였다.

정은주(2004)는 한국, 일본, 중국의 학교 수학용어를 비교하고, 수학 용어가 학습자들에게 개념이나 원리를 직관적으로 파악할 수 있도록 보탬이 되어야 한다고 하였다. 교육적인 관점에서 수학용어의 중요성은 더 부각되어야 하며, 올바른 수학용어 학습에 대한 연구가 절실하다고 하였다.

전광숙(2004)은 기하 용어에 대한 논의를 사다리꼴을 중심으로 연구하여 수학 용어가 학생들의 개념 형성에 어떻게 영향을 미치는 지 알아보았다. 용어와 정의 상이의 괴리는 학생들로 하여금 오해를 불러일으키고, 불완전한 용어는 학생들에게 오류를 심어줄 수 있지만, 적절한 교육적 사용이 함께 이루어진다면 학생들의 수학 개념 형성에 도움이 될 수 있다고 하였다.

성지경(2009)은 수학 용어의 의미를 수학적으로 표현하는 것이 개념을 이해하는 데 도움이 된다고 하였으며, 엄밀한 수학적 표현이 수학의 논리적 사고력 향상에 필수적이라고 하였다. 또한 수학 용어를 여러 가지 정의 유형으로 표현하는 경험이 학습 내에 이루어져야 한다고 하였다.

김성은(2014)는 우리나라의 2009개정 교육과정과 미국의 CCSSM을 비교연구하여 교육과정과 인지과정의 차원을 분석하였다. 전반적으로 CCSSM의 지식과 인지과정의 차원이 우리나라의 교육과정보다 다양하게 분포하고 있음을 시사하면서 다양한 수준의 지식과 인지과정의 차원으로 개념을 지도해야 한다고 하였다.

3. 학교수학에서의 정의 방법

학교수학에서 사용되는 정의 방법은 학습자의 이해를 우선시하는 특성 때문에, 학문적 정의에 교수학적 변환을 가한다. 학습자의 발달 수준과 수학적 지식을 고려하여 용어의 정의 방법이 달라진다. 그 결과 나타나는 학교수학에 제시되는 정의의 특성은 다음과 같다.(조영미, 2001, pp.86-91)

가. 외연적 정의 방법을 사용한다.

초등학교 수학에서 적극적으로 사용되는 방법이다. 대상을 가리키며 정의하는 방법, 예시를 사용하는 방법, 대표적인 한 가지 예를 사용하는 방법이 있다. 예를 들어 ‘△는 삼각형이다.’와 같이 정의한다.

나. 동의적 정의 방법을 사용한다.

학습자가 이해하기 쉬운 말을 사용하고, 유사한 이미지를 연상시키는 용어를 사용하여 정의하는 방법이다. 예를 들어, ‘세모모양은 삼각형이다.’와 같이 정의한다.

다. 선택된 정의항을 줄이면 그 용어가 될 수 있도록 한다.

‘한 각이 직각인 삼각형’으로 직각삼각형을 정의하는데, 이 정의항에서 ‘직각’과 ‘삼각형’을 취하면 용어 ‘직각삼각형’이 된다.

라. 용어가 가리키는 대상을 좀 더 명확하게 지적하기 위해 보충어를 사용한다.

학습자가 대상을 확실하게 인식하는 것을 도와주기 위해 설명을 조금 더 첨가하는 경우인. 예를 들어, 원뿔에서 옆면을 정의할 때, ‘옆을 둘러싼 굽은 면’이라고 하는데, 이 때 ‘굽은’의 표현이 보충어이다.

마. 류를 정확하게 제시하지 않고 중차를 생략하는 경우가 있다.

최근류를 제시하지 않고, 매우 넓은 류를 제시하여 정의하는 경우이다. 예를 들어, 삼각형을 정의할 때, 다각형이라는 표현이 아닌 도형이라는 류를 제시하는 것이다.

바. 내포를 사용하는 경우가 있다.

용어를 정의할 때, 필요충분조건을 사용하는 것은 중요하지만, 초등학교 수학에서는 필요충분조건이 아닌 내포를 사용하는 경우가 많다.

Ⅲ. 연구의 실제

1. 한국교과서와 CCSSM의 용어 정의 비교 방법

가. 도형영역 내의 용어만을 비교 대상으로 한다.

도형영역 내 용어에 대한 수학적 정의가 도형학습의 큰 영향을 미치므로, 용어 정의를 비교하는 것은 도형영역으로 한정한다.

나. 한국교과서와 EM교과서에서 사용된 약속하기를 비교한다.

한국은 개정2009 초등학교 수학과 교육과정을 분석한다. 한국의 경우 수학교과서 내 ‘도형의 이름’이라고 적혀 그 도형에 대한 설명을 하는 부분을 발췌하여 비교한다. 부차적인 설명은 교사용지도서에 나온 유의점과 도형에 대한 설명을 바탕으로 하였다.

미국은 EM교과서에서 교사가 학생들에게 용어를 도입할 때, 어떤 설명을 하는지에 초점을 맞추어 비교한다. 또한, EM교과서뿐만 아니라 Student Reference Book에 나온 용어정의와 Math Masters, Math Journal을 함께 살펴보았다. 이하 Student Reference Book을 SRB라 하겠다.

다. 각 용어가 어떤 정의수준에서 정의되었는지 비교한다.

조영미(2001)는 학교수학의 정의 방법 특징, van Hiele의 이론, Freudenthal의 견해를 바탕으로 기하 영역에 대한 정의수준을 설정하였다. <표Ⅲ-1>에 나온 정의수준을 바탕으로 한국교과서에 나온 용어에 대한 약속하기와 EM교과서에 나온 용어의 정의의 수준을 탐색하고 비교하고자 한다.

다만, 초등학교 내용에 국한하기 때문에, 관계 기호를 사용하는 수준인 3a, 3b 수준과 함수적 언어를 사용하는 수준인 제4수준은 배제하겠다. 또한, 그림을 사용하였다라도 함께 그 용어를 약속하는 내용이 더 높은 수준일 경우, 시각적 특성이 동시에 사용되어 정의되는 1a수준이라고 하지 않고, 더 높은 수준으로 구분하였다. 이는 초등학교 학습의 특성상 학생들의 이해를 돕기 위해 그림이 필수적으로 첨가되어 설명하는 경우가 있기 때문이다.

<표Ⅲ-1>의 표는 조영미(2001)의 정의수준을 표로 정리한 것이다.

<표 Ⅲ-1> 정의 수준(조영미, 2001, pp.125-129)

수준	설명	예시
제0수준	외형을 지시하는 정의 방법	○ 동그라미 모양
	동의어를 사용하는 정의 방법	상자모양을 직육면체라고 합니다.
	이미지나 행동을 연상하도록 기술하는 방법	원을 그릴 때 침이 꽂혔던 점을 원의 중심이라고 합니다.
1a수준	분석된 성질과 동의어를 동시에 사용하는 정의 방법	두 반지름과 원의 한 부분으로 둘러싸인 부채 모양의 도형을 부채꼴이라고 한다.
	분석된 성질을 기술하는 데 일상 용어를 사용하는 정의 방법	삼각형은 세 개의 선분으로 둘러싸인 도형이다.
	분석된 성질이나 관계를 대략적으로 기술하는 정의 방법	평행사변형에서 평행한 두 변을 밑면이라 하고, 그에 대한 평행선 사이를 높이라고 한다.
	제한 조건이 분명하게 언급되지 않는 경우	예각은 90도 보다 작은 각이다.
	류의 제시가 불완전한 경우	각뿔은 밑면이 다각형이고, 옆면이 삼각형인 입체도형이다.
	예시적 언어가 사용되는 경우	원의 지름; 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 지나는 선분 AB
1b수준	관계가 기술되는 경우	직육면체에서 밑면과 수직인 면을 옆면이라고 한다.
	류와 중차에 의한 정의·논리적 정의	이등변삼각형은 두 변의 길이가 같은 삼각형이다.
2a수준	문자 기호를 사용할 수 있는 부분에서 문자기호를 생략하는 단계	각은 한 점 O에서 시작한 두 반직선OA, OB로 이루어지는 도형
2b수준	문자 기호가 전체적으로 사용되는 경우	두 평면 P, Q가 만나서 생긴 직선 l을 교선이라 한다.
3a수준	해당표현과 관계 기호를 둘 다 표현하는 경우	두 반지름 OA, OB가 이루는 각 $\angle AOB$ 를 호AB에 대한 중심각이라 한다.
3b수준	관계기호 표현만 사용하는 경우	직선 l과 원 O는 한 점에서 만나고 $m \perp l$ 이다. 이 때, 직선 l은 원 O에 접한다고 하며, 이 직선 l을 원 O의 접선이라고 한다.
제4수준	함수적 언어를 사용하여 정의	좌표평면 위의 점 $P(x,y)$ 를, 점 $P'(x+a, y+b)$ 로 대응시키는 함수 $T:(x,y) \rightarrow (x+a,y+b)$ 를 평행이동이라고 한다.

정의수준에 따른 두 교과서의 예시를 보면 다음과 같다. 첫째, 제0수준은 한국교과서에서 원기둥을 ‘둥근기둥 모양의 도형을 원기둥이라고 합니다.’라고 정의하는 것과 같다. EM교과서에서 칠판에 각을 그리고 ‘각’이라고 정의하는 것 또한 외형을 지시하는 제0수준이다.

둘째, 1a수준의 예시를 살펴보면 다음과 같다. 한국교과서에서 ‘곧은 선은 변이라고 한다.’와 같이 ‘변’을 정의하는 것은 분석된 성질과 동의어를 함께 사용하는 방법으로 1a수준이다. EM교과서 내 ‘정육면체는 6개의 같은 크기인 정사각형인 면을 갖고 있다.’와 같이 류의 제시가 불완전하게 정의하는 것도 1a수준이다.

셋째, 1b수준의 예시는 다음과 같다. 한국교과서에서 ‘이웃하지 않은 두 꼭짓점을 이은 선분을 대각선이라고 합니다.’와 같이 정의하는 것은 관계를 기술하는 1b수준의 정의이다. EM교과서의 ‘다면체는 모든 표면이 다각형으로만 이루어진 입체도형이다.’라고 정의하는 것은 논리적 정의로 1b수준이다.

2a수준부터는 초등학교 수준에서 대부분 사용되지 않으므로, 생략한다.

라. 정의 내용을 비교한다.

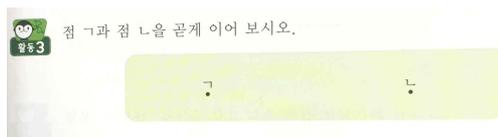
정의 내용이 다른 경우, 어떤 차이점이 있는 지 비교한다. 첫째, 용어가 뜻하는 도형이 전혀 다른 경우를 비교한다. 예를 들어, 사다리꼴의 경우, 한국교과서는 평행사변형의 포함관계에 있고 EM교과서에서는 평행사변형의 배척관계에 있다. 둘째, 같은 도형을 나타내지만 어떤 류에 따라 정의했는지 다를 때 비교한다. 직사각형의 경우 한국교과서는 사각형의 류에 따라 약속하고, EM교과서는 평행사변형의 류에 따라 약속한다. 셋째, 그 용어가 다루는 범위가 다를 때 비교한다. 그 예로는 각이 있다. 한국교과서는 두 반직선으로 이루어진 도형으로 각을 약속하고, EM교과서는 두 반직선 혹은 두 선분으로 이루어진 도형으로 각을 약속한다.

2. 도형별 약속하기 비교(평면도형)

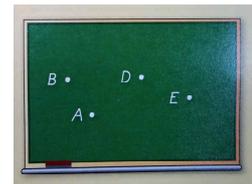
가. 점(point)

한국은 점에 대한 약속을 따로 하지 않는다. 다만 설명 없이 점을 찍고 그을 표시한 후, 점 기이라고 표시한다.(교육부, 2014a, p.57)

EM교과서는 점에 대한 grade2에서 기하학적인 의미를 탐색하고 이름붙이는데 초점을 맞춘다. ‘점들에 대하여 말하기 쉽도록 그들에게 이름붙인다고 설명한다. 점들은 보통 A, B, C와 같은 대문자로 쓰인다. 칠판의 점들에게 이름붙이고 이야기할 수 있다. 점A, 점B 등¹⁾’(Bell,M.,et al., 2012c, p.323)과 같이 설명하고 있다. ‘칠판에 두 개의 점들을 그리고 그 점들을 A와 B라고 한다. 학생들에게 이 점들(dots)이 점들(points)을 나타낸다고 한다²⁾.’(Bell,M.,et al., 2012g, p.25)와 같이 점을 표시한 후, 간단한 언급을 한다. grade5에서는 점에 대한 정의를 ‘한 면 내의 위치³⁾’(Bell,M.,et al., 2012i, p.169)로 내리고 있다.



[그림 III-1] 점(교육부, 2014a, p.56)



[그림 III-2] 점(Bell,M.,et al., 2012c, p.323)

도입시기를 봤을 때, 한국교과서는 3학년에서 도입하고, EM교과서는 grade2에서 도입한다.

- 1) Explain that an easy way to talk about points is to give them labels. Points are usually labeled with capital letters, such as A, B, and C. Label each of the dots on the board, calling them by name as you do so: "Point A," "Point B," and so on.
- 2) Draw two dots on the board and label them A and B. Tell students that the dots represent points.
- 3) A location in place

정의수준을 보면 한국교과서는 점에 대한 설명을 따로 하지 않고, 시각적 외형을 지시하는 경우로 점을 도입한다. 반면 EM교과서는 학년이 올라감에 따라 더 높은 정의수준을 사용하는 것을 볼 수 있다. grade2에서는 point를 동의어와 연결하여 기하학적인 뜻을 토론하지만 따로 약속하지는 않는다. 다만, 점 그리기와 이름붙이기를 할 뿐이다. grade4에서 점에 대한 정의를 시각적 외형을 지시한 0수준을 사용하였다. 그리고 친숙한 용어인 dots를 points로 연결했다는 점에서 동의어를 사용했다. grade5에서는 점을 ‘한 면 내의 위치’라는 기하학적 정의를 사용한다. 이는 류와 종차에 의한 논리적 정의로 1b수준으로 점을 설명하였다.

정의내용에서 봤을 때, EM교과서는 dot과 point의 차이를 보여준다는 데에서 다르다. dot과 point는 모두 ‘점’으로 해석되지만 다른 차이가 있다. dot은 ‘동그랗고 작은 점’으로 면적이 존재하고 눈에 보인다. 하지만, point는 ‘위치’로서 면적을 갖지 않는다. 즉, dot을 찍어 point라고 설명하지만, 후에 위치라는 설명을 통해 다르다는 것을 보여준다. 이는 한국교과서와 다른 점이다.

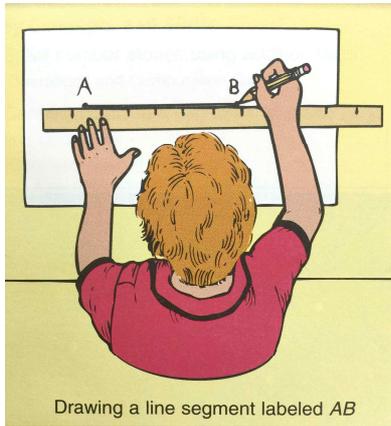
나. 선분(line segment)

한국교과서에서 선분을 약속할 때, ‘두 점을 끝께 이은 선을 선분이라고 합니다.’(교육부, 2014a, p.57)이라 약속 하고 읽고 쓰는 방법을 ‘점 \cdot 과 점 \cdot 을 이은 선분을 선분 \overline{AB} 또는 선분 \overline{BA} 이라고 합니다.’(교육부, 2014a, p.57)라고 설명하고 있다.

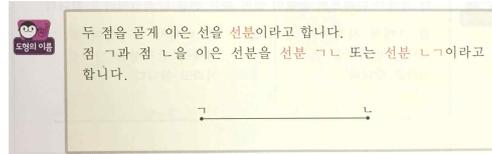
EM교과서에서 선분을 그려서 표현하는데, ‘점(dot) 밑에 자를 놓고, 점과 점을 연결하여 그린다. 글자와 글자를 연결하는 것이 아니고, 점을 지나쳐서도 안 된다. 학생들에게 이것이 점 A와 점B를 종점으로 하는 선분을 그린 것이라고 말한다. 선분은 “선분AB” 또는 “선분BA”로 불린다.-종점들은 어떤 순서로도 읽을 수 있다. 칠판에 \overline{AB} , \overline{BA} 를 쓰고 때때로 이것이 “선분AB”, “선분BA”의 상징이 된다.’(Bell,M.,et al., 2012c, p.324) 그리고 선분의 류에 대한 추가 설명을

4) Place the straightedge just under the dots and draw from point to point, not from letter to letter, and not past the points. Tell children that they just drew a line segment whose endpoints are points A and B. The segment can be called "line segment AB" or "line segment BA"-the names of the endpoints can be in either order. Write \overline{AB} and \overline{BA} on

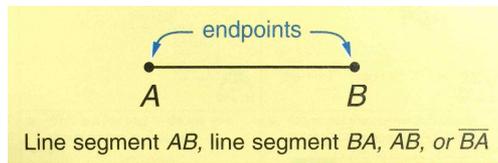
덧붙이는데 ‘선분은 길이가 될 수 있지만 반드시 정확한 두 종점을 갖는다. 선분은 언제나 곧다; 이것은 두 종점 사이에 가장 짧은 길을 표시한 것이다. 선분은 공간에서 어떤 방향으로도 갈 수 있다. 셋 이상의 선분은 이차원과 삼차원 도형에 쓰일 수 있다.’⁵⁾(Bell,M.,et al., 2012e, p.403)와 같다.



[그림 III-3] 선분(Bell,M.,et al., 2012c, p.324)



[그림 III-4] 선분(교육부, 2014a, p.57)



[그림 III-5] 선분(Bell,M.,et al., 2012e, p.403)

도입시기를 살펴보면, 한국교과서는 3학년에서 도입하고, EM교과서에서는 grade2에서 도입한다.

한국교과서의 선분에 대한 정의와 EM교과서의 선분에 대한 정의를 보면, 사용된 그림은 매우 유사하다. 그리고 곧게 이은 선이라는 데 공통점이 있다. 한국의 경우 선분 \overline{AB} , 선분 \overline{BA} 이라는 방법으로 선분을 읽고 쓰지만, EM교과서는 grade2에서 자를 사용하여 선분을 갖게 하여 행동을 연상시키는 0수준의 정의방법을 사용하였고, \overline{AB} 라는 기호를 더 설명함으로써 대상기호를 사용하여

the board and say that sometimes the symbols are used for "line segment AB" or "line segment BA."

5) A line segment can be any length but must have two definite endpoints. A line segment is always straight; it marks the shortest path between two endpoints. A line segment can go in any direction in space. Three or more line segments can be used to represent 2- and 3-dimensional figures.

정의하였다. 또한, grade3에서 추가 설명을 하는 데, ‘선분의 길이가 될 수 있지만’, ‘가장 짧은 길’, ‘방향성 제시’, ‘이차원과 삼차원 도형에 쓰일 수 있다.’는 것을 언급하여 분석된 성질을 기술하여 정의하는 방법인 1a수준으로 정의했다고 할 수 있다. 이를 통하여 한국교과서는 0수준 시각적 외형을 지시하는 경우인 0수준에 그치는 반면, EM교과서는 행동을 연상하도록 기술하는 방법인 0수준, 대상기호를 사용하는 수준, 분석된 성질을 기술하여 정의하는 방법인 1a수준을 융합하여 사용했다.

정의 내용을 살펴볼 때, 한국교과서는 선분의 류에 대한 설명을 하지 않지만, EM교과서는 ‘이차원과 삼차원 도형에 쓰일 수 있다.’라는 표현을 함으로써 선분이 공간 내에서 존재할 수 있음을 명확하게 표현한다. 이는 선분을 류와 종차에 따른 정의방법으로 사용했다고 할 수 있다.

EM교과서는 선분의 종점에 대해서도 따로 정의하는데, 한국은 그런 용어를 사용하지 않는다. 종점에 대한 정의는 ‘점A와 점B는 선분의 종점들이다.’⁶⁾(Bell, M., et al., 2012e, p.403)와 같다. 이 정의방법은 시각적 외형을 지시하는 경우로 제0수준이다. 종점의 정의를 통해 선분의 정의를 좀 더 명확하게 제시할 수 있다는 특징이 있다.

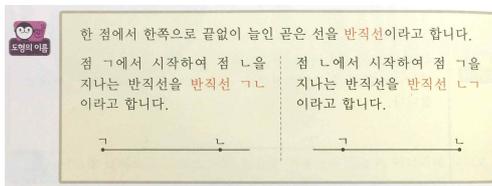
다. 반직선(ray)

한국 수학 교과서에서 반직선에 대한 약속은 ‘점 Γ 에서 점 Δ 을 지나 오른쪽으로 끝없이 늘인 끝은 선을 생각해보세요. 한 점에서 한쪽으로 끝없이 늘인 끝은 선을 반직선이라고 합니다. 점 Γ 에서 시작하여 점 Δ 을 지나는 반직선을 반직선 $\Gamma\Delta$ 이라고 합니다. 점 Δ 에서 시작하여 점 Γ 을 지나는 반직선을 반직선 $\Delta\Gamma$ 이라고 합니다.’(교육부, 2014a, p.58)이다.

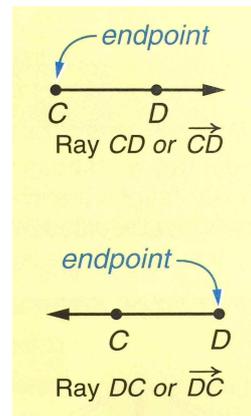
EM교과서는 ‘학생들에게 \overline{AB} 에서 점B를 끝없이 늘리는 것을 상상하게 한다. 그 결과 나오는 도형이 반직선이다. 칠판 여백에 반직선CD와 반직선DC를 그려라. 이것은 반직선CD이다. 점C는 반직선CD의 종점이다. 항상 첫 번째 글자가 종점이다. 이것은 반직선DC이다. 점D는 반직선DC의 종점이다. 반직선의 이름은 작은 화살표 밑에 있는 글자로 쓸 수 있다. 예를 들어, 반직선CD는 \overrightarrow{CD} 로

6) points A and B are the endpoints of this line segments.

쓸 수 있다.⁷⁾(Bell,M.,et al., 2012e, p.404)라고 반직선에 대한 약속을 한다. 그리고 ‘누구도 끝없는 것을 볼 수 없기 때문에 실제로 반직선을 보는 것은 불가능하다. 끝없이 가는 반직선을 그리는 것은 불가능하므로 반직선은 선분의 끝에 화살표를 그리는 것으로 보여준다.⁸⁾(Bell,M.,et al., 2012e, p.404)’와 같이 반직선의 화살표와 반대방향에 대한 추가 설명이 있다.



[그림 III-6] 반직선(교육부, 2014a, p.57)



[그림 III-7] 반직선(Bell,M.,et al., 2012e, p.404)

한국교과서는 3학년 때 반직선을 도입하고, EM교과서에서는 grade3에서 반직선을 도입한다.

두 교과서에서 반직선의 정의는 둘 다 이미지를 연상하도록 기술하는 방법인 0수준이다. 그러나 EM교과서는 ‘항상 첫 번째 글자가 종점이다.’라는 언급을 하였다. 종점이라는 용어를 사용하여 반직선을 쓰는 방법을 좀 더 구체화한 것이

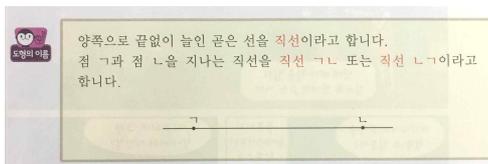
- 7) Have children imagine extending \overline{AB} past point B forever. The resulting figure is a ray. Draw ray CD and ray DC on the board as shown in the margin. This is called ray CD. Point C is the endpoint of ray CD. The first letter always names the endpoint. This is called ray DC. Point D is the endpoint of ray DC. The name of a ray can be written with a little arrow above the letters. For example, ray CD can be written as \overrightarrow{CD} .
- 8) It is impossible to see rays in the real world because no one can see forever. It is not possible to draw a ray that goes on forever, so a ray is shown by drawing an arrowhead at one end of a line segment.

다. 또한 반직선기호인 화살표를 사용하여 반직선을 나타내는 방법과 반직선을 쓰는 방법을 다양화하였다. 화살표를 사용하는 것은 무한의 개념인 끝없이 가는 것을 직관적으로 이해할 수 있도록 돕는다. 한국교과서에서는 $\overrightarrow{\quad}$ 을 사용하지 않는 것과는 다르다. 추가설명을 보면, 끝없는 것을 실제로 볼 수 없다는 것을 통해 제한조건을 드러내고 있다는 점에서 1b수준을 첨가했다. 그리고 두 교과서 모두 다른 방향성을 갖는 반직선을 비교해 줌으로써 용어에 대한 이해를 도왔다.

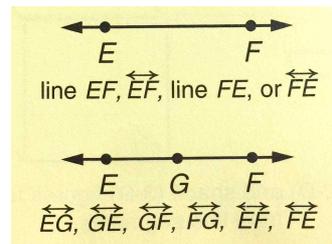
라. 직선(line)

한국교과서는 ‘선분 \overline{MN} 을 양쪽으로 끝없이 늘인 곧은 선을 생각해 봅시다. 양쪽으로 끝없이 늘인 곧은 선을 직선이라고 합니다. 점 M 과 점 N 을 지나는 직선을 직선 \overleftrightarrow{MN} 또는 직선 \overleftrightarrow{NM} 이라고 합니다.’(교육부, 2014a, p.59)라고 직선을 약속한다.

EM교과서는 직선에 대한 약속을 ‘선분은 두 개의 종점이 있거나 시작과 끝이 있지만, 직선은 끝이 없다. 직선은 양방향으로 끝없이 간다. 끝없이 가는 것을 양쪽에 화살표로 표현한다. 직선의 이름은 두 개의 화살표 밑에 글자를 써서 쓴다. 예를 들어, 직선EF는 \overleftrightarrow{EF} 로 쓴다.’(Bell,M.,et al., 2012e, pp.404~405)라고 한다.



[그림 III-8] 직선(교육부, 2014a, p.59)



[그림 III-9] 직선(Bell,M.,et al., 2012e, p.404~5)

9) A line segment has two endpoints or a start and a finish, but a line does not end. A line goes on forever in both directions. Going on forever is represented by arrowheads pointing both ways. The name of a line is written with a double arrow above the letters; for example, line EF may be written as \overleftrightarrow{EF} .

한국교과서는 3학년 때, EM교과서에서는 grade3에서 직선을 도입한다.

정의수준에 대하여 직선에 대한 한국의 정의수준은 이미지를 연상하도록 기술하는 방법으로 0수준이다. 하지만 EM교과서의 경우 선분과 비교하면서 직선을 정의하기 때문에 관계가 기술되는 경우인 1b수준이라고 할 수 있다. 또한 끝없이 가는 것을 화살표로 표시하고, 기호 \overleftrightarrow{EF} 를 사용하는 것이 한국과 다른 점이다. 추가 설명에서, ‘직선 위에 세 번째 점 G를 표시한다. 직선 위 어떤 두 점도 직선의 이름에 사용될 수 있다고 언급한다. 예를 들어, 칠판 위에 직선은 \overleftrightarrow{EG} , \overleftrightarrow{GF} , 또는 \overleftrightarrow{FG} 로 부를 수 있다. 직선은 양쪽 방향으로 끝없이 가기 때문에 시작점도 멈추는 점도 없다.¹⁰⁾(Bell,M.,et al., 2012e, p.405)’와 같이 세 번째 점 G를 도입하여, 두 직선 위 어떤 점으로도 직선을 표시할 수 있음을 설명한다. 이는 도형을 읽고 쓰는 것을 중요하게 여기는 특징이 엿보인다고 할 수 있다. 또한 선분이나 반직선과 마찬가지로 중점의 개념을 사용하여, 직선의 경우 중점이 없음을 설명한다. 한국과 비교하여 더 구체적으로 직선을 설명한다고 할 수 있다.

마. 각(angle)

1) 각(angle)

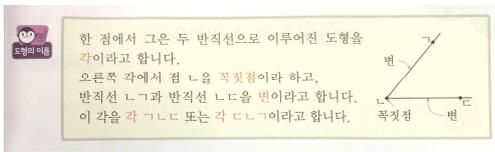
한국교과서는 각에 대한 약속을 ‘한 점에서 그은 두 반직선으로 이루어진 도형을 각이라고 합니다. 오른쪽 각에서 점N을 꼭짓점이라 하고, 반직선NC, 반직선NG를 변이라고 합니다. 이 각을 각NCD 또는 각DCN이라고 합니다.’(교육부, 2014a, p.61)라고 한다.

EM교과서의 경우, 각을 표현하고 약속하는 방법이 학년과 단원에 따라 다르다. grade3에서는 ‘칠판에 각을 그린다.¹¹⁾’(Bell,M.,et al., 2012e, p.416)와 같이 그림을 그리고 각이라고 말한다. grade4에서는 ‘빨대는 각을 형성한다. 빨대와 꼬인타이를 이용하여 각을 나타낸다.¹²⁾’(Bell,M.,et al., 2012g, p.30)’로 그림이 아

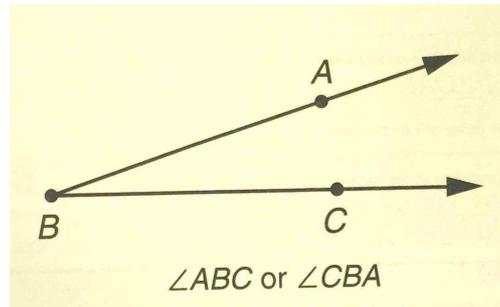
10) Mark a third point on the line on the board and label it G. Mention that any two points on a line can be used to name the line. For example, the line on the board can also be named \overleftrightarrow{EG} , \overleftrightarrow{GF} , or \overleftrightarrow{FG} . A line goes on forever in both directions with no starting or stopping points.

11) Draw an angle on the board.

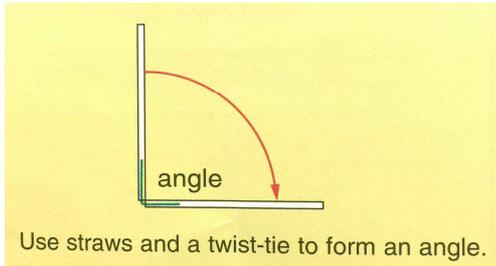
닌 구체물로 각을 표현한다. 그리고 ‘각은 같은 종점을 가지고 있는 2개의 반직선이나 2개의 선분으로 형성된다.’¹³⁾(Bell,M.,et al., 2012g, p.432)라고 약속한다. 읽고 쓰는 방법은 grade5에서 언급하는데, ‘공통의 종점을 가진 두 반직선이나 두 선분. 꼭짓점으로 이름 붙여진다.’¹⁴⁾(Bell,M.,et al., 2012i, p.169)와 같다.



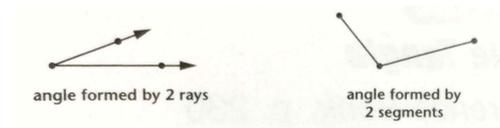
[그림 III-10] 각(교육부, 2014a, p.61)



[그림 III-11] 각(Bell,M.,et al., 2012e, p.416)



[그림 III-12] 각(Bell,M.,et al., 2012g, p.30)



[그림 III-13] 각(Bell,M.,et al., 2012g, p.432)

도입시기를 보면, 한국교과서는 3학년에, EM교과서에서는 grade3에서 도입한다.

정의수준을 보면, 한국은 그림을 제시함으로써 시각적 외형을 제시하는 0수준과 대체적으로 성질을 사용한 1a수준을 함께 사용하였다. CCSSM은 그림으로

12) The straws form an angle. Use straws and a twist-tie to form an angle.

13) An angle is formed by 2 rays or 2 line segments that have the same endpoint.

14) Two rays or line segments, with a common endpoint, called the vertex. $\angle T$ or $\angle STP$ or $\angle PTS$

각이라는 것을 설명하는 시각적 외형을 지시하는 0수준, 구체물로 각을 나타내는 것으로 이미지를 연상하도록 하는 0수준, 분석된 성질을 사용하여 논리적 정의를 사용한 1b수준이 순차적으로 사용되었다. 다른 수준의 정의수준을 사용하여 점차 정의에 대한 위계가 높아지고 있다고 할 수 있다.

정의한 내용을 보면, 한국은 각을 구성할 때, 반직선으로 제한하였다. EM교과서는 변을 선분과 반직선으로 구성한다고 하였다. 유클리드 기하학 <원론> 제1권에서 “평면이 있는 두 선이 서로 만나고 그들이 한 직선에 놓여있지 않을 때, 그들이 서로 기운 정도를 각이라고 부른다. 각을 만드는 선이 둘 다 직선일 때, 그 각을 직선각이라고 부른다.” 고 정의하였다. 유클리드가 정의한 직선각의 내용이 한국교과서와 EM교과서의 각이라는 점을 비취보면, 반직선으로 정의한 것과 선분과 반직선으로 정의한 것에 유의미한 차이는 없다고 할 수 있다.

읽고 쓰기에서 두 가지 차이점을 보인다. 하나는 EM교과서가 각의 기호인 \angle 를 사용한다는 점이다. 다른 하나는 한국의 경우 세 점으로 각을 표현하지만, EM교과서에서는 $\angle T$ 와 같이 꼭짓점만으로도 각을 표시한다는 것이다.

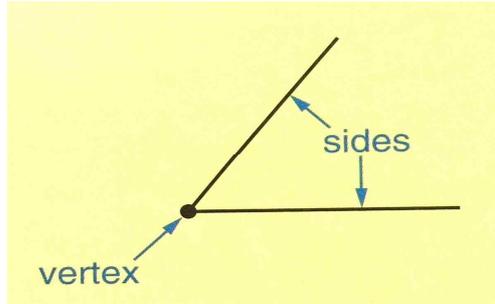
2) 각의 구성요소(side, vertex)

각의 구성요소는 ‘각의 변’과 ‘각의 꼭짓점’으로 나누어 약속한다. ‘각의 변’을 우선 살펴보면, 한국은 ‘반직선 \perp 과 반직선 \perp 을 변이라고 합니다.’(수학 교육부, 2014a, p.61)라고 약속한다. EM교과서는 grade3에서 ‘각의 변이라 한다.15)’(Bell,M.,et al., 2012e, p.416), grade4에서 ‘각을 이루는 반직선이나 선분들은 각의 변으로 불린다.16)’(Bell,M.,et al., 2012g, p.432)라고 약속한다.

한국교과서는 반직선에 대한 정의를 예시적 언어가 사용되는 1a수준을 사용하였다. EM교과서는 첫 번째 정의에서 각의 변을 그림으로 설명하므로 시각적 외형을 나타내는 0수준을 사용하였다. 두 번째 정의에서는 대체적으로 성질을 기술하는 경우로 1a수준이다. 각의 변에 대한 정의는 각의 정의와 마찬가지로, EM교과서에서 순차적으로 높은 수준의 정의수준을 사용하였다. 이는 학년이 높아감에 따라 기하학적인 표현으로 도형의 이름을 약속한다고 할 수 있다.

15) Label the sides of the angle.

16) The rays or line segments are called the sides of the angle.



[그림 III-14] 각의 변과 꼭짓점(Bell,M.,et al., 2012e, p.416)

‘각의 꼭짓점’을 살펴보면, 한국교과서는 ‘오른쪽 각에서 점 \angle 을 꼭짓점이라 합니다.’라고 약속한다. EM교과서는 grade3에서 ‘각의 꼭짓점이라 한다.17)’(Bell, M.,et al., 2012e, p.416)와 같이 설명 없이 외형적 지시로 정의한다. 그리고 grade4에서 ‘빨대와 꼬인 타이를 이용하여 각을 나타낸다. 그들이 만나는 점을 각의 꼭짓점이라고 한다.18)’(Bell,M.,et al., 2012g, p.30)와 같이 구체물을 사용하여 꼭짓점을 약속한 후, ‘반직선들이나 선분이 만나는 종점을 각의 꼭짓점이라고 한다.19)’(Bell,M.,et al., 2012g, p.432)’라고 정의를 한다.

‘각의 꼭짓점’을 약속할 때, 한국교과서는 기호를 사용했지만, 설명이 없는 외형을 지시하는 0수준을 사용하였고, EM교과서는 세 단계로 나누어 약속했는데, 첫 번째는 설명 없이 외형적 수준만을 나타내는 0수준이다. 두 번째는 이미지를 연상하도록 기술하는 방법으로 0수준이지만, 첫 번째와는 달리 ‘만나는 점’이라는 표현을 통해 분석된 성질을 나타냈다. 세 번째는 관계가 기술되는 경우로 1b수준이다.

3) 직각(right angle, square corner)

한국교과서는 직각에 대한 약속을 두 번에 걸쳐 한다. ‘종이를 반듯하게 두

17) Label the vertex of the angle.

18) Use straws and a twist-tie to form an angle. They meet at a point called the vertex of the angle.

19) The endpoint where the rays or segments meet is called the vertex of the angle.

번 접었다 펼쳤을 때 생기는 각을 직각이라고 합니다. 직각 기호를 나타낼 때에는 꼭짓점에 \square 표시를 하기도 합니다.’(교육부, 2014a, p.62)라고 약속한 후, 직각의 각도에 대한 설명을 ‘직각은 90° 입니다.’(교육부, 2014a, p.80)라고 한다.

EM교과서는 네 번에 걸쳐 직각을 설명하거나 나타낸다. 우선, grade1에서 ‘정사각형의 코너는 책의 코너와 같은 모양이다. 이러한 코너를 직각이라고 한다.’²⁰⁾(Bell,M.,et al., 2012b, p.635)라고 직각을 정사각형의 코너로 도입한다. grade2에서 ‘정사각형과 직사각형 속 기호 \square 는, 정사각형 코너를 나타낸다.’²¹⁾(grade 2 volume1, p.339)라고 기호를 도입한다. 본격적인 직각에 대한 설명은 다음과 같다. ‘학생들에게 빨대로 오른쪽으로 1/4회전(quarter-turn)한 것을 보여준다. 곡선화살표가 회전의 방향을 보여줌을 말한다. 1/4회전(quarter-turn)을 직각이라고 함을 설명한다. 직각은 때때로 직각(square corner)라고 불린다. 학생들에게 왼쪽으로 1/4회전(quarter-turn)한 것을 보여준다. 이것 또한 직각임을 말한다.’²²⁾(Bell,M.,et al., 2012e, p.416)와 같이 구체물을 통하여 약속한 것이다. 또한 직각 기호를 ‘직각에 직각기호(square corner symbol)를 삽입하고, 이 표시가 직각임을 나타낸다고 설명한다.’²³⁾(Bell,M.,et al., 2012e, p.422)로 약속한다. 또한 직각을 각도의 개념으로도 설명하는데, ‘ 90° 의 다른 이름은? 직각이다.’²⁴⁾(Bell, M.,et al., 2012g, p.428)와 같다.

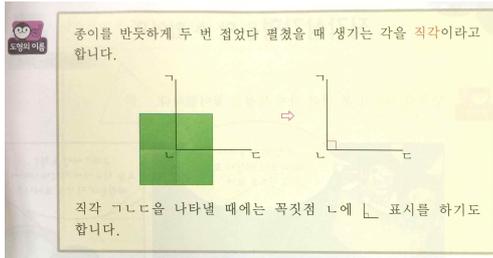
20) The corners of the square are the "same shape" as the corners of books. Such corners are called square corners.

21) The symbol \square in the square and rectangle, indicating square corners.

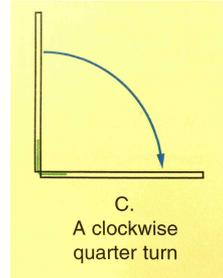
22) Have children show a right (clockwise) quarter-turn with their straws. Point out that the curved arrow shows the direction of the turn. Explain that a quarter-turn is called a right angle. A right angle is sometimes called a square corner. Have children show a left(counterclockwise) quarter-turn with their straws. Point out that this is also a right angle.

23) Insert the square corner symbol in the right angle, and explain that this symbol indicates a right angle.

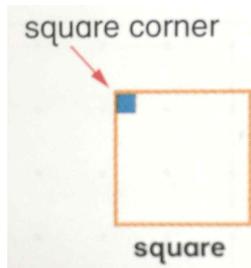
24) What is another name for a 90° -degree angle? A right angle



[그림 III-15] 직각(교육부, 2014a, p.62)



[그림 III-16] 직각(Bell,M.,et al., 2012e, p.416)



[그림 III-17] 직각표시(Bell,M.,et al., 2012c, p.339)



[그림 III-18] 직각표시(Bell,M.,et al., 2012e, p.422)

도입시기를 보면, 한국교과서는 3학년에, EM교과서는 grade2에서 도입한다.

정의수준을 비교하면, 한국교과서는 시각적 외형을 지시하는 0수준과과 행동을 연상하도록 기술하는 0수준을 함께 사용했다고 할 수 있다. 또한 각도를 설명하면서 직각의 제한 조건을 분명하게 언급하는 1b수준의 정의수준을 사용하였다. EM교과서는 grade1에서는 시각적 외형만을 제시하는 0수준, grade3에서는 이미지를 연상시켜 정의하므로 0수준, grade4에서는 제한 조건이 분명하게 언급된 1b수준이라고 할 수 있다.

한국교과서에서 언급한 ‘종이를 반듯하게 두 번 접었다’라는 말에는 오개념이 생길 수 있는 여지가 있다. 종이의 생김새를 정사각형이나 직사각형이라고 말하지 않았기 때문이다. 다른 종이를 접는다고 했을 때 직각이 생기라는 보장이 없다. 특히, 원 모양의 종이를 접는다면 반듯하게 두 번 접더라도 다른 각이 생길 수 있기 때문이다.

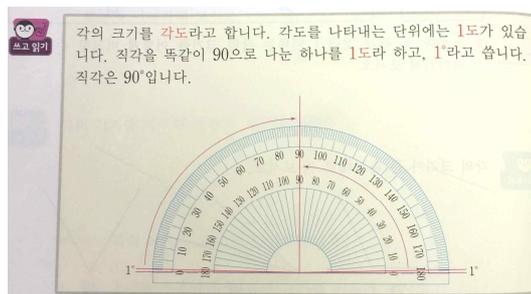
정의내용에서 보면, 한국의 경우 90도의 모양만을 직각이라고 표현하는 제한적인 각의 개념을 정의했다. EM교과서는 회전의 관점에서 바라보는 직각과 90

도의 모양을 직각이라고 하는 두 가지 개념을 정의했다. 유클리드가 각을 “기운 정도”라고 표현했는데, EM교과서는 회전의 개념과 각을 연결시킨 것이 유클리드의 정의와 가깝다고 할 수 있다.

4) 각도(degree)

한국교과서는 ‘각의 크기를 각도라고 합니다. 각도를 나타내는 단위에는 1도가 있습니다. 직각을 똑같이 90으로 나눈 하나를 1도라 하고, 1°라고 씁니다.’라고 약속한다.

EM교과서는 ‘각도는 회전이나 각을 측정하는 표준측정단위이다. 칠판에 각도의 표시 °를 쓴다. 예를 들어, 30도는 30°로 쓸 수 있다.’²⁵⁾(Bell,M.,et al., 2012e, p.445)라고 약속한다.



[그림 III-19] 각도(교육부, 2014c, p.80)

도입시기를 보면, 한국교과서는 4학년, EM교과서는 grade3에서 도입한다.

정의수준을 보면, 한국교과서는 분석된 성질을 기술하되, 일상적 용어를 사용하는 경우인 1a수준이다. EM교과서는 논리적 정의로 1b수준이다.

정의내용을 보면, 한국은 각도를 각의 측정단위로 정의하였고, EM교과서는 회전이나 각의 측정단위로 정의하였다. 이는 각을 회전의 개념과 연결 짓는 EM교과서의 특징을 엿볼 수 있다.

25) A standard unit of measure called the degree is used to measure turns and angles. Write the symbol for degrees(°) on the board. For example, 30 degrees can be written using the word or the symbol(30°).

5) 예각과 둔각(acute angle and obtuse angle)

한국교과서는 ‘크기가 0° 보다 크고 직각보다 작은 각을 예각이라고 합니다. 크기가 직각보다 크고 180° 보다 작은 각을 둔각이라고 합니다.’(교육부, 2014c, p.85)라고 약속한다. EM교과서의 약속은 ‘예각은 0 도와 90 도 사이에 있는 각이다. 둔각은 90 도와 180 도 사이에 있는 각이다.’(Bell, M., et al., 2012g, p.438)와 같다. 두 교과서 모두 제한조건이 분명하게 언급된 1b수준으로 정의하였다.

한국에서는 우각과 평각을 따로 약속하지 않지만, EM교과서에서는 ‘우각은 180 도와 360 도 사이에 있는 각이다. 180 도는 평각이다.’(Bell, M., et al., 2012g, p.438)와 같이 약속한다. 이 정의수준도 위와 마찬가지로 1b수준이다.

바. 평행(parallel)과 교차(intersect)

한국은 ‘한 직선에 수직인 두 직선을 그었을 때, 그 두 직선은 만나지 않습니다. 서로 만나지 않는 두 직선을 평행하다고 합니다. 이때 평행한 두 직선을 평행선이라고 합니다.’(교육부, 2014d, p.60)라고 약속한다.

EM교과서는 평행에 대한 설명 없이, grade2에서 아래 [그림Ⅲ-20]과 같이 평행인 것과 평행이 아닌 선분들을 제시한다. 그 후에, grade3에서 ‘빈 종이에 직선자를 놓고, 직선자의 윗부분과 아랫부분을 따라 그린다. 두 선분은 평행이다. 평행한 직선들과 평행한 선분들은 같은 면에 있고 만나지 않는다. 그들 각각의 선 위에 모든 점들은 같은 거리만큼 떨어져 있다.’(Bell, M., et al., 2012e, p.409)라고 한다. 그리고 ‘만약 두 직선이 같은 면에 있지 않다면, 두 직선이 교차하지 않더라도 평행하지 않다.’(Bell, M., et al., 2012e, p.410)고 추가 설명한다. 읽고

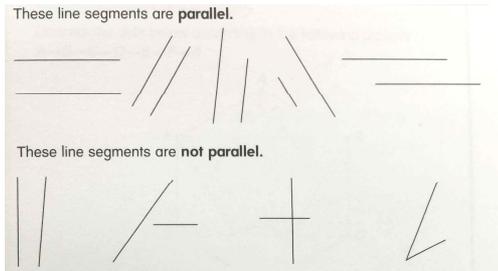
26) An acute angle measures between 0° and 90° . An obtuse angle measures between 90° and 180° .

27) A reflex angle measures between 180° and 360° . A 180° angle is called a straight angle.

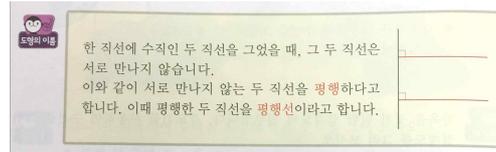
28) Have children place their straightedges on blank paper and draw a line along the top edge and the bottom edge of the straightedge. The two line segments are parallel. Parallel lines and parallel line segments are in the same plane and never meet. They are the same distance apart at all points on each line.

29) Two lines that do not intersect are not considered parallel if they are not in the same plane.

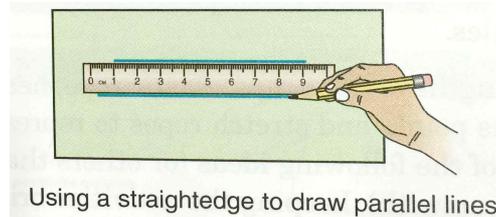
쓰기에 대한 언급은 grade5에서 ' $\overline{AB} // \overline{CD}$ '라고 기호를 사용하여 표현한다.



[그림 III-20] 평행(Bell,M.,et al., 2012c, p.328)



[그림 III-21] 평행(교육부, 2014d, p.60)



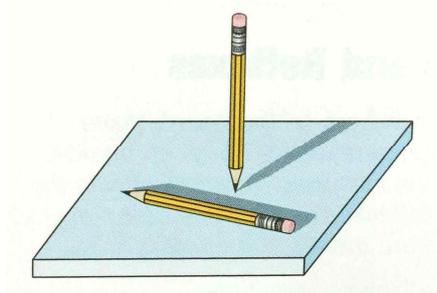
Using a straightedge to draw parallel lines

[그림 III-22] 평행(Bell,M.,et al., 2012e, p.409)

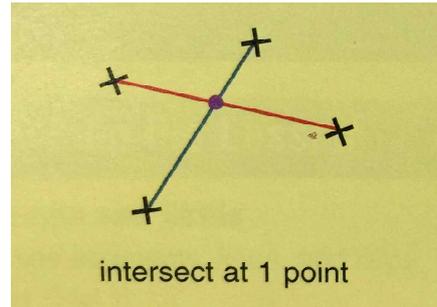
평행을 도입하는 시기는, 한국교과서는 4학년에 도입하지만, EM교과서는 grade2에서 비교적 빠른 시기에 도입한다.

평행에 대한 한국수학교과서의 정의는 제한점이 분명하지 않은 1a수준의 정의이다. 평행이라는 개념은 같은 평면 내에서 정의되어야 하지만, 같은 평면이라는 면이라는 제한조건을 제시하지 않았다. 이는 꼬인 위치를 평행이라고 착각할 수 있는 오해를 불러일으킬 수 있다. EM교과서의 평행에 대한 정의는 3단계로 점차 엄밀해지고 있다. 우선, 평행선을 직선자의 본뜬 모양으로 정의하는 것은 시각적 외형을 지시하는 경우로 0수준이다. 같은 면, 만나지 않음, 같은 거리만큼 떨어져 있음은 관계가 기술되는 1b수준이다. 마지막으로 꼬인 위치와 비교함으로써 평행이 같은 면에 있음을 한 번 더 강조하는 것으로 제한 조건을 분명히 언급하고 있다.

읽고 쓰기에서 한국교과서는 평행에 대한 기호나 표현을 따로 언급하지 않지만, EM교과서의 경우 평행의 기호를 사용하고 있다. 이는 2a수준을 함께 사용한 것이다.



[그림 III-23] 꼬인 위치(Bell,M.,et al., 2012e, p.410)



[그림 III-24] 교차(Bell,M.,et al., 2012e, p.409)

교차에 대한 약속은 EM교과서에만 있는데, ‘같은 면에 있는 두 직선들이 평행하지 않는다면, 그들은 어떤 점에서 반드시 교차한다.’³⁰⁾(Bell,M.,et al., 2012e, p.409)라고 한다.

두 직선의 관계로 교차를 설명하였고, meet의 동의어로 intersect를 사용하였다. 또한 같은 면에 있음을 표현함으로써 제한 조건을 언급하였다. 이는 1b수준이다.

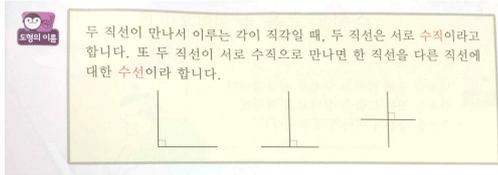
사. 수직(vertical)과 수선(perpendicular lines)

수직에 대한 한국의 약속은 ‘두 직선이 만나서 이루는 각이 직각일 때, 두 직선은 서로 수직이라고 합니다.’(교육부, 2014d, p.55)이다. EM교과서는 ‘vertical이라는 단어의 뜻을 모델화하고 설명한다. 학생들에게 수직으로 서 있게 하고, 그들의 팔을 수직으로 들게 한다.’³¹⁾와 같이 용어를 약속하기보다는 행동으로 설명하고 있다.

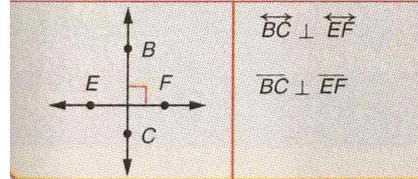
한국교과서는 관계를 나타낸 수준으로 1b수준, EM교과서는 행동으로 의미를 연상시키는 0수준이다.

30) Explain that if two lines in the same plane are not parallel, they must intersect(meet) at a point somewhere. Write intersect on the board and illustrate.

31) Model and discuss the meaning of the word vertical. Have children stand in a vertical position, raise their arms in a vertical position.



[그림 III-25] 수직과 수선(교육부, 2014d, p.55)



[그림 III-26] 수선(Bell,M.,et al., 2012i, p.169)

수선을 살펴보면, 한국교과서는 ‘두 직선이 서로 수직으로 만나면 한 직선을 다른 직선에 대한 수선이라고 합니다.’(교육부, 2014d, p.55)이다. CCSSM은 ‘직각으로 교차하는 직선들³²⁾’(Bell,M.,et al., 2012i, p.169)이라고 약속하고, ‘ $\overline{BC} \perp \overline{EF}$ ’라는 기호로 표현한다.

한국교과서는 관계를 나타내는 수준인 1b수준의 정의수준을 사용하였고, EM 교과서는 관계를 나타내는 수준인 1b수준과 대상 기호를 사용하는 수준인 2a수준을 함께 사용하였다.

아. 삼각형(Triangle)

1) 삼각형(triangle)

한국교과서는 삼각형을 ‘그림과 같은 모양의 도형을 삼각형이라고 합니다.’(교육부, 2013c, p.59)라고 약속한다. 읽고 쓰는 것은 5학년 2학기에 처음 등장하는데, 따로 언급하지 않고 삼각형 \triangle 이라고 표현되어 있다.

EM교과서는 삼각형을 grade1에서 패턴블럭 템플릿(Pattern-Block Template)을 보여주고 도형과 그 이름을 제시하는 과정에서 삼각형을 도입한다. 삼각형이 어떤 모양인지 알고 어떤 특징이 있는지 친구들과 토론하는 활동을 하거나, 다른 도형과 비교하는 활동을 한다. 그 후, 약속하기는 grade3에서 나오는 데, 다음과 같다. ‘삼각형은 다각형 중 가장 단순한 타입이다. 접두사 ‘tri’는 3을 의미한다. 모든 삼각형은 3개의 변, 3개의 꼭짓점, 3개의 각을 갖고 있다. 변은 \overline{BC} , \overline{BA} , \overline{CA} 이다. 변은 삼각형을 이루는 선분이다. 꼭짓점은 점 B, C, A이다. 두 변이 만나는 각각의 종점을 꼭짓점(vertex)라고 한다. 각은 $\angle B$, $\angle C$, $\angle A$ 이다.

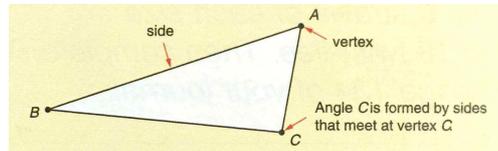
32) Line that intersect at right angles

각은 꼭짓점에서 만나는 두 변으로 형성된다. 예를 들어, $\angle B$ 는 \overline{BC} 와 \overline{BA} 로 이루어져 있다. 삼각형은 3개의 문자를 갖고 있다. 너는 문자를 각 꼭짓점 순서대로 나열하여 삼각형의 이름을 붙일 수 있다. 예시에 있는 삼각형은 아래 6개의 가능한 이름이 있다. 삼각형 BCA, BAC, CAB, CBA, ABC, ACB.³³⁾(Bell, M.,et al., 2012e, p.422)

또한 삼각형 기호의 사용을 ‘삼각형의 이름을 쓸 때, 삼각형이라는 단어 대신, 작은 삼각형을 사용할 수 있다. 예를 들어, $\triangle ABC$ 가 있다.³⁴⁾(Bell, M.,et al., 2012e, p.422)로 언급한다.



[그림 III-27] 삼각형(교육부, 2013c, p.59)



[그림 III-28] 삼각형(Bell, M.,et al., 2012e, p.422)

삼각형을 도입하는 것은 한국교과서는 2학년에, EM교과서는 grade1에 도입한다.

한국은 삼각형의 모양을 제시하여 정의하는 0수준을 사용하였다. EM교과서는 grade1에서 한국과 마찬가지로 삼각형의 모양만을 제시하면서 삼각형이라고 말하는, 시각적 외형을 제시하는 0수준을 사용하였다. 하지만, grade3에서 각 꼭짓점에 기호를 사용하는 것이 추가되었고, ‘변’, ‘꼭짓점’, ‘각’이 각각 3개라고 설

33) Triangles are the simplest type of polygon. The prefix “tri-” means three. All triangles have 3 sides, 3 vertices, and 3 angles. The sides are \overline{BC} , \overline{BA} , and \overline{CA} . The sides are the line segments that form the triangle. The vertices are the points B, C, and A. Each endpoint where two sides meet is called a vertex. The angles are $\angle B$, $\angle C$, and $\angle A$. An angle is formed by the two sides that meet at a vertex. For example, $\angle B$ is formed by \overline{BC} and \overline{BA} . Triangles have 3-letter names. You name a triangle by listing the letters for each vertex in order. The triangle in the example above has 6 possible name. triangle BCA, BAC, CAB, CBA, ABC, or ACB.

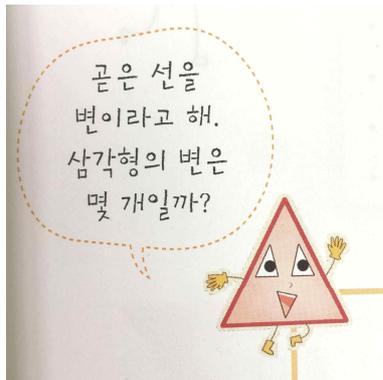
34) When writing triangle names on paper, you can use a little triangle (\triangle) instead of the word triangle; for example, $\triangle ABC$.

명하며 성질을 기술하였다. 또한 ‘다각형’이라는 정확한 류를 제시함으로써 류와 종차에 의한 정의수준인 1b수준이라 할 수 있다. 삼각형 기호인 ‘△’과 A,B,C의 기호를 사용하면서 약속하는 2수준도 사용했다고 할 수 있다.

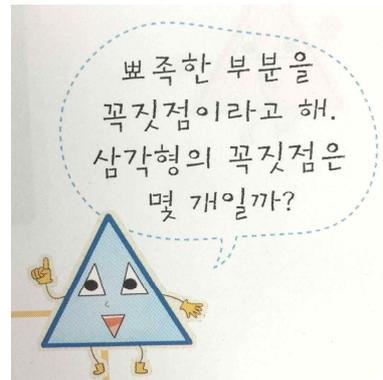
2) 삼각형의 구성요소(side, vertex)

삼각형의 구성요소인 ‘변’을 살펴보면, 한국교과서는 분석된 성질과 동의어가 동시에 사용되는 경우인 1a수준을 사용하였고, EM교과서는 예시적 언어가 사용되는 경우인 1a수준이다.

삼각형의 구성요소인 ‘꼭짓점’을 살펴보면, 한국교과서는 분석된 성질을 기술하되, ‘뾰족한 부분’이라는 일상적 용어를 사용하는 경우인 1a수준이다. EM교과서는 관계가 기술되는 경우로 1b수준이다. 뾰족한 부분은 7 부분인지 · 인지 혼동할 수 있어, ‘점’이라고 표현하는 것이 더 엄밀하다.



[그림 III-29] 변(교육부, 2013c, p.59)



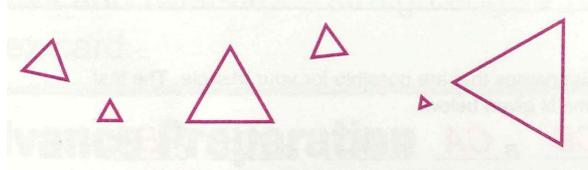
[그림 III-30] 꼭짓점(교육부, 2013c, p.59)

3) 정삼각형 (Equilateral Triangles)

한국교과서는 ‘세 변의 길이가 같은 삼각형을 정삼각형이라고 합니다.’(교육부, 2014c, p.103)라고 약속한다. EM교과서는 ‘등변삼각형은 세 변의 길이가 같은 삼각형이다. 모든 등변삼각형은 같은 모양을 갖고 있다.’³⁵⁾(Bell,M.,et al., 2012e,

35) An equilateral triangle is a triangle with all 3 sides the same length. All equilateral triangles have the same shape.

p.422)라고 약속한다.

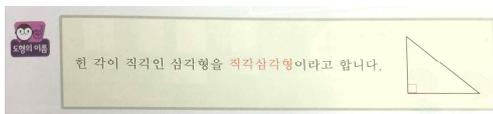


[그림 III-31] 등변삼각형(Bell,M.,et al., 2012e, p.422)

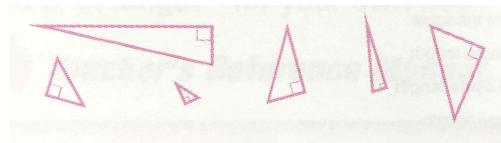
정의수준은 두 교과서 모두 ‘삼각형’이라는 류를 제시함으로써 류와 종차에 의한 정의로 1b수준이다. 정의내용을 살펴보면, EM교과서에서 ‘같은 모양’이라는 말을 언급하고 있는데, 이는 길이는 다르되 세 각이 모두 같은 것으로 ‘닮음’을 의미한다. 닮음(similarity)에 대한 정의는 EM교과서 grade6까지 언급하지 않으나, 비슷한 용어인 ‘같은 모양’이라는 말을 사용함으로써 학생들에게 닮음의 개념을 간접적으로 제시함을 알 수 있다.

4) 직각삼각형(Right Triangles)

한국교과서는 ‘한 각이 직각인 삼각형을 직각삼각형이라고 합니다.’(교육부, 2014a, p.65)라고 약속한다. EM교과서는 ‘직각삼각형은 한 각이 직각인 삼각형이다. 직각삼각형은 다양한 형태의 모양일 수 있다.³⁶⁾’(Bell,M.,et al., 2012e, p.422)라고 약속한다.



[그림 III-32] 직각삼각형(교육부, 2014a, p.65)



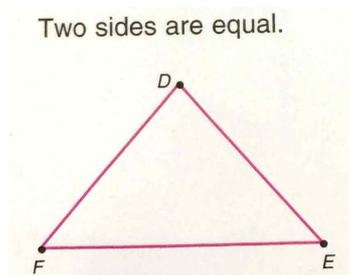
[그림 III-33] 직각삼각형(Bell,M.,et al., 2012e, p.422)

36) A right triangle is a triangle with 1 right angle(square corner). Right triangles can have many different shapes.

정의수준은 두 교과서 모두 ‘삼각형’이라는 류를 제시함으로써 류와 종차에 의한 정의로 1b수준이다. 정의내용에서 EM교과서는 ‘다양한 형태의 모양’이라고 추가 설명하는데, 이는 직각삼각형들은 서로 닮음이 아닐 수 있음을 언급한 것이다. 이는 정삼각형과 마찬가지로 닮음의 개념을 간접적으로 제시했다고 할 수 있다.

5) 이등변삼각형(isosceles triangle)

한국교과서는 ‘두 변의 길이가 같은 삼각형을 이등변삼각형이라고 합니다.’(교육부, 2014c, p.103)라고 한다. EM교과서는 ‘적어도 두 변의 길이가 같은 삼각형. 적어도 두 내각이 같다.’³⁷⁾(Bell,M.,et al., 2012e, p.423)라고 약속한다.



[그림 III-34] 이등변삼각형(Bell,M.,et al., 2012e, p.424)

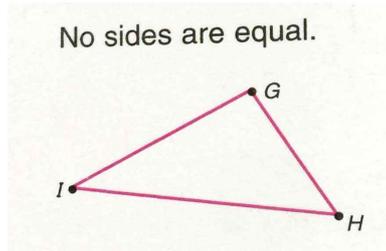
정의수준은 두 교과서 모두 ‘삼각형’이라는 류를 제시함으로써 류와 종차에 의한 정의로 1b수준이다. 정의내용에서 EM교과서는 길이에 대한 설명뿐만 아니라 내각에 대한 설명도 추가하였다. 한국교과서는 길이의 관점으로 삼각형을 분류하였고, EM교과서는 각과 길이, 두 가지 관점을 모두 사용하여 분류하였다는 점에서 다르다.

6) 부등변삼각형(scalene triangle)

EM교과서는 ‘세 가지 다른 길이의 변을 갖는 삼각형. 모든 세 개의 변이 다

37) A triangle with at least two sides that are the same length. At least two angles have the same measure.

른 각도이다.³⁸⁾(Bell,M.,et al., 2012e, p.423)라고 약속한다.



[그림 III-35] 부등변삼각형(Bell,M.,et al., 2012e, p.424)

정의수준은 류와 종차에 의한 정의로 1b수준이다. 한국교과서는 부등변삼각형을 따로 약속하지 않기 때문에 EM교과서와 비교할 수 없다.

7) 예각삼각형(acute triangle)과 둔각삼각형(obtuse triangle)

한국교과서는 ‘세 각이 모두 예각인 삼각형을 예각삼각형이라고 합니다. 한 각이 둔각인 삼각형을 둔각삼각형이라고 합니다.’(교육부, 2014c, p.100)라고 약속한다. EM교과서는 ‘모든 각이 90도보다 작은 삼각형.³⁹⁾ 한 각이 90도보다 큰 삼각형.⁴⁰⁾(grade3 volumel p.423)라고 약속한다.

두 교과서 모두 삼각형이라는 류를 제시함으로써 류와 종차에 의한 정의인 1b수준이다.

자. 사각형(quadrangle)

1) 사각형(quadrangle/quadrilateral)

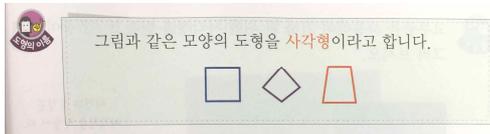
한국교과서는 ‘그림과 같은 모양의 도형을 사각형이라고 합니다.’(교육부, 2013 c, p.63)라고 약속한다. EM교과서는 사각형을 grade1에서 [그림III-37]과 같이 네 개의 변으로 이루어진 다각형으로 표현하다가, grade2에서 [그림III-38]처럼 사각형이라는 용어를 사용한다. 그리고 ‘이러한 평면도형은 모두 사각형이다. 사

38) A triangle with sides that are three different lengths. All three angles have different measures.

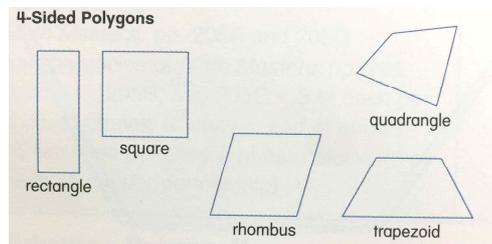
39) A triangle in which all angles are less than 90°.

40) A triangle in which one angle is larger than 90°.

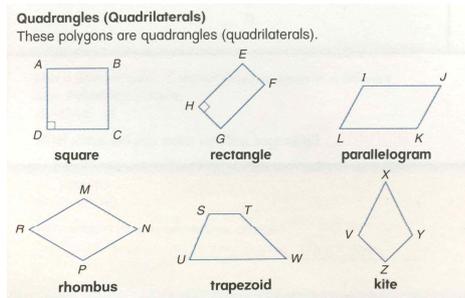
각형은 사변형이라고도 불린다. 사각형은 4개의 변, 4개의 각, 4개의 꼭짓점을 갖는다.⁴¹⁾(Bell,M.,et al., 2012c, p.339)라고 설명한다. ‘사각형은 4개의 변을 갖고 있는 다각형이다. 사각형의 다른 이름은 사변형이다. 접두사 “quad-”는 4를 뜻한다. 모든 사각형은 4개의 변, 4개의 꼭짓점, 4개의 각을 갖는다. 변들은 \overline{RS} , \overline{ST} , \overline{TU} , \overline{UR} 이다. 꼭짓점들은 R, S, T, U이다. 각들은 $\angle R$, $\angle S$, $\angle T$, $\angle U$ 이다.⁴²⁾(Bell,M.,et al., 2012e, p.428)



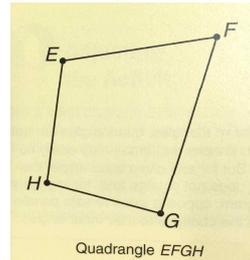
[그림 III-36] 사각형(교육부, 2013c, p.63)



[그림 III-37] 4개의 변인 다각형(Bell,M.,et al., 2012b, p.640)



[그림 III-38] 사각형(Bell,M.,et al., 2012c, p.340)



[그림 III-39] 사각형(Bell,M.,et al., 2012e, p.428)

한국교과서는 2학년 때 사각형을 도입하고, EM교과서는 grade1에서 도입한다.

41) These 2-dimensional shapes are all quadrangles. Quadrangles are also called quadrilaterals. A quadrangle has 4 sides, 4 angles, and 4 vertices.

42) A quadrangle is a polygon that has 4 sides. Another name for quadrangle is quadrilateral. The prefix “quad-” means four. All quadrangles have 4 sides, 4 vertices, and 4 angles. The sides are \overline{RS} , \overline{ST} , \overline{TU} , and \overline{UR} . The vertices are R, S, T, and U. The angles are $\angle R$, $\angle S$, $\angle T$, and $\angle U$.

정의수준을 살펴보면, 한국교과서는 ‘도형’이라는 표현을 사용하여 류의 제시가 불완전하고, 시각적 외형인 모양만을 제시하여 0수준이다. EM교과서의 grade1과 grade2는 시각적 외형을 제시한 0수준이다. 같은 0수준이더라도, grade2에서는 꼭짓점에 기호를 붙여 제시하였다. grade3에서 약속한 사각형은 ‘다각형’이라는 류를 제시함으로써 류와 종차에 의한 정의로 1b수준이다. 그리고 grade1-2에서 대상기호를 사용하지 않고 약속하다가 grade3에서 대상기호인 E, F, H, G를 사용하여 약속함으로써 더 기하학적으로 정의하였다.

두 교과서 모두 사각형 모양을 제시하면서 ‘사각형’이라는 용어를 제시한다. EM교과서는 각 사각형의 구체적 이름(직사각형, 정사각형, 평행사변형, 마름모, 사다리꼴, 연꼴 등)을 설명 없이 제시하는 점이 한국교과서와 다르다. 도형을 약속할 때, 이름을 먼저 언급하고 그 도형을 분석한 후, 다음 단계에 그 도형의 정의를 제시하는 전반적인 특징이 보인다.

정의내용을 보면, EM교과서는 동의어인 ‘사변형’을 제시한다. 이는 사변형이라는 단어를 잘 사용하지 않는 한국과 달리 ‘quadrilateral’을 자주 사용하는 미국의 문화적 차이에서 오는 것이라 할 수 있다. ‘quad-’의 뜻을 설명한 것으로 오각형, 육각형을 설명하기 위하여 ‘angle’ 앞에 붙이는 접두사로 설명한 것이다. 한국의 경우 ‘사’라는 단어가 숫자 ‘4’를 직관적으로 가리키기 때문에 따로 설명하지 않아도 된다. 이는 언어에서 오는 차이라 할 수 있다.

사각형을 읽고 쓰는 것을 살펴보면, 한국의 경우 따로 약속하지 않는다. EM교과서는 ‘사각형의 이름은 어떠한 꼭짓점의 문자로부터도 가능하고, 시계방향이나 시계반대방향으로도 읽을 수 있다. 꼭짓점들은 반드시 연속하여야 한다. 예를 들어, 칠판의 사각형은 HEFG, EFGH, FGHE로 쓸 수 있지만, HFGE는 안된다.’⁴³⁾(Bell, M., et al., 2012e, p.428)고 약속한다.

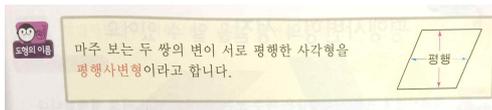
EM교과서는 도형을 약속할 때마다, 도형을 읽는 순서를 중요시 여기고 있었다. 반면, 한국교사용지도서에서는 다음과 같이 언급하며 도형을 읽는 순서나 방법에 얽매이지 않는다.

43) Explain that the name of a quadrangle can begin with the letter at any vertex and can be read either clockwise or counterclockwise. Vertices must be named consecutively. For example, the quadrangle on the board can be named HEFG, EFGH, FGHE, and so on—but not HFGE.

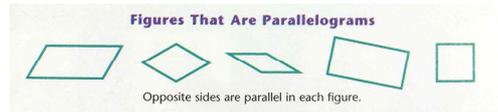
도형을 기호로 읽을 때, 기호의 순서나 방향에 대하여 너무 엄밀한 잣대를 들이 대지 않도록 주의한다. 예를 들어, ‘면ㄱㅅㅇㄴ’을 ‘면ㅅㅇㄴㄱ’이라고 읽어도 되고, ‘면ㅇㅇㅅㄱ’이라고 읽어도 된다. 심지어 ‘면ㄱㅇㅅㄴ’이라고 순서가 엇갈리게 읽어도 바람직하지는 않지만 틀렸다고 말할 수는 없다.”(교육부, 2015g, p.119)

2) 평행사변형(parallelogram)

한국교과서는 ‘마주 보는 두 쌍의 변이 서로 평행한 사각형을 평행사변형이라고 합니다.’(교육부, 2014d, p.87)라고 약속한다. EM교과서는 grade2에서 설명 없이 그림을 제시하며 평행사변형이라고 한 후, ‘어떤 사각형은 두 쌍의 평행한 변을 갖는다. 이러한 사각형을 평행사변형이라고 한다.44)’(Bell,M.,et al., 2012e, p.428)라고 약속한다.



[그림 III-40] 평행사변형(교육부, 2014d, p.87)



[그림 III-41] 평행사변형(Bell,M.,et al., 2012e, p.428)

한국교과서는 사각형이라는 류를 제시함으로써 류와 종차에 의한 정의인 1b 수준이다. EM교과서는 전자는 설명 없이 외형만을 제시한 0수준, 후자는 1b수준이다. 도입시기는 한국교과서는 4학년에서, EM교과서는 grade2에서 도입하는 것으로 시기적 차이가 있다.

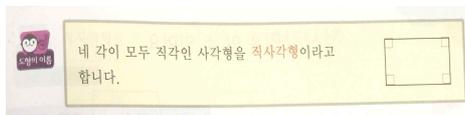
3) 직사각형(Rectangle)

우리나라는 3학년에서, EM교과서는 grade1에서 도입한다.

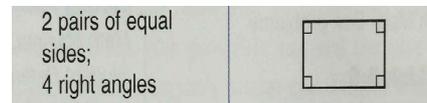
한국교과서는 ‘네 각이 모두 직각인 사각형을 직사각형이라고 합니다.’(교육부, 2014a, p.67)라고 약속한다. EM교과서는 grade1-2에서 설명 없이 그림을 제시

44) Some quadrangles have 2 pairs of parallel sides. These quadrangles are called parallelograms.

하며 직사각형이라고 한 후, ‘직사각형은 평행사변형이다. 그들은 4개의 직각을 갖고 있다. 직사각형의 변은 모두 같은 길이일 필요는 없다.’(Bell,M.,et al., 2012e, p.428)라고 약속한다. 두 정의 모두 류와 종차에 의한 정의이다. 다른 점은 EM교과서는 사각형이라는 류보다 더 좁은 범위인 ‘평행사변형’이라는 류 안에서 직사각형을 설명한다는 점이다. 도입시기를 볼 때, 두 교과서의 차이는 직각의 도입시기와 비교할 수 있다. 한국교과서는 3학년 때, 직각을 배운 후 직사각형을 도입한다. EM교과서는 직각을 도입하기 전에 grade1과 grade2에서 직사각형을 먼저 모양으로 인식하게 한 후, 직각을 배운다. 그 후, grade3에서 직각을 정의한 후에 직사각형을 직각에 의하여 정의한다.



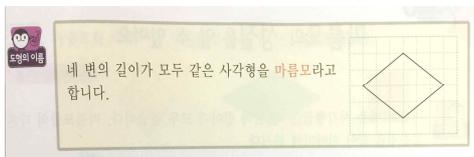
[그림 III-42] 직사각형(교육부, 2014d, p.87)



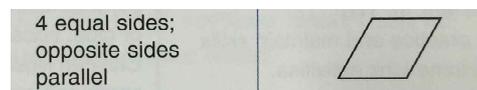
[그림 III-43] 직사각형(Bell,M.,et al., 2012e, p.431)

4) 마름모(rhombus)

한국교과서는 ‘네 변의 길이가 모두 같은 사각형을 마름모라고 합니다.’(교육부, 2014d, p.91)라고 한다. EM교과서는 grade1-2에서 설명 없이 그림을 제시하며 마름모라고 한 후, ‘마름모는 평행사변형이다. 그들의 4변은 모두 같은 길이이다.’(Bell,M.,et al., 2012e, p.428)라고 한다.



[그림 III-44] 마름모(교육부, 2014d, p.91)



[그림 III-45] 마름모(Bell,M.,et al., 2012e, p.431)

45) Rectangles are parallelograms. They have 4 right angles(square corners). The sides of a rectangle do not all have to be the same length.

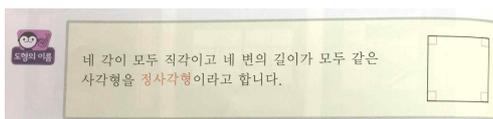
46) rhombuses are parallelograms. Their 4 sides are all the same length.

마름모를 도입하는 시기는 두 나라 사이에 차이가 많이 난다. 우리나라는 4학년에서 도입하고, EM교과서는 grade1에서 우리나라에 비하여 일찍 도입한다.

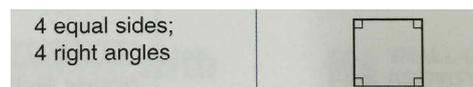
두 정의 모두 류와 종차에 의한 정의로 1b수준이다. 다른 점은 EM교과서는 사각형이라는 류보다 더 근접한 ‘평행사변형’이라는 류 안에서 평행사변형을 정의한다는 점이다. 이는 사각형을 평행사변형과 평행사변형이 아닌 사각형으로 나누는 EM교과서의 특징이라고 볼 수 있다.

5) 정사각형(square)

한국교과서는 ‘네 각이 모두 직각이고 네 변의 길이가 모두 같은 사각형을 정사각형이라고 합니다.’(교육부, 2014a, p.68)라고 한다. EM교과서는 grade1-2에서 설명 없이 그림을 제시하며 정사각형이라고 한 후, ‘정사각형은 평행사변형이다. 그들은 4개의 직각을 갖고 있다. 그들의 4변은 모두 같은 길이이다. 모든 정사각형은 직사각형이다. 모든 정사각형은 마름모이다.’(Bell,M.,et al., 2012 e, p.428)라고 한다.



[그림 III-46] 정사각형(교육부, 2014d, p.91)



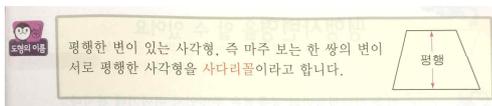
[그림 III-47] 정사각형(Bell,M.,et al., 2012e, p.431)

두 정의 모두 류와 종차에 의한 정의로 1b수준이다. 다른 점은 EM교과서는 사각형이라는 류보다 더 근접한 ‘평행사변형’이라는 류 안에서 정의한 후, ‘평행사변형’보다 좁은 개념인 ‘직사각형’, ‘정사각형’의 류를 제시함으로써, 개념이 더 엄밀해지고 있다는 것이다.

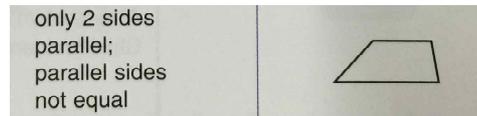
6) 사다리꼴(trapezoid)

47) Squares are parallelograms. They have 4 right angles(square corners). Their 4 sides are all the same length. All squares are rectangles. All squares are rhombuses.

한국교과서는 ‘평행한 변이 있는 사각형, 즉 마주 보는 한 쌍의 변이 서로 평행한 사각형을 사다리꼴이라고 합니다.’(교육부, 2014d, p.85)라고 약속한다. EM 교과서는 grade1-2에서 설명 없이 그림을 제시하며 사다리꼴이라고 한 후, ‘사다리꼴은 오직 1쌍의 평행한 변을 갖고 있다. 그들의 4변의 길이는 모두 다를 수 있다.’(Bell,M.,et al., 2012e, p.428)라고 약속한다.



[그림 III-48] 사다리꼴(교육부, 2014d, p.91)



[그림 III-49] 사다리꼴(Bell,M.,et al., 2012e, p.431)

도입시기에서 한국교과서는 4학년에, EM교과서는 grade1에서 도입하는 것으로 비교적 빠른 시기에 도입한다. EM교과서에서 grade1에서 정의하지 않는 것은 평행의 개념이 아직 정의되지 않았기 때문이다. 두 교과서에서 사다리꼴을 약속하는 것은 평행을 약속한 이후이다. 한국교과서는 4학년에 평행을 약속하고, 사다리꼴을 약속하였다. EM교과서 또한 grade3에서 평행을 약속한 후에 사다리꼴을 약속한다.

정의수준을 살펴보면 한국은 사각형이라는 류를 제시함으로써, 류와 종차에 의한 정의로 1b수준이지만, EM교과서는 류의 제시가 불완전한 경우로 1a수준이다.

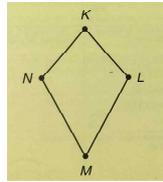
정의내용을 살펴보면, 두 교과서가 다른 부분이 있다. 한국은 ‘한 쌍의 변이 서로 평행한 사각형’이라고 사다리꼴을 정의하는데, 이는 사다리꼴 안에 평행사변형이 포함될 수 있음을 시사한다. 하지만, EM교과서는 ‘exactly’라는 강조를 통해 ‘오직 한 개의 평행한 변’만을 사다리꼴로 정의한다. 이는 평행사변형은 사다리꼴이 될 수 없음을 나타내는 것이다.

7) 연꼴(kite)

한국교과서는 연꼴에 대한 정의를 하지 않고, 연꼴 모양의 사각형을 다루지

48) Trapezoids have exactly 1 pair of parallel sides. Their 4 sides can all be different lengths.

않는다. EM교과서에서는 grade2에서 설명 없이 그림을 제시하며 연꼴이라고 한 후, ‘연꼴은 두 쌍의 같은 길이의 변을 가진 사각형이다. 같은 길이인 변은 서로 인접해있다. 그들의 4변은 모두 같은 변일 수 없다. 마름모는 4변의 길이가 모두 같으므로 연꼴이 아니다.’⁴⁹⁾(Bell,M.,et al., 2012e, p.428)와 같이 약속하고 있다.



[그림 III-50] 연꼴(Bell,M.,et al., 2012e, p.429)

정의수준은 류와 종차에 의한 정의로 1b수준이다.

차. 원(circle)

1) 원(circle)

한국교과서는 ‘그림과 같이 동그란 모양의 도형을 원이라고 합니다.’(교육부, 2013c, p.55)라고 한다. EM교과서는 두 번에 걸쳐 약속하는데, 먼저 컴퍼스로 그리고 원이라고 약속한다. 그 후에 ‘원은 원의 중심이라 불리는 한 점으로부터 주어진 같은 거리에 있는 모든 점들의 집합이다.’⁵⁰⁾(Bell,M.,et al., 2012g, p.53)라는 논리적 정의를 한다.



[그림 III-51] 원(교육부, 2013c, p.55)

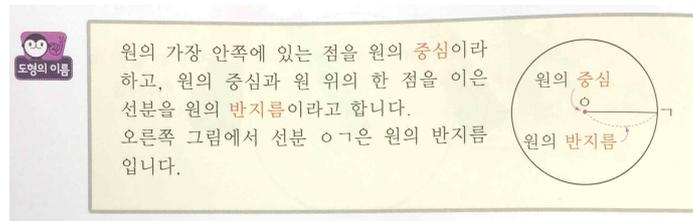
49) Kites are 4-sides polygons with 2 pair of equal sides. The equal sides are next to each other. Their 4 sides cannot all be the same length. A rhombus is not a kite because all 4 sides of the rhombus are the same length.

50) A circle is the set of all points that are a given distance from a given point called the center of the circle.

정의수준을 살펴보면, 한국의 경우 시각적 외형을 지시하는 0수준이다. EM교과서는 전자는 시각적 외형을 지시한 0수준이고, 후자는 논리적 정의인 1b수준이다. 단순한 수준으로 정의한 후, 점차 수학적 엄밀성을 더한 수준으로 정의하는 EM교과서의 특징을 볼 수 있다. 도입시기를 보면, 한국교과서는 2학년에서 도입하고, EM교과서는 grade3에서 도입한다.

2) 원의 중심(center of the circle)

다음은 원의 구성요소를 살펴보겠다. 우선 ‘원의 중심’(center of the circle)을 보면, 한국은 ‘원의 가장 안쪽에 있는 점을 원의 중심이라고 합니다.’(교육부, 2014b, p.80)라고 한다. EM교과서는 ‘컴퍼스의 앵커였던 지점에 있는 점을 원의 중심이라고 한다; 원의 중심은 원의 부분이 아니다.⁵¹⁾’(Bell,M.,et al., 2012g, p.49)라고 약속한다.



[그림 III-52] 원의 중심(교육부, 2014b, p.80)

정의수준을 살펴보면, 한국은 원과의 관계로 기술되는 경우로 1b수준이다. EM교과서는 행동을 기술하는 방법으로 0수준이다. 정의내용에서 EM교과서는 ‘원의 중심이 원의 부분이 아니다’라는 점을 강조한다. 이는 원이 원의 내부를 포함하지 않음을 말한다. 원이 ‘점들의 집합’이라는 정의를 강조함을 알 수 있다.

한국교사용지도서에서는 원의 중심을 가장 안쪽에 있는 점이라고 약속한 이유를 다음과 같이 설명하고 있다. 누름 못이 꽂힌 자리를 원의 중심이라고 부르

51) The point located at the anchor of the compass is called the center of the circle; the center is not part of the circle.

는 방법은 특수한 한 경우에 따른 것이므로 정의의 일반성이 크게 떨어진다. 원의 가장 안쪽에 있는 점을 생각하려면 원주 위의 각 점으로부터의 거리도 생각해 봐야 하므로 수학적 정의를 보다 분석적으로 생각해 보게 하는 계기도 마련해 줄 수 있고, 또한 간편한 표현이라는 장점이 있다.(교육부, 2014f, p.192)

3) 원의 반지름(radius)

‘원의 반지름’(radius)을 살펴보면, 한국은 ‘원의 중심과 원 위의 한 점을 이은 선분을 원의 반지름이라고 합니다. 선분 OR 은 원의 반지름입니다.’(교육부, 2014b, p.80)이라고 약속한다. EM교과서는 ‘원의 반지름은 원의 중심으로부터 원의 어떤 점까지 이은 선분이다. 이것은 그 선분의 길이이기도 하다.’⁵²⁾(Bell, M., et al., 2012g, p.53)라고 한다.

한국교과서의 정의수준은 예시적 언어가 사용되는 경우로 1a수준이다. EM교과서는 관계가 기술되는 경우로 1b수준이다. 정의내용에서 EM교과서는 반지름이 ‘길이’의 개념으로도 사용됨을 언급했다. 한국의 경우 약속하기를 통하여 언급하지는 않지만, 교사용지도서에서 ‘반지름과 지름은 선분을 지칭하는 용어 이면서 동시에 이런 선분들의 길이를 나타내는 데에도 쓰인다.’(교육부, 2014b, p.191)라고 설명하고 있다. 이는 두 교과서의 공통점이라고 할 수 있다.

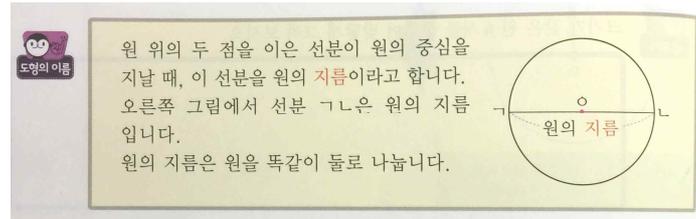
4) 원의 지름(diameter)

‘원의 지름’(diameter)를 살펴보면, 한국은 ‘원 위의 두 점을 이은 선분이 원의 중심을 지날 때, 이 선분을 원의 지름이라고 합니다. 오른쪽 그림에서 선분 AB 은 원의 지름입니다. 원의 지름은 원을 똑같이 둘로 나눕니다.’(교육부, 2014b, p.80)라고 약속한다. EM교과서는 ‘원의 지름은 원의 중심을 통과하고 양 종점이 원 위에 있는 어떤 선분이다. 반지름과 지름은 길이의 이름으로도 쓰인다. 예를 들어, 원의 반지름이 2인치이면, 지름은 4인치이다.’⁵³⁾(Bell, M., et al., 2012

52) The radius of a circle is a line segment from the center of a circle to any point on the circle. It is also the length of such a line segment.

53) The diameter of a circle is any line segment that passes through the center of the circle and has its endpoints on the circle. Radius and diameter are also used to name length. For example, the radius of the circle is 2 inches and the diameter is 4 inches.

i, p.178)라고 한다.



[그림 III-53] 원의 지름(교육부, 2014b, p.84)

정의수준을 살펴보면 두 교과서 모두 관계가 기술되는 경우로 1b수준이다. 내용 면에서 조금 다른데, 한국교과서는 ‘원을 똑같이 둘로 나눈다’라는 내용을 추가하였다. 이는 유클리드기하학 원론 중 정의 17에서 “지름은 원을 이등분한다”라고 말한 것과 같은 내용이다. 반지름과 마찬가지로 ‘길이’의 개념으로도 사용됨을 언급하였다.

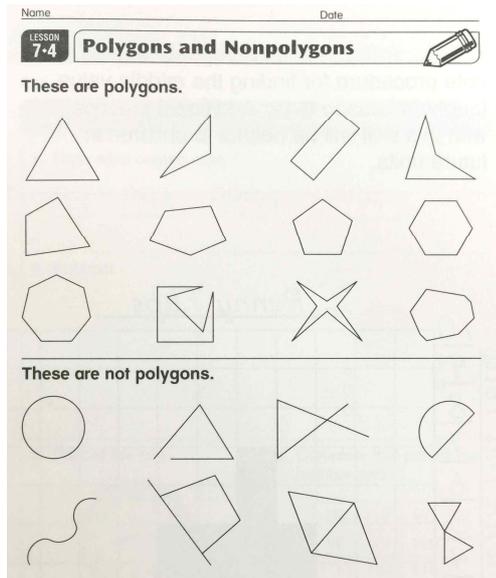
카. 다각형 (polygon)

한국교과서는 ‘선분으로만 둘러싸인 도형을 다각형이라고 합니다.’(교육부, 2014d, p.96)와 같이 약속한다. EM교과서는 두 단계를 거쳐 약속한다. 전자는 ‘다각형은 중점에서만 서로 만나는 선분으로 이루어진 도형이다.’⁵⁴⁾(Bell,M,et al., 2012b, p.635)라고 약속하면서 닫힌 도형에 대한 설명을 덧붙이는 것이다. ‘다각형은 닫힌 도형이다. - 그들의 변은 열린 부분 없이 울타리를 만든다.’⁵⁵⁾(Bell,M,et al., 2012b, p.640)라고 설명하면서 [그림III-54]과 같이 열린 도형과 닫힌 도형을 제시하고 다각형에 대한 이해를 돕는다. 후자는 ‘다각형은 선분으로 구성된 2차원 도형이다. 다각형은 경계이다; 다각형의 안쪽 영역은 다각형의 부분이 아니다. 다각형의 변들이 만나는 점을 꼭짓점이라고 한다. 다각형의 꼭짓점들은 다각형의 이름으로 쓰인다.’⁵⁶⁾(Bell,M,et al., 2012e, p.400)라고 약속한다.

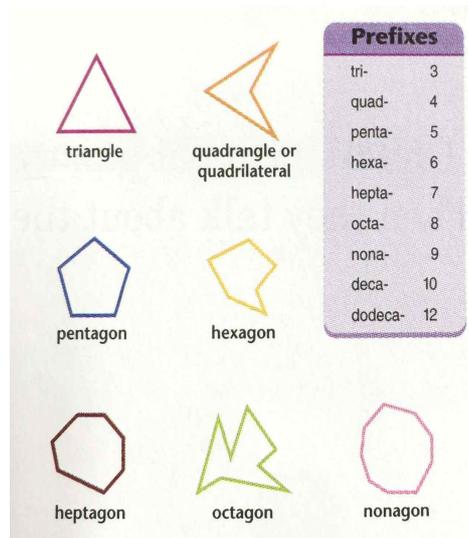
54) A polygon is a shape with all straight sides that touch only at their endpoints.

55) Polygons are "closed" figures - their sides make fences with no openings.

56) Polygons are 2-dimensional figures made up of line segments. A polygon is a boundary;



[그림 III-54] 다각형(Bell,M.,et al., 2012b, p.641)



[그림 III-55] 다각형 이름(Bell,M.,et al., 2012e, p.400)

다각형의 개념을 도입하는 시기는 두 나라의 차이가 매우 크다. 우리나라는 4학년에 도입하고, EM교과서는 grade1에서 먼저 도입한다.

정의수준을 살펴보면, 한국은 분석된 성질을 기술하되 ‘둘러싸인’이라는 일상적 용어를 사용하는 경우로 1a수준이다. EM교과서의 grade1에서 하는 약속은 제한범위가 명확치 않고, 평면도형이라는 류를 제시하지 않았기 때문에 1a수준이다. grade3에서의 약속은 2차원 도형이라는 류를 제시한 1b수준이다. 내용 면에서 EM교과서는 다각형의 안쪽 영역이 다각형의 부분이 아니라는 점을 언급하여, 제한점을 확실하게 제시하였다. 그리고 2차원 도형이라는 점을 언급하였는데, 이는 평면도형과 입체도형 내에서 도형을 설명하지 않는 한국교과서와는 다른 점이라 할 수 있다.

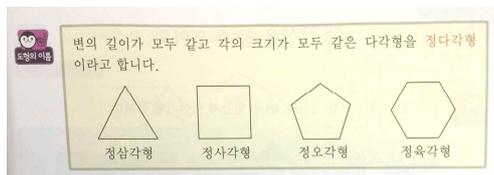
다각형의 이름을 붙일 때, 한국교과서는 ‘다각형은 변의 수에 따라 변이 3개이면 삼각형, 변이 4개이면 사각형, 변이 5개이면 오각형 등으로 부릅니다.’(교육부, 2014d, p.97)라고 약속한다. 한국에서 한자로 ‘각형’ 앞에 ‘일, 이, 삼, ...’을

the region inside the polygon is not part of the polygon. Pairs of sides of a polygon meet at a point called a vertex. The vertices of a polygon can be used to name the polygon.

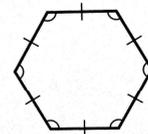
불린다. 이와 다르게 미국은 위 [그림Ⅲ-55]과 같이 'three, four, five, ...'가 아닌 라틴어와 그리스어인 'tri, quad, penta, ...'를 접두사로 사용한다. 삼각형과 사각형만 접미사로 'angle'을 사용하고, 오각형 이후에는 'angle'을 뜻하는 그리스어 'gon'을 사용한다.

타. 정다각형

한국교과서는 '변의 길이가 모두 같고 각의 크기가 모두 같은 다각형을 정다각형이라고 합니다.'(교육부, 2014d, p.99)라고 약속한다. EM교과서는 '정다각형은 모든 변이 같고 모든 각이 같은 다각형이다.⁵⁷⁾(Bell,M.,et al., 2012e, p.434)이다.



[그림 Ⅲ-56] 정다각형(교육부, 2014d, p.99)



A regular hexagon

[그림 Ⅲ-57] 정다각형(Bell,M.,et al., 2012e, p.434)

두 교과서 모두 류와 종차에 의한 정의로 1b수준이다. 내용 면에서 살펴보면, 그림에서 차이점이 있는데, 한국의 경우 정다각형에 알맞은 그림만을 제시한다. CCSSM은 정다각형이 아닌 다각각형과 오목다각형을 제시하여 반례를 들고 있다. 이는 정례만을 제시하는 한국교과서와 다른 점이다.

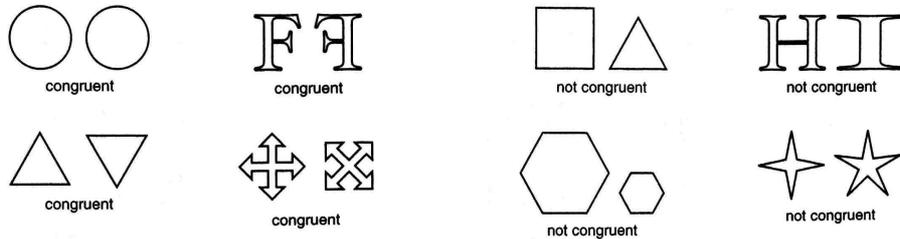
파. 합동

한국교과서는 '모양과 크기가 같아서 포개었을 때 완전히 겹쳐지는 두 도형을 서로 합동이라고 합니다.'(교육부, 2015b, p.49)라고 한다. 그리고 '합동인 두 도형을 완전히 포개었을 때 겹쳐지는 점을 대응점, 겹쳐지는 변을 대응변, 겹쳐지

57) A regular polygon is a polygon in which all the sides are equal and all the angles are equal.

는 각을 대응각이라고 합니다.’(교육부, 2015b, p.51)라고 대응점, 대응변, 대응각을 약속한다.

EM교과서는 ‘정확하게 같은 크기와 같은 모양인 두 도형을 합동인 도형이라고 한다.⁵⁸⁾(Bell,M.,et al., 2012e, p.461), ‘합동인 도형들과 합동이 아닌 도형들의 예시를 살펴보자.⁵⁹⁾(Bell,M.,et al., 2012e, p.457)와 같이 도형을 정의하고, 도형의 정례와 반례를 함께 든다. grade6에서 ‘대응변의 길이가 같고, 대응각의 크기가 같다.⁶⁰⁾(Bell,M.,et al., 2012k, p.364)라는 추가 설명을 통하여, 합동에서 대응변과 대응각을 언급하고 있다.



[그림 III-58] 합동(Bell,M.,et al., 2012e, p.457)

[그림 III-59] 합동 반례(Bell,M.,et al., 2012e, p.457)

도입시기를 보면, 우리나라는 5학년에 도입하고, EM교과서는 grade3에서 도입한다.

정의수준을 살펴보면 두 도형 모두 대체적으로 성질을 기술한 경우인 1a수준이다. EM교과서에서 grade6를 보면, 논리적 정의로 1b수준이다. 이는 학년에 따라 수준을 다르게 제시하는 특징을 엿볼 수 있다.

내용을 살펴보면, EM교과서에서는 정례뿐만 아니라 반례도 들고 있다는 점이 다르다고 할 수 있다. 가장 큰 다른 점은 합동을 나타내는 도형의 범위이다. 우리나라는 원, 삼각형, 사각형의 합동을 다뤘고, EM교과서는 다양한 다각형,

58) Two figures that are exactly the same size and shape are called congruent figures.

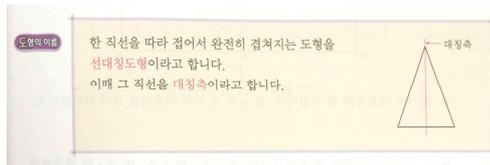
59) Look at the examples of pairs of figures that are congruent and those pairs that are not congruent.

60) Mention that corresponding sides are the same length and corresponding angles have the same degree measure.

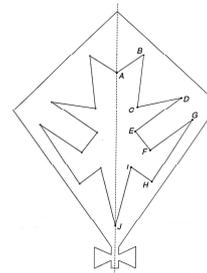
원, 선분을 다뤘다. 여기에서 선분의 합동을 다뤘다는 점이 가장 큰 차이점이다. grade4 volume1에서 ‘선분 CD와 선분AB는 합동이다.’라고 선분의 합동을 다룬다. 이는 선분을 도형으로서 기하적인 관점에서 다룬 것이라고 할 수 있다. 또한 EM교과서에서는 각의 합동도 다루고 있다.

하. 선대칭도형(symmetric)과 대칭축(line of symmetry)

한국교과서에서는 ‘한 직선을 따라 접어서 완전히 겹쳐지는 도형을 선대칭도형이라고 합니다. 이 때, 그 직선을 대칭축이라고 합니다.’(교육부, 2015b, p.54)와 같이 선대칭도형과 대칭축을 약속한다. EM교과서에서는 ‘어떤 도형이 한 선으로 반으로 접힐 때, 두 반쪽이 겹쳐진다면, 선대칭이다. 그 접은 선을 대칭축이라고 한다.’(Bell,M.,et al., 2012e, p.452)라고 약속한다.



[그림 III-60] 선대칭도형(교육부, 2015b, p.54)



[그림 III-61] 선대칭도형(Bell,M.,et al., 2012e, p.451)

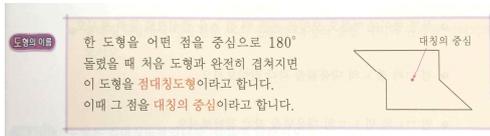
두 교과서 모두 이미지나 행동을 연상하도록 기술하는 방법인 0수준을 사용하여 정의하였다. 두 나라의 도입시기는 한국교과서는 5학년 때 도입하고, EM교과서는 grade3에서 도입한다.

가. 점대칭도형

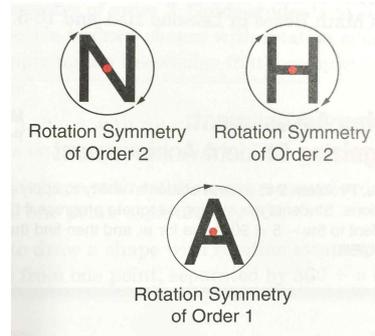
한국교과서는 ‘한 도형을 어떤 점을 중심으로 180° 돌렸을 때 처음 도형과 완전히 겹쳐지면 이 도형을 점대칭도형이라고 합니다. 이때 그 점을 대칭의 중심

61) A shape is symmetric about a line if it can be folded in half along that line so the two halves match. The fold line is called the line of symmetry.

이라고 합니다.’(교육부, 2015b, p.65)라고 약속한다. EM교과서는 점대칭도형을 회전합동 중 특별한 케이스로 여긴다. 회전 합동(rotation symmetry) 중 ‘order of rotation symmetry’가 2인 도형을 점대칭도형이라고 하는데, 이에 대한 약속은 다음과 같다. ‘점대칭 도형은 한 점을 중심으로 180도 돌렸을 때 원래 모양과 정확히 일치하는 도형이다. 대문자 N과 H는 점대칭도형이다. 대문자 A는 점대칭도형이 아니다.’(Bell,M.,et al., 2012l, p.893)



[그림 III-62] 점대칭도형(교육부, 2015b, p.54)



[그림 III-63] 점대칭도형(Bell,M.,et al., 2012l, p.893)

두 교과서의 정의수준 모두 1a수준이다.

나. 평면도형

EM교과서는 ‘삼각형, 사각형, 원은 평면도형이다. 그들은 영역을 차지하고 있지만, 공간을 차지하지는 않는다. 그들은 평평한, 2차원 도형이다. 우리는 종이에 그 도형들을 그릴 수 있다.’(Bell,M.,et al., 2012e, p.463)라고 한다. 또한 grade4에서 ‘다각형과 원들은 평평한, 이차원 도형이다. 그들의 표면은 면적을 갖고 있지만, 두께가 없어서 부피를 가질 수 없다.’(Bell,M.,et al., 2012h, p.856)

62) A figure has point symmetry if it can be rotated 180° around a point to match the original figure exactly. Capital letters N and H have point symmetry; the capital letter A does not.

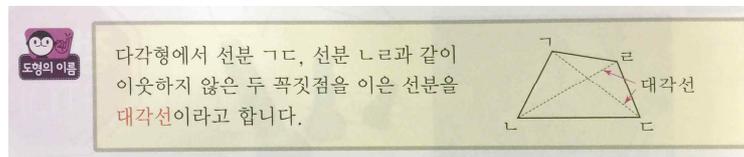
63) Triangles, quadrangles, and circles are flat shapes. They take up a certain amount of area, but they do not take up space. They are flat, 2-dimensional figures. We can draw the figures on a sheet of paper.

와 같이 설명한다.

정의수준을 살펴보면, 전자는 분석된 성질을 대략적으로 기술한 1a수준이고, 후자는 논리적 정의로 1b수준이다.

다. 대각선

한국교과서는 ‘다각형에서 선분 $ㄱㄷ$, 선분 $ㄴㄹ$ 과 같이 이웃하지 않은 두 꼭짓점을 이은 선분을 대각선이라고 합니다.’라고 설명한다. EM교과서는 ‘diagonal’이라는 용어를 사용하지 않고, 설명만 한다. ‘한 꼭짓점에서 공통변을 갖지 않는 다른 꼭짓점으로 이은 선분⁶⁵⁾’(Bell,M.,et al., 2012i, p.193)이라고 설명한다.



[그림 III-64] 대각선(교육부, 2014d, p.100)

한국교과서에서 그림 속 예시를 제시했다는 점이 다를 뿐, 두 교과서 모두 관계를 기술하는 1b수준의 정의수준을 사용하였다.

64) Polygons and circles are flat, 2-dimensional figures. The surfaces they enclose take up a certain amount of area, but they do not have any thickness and do not take up any volume.

65) a line segment from one vertex of a polygon to any other vertex that does not share a common side.

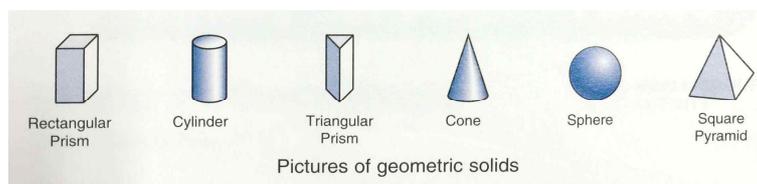
3. 도형별 약속하기 비교(입체도형)

가. 입체도형(geometric solid)

1) 입체도형(geometric solid)

입체도형을 도입하는 시기는 전체적으로 EM교과서가 우리나라보다 빠르다. 주로 고학년에서 입체도형을 다루는 우리나라와는 달리 EM교과서는 grade1에서 가장 먼저 다루고, grade3-4에 걸쳐 정의한다.

한국교과서는 입체도형에 대한 약속을 따로 하지 않는다. EM교과서에서는 입체도형을 ‘입체도형이라는 단어는 표면으로 경계 지어지는 3차원 모양이다. 이것은 모양의 안을 포함하지 않는다. 모양의 표면은 입체도형을 만든다.⁶⁶⁾(Bell, M., et al., 2012e, p.463)와 같이 약속한다. 또한 입체도형의 부피에 관한 설명을 ‘삼차원 도형은 길이와 너비, 두께를 가지고 있다. 그들은 부피를 갖는다. 상자들, 의자들, 공과 같은 것은 모두 그 예이다.⁶⁷⁾(Bell, M., et al., 2012h, p.856)와 같이 한다. 이는 논리적 정의로 1b수준이다. 내용을 보면 입체도형을 면으로 구성한다는 것에 초점을 맞춰서 단일폐곡면 범주로 이해한다. 그렇기 때문에 안을 포함하지 않는다는 것을 강조한다. 한국교과서는 3차원 모양이라는 단어를 사용하지 않는 반면, 미국은 어떤 도형이 2차원인지 3차원 속에서 존재하는 지 중요하게 여긴다. 때문에 입체도형을 3차원 모양 속에서 약속하는 것이다.



[그림 III-65] 입체도형(Bell, M., et al., 2012h, p.855)

66) The term geometric solid refers to a 3-dimensional shape bonded by surfaces, It does not include the interior of the shape. The surfaces of the shape make up the solid.

67) Three-dimensional shapes have length, width and thickness. They take up volume. Boxes, chairs and balls are all examples.

2) 면(surface, face)

입체도형의 구성요소를 살펴보겠다. 입체도형의 ‘면’은 ‘표면’(surface)와 ‘평평한 면’(face)로 구분한다. 한국교과서에서는 면을 ‘그림과 같이 네모 상자 모양에서 선분으로 둘러싸인 부분을 면이라 한다.’(교육부, 2015a, p.41)와 같이 약속한다. EM교과서에서는 ‘어떤 입체도형의 외곽이나 표면을 면이라고 부른다.⁶⁸⁾’(Bell,M.,et al., 2012b, p.646)와 ‘입체도형은 삼차원 도형을 둘러싸는 표면들이거나 표면이다. 입체도형의 표면은 아마도 평평하거나 굽어있거나 둘 다일 것이다. 입체도형의 평평한 표면을 면이라고 한다. 굽은 면은 특별한 이름을 갖지 않는다.⁶⁹⁾’(Bell,M.,et al., 2012h, p.856)라고 약속한다.

정의수준을 살펴보면 한국교과서는 관계가 기술되는 경우로 1b수준이고, EM교과서는 전자의 약속은 ‘skin’이라는 동의어를 사용하면서 정의하는 0수준이고, 후자의 약속은 논리적 정의로 1b수준이다. 내용면에서 면을 나타내는 범위가 다른데, 한국교과서에서는 선분으로 둘러싸인 부분이라 칭하여 ‘평평한 면’만을 ‘면’이라 지칭하고 있음을 알 수 있다. EM교과서에서 ‘면’(surface)은 평평한 면과 굽은 면 모두를 지칭하고 있다.

3) 모서리(edge)와 꼭짓점(vertex)

입체도형의 ‘모서리’를 살펴보면, 다음과 같다. 한국교과서는 ‘면과 면이 만나는 선분을 모서리라고 합니다.’(교육부, 2015a, p.41)라고 한다. EM교과서는 ‘입체도형의 모서리는 표면들이 만나는 선분이거나 곡선이다.⁷⁰⁾’(Bell,M.,et al., 2012h, p.856)라고 한다.

두 교과서 모두 정의수준은 관계가 기술되는 경우로 1b수준이다. 내용면에서 ‘면’과 마찬가지로 범위가 다르다. 한국교과서는 모서리를 ‘선분’에 국한시키고

68) Explain that the outside or "skin" of any of these 3-dimensional shape is called its surface.

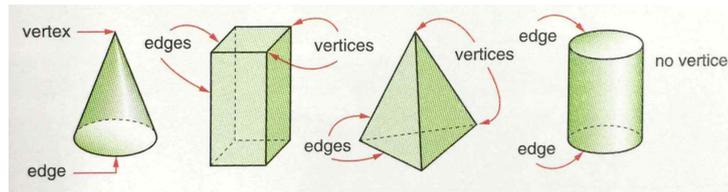
69) A geometric solid is the surface or surfaces that surround a 3-dimentional shape. The surfaces of a geometric solid may be flat or curved or both. A flat surface of a solid is called a face. A curves surface of a solid does not have any special name.

70) The edges of a geometric solid are the line segments or curves where surfaces meet.

있고, EM교과서에서는 ‘선분’과 ‘꼭선’으로 그 범위가 넓다.

입체도형의 ‘꼭짓점’을 살펴보겠다. 한국교과서는 ‘모서리와 모서리가 만나는 점을 꼭짓점이라고 합니다.’(교육부, 2015a, p.41)라고 한다. EM교과서는 ‘입체도형의 모퉁이를 꼭짓점이라고 한다. 꼭짓점은 보통 모서리가 만나는 점이지만, 원뿔의 꼭짓점은 떨어져있다. 이것은 원뿔의 모서리와 완벽히 분리된다.’(Bell, M., et al., 2012h, p.856)라고 한다.

한국교과서는 관계를 기술하는 수준인 1b수준이고, EM교과서는 동의어를 사용하는 0수준과 관계를 기술하는 1b수준을 함께 사용한다. 내용면에서 살펴보면 한국교과서의 경우 ‘꼭짓점’을 모서리가 만나는 점으로 제한시켰기 때문에 약속 상 원뿔의 꼭짓점을 꼭짓점이라고 말할 수 없는 여지가 있다. 하지만, EM교과서는 원뿔의 꼭짓점을 따로 언급함으로써 꼭짓점 속에 원뿔의 꼭짓점을 포함시키고 있다.



[그림 III-66] 모서리와 꼭짓점(Bell, M., et al., 2012h, p.856)

나. 정육면체(cube)

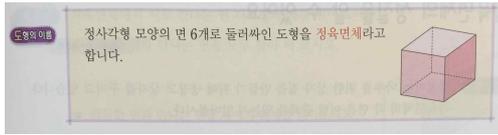
한국교과서는 ‘정사각형 모양의 면 6개로 둘러싸인 도형을 정육면체라고 합니다.’(교육부, 2015a, p.45)라고 한다. EM교과서는 ‘정육면체는 6개의 같은 크기인 정사각형인 면을 갖고 있다.’(Bell, M., et al., 2012h, p.856)라고 약속한다.

도입시기는 한국교과서는 5학년에 도입하고, EM교과서는 grade4에서 도입한다. 정의수준을 살펴보면, 두 교과서 모두 류의 제시가 불완전한 경우로 1a수준

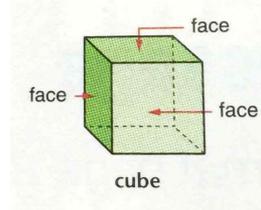
71) A corner of a geometric solid is called a vertex(plural vertices.) A vertex is usually a point at which edges meet, but the vertex of a cone is an isolated corner. It is completely separated from the edge of the cone.

72) A cube has 6 square faces that are the same size.

이다.



[그림 III-67] 정육면체(교육부, 2015a, p.45)



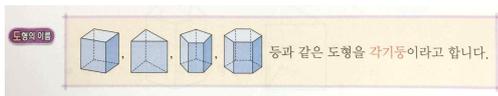
[그림 III-68] 정육면체(Bell,M.,et al., 2012h, p.856)

다. 각기둥(prism)

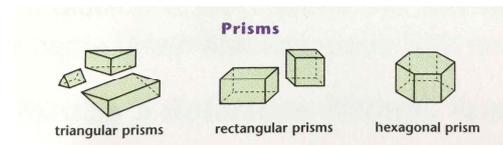
1) 각기둥(prism)

각기둥을 도입하는 시기는 두 나라의 차이가 있다. 우리나라는 6학년에서 도입하고, EM교과서는 grade3에서 도입한다.

한국교과서는 '[그림III-69] 등과 같은 도형을 각기둥이라고 합니다.'(교육부, 2015c, p.13)라고 한다. EM교과서도 [그림III-70]과 같이 나오고 각기둥이라고 한다. 두 교과서 모두 각기둥에 대한 정의를 따로 하지 않고, 그림으로 표현함으로써 시각적 외형을 지시하는 경우로 0수준의 정의수준을 사용한다.



[그림 III-69] 각기둥(교육부, 2015c, p.13)

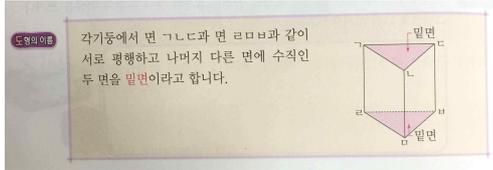


[그림 III-70] 각기둥(Bell,M.,et al., 2012e, p.470)

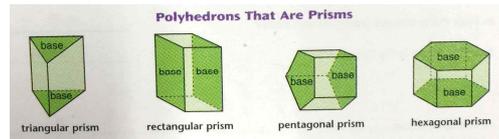
2) 밑면(base)

각기둥의 구성요소를 살펴보겠다. 각기둥의 '밑면'(base)은 다음과 같다. 한국 교과서는 '각기둥에서 면 ABCD와 면EFGH와 같이 서로 평행하고 나머지 다른 면에 수직인 두 면을 밑면이라고 합니다.'(교육부, 2015c, p.14)라고 한다. EM교과서는 '각 각기둥의 두 어두운 면을 각기둥의 밑면이라고 한다. 각기둥의 밑면

은 같은 크기, 같은 모양이다. 그들은 평행하다.⁷³⁾(Bell,M.,et al., 2012h, p.861)라고 약속한다.



[그림 III-71] 각기둥의 밑면(교육부, 2015c, p.14)

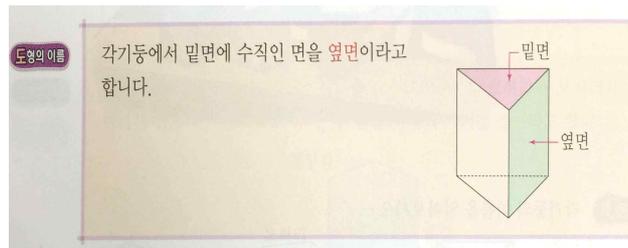


[그림 III-72] 각기둥의 밑면(Bell,M.,et al., 2012h, p.861)

정의수준을 보면, 한국교과서는 관계를 기술하는 1b수준이고, EM교과서는 대체적으로 성질을 기술하는 경우인 1a수준이다.

3) 옆면

각기둥의 ‘옆면’에 대한 약속은 다음과 같다. 한국교과서는 ‘각기둥에서 밑면에 수직인 면을 옆면이라고 합니다.’(교육부, 2015c, p.15)라고 한다. EM교과서는 ‘밑면과 만나는 모든 다른 면들은 평행사변형이다.’(Bell,M.,et al., 2012h, p.861)라고 한다.



[그림 III-73] 각기둥의 옆면(교육부, 2015c, p.15)

한국은 약속하고 있지만, EM교과서는 따로 약속하지 않는다. 내용을 보면 한국교과서의 경우 각기둥을 ‘직각기둥’만 사용하고 있기 때문에, 옆면이 밑면과

73) The two shaded faces of each prism above are called the bases of the prism. The bases of a prism are the same size and shape. They are parallel.

74) All other faces join the bases and are shaped like parallelograms.

수직이다. 따라서 옆면은 항상 직사각형이다. 하지만 EM교과서는 각기둥 속에 빗각기둥도 포함하여 정의하므로, 옆면이 평행사변형이다.

4) 높이

각기둥의 ‘높이’를 살펴보겠다. 한국교과서는 ‘두 밑면 사이의 거리를 높이라고 합니다. 합동인 두 밑면의 대응하는 꼭짓점을 이은 모서리의 길이는 각기둥의 높이와 같습니다. 이 모서리를 각기둥의 높이라고도 합니다.’(교육부, 2015c, p.17)라고 약속한다. 두 밑면의 대응점점을 이은 모서리가 각기둥의 높이와 같은 것은 한국교과서는 직각기둥만을 취급하기 때문이라고 할 수 있다.

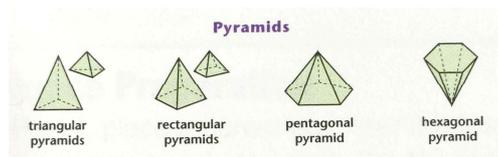
라. 각뿔(pyramid)

1) 각뿔(pyramid)

한국교과서는 ‘[그림Ⅲ-74] 등과 같은 도형을 각뿔이라고 합니다.’(교육부, 2015c, p.19)라고 한다. EM교과서는 [그림Ⅲ-75]과 같이 나오고 각뿔이라고 한다. 두 교과서 모두 각뿔에 대한 정의를 따로 하지 않고, 그림으로 표현함으로써 시각적 외형을 지시하는 경우로 0수준의 정의수준을 사용한다.



[그림 Ⅲ-74] 각뿔(교육부, 2015c, p.19)

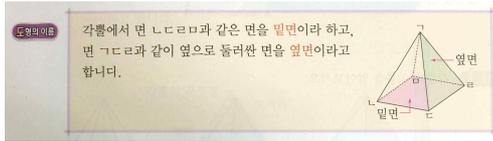


[그림 Ⅲ-75] 각뿔(Bell,M.,et al., 2012e, p.470)

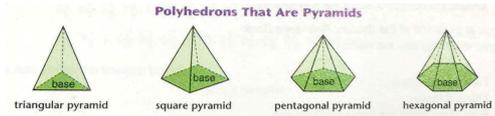
2) 밑면(base)

각뿔의 구성요소를 살펴보겠다. 각뿔의 ‘밑면’(base)에 대한 약속은 다음과 같다. 한국교과서는 ‘각뿔에서 면 \square 과 같은 면을 밑면이라고 한다.’(교육부, 2015c, p.19)이다. EM교과서는 ‘각 각뿔의 어두운 아래의 면을 각뿔의 밑면이라고 한다.’(Bell,M.,et al., 2012h, p.861)라고 한다. 두 교과서의 정의수준 모두 시각적 외형을 지시하는 0수준이다.

75) The shaded face of each pyramid above is called the base of the pyramid.



[그림 III-76] 각뿔의 밑면(교육부, 2015c, p.19)



[그림 III-77] 각뿔의 밑면(Bell,M.,et al., 2012h, p.861)

3) 옆면

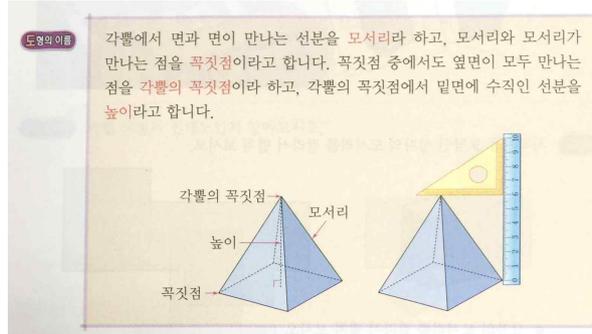
각뿔의 ‘옆면’은 다음과 같다. 한국교과서는 ‘면 n 각과 같이 옆으로 둘러싼 면을 옆면이라고 합니다.’(교육부, 2015c, p.19)이다. EM교과서는 ‘각뿔의 밑면이 아닌 면들은 삼각형이고, 같은 꼭짓점에서 만난다.’(Bell,M.,et al., 2012h, p.861)이다. 한국교과서는 시각적 외형을 지시하는 0수준이고, EM교과서는 관계를 기술하는 1b수준이다. 용어 면에서 한국교과서는 ‘옆면’이라는 용어를 사용하지만, EM교과서에서는 ‘옆면’을 지칭하는 용어가 따로 없다. 다만, ‘밑면이 아닌 면’이라고 할 뿐이다.

4) 뿔의 꼭짓점(apex)

‘각뿔의 꼭짓점’(apex)은 다음과 같다. 한국교과서는 ‘꼭짓점 중에서도 옆면이 모두 만나는 점을 각뿔의 꼭짓점이라고 한다.’(교육부, 2015c, p.21)라고 한다. EM교과서는 ‘밑면과 반대에 있는 꼭짓점으로 다른 면들이 모두 만나는 점.’(Bell,M.,et al., 2012e, p.464)라고 한다. 두 교과서 모두 관계를 기술하는 1b수준이다.

76) The faces of a pyramid that are not the base are all shaped like triangles and meet at the same vertex.

77) Point out that all other faces come together at the vertex opposite the base.

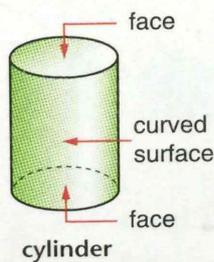


[그림 III-78] 각뿔의 꼭짓점(교육부, 2015c, p.21)

마. 원기둥(cylinder)

1) 원기둥(cylinder)

한국교과서는 ‘둥근기둥 모양의 도형을 원기둥이라고 합니다.’(교육부, 2015d, p.72)라고 약속한다. EM교과서는 grade1에서 그림과 함께 처음 공식적 이름을 사용하면서 캔을 예시로 든다. 그 후, grade4에서 ‘원기둥은 세 개의 표면을 갖고 있다. 평평한 위와 평평한 아래는 원모양의 면이다. 곡면은 위와 아래를 연결하고 있다. 통조림캔은 원기둥의 좋은 모델이다.’(Bell,M.,et al., 2012h, p.86 1)라고 약속한다.



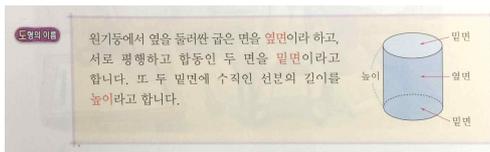
[그림 III-79] 원기둥(Bell,M.,et al., 2012h, p.861)

78) A cylinder has 3 surfaces. The flat top and flat bottom are faces that are formed by circles. A curved surface connects the top and bottom faces. A food can is a good model of a cylinder.

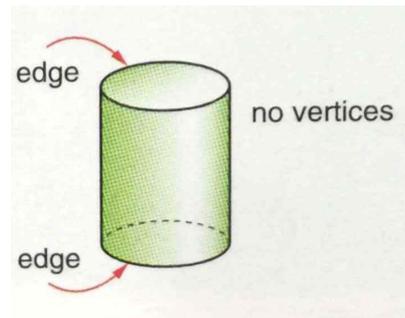
한국교과서는 시각적 외형을 지시하는 경우로 0수준이고, EM교과서는 grade1에서 사용된 정의는 0수준이고, grade4에서 사용된 수준은 분석된 성질을 논리적으로 정의한 1b수준이다. 정의내용을 살펴보면, 한국교과서는 어떠한 모양이 원기둥인지를 약속한다. 반면, EM교과서는 어떤 면으로 원기둥을 만드는지, 어떤 면으로 어떻게 연결되어 원기둥을 구성하는지에 초점을 맞추어 약속하고 있다.

2) 원기둥의 구성요소

원기둥의 구성요소에 관한 약속은 한국교과서에만 있다. ‘원기둥에서 옆을 둘러싼 굽은 면을 옆면이라 하고, 서로 평행하고 합동인 두 면을 밑면이라고 합니다. 또 두 밑면에 수직인 선분의 길이를 높이라고 합니다.’(교육부, 2015d, p.73)라고 약속한다. EM교과서에서는 원기둥의 구성요소를 그림으로 표현한다. edge, face, curved surface는 아래 [그림Ⅲ-81]과 같다.



[그림 Ⅲ-80] 원기둥의 구성요소(교육부, 2015d, p.73)



[그림 Ⅲ-81] 원기둥의 구성요소(Bell,M.,et al., 2012h, p.861)

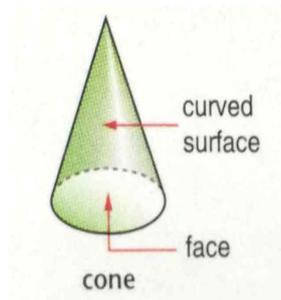
구성요소 측면에서 한국과 EM교과서의 차이점을 살펴보겠다. 우선, 한국교과서는 밑면과 옆면이 만나는 곡선을 따로 약속하지 않지만, EM교과서에서는 ‘edge’라는 용어를 사용한다. 이는, 모서리가 평면과 평면이 만나는 선분에 한정지어 약속하는 한국교과서와 면과 면이 만나는 선으로 약속하는 차이에서 온다. EM교과서의 ‘edge’는 한국교과서의 ‘모서리’보다 더 큰 범위이다. 두 번째 차이점은 밑면(base)를 EM교과서에서는 사용하지 않는다는 점이다. 한국교과서의

‘밑면’에 해당하는 부분을 EM교과서에서는 ‘face’라고 한다. 한국은 원기둥에서도 ‘밑면’이라는 용어를 사용하지만, EM교과서에서는 밑면(base)를 각기둥, 각뿔 안에서만 약속한다.

바. 원뿔(cone)

1) 원뿔(cone)

한국교과서는 ‘둥근 뿔 모양의 도형을 원뿔이라고 합니다.’(교육부, 2015d, p.80)라고 약속한다. EM교과서는 grade1에서 그림을 제시하면서 공식적 이름인 원뿔(cone)을 제시한다. 그리고 ‘원뿔은 두 개의 표면을 갖는다. 평평한 바닥은 원 형태의 면이다. 곡면은 밑면으로 연결되고, 점으로 만난다. 아이스크림콘은 원뿔의 좋은 예이다. 하지만, 원뿔이 닫혀있다는 것을 명심해야한다; 이것은 “뚜껑”을 갖고 있다.’(Bell,M.,et al., 2012h, p.861)라고 약속한다.



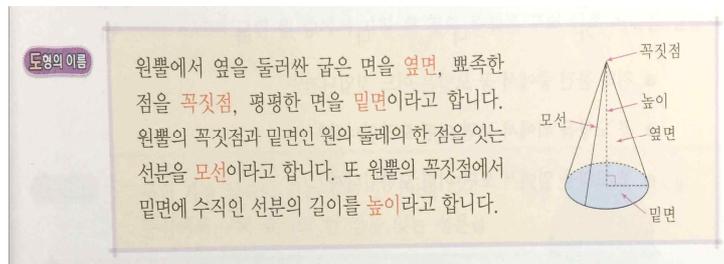
[그림 III-82] 원뿔(Bell,M.,et al., 2012h, p.861)

원뿔을 약속할 때, 한국교과서는 외형을 지시하는 수준인 0수준을 사용하였다. EM교과서는 0수준으로 원뿔을 제시한 후, 원뿔이 어떻게 구성되는 지에 대한 관점으로 원뿔을 약속한다. 이는 분석된 성질을 논리적으로 정의한 1b수준이다.

79) A cone has 2 surfaces. The flat bottom is a face that is formed by a circle. A curved surface is connected to the bottom face and comes to a point. An ice cream cone is a good model of a cone. However, keep in mind that a cone is closed; it has a “lid”

2) 원뿔의 꼭짓점(apex)

‘원뿔의 꼭짓점’에 대한 약속은 다음과 같다. 한국교과서는 ‘뿔족한 점을 꼭짓점’(교육부, 2015d, p.80)이다. EM교과서는 ‘꼭짓점은 보통 모서리가 만나는 점이지만, 원뿔의 꼭짓점은 떨어져있다. 이것은 원뿔의 모서리와 완벽히 분리된다.’(Bell,M.,et al., 2012h, p.861)이다.



[그림 III-83] 원뿔의 구성요소(교육부, 2015d, p.81)

정의수준은 한국교과서는 시각적 외형을 지시하는 0수준, EM교과서는 관계를 나타내는 1b수준을 사용하였다.

3) 밑면과 옆면

‘원뿔의 구성요소’에 중 밑면과 옆면에 대한 약속은 한국교과서에만 있다. ‘원뿔에서 옆을 둘러싼 굽은 면을 옆면, 뿔족한 점을 꼭짓점, 평평한 면을 밑면이라고 합니다. 원뿔의 꼭짓점과 밑면인 원의 둘레의 한 점을 잇는 선분을 모선이라고 합니다. 또 원뿔의 꼭짓점에서 밑면에 수직인 선분의 길이를 높이라고 합니다.’(교육부, 2015d, p.81)라고 약속한다. ‘옆면’, ‘꼭짓점’, ‘밑면’은 시각적 외형을 지시하는 0수준을 사용하였고, ‘모선’은 이미지를 연상하도록 기술하는 방법인 0수준을 사용하였다. ‘높이’는 대체적으로 성질을 기술하는 경우로 1a수준이다.

사. 구(sphere)

한국교과서는 ‘구’에 대한 약속을 ‘공 모양의 도형을 구라고 합니다.’(교육부, 2015d, p.80)이다. EM교과서는 ‘A vertex is usually a point at which edges meet, but the vertex of a cone is an isolated corner. It is completely separated from the edge of the cone.’(Bell, M., et al., 2012h, p.861)이다.

015d, p.82)라고 한다. EM교과서는 grade1에서 그림을 제시하면서 ‘구’의 명칭을 사용하고, grade4 volume1에서 구체물을 갖고 ‘구’를 설명한 후, volume2에서 구성성분으로 약속한다. 전자는 ‘지구가 완벽한 구체에 가깝다고 말한다; 즉, 모든 지구의 표면이 지구의 중심으로부터 같은 거리에 있다는 것이다.⁸¹⁾(Bell, M., et al., 2012g, p.450)이다. 후자는 ‘구는 모서리나 꼭짓점 없이 하나의 곡면으로 이루어져 있다. 농구공이나 지구본은 구의 좋은 모델이다.⁸²⁾(Bell, M., et al., 2012h, p.861)라고 한다.

한국교과서는 외형을 지시하는 0수준을 사용하였고, EM교과서는 ‘하나의 곡면으로 이루어져 있다.’는 점에서 대체적으로 성질을 제시하는 1a수준을 사용하였다. 지구의 빗대서 설명한 부분에서 모든 표면이 지구의 중심으로부터 같은 거리에 있다는 것을 통해, 논리적 정의인 1b수준을 사용했다고 할 수도 있다.

아. 다면체(polyhedron)과 정다면체(regular polyhedron)

한국교과서는 다면체와 정다면체를 초등학교교과서에서는 다루지 않기 때문에 EM교과서의 약속만을 살펴보겠다. 다면체를 ‘다면체는 모든 표면이 다각형으로만 이루어진 입체도형이다. 이 표면들은 다면체의 면이 된다. 다면체는 어떠한 곡면도 갖지 않는다.⁸³⁾(Bell, M., et al., 2012h, p.861)라고 한다. 정다면체를 ‘만약 모든 면이 정다각형으로 이루어져있고, 면들이 모두 같은 크기와 모양이며, 모든 꼭짓점이 다른 꼭짓점과 같다면, 그 다면체는 정다면체이다.⁸⁴⁾(Bell, M., et al., 2012h, p.861)라고 한다.

두 정의 모두 류와 종차에 의한 논리적 정의로 1b수준이다.

81) Mention that Earth is close to being a perfect sphere; that is, all points on Earth's surface are about the same distance from the center of Earth.

82) A sphere has one curved surface but no edges and no vertices. A basketball or globe is a good model of a sphere.

83) A polyhedron is a geometric solid whose surfaces are all formed by polygons. These surfaces are the faces of the polyhedron. A polyhedron does not have any curved surfaces.

84) A polyhedron is a regular polyhedron if - each face is formed by a regular polygon; the faces all have the same size and shape; and each vertex looks exactly the same as every other vertex.

4. 내용 전반에 대한 비교 분석

앞에서 한국교과서와 EM교과서의 정의를 도형별로 구분하고 비교하면서, 차이점을 찾을 수 있었다. 몇 가지 큰 특징은 다음과 같다.

가. 한국교과서는 용어에 대한 약속이 초등교과서 내에서는 정의수준이 높아지지 않는다. 하지만, EM교과서는 한 용어에 대한 정의수준을 다양하게 사용하여 학생들의 이해를 돕는다.

<표 III-2> 학년과 차시에 따라 정의수준이 높아지는 예시

용어	시기	약속하기	수준
point	4grade	점을 찍고 ‘점’이라고 약속	0
	5grade	공간 내 위치	1b
angle	3grade	그림을 그려놓고 ‘각’이라고 약속	0
	4grade	같은 종점을 갖고 있는 2개의 반직선이나 2개의 선분으로 형성됨.	1b
	5grade	$\angle T$, $\angle STP$, $\angle PTS$	2a
side of angle	3grade	그림을 그려놓고 ‘각의 변’이라고 약속	0
	4grade	각을 이루는 반직선이나 선분들	1b
vertex of angle	3grade	그림을 그려놓고 ‘각의 꼭짓점’을 약속	0
	4grade	빨대와 꼬인 타이로 각을 표현할 때, 만나는 점	1a
	4grade	반직선들이나 선분이 만나는 종점	1b
circle	4grade	컴퍼스로 그리고 원이라 함	0
	4grade	원의 중심으로부터 주어진 같은 거리에 있는 모든 점들의 집합	1b
congruent	3grade	정확하게 같은 크기와 같은 모양인 두 도형	1a
	6grade	대응변의 길이가 같고, 대응각의 크기가 같은 도형	1b

용어	시기	약속하기	수준
quadrangle	grade1	설명 없이 4변인 다각형으로 그림 표시	0
	grade2	예시와 함께 '이러한 평면도형이 사각형이다.'라고 설명 4변, 4각, 4꼭짓점을 갖는다고 약속	1b
	grade3	사각형 EFGH를 예시로 하여, 4개의 변, 4개의 각, 4개의 꼭짓점을 갖는다고 설명함.	2a
right angle	grade1	정사각형의 모서리와 같은 모양	0
	grade2	정사각형의 모서리(기호 \sphericalangle 도입)	0
	grade3	1/4회전한 모양	1a
	grade4	90도의 다른 이름	1b
sphere	grade1	설명 없이 그림 제시	0
	grade4	모서리나 꼭짓점 없이 하나의 곡면으로 이루어져 있음	1a

이는 EM교과서가 나선형교육과정에 따라 같은 내용을 학년이 올라감에 따라 반복, 심화되어 배우기 때문이다. 같은 내용이 계속 반복되어 나오다보니 어리거나 처음 접할 때에는 쉬운 단어, 쉬운 설명을 하게 되고, 여러 번 반복될 때에는 기하학적인 설명으로 발전하거나 기호를 사용하게 되는 것이다. 이는 지각적으로는 다르지만 구조적으로는 같은 다양한 자료를 여러 학년에 걸쳐 제시함으로써, 단즈의 지각적 다양성의 원리에도 부합한다.

반면, 우리나라는 도형을 도입할 때, 많은 도형을 한 번에 도입하여 반복제시하는 것이 아니라, 하나씩 순차적으로 제시하기 때문에 도형의 정의를 한 번만 약속한다. 따라서 정의수준이 다양하지 않다. 다만, 하나의 도형에 초점을 맞춰 집중적으로 배울 수 있다는 것은 장점으로 작용한다.

나. 용어를 도입할 때, 그 용어의 어원을 밝히거나 기본적인 단어로 분해하여 설명한다.

이는 언어의 차이에서 오는 특징이라고 할 수 있다. 영어는 어원이 그리스어나 라틴어인 경우가 많아, 직관적으로 이해하기 어려운 경우에, 설명을 덧붙인

다. ‘triangle’의 경우 그리스어 중 3을 뜻하는 ‘tri’와 ‘angle’의 합성어이다. ‘quadrangle’은 4를 뜻하는 라틴어 ‘quad’와 ‘angle’의 합성어이다. ‘polygon’의 경우에도 그리스어인 ‘poly’와 ‘gonia’가 합쳐진 말로, ‘많은 각’을 갖는 것을 의미한다. 이러한 단어를 쪼개서 설명하는 이유를 EM교과서에서는 ‘많은 기하학적 용어들이 그리스어와 라틴어에서 비롯된다. 이러한 단어를 쪼개는 것은 학습을 용이하게 하고, 유용한 언어분석기능을 발전시킨다.⁸⁵⁾(Bell,M.,et al., 2012g, p.42)라고 설명한다.

<표 III-3> 용어를 기본적인 단어로 분해하여 설명하는 예시

용어	분해	뜻	출처
triangle	tri	3	Bell,M.,et al., 2012e, p.428
	angle	각	
quadrangle	quad	4	Bell,M.,et al., 2012e, p.428
	angle	각	
polygon	poly	many, 많은	Bell,M.,et al., 2012e, p.464
	gonia	angle, 각	
polyhedron	poly	many, 많은	Bell,M.,et al., 2012e, p.464
	hedra	angle, 각	

우리나라는 수학용어가 한자어로 된 경우가 많고, 분해를 한다면 그 도형을 직관적으로 이해할 수 있는 용어들도 많다. 예를 들어, 삼각형을 기본적인 단어로 분해한다면 ‘삼+각+형’인데, ‘3+각+도형’의 의미라고 직관적으로 이해할 수 있다.

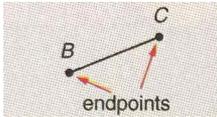
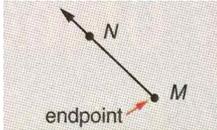
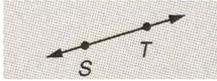
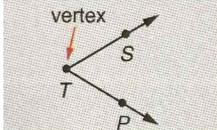
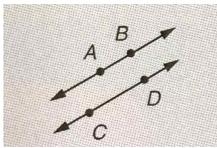
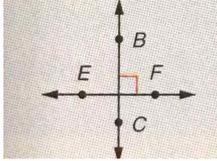
다. 기호를 사용한다.

한국교과서는 점 \cdot , 각 \sphericalangle , 선분 \overline{AB} 등을 사용하여 도형을 표현하지만, 기호로 표현하지는 않는다. EM교과서에서는 도형을 도입할 때, 그 도형을 어떻게 읽는지, 어떤 기호로 표현하는지 모두 설명한다. 예를 들어, 직선ST를 설명할

85) Many geometric terms are derived from Greek and Latin words. Breaking these terms into parts can make learning them easier and promotes useful word analysis skills.

때에는 'line ST' 라고도 하지만, ' \overleftrightarrow{ST} '로 쓸 수 말한다. 이는 도형을 이해하는데 효율적이다. 선분의 기호인 'bar'는 마치 선분의 축소형처럼 생겼기 때문에 이 도형이 선분임을 인지하기 쉽다. 반직선의 경우에, 'ray MN'의 표현보다 ' \overrightarrow{MN} '처럼 기호를 사용한 쪽이 화살표를 이용하여 어느 방향으로 나가고 있는지 쉽게 알려준다. 도형을 나타내는 기호는 그 도형의 축소판처럼 생긴 경우가 많아, 도형을 학습하는 것을 용이하게 해준다. EM교과서에서 사용되는 기호는 아래 <표Ⅲ-4>과 같다.

<표 Ⅲ-4> EM교과서에서 사용되는 기호들의 예시(Bell,M.,et al., 2012i, p.169)

도형	기호	관련그림
선분 (line segment)	\overline{BC} or \overline{CB}	
반직선 (ray)	\overrightarrow{MN}	
직선 (line)	\overleftrightarrow{ST} or \overleftrightarrow{TS}	
각 (angle)	$\angle T$ or $\angle STP$ or $\angle PTS$	
평행 (parallel)	$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	
수직 (vertical)	$\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{EF}$	

라. 2차원 도형(평면도형)인지 3차원도형(입체도형)인지 제시한다.

EM교과서에서는 도형을 도입할 때, 이 도형이 평면도형인지, 입체도형인지 혹은 2차원 내에 존재하는지 3차원 내에 존재하는 지에 관련하여, 그 도형이 어떠한 공간에 속하는 지를 중요시 여긴다. 선분, 평행, 삼각형, 사각형, 다각형이 그 예시이다.

<표 III-5> 도형이 평면도형인지 입체도형인지 제시하는 예시

도형	설명	출처
선분	셋 이상의 선분은 이차원과 3차원 도형을 나타내는 데 쓰인다. (three or more line segments can be used to represent 2- and 3- dimensional figures.)	Bell,M.,et al., 2012e, p.403
평행	같은 면에 있지 않다면, 두 직선이 교차하지 않더라도 평행하지 않다. (Two line that do not intersect are not considered parallel if they are not in the same plane)	Bell,M.,et al., 2012e, p.410
삼각형	모든 삼각형은 2차원 도형이다. (All triangles are 2-dimensional.)	Bell,M.,et al., 2012e, p.421
사각형	모든 사각형은 2차원 도형이다. (All quadrangle are 2-dimensional.)	Bell,M.,et al., 2012e, p.427
다각형	다각형은 정의에 의해 평면도형이다. (polygons are plane figures by definition.)	Bell,M.,et al., 2012e, p.433
각뿔, 삼각기둥, 사각기둥, 원뿔, 원기둥, 구	각뿔, 삼각기둥, 사각기둥, 원뿔, 원기둥, 구. 이러한 도형은 3차원도형이다. 그들은 두께를 가지고 있고, 너비와 높이를 갖고 있다.	Bell,M.,et al., 2012e, p.463

위 예시 중, 평행에서 나온 설명의 대우는 ‘두 직선이 교차하지 않고, 같은 면에 있다면 평행이다.’이다. 이 문장에서 같은 면은 2차원 내에서 선분이 평행하다는 것을 의미한다.

한국교과서에서 도형을 도입할 때 다른 도형과의 연계보다는 그 도형자체에

초점을 맞춰 설명한다. 한 차시에 한 도형을 도입하고, 약속하고, 그 도형을 분석하여 성질을 찾는 경우가 많다. 하지만, EM교과서에서는 한 류의 도형을 한 번에 도입하는 경우가 많다. 예를 들어, grade3에서 삼각형을 도입하면서, 삼각형, 정삼각형, 이등변삼각형, 부등변삼각형을 같은 시간에 다룬다. 이는, 도형을 따로 보는 것이 아니라 어떤 분류 속에 있는지에 따라 학습도록 하는 체계이다.

한국교과서는 평면도형과 입체도형의 단원명을 사용하면서, 평면도형과 입체도형에 대한 약속은 하지 않는다. 또한, 도형을 설명함에 있어 이 도형이 평면도형인지 입체도형인지 구분하는 것에 대하여 구분하는 데 중점을 두지 않는다.

2009 개정 교육과정에 따른 교과서에서는 입체도형과 평면도형이라는 용어를 정의 없이 사용한다.

평면도형이나 입체도형이라는 용어는 수학적으로 엄밀하게 정의하지 않고 사용된다. 도형을 점의 집합으로 간주하는 현대 기하학에서는 특별히 평면도형이나 입체도형을 구분하여 정의할 필요가 없다는 뜻이 된다. 그러나 구체적 조작 단계에 있는 초등학교 학생들에게는 평면도형이나 입체도형이라는 용어를 구분하여 사용하지 않을 수 없다. 이때에는 특별한 정의 없이 생활 용어로서 또는 직관적 의미에서 평면도형 또는 입체도형이라는 용어를 사용하여 지도한다. 다시 말하면 평면도형이나 입체도형을 수학적으로 엄밀하게 정의하기도 곤란하거나 초등학생들에게는 그러한 정의는 반 힐의 기하학적 사고 수준 이론에 비추어 볼 때 적합하지 않다는 뜻이다.(교육부, 2015g, p.105)

마. 도형을 약속할 때, ‘그 도형은 무엇으로 구성되어 지는가’에 대한 관점으로 다뤄지는 경우가 많다.

입체도형을 약속할 때 ‘면들이 입체도형을 만든다.⁸⁶⁾(Bell,M.,et al., 2012e, p.463)라고 한다. 이 문장은 입체도형은 ‘면’만으로 이루어졌다는 것을 의미한다. 입체도형의 내부는 입체도형에 속하지 않다는 것을 설명한다. 이런 설명은 다른 입체도형을 설명할 때에도 이루어진다.

‘원기둥은 3개의 표면을 갖고 있다. 평평한 위와 평평한 아래는 원모양의 면이다. 곡면은 위와 아래를 연결하고 있다.⁸⁷⁾(Bell,M.,et al., 2012h, p.856)’와 같

86) The surfaces of the shape make up the solid.

87) A cylinder has 3 surfaces. The flat top and flat bottom are faces that are formed by

이 원기둥을 약속하면서 어떤 면으로 이루어졌는지 설명한다.

‘원뿔은 두 개의 표면을 갖는다. 평평한 바닥은 원 형태의 면이다. 곡면은 밑면으로 연결되고, 점으로 만난다.’⁸⁸⁾(Bell, M., et al., 2012h, p.856)도 원기둥과 마찬가지로, 이 도형이 어떤 면으로 구성되어있는지에 초점을 맞추어 약속한다.

‘구는 모서리나 꼭짓점 없이 하나의 곡면으로 이루어져 있다.’⁸⁹⁾(grade4 volume2 SRB, p.101)를 보면, ‘구’가 하나의 곡면으로 구성되어졌다는 것에 초점이 맞춰져 있음을 알 수 있다.

반면, 한국교과서는 ‘원기둥’, ‘원뿔’, ‘구’를 약속할 때, ‘~~한 모양의 도형을 OO이라고 한다’와 같이 모양으로 약속하고 있다. 그 도형이 어떻게 구성되었는지 알기 어렵고, 내부의 포함여부를 확인할 수 없어 학생들이 입체도형에 대한 오개념을 가질 수 있는 여지가 있다.

‘정육면체’에 대한 약속을 보면 두 교과서의 차이를 알 수 있다. 한국교과서는 ‘정사각형 모양의 면 6개로 둘러싸인 도형을 정육면체라고 합니다.’(교육부, 2015a, p.45)라고 약속한다. EM교과서는 ‘정육면체는 6개의 같은 크기인 정사각형 면을 갖고 있다.’⁹⁰⁾(Bell, M., et al., 2012h, p.856)라고 약속한다. 한국교과서에 쓰인 ‘둘러싸인’이라는 용어는 학생들에게 친숙한 표현이나, 그 내부까지 정육면체에 포함되는 것 같은 인상을 줄 수 있다. 반면, EM교과서는 어떤 면으로 이루어졌는지에 대해서만 설명하고 있다.

EM교과서에서는 단일폐곡면 관점에서 입체도형을 바라보기 때문에 이러한 차이를 보이는 것 같다. 단일폐곡면은 안팎을 구별할 수 있는 곡면이면서 자기가 자신을 자르지 않는 곡면이다. 단일폐곡면을 잡아당기고 누르고 했을 때, 위상수학 상의 같은 도형들이 초등에서 다루는 입체도형들이었다. 때문에, 입체도형은 내부를 포함하지 않는 ‘면’으로만 이루어진 것으로 약속한다. 하지만, 실제로 이러한 단일폐곡면은 존재할 수 없기 때문에, 한국교과서에서는 단일폐

circles. A curved surface connects the top and bottom faces.

88) A cone has 2 surfaces. The flat bottom is a face that is formed by a circle. A curved surface is connected to the bottom face and comes to a point.

89) A sphere has one curved surface but no edges and no vertices.

90) A cube has 6 square faces that are the same size.

곡면 관점으로 입체도형을 다루지 않는 것 같다.

평면도형에서도 이와 비슷한 양상을 보인다. 한국교과서는 ‘선분으로만 둘러싸인 도형을 다각형이라고 합니다.’(교육부, 2014d, p.96)라고 약속한다. EM교과서는 ‘다각형은 선분으로 구성된 2차원 도형이다. 다각형은 경계이다; 다각형의 안쪽 영역은 다각형의 부분이 아니다.’(Bell, M., et al., 2012e, p.400)라고 한다.

한국교과서의 ‘둘러싸인’이라는 표현은 내부를 포함하는 인상을 주지만, EM교과서는 선으로만 이루어진 도형이고, 내부는 포함하지 않는다고 명확하게 명시한다. EM교과서의 경우, 삼각형, 사각형, 오각형 등의 다각형과 원을 단일폐곡선 범주에서 보기 때문이다. 단일폐곡선은 시작점과 끝점이 같은 곡선이다. 선으로만 이루어져있기 때문에 내부를 포함하지 않는다. 이런 차이점 때문에 한국교과서와 EM교과서의 수학 학습 활동이 다르게 이루어진다. 한국교과서는 삼각형을 다룰 때 색종이를 자르는 활동을 하지만, EM교과서는 빨대로 삼각형을 만들어 그 안이 텅 비는 것을 직관적으로 보여준다.

한국교과서는 모양을 중심으로 도형을 정의하는 것으로 반힐의 ‘제 1수준’에 그친다. 하지만, EM교과서는 모양도 제시하면서 어떤 구성성분을 갖는 지에 초점을 맞춰 분석하는 ‘제 2수준’으로 정의한다. 하위수준에서 상위수준으로 수학적 언어가 확장되고 발전되는 모습을 보여준다.

바. EM교과서는 정례뿐만 아니라 반례도 제시한다.

한국교과서는 도형의 예시를 들 때, 정례만을 제시한다. 하지만, EM교과서는 정례뿐만 아니라 반례를 제시함으로써, 왜 이 반례가 그 도형이 아님을 설명하는 활동을 많이 한다. 이것은 브루너의 이론에 근거한 것으로 그 개념이 있으려면 그 개념에 속하지 않는 것이 있어야 한다는 것을 보여준다. 반례를 제시하는 경우는 아래와 같다.

첫째, 다각형의 반례를 제시하는 것은 곡선으로 이루어지는 도형은 다각형이 아님을 제시하면서 다각형의 조건인 ‘선분으로 이루어진’을 강조하는 것이다. 또한 중점이 서로 만나지 않는 선분들로 이루어진 도형을 제시함으로써 ‘열린’도

91) Polygons are 2-dimensional figures made up of line segments. A polygon is a boundary; the region inside the polygon is not part of the polygon.

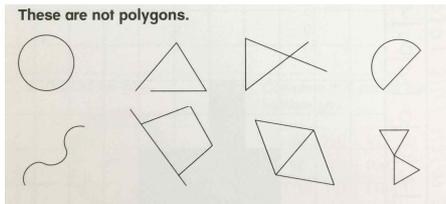
형이 아닌 ‘닫힌’ 도형이 다각형임을 시사한다.

둘째, 평행이 아닌 선분들을 보여주는 것은, 두 선분의 교차점이 시각적으로 보이지 않더라도, 두 선분을 연장했을 때 교차점이 있으면 평행이 아니라는 것을 강조하기 위함이다. 아래 그림에서 보듯이 평행이 아닌 예를 2개는 연장선이 교차점이 있는 것, 2개는 바로 보이는 교차점이 있는 것을 제시한 이유이다.

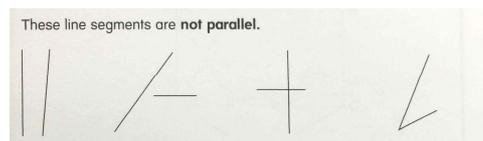
셋째, 정육각형, 정사각형, 정오각형의 반례를 든 것은 정다각형의 조건을 강조하기 위함이다. 정육각형, 정사각형의 반례는 모든 변의 길이가 같아야 함을 강조하고, 정오각형의 반례는 모든 내각의 크기가 같아야 함을 강조하고 있다. 이는 정다각형이 모든 변의 길이가 같고, 모든 내각의 크기가 같음을 설명하기 위한 도구로 쓰인다.

넷째, 합동의 반례를 든 것은 같은 모양이더라도 크기가 같지 않다면 합동이 아님을 보여줄 수 있다. 또한 크기가 비슷하고 모양이 비슷하게 생겼더라도 겹쳤을 때 같지 않으면 합동이 아님을 보여준다.

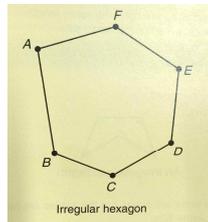
다섯째, 평행사변형, 이등변삼각형, 정삼각형, 부등변삼각형의 반례는 도형을 분류하는 관점에서 설명할 수 있다. 이 네 가지 반례는 도형, 삼각형이라는 같은 류에 있지만, 다른 특징을 갖고 있기 때문에 분류되는 의미로 해석할 수 있다.



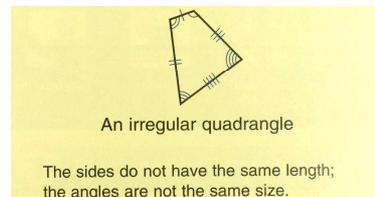
[그림 III-84] 다각형 반례(Bell,M.,et al., 2012b, p.641)



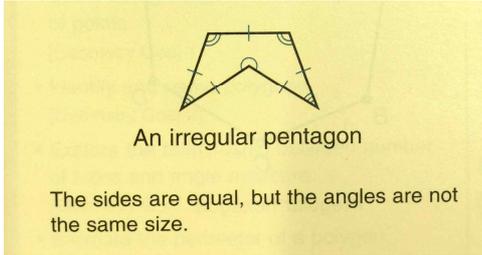
[그림 III-85] 평행의 반례(Bell,M.,et al., 2012c, p.328)



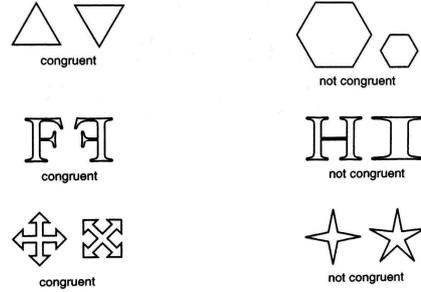
[그림 III-86] 정육각형의 반례(Bell,M.,et al., 2012e, p.433)



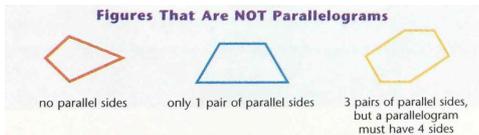
[그림 III-87] 정사각형의 반례(Bell,M.,et al., 2012e, p.434)



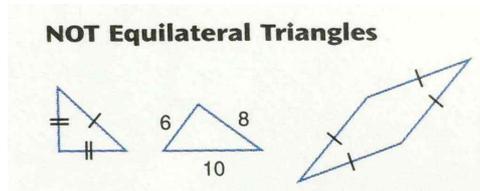
[그림 III-88] 정오각형의 반례(Bell,M.,et al., 2012e, p.434)



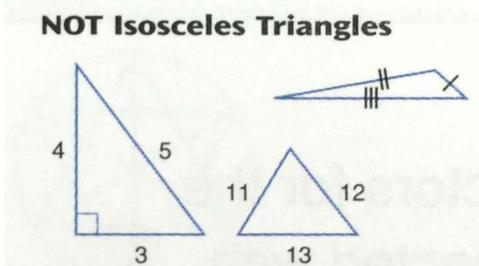
[그림 III-89] 합동의 반례(Bell,M.,et al., 2012e, p.457)



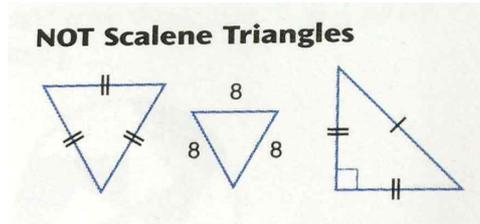
[그림 III-90] 평행사변형의 반례(Bell,M.,et al., 2012e, p.428)



[그림 III-91] 정삼각형의 반례(Bell,M.,et al., 2012i, p.184)



[그림 III-92] 이등변삼각형의 반례(Bell,M.,et al., 2012i, p.184)



[그림 III-93] 부등변삼각형의 반례(Bell,M.,et al., 2012i, p.184)

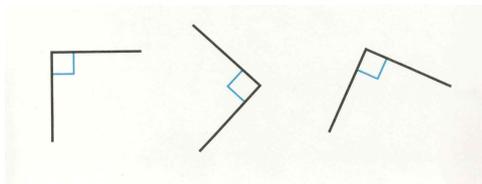
사. 예시를 다양하게 다룬다.

도형을 제시하거나 활동을 할 때, 예시를 다양하게 제시한다. 특히, 한국교과서와는 다르게 오목다각형을 제시하고, 빗각기둥도 제시한다. 오목다각형은 다각형을 처음 접하는 grade3부터 접한다. 빨대로 다각형을 만들고 난 후, 꼭짓점을 안쪽으로 밀어 넣는 활동과 연관이 있다. 선분으로 구성된 다각형이 꼭짓점이 안쪽으로 밀어 넣어져 오목한 모양이 되어도 다각형이라는 사실을 인지하게

하는 활동이다. 이러한 활동을 통하여 학생들은 모든 다각형을 선분으로 이루어졌고 각 선분이 연결되어져 있다는 것을 인지한다. 즉 다각형은 단일폐곡선을 움직인 모양이라는 관점으로 바라볼 수 있다.

아래 예시 중 빗각기둥도 제시되어 있다. 한국은 직각기둥만을 초등교과서 내에서 다루기 때문에 옆면이 밀면과 수직을 이루고, 직사각형 모양이다. 하지만, EM교과서는 기둥 내에 직각기둥과 빗각기둥을 모두 다루기 때문에 옆면이 평행사변형 모양이라고 제시되어 있다.

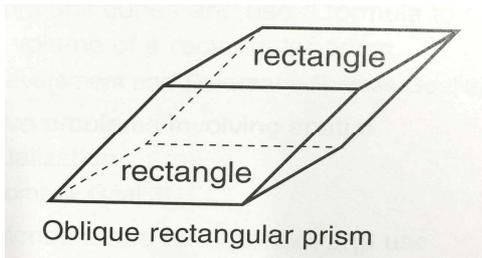
EM교과서에서 예시를 다양하게 다루는 것은 학생들의 오개념을 최소화하고, 다양한 관점에서 도형을 바라볼 수 있도록 만드는 융통성을 기를 수 있다. 이러한 것은 개념은 변화하지 않으면서, 모든 가능한 변수를 바꾸어 적용하는 방법으로 던즈의 수학적 다양성의 원리에 부합한다.



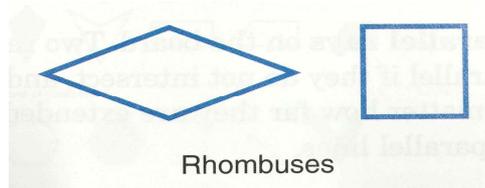
[그림 III-94] 직각표시(Bell,M.,et al., 2012e, p.422)



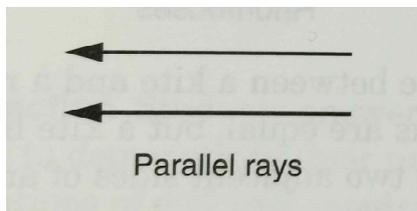
[그림 III-95] 오목팔각형(Bell,M.,et al., 2012e, p.472)



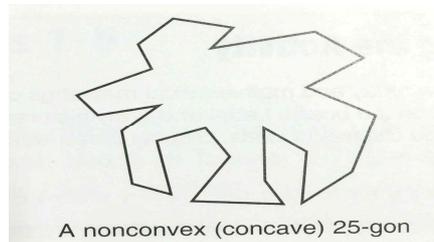
[그림 III-96] 빗각기둥(Bell,M.,et al., 2012h, p.874)



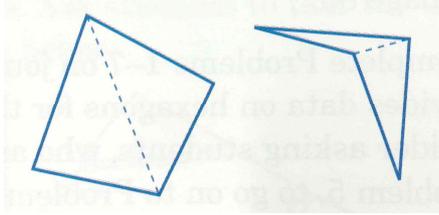
[그림 III-97] 마름모(Bell,M.,et al., 2012g, p.38)



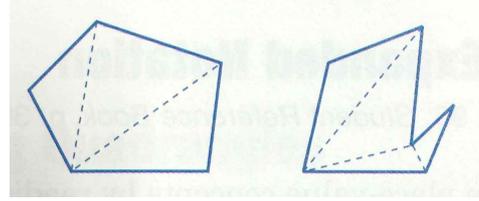
[그림 III-98] 평행한 반직선(Bell,M.,et al., 2012g, p.37)



[그림 III-99] 오목이십오각형(Bell,M.,et al., 2012g, p.43)



[그림 III-100] 사각형을 삼각형으로
쪼개기(Bell,M.,et al., 2012i, p.202)



[그림 III-101] 오각형을 삼각형으로
쪼개기(Bell,M.,et al., 2012i, p.202)

아. 사다리꼴, 모서리, 꼭짓점에 대한 정의가 다르다.

1) 사다리꼴

두 교과서는 사다리꼴에 대한 정의가 본질적으로 다르다. 한국교과서는 사다리꼴의 정의를 적어도 한 쌍의 대변이 평행한 사각형이라고 한다. 이는 평행사변형을 사다리꼴이 포함하는 관계이다. 이 관계를 잘 나타내주는 것이 아래 나와 있는 [그림III-102]이다. 그림을 자세히 살펴보면, 사각형 속에 사다리꼴이 있고, 사다리꼴 안에 평행사변형이 있다. 그리고 평행사변형 안에 마름모와 직사각형이 겹쳐져서 놓여 있다.

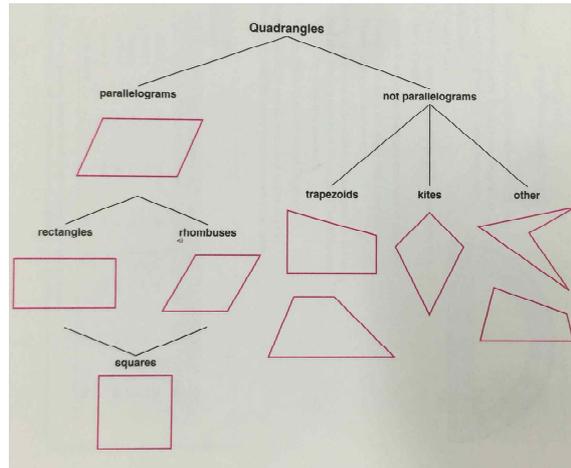


[그림 III-102] 한국교과서 내 사각형
포함 관계 (교육부, 2014d, p.81)

전광숙(2004)에 따르면, 위 정의는 포괄적인 정의(inclusive definition)에 의해 사다리꼴이 평행사변형까지 포함하는 정의이다.

반면, EM교과서의 정의를 살펴보면 ‘오직 한 쌍의 마주보는 변이 평행한 사

각형’이라고 정의한다. 사다리꼴과 평행사변형을 서로 공통부분이 없는 도형으로 정의하는 것이다. 배타적인 정의(exclusive definition)는, 사다리꼴은 평행사변형이 아니라고 한다(전광숙, 2004). 이 관계를 잘 나타내 주는 것이 아래 [그림Ⅲ-104]이다.



[그림 III-103] EM교과서 사각형 도식화 ((Bell,M.,et al., 2012i, p.191A)

2) 모서리

모서리에 대한 정의도 다르다. 한국교과서의 경우 모서리는 ‘선분’으로 끝은 선만을 모서리라고 정의한다. 때문에, 다면체에서 면과 면이 만나는 선분을 모서리라고 한다. 이때 면은 굽은 면이 아닌 평평한 면이다. 하지만, EM교과서는 모서리(edge)의 정의를 조금 다르게 한다. 평평한 면과 평평한 면이 만나는 선분이 아닌, ‘면과 면이 만나는 곧거나 굽은 선’으로 약속하는 것이다. 두 교과서의 차이는 원기둥과 원뿔을 살펴보면 확연히 드러난다.

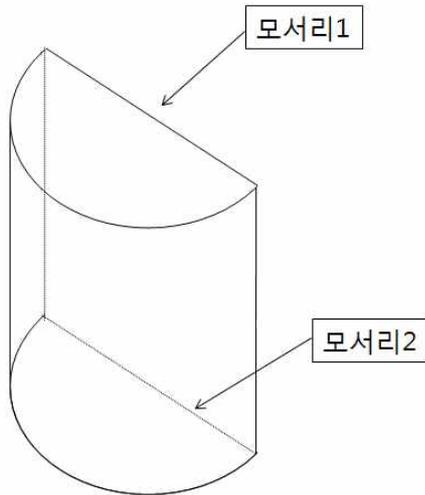
한국교과서의 경우 원기둥의 모서리는 존재하지 않는다. EM교과서는 원기둥에서 두 개의 모서리가 있다고 한다. 굽은 면인 옆면과 밑면이 만나는 선이 두 개의 곡선으로 존재하기 때문이다. 원뿔에서도 마찬가지이다. 한국교과서는 원뿔의 모서리가 0개이지만, EM교과서는 옆면인 굽은 면과 밑면이 만나는 선이 1개 있다.

위의 차이점은 교과서 내 어떠한 정의를 채택하느냐에 따라 구성성분이 달라

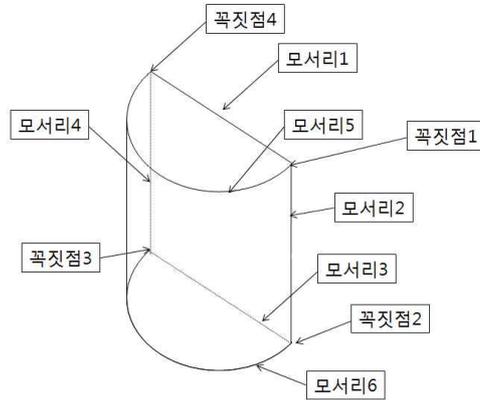
질 수 있음을 보여준다.

3) 꼭짓점

두 교과서 모두 꼭짓점을 ‘모서리와 모서리가 만나는 점’이라고 약속한다. 같은 말이나 내용이 다르게 된 것은 위에서 언급했듯이 ‘모서리’의 정의가 다르기 때문이다. 이 차이점을 확인하기 위해서는, 밑면이 반원인 기둥을 생각하면 된다. 밑면이 반원인 기둥을 반원기둥이라 하겠다. 반원기둥을 살펴볼 때, 한국교과서는 모서리가 2개, 꼭짓점이 0개이다. 하지만 EM교과서는 정의에 의해서 모서리가 6개, 꼭짓점이 4개이다. 이는 아래 그림과 같다.



[그림 III-104] 한국교과서 정의에 따른 반원기둥의 모서리와 꼭짓점



[그림 III-105] EM교과서 정의에 따른 반원기둥의 모서리와 꼭짓점

구멍이 뚫려 있지 않은 입체도형, 즉 구면과 도형인 입체도형에서의 꼭짓점, 모서리, 면의 관계를 나타내는 오일러의 공식에 의하면 $e(\text{edge}) - v(\text{vertex}) + f(\text{face}) = 2$ 이다. EM교과서에서 나타내는 모서리와 꼭짓점의 정의가 우리나라의 정의보다 오일러의 공식을 설명하는 데 더 적합하다고 할 수 있다.

IV. 결론 및 제언

이 장에서는 지금까지의 분석을 요약, 정리하기로 한다. 또한, 본 논문에서 비교한 분석 결과가 교수·학습에 도움을 줄 만한 시사점을 기술하겠다.

본 논문은 정의 수준에 관한 이론을 바탕으로, 우리나라의 2009 개정 교육과정에 기초한 초등학교 교과서와 교사용 지도서, 미국의 CCSSM에 기초한 EM 교과서를 분석대상으로 하여, 두 나라의 학교수학에 제시된 정의를 분석하였다. 아울러, 두 나라의 교육과정 내 도형들의 정의에서 나타나는 차이점을 정의 내용 측면에서 비교하였다.

분석 결과, 한국 수학 교육과정 내 기하 용어 정의 53개 중 0수준은 17개로 약 32%, 1a수준은 10개로 약 19%, 1b수준은 26개로 약 49%였다. EM교과서에 나와 있는 용어는 61개, 정의는 89개였지만, 하나의 용어를 여러 번 정의하는 경우가 있어서 가장 높은 수준으로 분석하였다. 61개 용어 정의 중 0수준은 7개로 약 11%, 1a수준은 8개로 약 13%, 1b수준은 45개로 약 74%, 2a수준은 1개로 약 2%였다. 초등학교 수준이기 때문에, 0, 1a, 1b, 2a 수준 내에서 용어를 정의하는 것으로 보인다. 두 교과서 모두 1b수준이 가장 많지만, 한국 교과서는 대상의 외형적인 모습으로 정의하는 경우인 0수준도 많은 비중을 차지하였다. 반면, EM교과서의 경우 0수준이었다가 정의 수준이 높아지는 경우가 많아, 마지막까지 0수준으로 남는 경우가 적었다.

학년과 차시에 따라 정의 수준이 높아지는 경우를 살펴보겠다. 한국교과서는 1개로 약 2%였고, EM교과서는 27개로 약 44%였다. 한 번 약속하면 다음에 또 그 도형을 다루는 일이 적은 한국교과서와 달리, EM교과서는 하나의 도형을 여러 번 반복하여 가르치기 때문에 이러한 경우가 많았다. 어떤 도형이 친숙해질 때까지 점차 쉬운 수학적 언어에서 엄밀한 수학적 언어로 바꾸어 정의하는 것이 EM교과서의 장점이라 하겠다. 다만, 한국교과서는 한 번에 여러 도형을 제시하는 EM교과서와 달리 도형을 하나씩 제시하므로, 한 도형을 집중적으로 배울 수 있다는 장점이 있다.

정의 내용에서 보면, 첫째, EM교과서에서 용어를 도입할 때 그 용어의 어원을 밝히거나 기본적인 단어로 분해하여 설명한다. 어원을 밝힘으로써 그 단어의 뜻을 좀 더 쉽게 이해하고, 다른 도형용어와 연결할 수 있어 용어학습에 도움이

된다. 둘째, 기호를 사용하여 학습자들이 직관적으로 그 도형을 파악할 수 있도록 돕는다. 셋째, 2차원도형인지 3차원도형인지 그 도형의 류를 밝히는 것을 중요시 여긴다. EM교과서는 입체도형과 평면도형을 약속하고, 도형들이 어떤 류에 속하는 지 밝힌다. 우리나라는 현대 기하학에서 도형을 점의 집합으로 여기기 때문에 특별히 평면도형과 입체도형을 구분하여 정의할 필요가 없다고 한다. 다만, 직관적 의미에서 평면도형 또는 입체도형의 용어를 사용하여 지도할 뿐이다. 넷째, 도형을 약속할 때, ‘그 도형이 무엇으로 구성되어 지는가.’에 대한 관점으로 다뤄지는 경우가 많았다. 다섯째, 반례를 제시한다. 정례만 제시하는 우리나라와 달리 반례를 제시함으로써 그 도형을 좀 더 명확히 밝히고자 한다. 여섯째, 도형의 예시를 다양하게 다룬다. 그 도형에 속하는 도형을 최대한 다양하게 다룸으로써, 오목다각형을 자연스럽게 인지할 수 있도록 하고, 그 도형의 성질과 특징을 더 쉽게 이해할 수 있도록 한다. 일곱째, 우리나라와 EM교과서의 사다리꼴, 모서리, 꼭짓점에 대한 정의가 달랐다. 정의가 다름으로써 학습활동과 그 도형이 속하는 류나 그 도형을 지칭하는 것이 달라졌다.

우리나라 교과서와 미국 교과서의 도형 영역 내 용어 정의를 비교·분석한 결과로부터 교수·학습에 도움을 줄 수 있는 시사점을 추출하면 다음과 같다.

첫째, 수학 용어를 분해하거나 어원을 도입한다. 우리나라의 수학 용어는 대부분 한자어로 되어있다. 그리고 그 단어들을 분해하면 쉽게 이해할 수 있는 용어들도 많이 존재한다. 예를 들어, 사각형은 사(四)+각(角)+형(形)으로, 네 개의 각(뿔)이 있는 도형으로 해석할 수 있다. 다면체는 다(多)+면(面)+체(體)로, 많은 +면+체, 즉, 많은 면을 갖고 있는 입체도형이라는 의미를 지닌다. 이처럼 한자를 외우는 것이 아니라 간단하게 언급해주는 것만으로도, 그 도형의 특징을 더 쉽게 이해할 수 있도록 하는 데 도움이 될 것이다. 뿐만 아니라, 생소한 용어를 접했을 때, 이미 알고 있는 단어로 분해하여, 추측할 수도 있다.

둘째, 반직선, 직선, 각, 삼각형, 평행, 수직 등의 기호를 도입한다. 수학의 기호는 그 도형을 축소한 모양으로 생긴 것이 많다. 따라서 이 기호들을 초등학교 수준에도 도입하기에 무리가 없어 보인다. 특히, 반직선의 경우 반직선 $\overrightarrow{\quad}$ 보다는 $\overline{\quad}$ 라고 하는 것이 반직선이 어느 방향으로 나아가는 지 직관적으로 이해하기 쉽다. 또한, 평행의 모양도 살짝 기운 두 직선이 평행한 모양이 축소된

것으로, 한 눈에 알아볼 수 있다. 초등학교 때부터 간단하고 직관적으로 이해할 수 있는 기호들을 도입하다보면, 중학교, 고등학교 때 접하는 수학 기호들이 조금은 친숙하게 다가갈 수 있다고 생각한다.

셋째, 도형을 정의할 때, 반례를 제시한다. EM교과서는 도형을 정의할 때, 그 도형이 아닌 도형들을 제시한다. 그럼으로써 그 도형만이 갖고 있는 특징을 더 쉽게 알아볼 수 있도록 한다. 예를 들어, 다각형을 제시하면서, 원과 열린 도형을 보여주면서, 역으로 다각형은 변으로만 이루어져있으며 닫힌 도형이라고 강조한다. 우리나라는 도형을 제시할 때, 정례만 제시하는 경향이 강하다. 반례도 제시한다면, 도형의 정의를 이해하는 데 보탬이 되리라 생각한다.

넷째, 예시를 다양하게 다룰 필요가 있다. 우리나라 교과서는 그 도형의 특징을 잘 살필 수 있는 모양으로 특정지어 보여주면서 도형을 약속하는 경향이 강하다. EM교과서는 그 도형을 최대한 다양하게 제시하려고 한다. 평행사변형을 약속할 때, 우리나라 교과서는 하나의 모양을 제시하지만, 미국 교과서는 마름모, 직사각형, 정사각형을 평행사변형의 예로 소개한다. 이는 공통적인 특징만을 모아 그 도형을 약속할 수 있고, 교수·학습에도 유용할 것이라 판단된다.

다섯째, 도형을 기호로 읽을 때, 기호의 순서대로 읽을 수 있도록 한다. 우리나라 교사용지도서에서는 도형을 기호로 읽을 때, 엄밀한 잣대를 대지 않도록 주의하라면서, 순서가 엇갈리게 읽어도 틀렸다고 말할 수 없다고 하였다. 하지만, 이는 나중에 오해를 살 수 있고 바람직하지 않은 방법이다. 따라서 도형을 순서대로 읽을 수 있도록 지도하는 것이 바람직하다고 생각한다. 꼭짓점들의 문자가 반드시 연속할 수 있도록 가르치는 것이 필요하다. 즉, 방향성을 생각하면서 라벨링할 필요가 있다는 것이다.

교사가 학생들에게 도형을 약속할 때, 위의 시사점을 참고한다면, 학생들이 도형을 정의하거나 이해하고, 나아가 도형의 정의 속에서 특징을 파악할 수 있는 데 도움이 될 것이라 생각한다.

참 고 문 헌

- 조영미. (2001). 학교수학에 제시된 정의에 관한 연구. 서울대학교 대학원.
- 전광숙. (2004). 학교 수학 용어 지도의 쟁점과 학습 지도 방향 : 사다리꼴을 소재로 하여. 전남대학교 교육대학원.
- 정은주. (2004). 한국·중국·일본의 학교수학 용어 비교·분석 연구. 홍익대학교 교육대학원.
- 성지경. (2009). 수학적 표현을 통한 초등학교 6학년 학생들의 수학 용어 이해에 대한 연구. 한국교원대학교 교육대학원.
- 김성은. (2014). 우리나라의 2009개정 수학과 교육과정과 미국의 CCSSM 비교연구. 이화여자대학교 교육대학원.
- 정정성, 박중훈, 임재훈. (2001). Dienes의 수학 학습 원리의 이해와 적용. 전남대학교 교육대학원.
- 교육부. (2013a). 수학 1-1. (주)천재교육
- 교육부. (2013b). 수학 1-2. (주)천재교육
- 교육부. (2013c). 수학 2-1. (주)천재교육
- 교육부. (2013d). 수학 2-2. (주)천재교육
- 교육부. (2014a). 수학 3-1. (주)천재교육
- 교육부. (2014b). 수학 3-2. (주)천재교육
- 교육부. (2014c). 수학 4-1. (주)천재교육
- 교육부. (2014d). 수학 4-2. (주)천재교육
- 교육부. (2015a). 수학 5-1. (주)천재교육
- 교육부. (2015b). 수학 5-2. (주)천재교육
- 교육부. (2015c). 수학 6-1. (주)천재교육
- 교육부. (2015d). 수학 6-2. (주)천재교육
- 교육부. (2013e). 초등학교 수학 교사용 지도서 수학 1-1. (주)천재교육
- 교육부. (2013f). 초등학교 수학 교사용 지도서 수학 1-2. (주)천재교육
- 교육부. (2013g). 초등학교 수학 교사용 지도서 수학 2-1. (주)천재교육
- 교육부. (2013h). 초등학교 수학 교사용 지도서 수학 2-2. (주)천재교육
- 교육부. (2014e). 초등학교 수학 교사용 지도서 수학 3-1. (주)천재교육

- 교육부. (2014f). 초등학교 수학 교사용 지도서 수학 3-2. (주)천재교육
- 교육부. (2014g). 초등학교 수학 교사용 지도서 수학 4-1. (주)천재교육
- 교육부. (2014h). 초등학교 수학 교사용 지도서 수학 4-2. (주)천재교육
- 교육부. (2015e). 초등학교 수학 교사용 지도서 수학 5-1. (주)천재교육
- 교육부. (2015f). 초등학교 수학 교사용 지도서 수학 5-2. (주)천재교육
- 교육부. (2015g). 초등학교 수학 교사용 지도서 수학 6-1. (주)천재교육
- 교육부. (2015h). 초등학교 수학 교사용 지도서 수학 6-2. (주)천재교육
- Hoffer, A.R. (1983). Van Hiele-based research, In R. Lesh & M. Landan(Eds).
Aquisition of mathematics concepts and processes. New York:Academic
Press.
- Freudenthal, H. (1978). Weeding and Sowing: Preface to a science of
Mathematics Education. Dordrecht:D. Reidel Publishing Company.
- Dienes, Z.P. (1960). Building Up Mathematics. Hutchinson Educational Ltd.
- Bell,M.,et al. (2012a). Everyday Mathematics 1st grade Teacher's Lesson Guide
Volume1(CCSSedition). Chicago:McGraw-Hill.
- Bell,M.,et al. (2012b). Everyday Mathematics 1st grade Teacher's Lesson
Guide Volume2(CCSSedition). Chicago:McGraw-Hill.
- Bell,M.,et al. (2012c). Everyday Mathematics 2st grade Teacher's Lesson Guide
Volume1(CCSSedition). Chicago:McGraw-Hill.
- Bell,M.,et al. (2012d). Everyday Mathematics 2st grade Teacher's Lesson Guide
Volume2(CCSSedition). Chicago:McGraw-Hill.
- Bell,M.,et al. (2012e). Everyday Mathematics 3st grade Teacher's Lesson Guide
Volume1(CCSSedition). Chicago:McGraw-Hill.
- Bell,M.,et al. (2012f). Everyday Mathematics 3st grade Teacher's Lesson Guide
Volume2(CCSSedition). Chicago:McGraw-Hill.
- Bell,M.,et al. (2012g). Everyday Mathematics 4st grade Teacher's Lesson
Guide Volume1(CCSSedition). Chicago:McGraw-Hill.
- Bell,M.,et al. (2012h). Everyday Mathematics 4st grade Teacher's Lesson
Guide Volume2(CCSSedition). Chicago:McGraw-Hill.

- Bell,M.,et al. (2012i). Everyday Mathematics 5st grade Teacher's Lesson Guide
Volume1(CCSSedition). Chicago:McGraw-Hill.
- Bell,M.,et al. (2012j). Everyday Mathematics 5st grade Teacher's Lesson Guide
Volume2(CCSSedition). Chicago:McGraw-Hill.
- Bell,M.,et al. (2012k). Everyday Mathematics 6st grade Teacher's Lesson
Guide Volume1(CCSSedition). Chicago:McGraw-Hill.
- Bell,M.,et al. (2012l). Everyday Mathematics 6st grade Teacher's Lesson Guide
Volume2(CCSSedition). Chicago:McGraw-Hill.

A B S T R A C T *

Ko, Seoyeon

Major in Elementary Mathematic Education
Graduate School of Education
Jeju National University

Supervised by Professor Choi, Keunbae

This paper compares and explore the definition level of school Mathematics that appears in our country and the United Stated curriculum to want to get educational implications on the definition instruction.

It systematically analyzed 2009 revised curriculum in Korea and Everyday Mathematics based Common Core State Standards for Mathematics in United State with emphasis on the geometry. And it explores the definition level and definition contents presented in two curriculum.

For this purpose, It analyze and explore definition level. Geometric terms from two textbooks were compared in detail based on Jo-yeongmi(2001)'s definition level. Each term were analyzed how to define in any way, a certain level of and put some content. As a result it confirmed the differences in the definition level and definition contents in the two

* A thesis submitted to the committee of Graduate School of Education, Jeju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education conferred in December, 2012.

curriculum.

When Mathematical term was defined, Geometry learning of two country depends on language level, definition contents and the use of symbols.

Through the process of analyzing and comparing specific cases about definition terms from two curriculum, this paper help teacher to explore desirable definition teaching method

key word : definition, definition level, name of figure, mathematical term