석사학위논문

수열수렴공간에 대한 연구

제 주 대 학 교 교 육 대 학 원

수 학 교 육 전 공

고 보 형

2014년 8월

수열수렴공간에 대한 연구

지도교수 박 진 원

고 보 형

이 논문을 교육학 석사학위 논문으로 제출함

2014년 8월

고보형의 교육학 석사학위 논문을 인준함

심사위원장 ___________________ 印

위 원 ___________________ 印

위 원 ___________________ 印

제주대학교 교육대학원

2014년 8월

목차

0. 서론 ······ 1
Ⅰ. 기본내용 ······ 3
Ⅱ. 수열수렴공간의 성질 ······ 14
1. 하우스도르프 수열수렴공간 ······ 14
2. 수열 컴팩트 수열수렴공간 ······ 16
3. 하우스도르프 및 수열 컴팩트 공간의 성질 ······ 18
Ⅲ. 함수공간 ······ 23
참고문헌 ······ 31
Abstract ······ 32

국문초록

수열은 제 1 가산공간, 특히 거리공간에서 매우 유용하게 사용되는 도구이다. 이 논문에서는 수열수렴공간에 대한 성질을 조사하였다. 논문의 주요 내용은 다음과 같다.

먼저, 1장에서 수열수렴공간의 정의와 몇 가지 예를 소개하였고, 위상공간과의 관계를 살펴보았다. 그리고 2장에서는 수열수렴공간에서 하우스도르프 공간과 수열 컴팩트 공간을 소개하고 그 공간의 성질에 대하여 살펴보았다. 마지막으로 3장에서는 수열수렴공간에서의 함수공간의 구조를 살펴보고, 이 구조와 관련하여 성립하는 지수법칙

$$Z^{X\times Y} = (Z^Y)^X$$

와

$$\left(\prod_{i\in I} X_i\right)^X = \prod_{i\in I}(X_i)^X$$

를 증명하였다.

0. 서론

수열은 수학에서 다루는 여러 도구들 중에 매우 다루기 쉽고 효과적인 도구이다. 실제로 거리공간에서는 수열을 이용하여 많은 개념들을 설명할 수 있다. 예를 들어 두 거리공간 (X,d)와 (Y,e) 사이의 함수 f가 점 $a \in X$에서 연속이라는 것은 $\varepsilon-\delta$ 방법으로 다음과 같이 정의한다.

(정의) 임의의 양수 ε에 대하여 적당한 양수 δ가 존재해서 $d(x,a)<\delta$ 인 정의역에 속하는 모든 x에 대하여 $e(f(x),f(a))<\varepsilon$인 것이다.

그런데 이것은 다음과 같이 정의하는 것과 동치이다.

(정의) (X,d)에서 a로 수렴하는 임의의 수열 (a_n)에 대하여 수열 $(f(a_n))$은 (Y,e)에서 $f(a)$로 수렴한다.

즉, 수열을 이용하여 연속함수를 정의할 수 있다. 연속 이외에도 많은 개념들을 수열을 이용하여 설명할 수 있다. 이러한 관점에서 볼 때 수열에 관한 내용을 연구하는 것은 매우 의미가 있다고 할 수 있다. 1963년 R. M. Dudley가 수열수렴에 대한 연구를 시작한 이후로 S. P. Franklin, D. C. Kent, H. P. Butzmann 등에 의하여 많은 연구가 이루어져 왔다. 이 논문에서는 수열수렴공간에서의 하우스도르프 공간과 수열 컴팩트 공간의 성질에 대하여 살펴보았고 이번 논문의 주요 내용이 되는 함수공간에서 성립하는 지수법칙에 대하여 알아보았다.

제 Ⅰ장에서는 수열수렴공간에 대한 기본적인 개념들을 소개하였다. 먼저 수열수렴공간을 정의하고 수열수렴공간 사이의 연속함수를 정리하고 집합의 카테시안 곱과 사영함수를 이용하여 수열수렴공간의 곱공간을 정의하였다. 마지막으로 일반위상공간과 수열수렴공간 사이의 관계를 살펴보고 위상공간 사이의 연속함수와 수열수렴공간 사이의 연속함수의 관계에 대해 연구해 보았다.

제 Ⅱ장에서는 하우스도르프 수열수렴공간과 수열 컴팩트 수열수렴공간을 소개하였다. 그리고 하우스도르프 위상공간과 수열 컴팩트 위상공간에 관련된 여러 가지 정리들이 수열수렴공간에서는 어떻게 유지되는지에 대하여 살펴보았다.

주요 내용이 되는 제 Ⅲ장에서는 수열수렴공간의 함수공간에 대하여 살펴보았다. 함수공간은 어떤 공간을 범주론적 관점에서 관찰할 때 매우 중요한 역할을 하는 공간이고 따라서 여러 가지 공간들에 대한 함수공간이 연구되어 왔다. 특히 지수법칙이 성립하도록 하는 함수공간의 구조가 어떻게 생겼는지에 대한 연구가 많이 이루어져 왔는데 이 장에서는 수열수렴공간에 대한 함수공간의 구조에 대하여 연구하였다. 먼저 함수공간의 구조를 정의하고 이 구조를 가진 몇 가지 함수공간들 사이의 동형함수를 알아봄으로써

$$Z^{X\times Y} = \left(Z^{Y}\right)^{X}$$

와

$$\left(\prod_{i\in I} X_i\right)^{X} = \prod_{i\in I} (X_i)^{X}$$

형태의 지수법칙이 성립함을 보였다.

I. 기본내용

이 장에서는 수열수렴공간을 정의하고 그와 관련된 예제들과 기본적인 정리에 대해 소개하려고 한다.

(정의) X를 공집합이 아닌 임의의 집합이라 하고 $X^{\mathbb{N}}$을 X위의 모든 수열로 구성된 집합이라 하자. (x_n)을 $X^{\mathbb{N}}$의 원소, x를 X의 원소라 하자. $X^{\mathbb{N}} \times X$의 부분집합 ξ가 다음 세 가지 조건을 만족한다고 하자.

(1) 모든 n에 대하여 $x_n = x$이면 $((x_n), x) \in \xi$이다.

(2) $((x_n), x) \in \xi$이면 (x_n)의 모든 부분수열 $(x_{s(n)})$에 대해 $((x_{s(n)}), x) \in \xi$이다.

(3) $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$이고 $x \in X$라 하자. (x_n)의 모든 부분수열 $(x_{s(n)})$에 대하여 적당한 부분수열 $(x_{st(n)})$이 존재하여 $((x_{st(n)}), x) \in \xi$이면, $((x_n), x) \in \xi$이다.

이 때, 순서쌍 (X, ξ)를 수열수렴공간(sequential convergence space)이라고 한다. 그리고 $((x_n), x) \in \xi$일 때, 수열 (x_n)이 x로 수렴한다고 하고 기호로

$$x_n \rightarrow x$$

라고 표시한다.

수열수렴공간의 예를 살펴보자.

[예제 1] 일반위상공간은 수열수렴공간이다.

풀이 : ① 수열 (x_n)을 모든 자연수 n에 대하여 $x_n = x$인 수열이라 하자. 그러면 U가 x를 포함하는 임의의 열린 집합일 때 임의의 자연수 n에 대해 $x_n \in U$이므로 x_n은 x로 수렴한다.

② (x_n)을 x로 수렴하는 수열이라 하자. 그리고 $(x_{s(n)})$을 (x_n)의 부분수열이라 하고 U를 x를 포함하는 임의의 열린 집합이라 하자. 그러면 적당한 자연수 N이 존재하여 $n \geq N$인 모든 n에 대해 $x_n \in U$이다. 이 때,

$$K = \min\{s(n) | s(n) \geq N\}$$

라 하면 $s(n) \geq K$인 모든 $s(n)$에 대하여 $x_{s(n)} \in U$이므로 $(x_{s(n)})$는 x로 수렴한다.

③ 수열 (x_n)의 모든 부분수열 $(x_{s(n)})$에 대하여 x로 수렴하는 적당한 부분수열 $(x_{st(n)})$이 존재한다고 하자. 결론을 부정하여 (x_n)이 x로 수렴하지 않는다고 가정하자. 그러면 x를 포함하는 적당한 열린 집합 U가 존재하여 모든 자연수 N에 대해 $x_n \not\in U$를 만족하는 N보다 큰 자연수 n이 존재한다. 이제 다음과 같은 방법으로 (x_n)의 특정한 부분수열을 만들어 보자.

$N=1$로 택하면 $x_{n_1} \not\in U$를 만족하는 1보다 큰 적당한 자연수 n_1이 존재한다.

$N=n_1$으로 택하면 $x_{n_2} \not\in U$를 만족하는 n_1보다 큰 적당한 자연수 n_2가 존재한다.

$N=n_2$로 택하면 $x_{n_3} \not\in U$를 만족하는 n_2보다 큰 적당한 자연수 n_3가 존재한다.

이와 같은 방법으로 모든 항이 U에 속하지 않는 (x_n)의 부분수열 (x_{n_k})를 얻을 수 있다. 이 부분수열은 x로 수렴하지 않으므로 ③의 가정에 모순이다.

[예제 2] $\mathbb{R}$을 실수 전체의 집합이라 하고 ξ를 다음과 같이 정의하자.
(정의) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}$의 원소 $((x_n), x)$가 ξ에 속하기 위한 필요충분조건은 임의의 양수 ϵ에 대하여 적당한 자연수 N이 존재해서 $n \geq N$이면 $|x_n - x| < \epsilon$을 만족하는 것이다.
그러면 $(\mathbb{R}, \xi)$는 수열수렴공간이다.

다음과 같은 경우도 수열수렴공간이 가능하다.

[예제 3] X를 공집합이 아닌 임의의 집합이라 하고 ξ를 다음과 같이 정의하자.
(정의) $X^{\mathbb{N}} \times X$의 원소 $((x_n), x)$가 ξ에 속하기 위한 필요충분조건은 적당한 자연수 N이 존재하여 $n \geq N$인 모든 자연수 n에 대하여 $x_n = x$를 만족하는 것이다.
풀이 : ① 수열 (x_n)이 임의의 n에 대하여 $x_n = x$이면 (x_n)은 위 조건을 만족하므로 $((x_n), x)$은 ξ에 속한다.
② $((x_n), x)$가 ξ에 속한다고 하자 그러면 적당한 자연수 N이 존재하여 $n \geq N$인 모든 자연수 n에 대하여 $x_n = x$이다. $(x_{s(n)})$을 (x_n)의 부분수열이라 하고

$$K = \min\{s(n) \mid s(n) \geq N\}$$

이라 하면 $s(n) \geq K$인 모든 $s(n)$에 대하여 $x_{s(n)} = x$이므로 $((x_{s(n)}), x)$는 ξ에 속한다.
③ (x_n)을 수열이라 하고 x를 X의 원소라 하자. 그리고 (x_n)의 모든 부분수열 $(x_{s(n)})$에 대하여 $((x_{st(n)}), x)$가 ξ에 속하는 적당한 부분수열 $(x_{st(n)})$이 존재한다고 하자. 그리고 $((x_n), x)$가 ξ에 속하지 않는다고 하자. 그러면 모든 자연수 N에 대하여 $x_n \neq x$를 만족하는 N보다 큰 자연수 n이 존재한다. 이제 다음과 같은 방법으로 (x_n)의 특정한 부분수열을 만들어 보자.
$N = 1$로 택하면 $x_{n_1} \neq x$를 만족하는 1보다 큰 적당한 자연수 n_1이 존재한다. $N = n_1$으로 택하면 $x_{n_2} \neq x$를 만족하는 n_1보다 큰 적당한 자연수 n_2가 존재한다. $N = n_2$로 택하면 $x_{n_3} \neq x$를 만족하는 n_2보다 큰 적당한 자연수 n_3가 존재한

다. 이와 같은 방법으로 모든 항이 x가 아닌 (x_n)의 부분수열 (x_{n_k})를 얻을 수 있다. 이 부분수열을 $(x_{s(n)})$이라 하면 $((x_{st(n)}),x)$은 ξ에 속하지 않으므로 가정에 모순이고 따라서 $((x_n),x)$는 ξ에 속한다.
그러므로 (X,ξ)는 수열수렴공간이다.

(X,ξ)가 수열수렴공간이고 ξ를 구체적으로 나타낼 필요가 없을 때, (X,ξ)를 간단히 X로 표현한다.

X와 Y를 수열수렴공간이라 하고 f를 X에서 Y로 가는 함수라 하자. $x \in X$에 대해 x로 수렴하는 모든 수열 (x_n)에 대하여 수열 $(f(x_n))$이 $f(x)$로 수렴하면 f를 x에서 수열연속(sequentially continuous)이라 한다. 그리고 모든 x에 대해서 수열연속이면 f를 수열연속이라 한다.

수열연속함수는 수열수렴공간을 다루기 위해선 없어서는 안 될 도구이다. 공간의 확장과 수열수렴공간과 관련된 정리의 증명을 위해서 가지고 있어야 할 필수적인 요소이다. 이번에는 수열수렴공간의 곱공간을 만들어보려고 한다.

I를 임의의 첨수집합이라 하고 모든 $i \in I$에 대하여 $(X_{i,}\ \xi_i)$를 수열수렴공간이라 하자. 그리고 $\prod_{i \in I} X_i$를 각각의 집합 X_i의 카테시안 곱(cartesian product)이라 하고,

$$p_i : \prod_{i \in I} X_i \ \rightarrow \ X_i$$

를 사영함수(projection map)라 하자. 그리고 $\left(\prod_{i \in I} X_i\right)^{\mathbb{N}}$를 $\prod_{i \in I} X_i$의 모든 수열을 모아놓은 집합이라 했을 때 $\left(\prod_{i \in I} X_i\right)^{\mathbb{N}}$의 원소 (x_n)과 $\prod_{i \in I} X_i$의 원소 x에 대하여 다음과 같이 정의하자.

(정의) 모든 사영함수 p_i에 대하여 (X_i, ξ_i)에서 $(p_i(x_n))$이 $p_i(x)$로 수렴할 때, (x_n)이 x로 수렴한다고 한다.

(정리 1.1) (x_n)을 $\prod_{i \in I} X_i$의 수열이라 할 때, 위에서 정의된 수렴은 다음 조건을 만족시킨다.

(1) 모든 n에 대하여 $x_n = x$이면 수열 (x_n)은 x로 수렴한다.

(2) 수열 (x_n)이 x로 수렴하면 (x_n)의 모든 부분수열 $(x_{s(n)})$도 x로 수렴한다.

(3) (x_n)의 모든 부분수열 $(x_{s(n)})$에 대하여 x로 수렴하는 적당한 부분수열 $(x_{st(n)})$이 존재하면 (x_n)도 x로 수렴한다.

증명 : (x_n)이 $\prod_{i \in I} X_i$의 수열이고 $p_i(x_n)$은 X_i의 원소로 이루어진 수열이다.

(1) 모든 n에 대하여 $x_n = x$라고 하자. 그러면 모든 $i \in I$에 대하여 $p_i(x_n)$은 $p_i(x)$와 같고 수열 $(p_i(x_n))$는 상수수열이므로 (X_i, ξ_i)에서

$$p_i(x_n) \to p_i(x)$$

을 만족하게 된다. 따라서 (x_n)은 x로 수렴한다고 한다.

(2) (x_n)이 x로 수렴한다고 하고 $(x_{s(n)})$을 (x_n)의 부분수열이라 하자. 그러면 모든 $i \in I$에 대하여 수열 $(p_i(x_n))$은 (X_i, ξ_i)에서 $p_i(x)$로 수렴한다. 그리고 $(p_i(x_{s(n)}))$은 $(p_i(x_n))$의 부분수열이고 (X_i, ξ_i)는 수열수렴공간이므로 수열 $(p_i(x_{s(n)}))$은 (X_i, ξ_i)에서 $p_i(x)$로 수렴한다. 따라서 $(x_{s(n)})$은 x로 수렴한다.

(3) (x_n)을 $\prod_{i \in I} X_i$의 수열이라 하고 (x_n)의 모든 부분수열 $(x_{s(n)})$에 대하여 적당한 부분수열 $(x_{st(n)})$이 존재해서 x로 수렴한다고 하자. 그러면 모든 $i \in I$에 대해서 수열 $(p_i(x_{st(n)}))$은 수열 $(p_i(x_{s(n)}))$의 부분수열이고 (X_i, ξ_i)에서

$$p_i(x_{st(n)}) \to p_i(x)$$

를 만족한다. 이것은 수열 $(p_i(x_n))$이 (X_i, ξ_i)에서 $p_i(x)$로 수렴하는 것을 의미한다. 그리고 이 사실은 모든 $i \in I$에 대하여 성립하므로 수열 (x_n)은 x로 수렴한다.

위 사실에 의하여, $\prod_{i \in I} X_i$는 수열수렴공간이다. 이렇게 정의된 수열수렴공간을 수열수렴공간들의 모임 $\{(X_i, \xi) | i \in I\}$의 곱공간(product space)이라고 한다.

(정리 1.2) $\prod_{i \in I} X_i$를 수열수렴공간들의 모임 $\{(X_i, \xi) | i \in I\}$의 곱공간이라 하자. 그러면 모든 $i \in I$에 대하여 사영함수

$$p_i : \prod_{i \in I} X_i \to X_i$$

는 수열연속이다.

증명 : 곱공간의 정의에 의하여 자명하다.

우리가 앞에 예제를 통해 일반위상공간은 수열수렴공간이 됨을 알았다. 여기서는 그 역에 대하여 알아보려고 한다.

X가 수열수렴공간이고 A가 X의 부분집합일 때, $k(A)$를 다음과 같이 정의하자.

$$k(A) = \{x \in X \mid x \text{ 로 수렴하는 수열 } (x_n) \text{ 이 } A \text{ 에 존재한다 }\}$$

(정리 1.3) X가 수열수렴공간일 때 임의의 부분집합 A, B에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $A \subseteq k(A)$

(2) $k(\varnothing) = \varnothing$

(3) $A \subseteq B$이면 $k(A) \subseteq k(B)$이다.

(4) $k(A \cup B) = k(A) \cup k(B)$

증명 : (1) $x \in A$라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $x_n = x$라 하면 (x_n)은 x로 수렴하는 A의 수열이다. 따라서 $x \in k(A)$이다.

(2) 공집합은 원소가 없으므로 수렴하는 수열을 만들 수 없기에 자명하다.

(3) 정의에 의하여 자명하다.

(4) $x \in k(A \cup B)$라 하자. 그러면 x에 수렴하는 수열 (x_n)이 집합 $A \cup B$에 존재

한다. 만일 수열 (x_n)의 항 중에서 A의 원소인 것의 개수가 무한개라고 하자. 그러면 A의 원소로 이루어진 (x_n)의 부분수열을 얻을 수 있다. 그리고 이 수열은 x로 수렴한다. 따라서 $x \in k(A)$이다. 만일 수열 (x_n)의 항 중에서 A의 원소인 것의 개수가 유한개라고 하자. 그러면 이 항들을 제외하여 B의 원소로 이루어진 (x_n)의 부분수열을 얻을 수 있다. 그리고 이 수열은 x로 수렴한다. 따라서 $x \in k(B)$이다. 따라서

$$k(A \cup B) \subseteq k(A) \cup k(B)$$

이다. 역으로 (3)에 의하여 $k(A) \subseteq k(A \cup B)$이고 $k(B) \subseteq k(A \cup B)$이므로

$$k(A) \cup k(B) \subseteq k(A \cup B)$$

이다.

(정리 1.4) X를 수열수렴공간이라 할 때 X위에 $k(A) = \mathrm{cl}(A)$을 만족하는 적당한 위상이 존재한다.

증명 : X의 부분집합의 모임 T를

$$T = \{X - A \mid A = k(A)\}$$

라 정의하자.

k의 정의에 의하여 $k(X) \subseteq X$이고, 위 정리의 (1)에 의하여 $X \subseteq k(X)$이다. 따라서 $X = k(X)$이므로 $X - X = \varnothing \in T$이다.

그리고 위 정리의 (2)에 의하여 $X \in T$이다.

I를 첨수집합이라 하고 임의의 $i \in I$에 대하여 $F_i = k(F_i)$이고 $X - F_i \in T$라 하자.

먼저

$$\bigcap_{i \in I} F_i = k\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right)$$

임을 보이자. 위 정리의 (1)에 의하여

$$\bigcap_{i \in I} F_\alpha \subseteq k\left(\bigcap_{i \in I} F_\alpha\right)$$

이다. 역으로 모든 $i \in I$에 대하여 $\bigcap_{i \in I} F_i \subseteq F_i$이므로 위 정리의 (3)에 의하여

$$k\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) \subseteq k(F_i)$$

이다. 그런데 가정에 의하여 $F_i = k(F_i)$이므로 $k\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) \subseteq F_i$이다. 따라서

$$k\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} F_i$$

이고 $\bigcap_{i\in I} F_i = k\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)$이다. 그러므로 T의 정의에 의하여 $X - \bigcap_{i\in I} F_i$는 T의 원소이다. 그런데

$$X - \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} (X - F_i)$$

이므로 $\bigcup_{i\in I} (X - F_i) \in T$이다. $A = k(A)$, $B = k(B)$이고 $X - A \in T$, $X - B \in T$라 하자. 그러면 위 정리의 (3)에 의하여 $A \cup B = k(A \cup B)$이고 따라서 $X - (A \cup B) \in T$이다. 그런데 $X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$이므로 $(X - A) \cap (X - B) \in T$이다. 따라서 T는 X에서의 위상이 된다. 그리고 정의에 의하여 $k(A) = \mathrm{cl}(A)$이다.

(정의) 수열수렴공간의 부분집합 A에 대하여 $A = k(A)$일 때, A를 닫힌 집합이라고 한다.

[예제 4] X를 수열수렴공간이라 하고 Y를 X의 모든 닫힌 집합을 모아놓은 집합이라 하자. 집합 $A \in Y$와 수열 (A_n)에 대하여 (A_n)이 A로 수렴할 필요충분조건이 적당한 자연수 N이 존재하여 $n \geq N$인 모든 자연수 n에 대하여 $k(A_n) = A$라고 하자. 그러면 Y는 수열수렴공간이 된다.

(정의) 수열수렴공간의 부분집합 A가 닫힌 집합일 때 A^c을 열린 집합이라 정의한다.

위 (정리 1.4)에 의하여 수열수렴공간은 적당한 위상공간을 만들어 낼 수 있음을 알았다. 이와 관련하여 다음의 결과들을 얻을 수 있다.

(정리 1.5) (X,ξ)가 수열수렴공간이고 A가 (X,ξ)에서 x를 포함하는 열린 집합일 필요충분조건은 $x \in A$일 때 x로 수렴하는 모든 (x_n)에 대하여 적당한 자연수 N이 존재하여 모든 $n \ge N$에 대해 $x_n \in A$을 만족하는 것이다.

증명 : $(\Rightarrow)$ A가 x를 포함하는 열린 집합이라 할 때 어떤 (x_n)에 대해서는 모든 자연수 N에 대해 적당한 $n \ge N$이 존재하여 $x_n \not\in A$가 된다고 가정하자.

$N=1$이라 했을 때 적당한 $n_1 \ge 1$이 존재해서 $x_{n_1} \not\in A$라 하자.

$N_2 = n_1$이라 두었을 때 적당한 $n_2 \ge N_2$가 존재해서 $x_{n_2} \not\in A$라 하자.

이런 과정을 반복해서 모든 항이 A에 속하지 않는 (x_n)의 부분수열 (x_{n_k})를 만들 수 있다. (x_{n_k})는 (x_n)의 부분수열이므로 (x_n)이 x로 수렴하기 때문에 (x_{n_k})도 x로 수렴한다. 모든 k에 대해 $x_{n_k} \in A^c$이므로 $x \in k(A^c)$를 만족하고 A^c은 닫힌 집합이기 때문에 $A^c = k(A^c)$가 성립하므로 $x \in A^c$이 되는데 이는 가정에 모순이다.

$(\Leftarrow)$ x를 포함한 집합 A가 열린 집합이 아니라고 가정하자. 즉 A^c가 닫힌 집합이 아니라고 하자. 그러면 $k(A^c) - A^c \neq \varnothing$이므로 $x \in k(A^c)$이지만 $x \not\in A^c$인 원소가 존재한다. 즉 $x \in A$이다. 이때 $x \in k(A^c)$이므로 A^c에 수열 (x_n)이 존재해서 (x_n)은 x로 수렴한다. 그런데 가정에 의하여 $x_n \in A$이므로 모순이다. 따라서 A^c는 닫힌 집합이고 A는 열린 집합이 된다.

(정리 1.6) (X, T_1)과 (Y, T_2)를 위상공간이라 하고 이 위상공간으로부터 만들어진 수열수렴공간을 (X, ξ_1), (Y, ξ_2)라 하자. 함수

$$f : (X, T_1) \rightarrow (Y, T_2)$$

가 연속이면 함수

$$f : (X, \xi_1) \rightarrow (Y, \xi_2)$$

는 수열연속이 된다.

증명 : 수열 (x_n)이 (X, ξ_1)에서 x로 수렴한다고 하자. 수열 $(f(x_n))$이 (Y, ξ_2)에서 $f(x)$로 수렴함을 보이기 위해 $f(x)$를 포함하는 열린 집합 G를 택하자. 그러면 함수

$$f : (X, T_1) \rightarrow (Y, T_2)$$

가 연속이므로 $f^{-1}(G)$는 X에서 열린 집합이다. $x \in f^{-1}(G)$이고 (x_n)이 x로 수렴하므로 적당한 자연수 N이 존재하여 $n \geq N$인 모든 자연수 n에 대하여 x_n은 $f^{-1}(G)$에 속한다. 따라서 $f(x_n)$은 G에 속한다. 그러므로 적당한 N이 존재하여 $n \geq N$인 모든 자연수 n에 대해 $f(x_n) \in G$이므로 $(f(x_n))$은 $f(x)$로 수렴한다. 따라서

$$f : (X, \xi_1) \rightarrow (Y, \xi_2)$$

는 수열연속함수이다.

(**정리** 1.7) (X,ξ_1)과 (Y,ξ_2)를 수열수렴공간이라 하고 이 수열수렴공간으로부터 만들어진 어떤 위상공간을 (X,T_1), (Y,T_2)라 하자. 함수

$$f:(X,\xi_1)\ \rightarrow\ (Y,\xi_2)$$

가 수열연속이면 함수

$$f:(X,T_1)\ \rightarrow\ (Y,T_2)$$

는 연속이다.

증명 : B를 Y의 닫힌 부분집합이라 할 때 $f^{-1}(B)$가 닫힌 집합임을 보이면 된다. 즉,

$$f^{-1}(B)=k(f^{-1}(B))$$

임을 보이면 된다. 정의에 의하여 $f^{-1}(B)\subseteq k(f^{-1}(B))$임은 자명하므로 $k(f^{-1}(B))\subseteq f^{-1}(B)$임을 보이면 된다. 점 x를 $k(f^{-1}(B))$에서 임의로 택하자. 그러면 x로 수렴하는 $f^{-1}(B)$의 수열 (x_n)이 존재한다. 이 때, 수열 $(f(x_n))$은 B의 수열이고

$$f:(X,\xi_1)\ \rightarrow\ (Y,\xi_2)$$

가 수열연속이므로 $f(x)$로 수렴한다. 따라서 $f(x)$는 $k(B)$의 원소이다. 그런데 B가 닫힌 집합이므로 $k(B)=B$이고 따라서 $f(x)$는 B의 원소이다. 그러므로 x는 $f^{-1}(B)$의 원소이고 이것은

$$k(f^{-1}(B))\subseteq f^{-1}(B)$$

를 의미한다. 이상으로부터 $f^{-1}(B)=k(f^{-1}(B))$이고 따라서

$$f:(X,T_1)\ \rightarrow\ (Y,T_2)$$

는 연속이다.

Ⅱ. 수열수렴공간의 성질

이 장에서는 수열수렴공간의 하우스도르프와 수열 컴팩트를 정의해서 앞장에서 다루던 기본적인 내용을 가지고 본격적으로 수열수렴공간의 성질을 연구해보려고 한다. 새로운 예제들을 추가해보고 앞에서 다루던 예제들은 어떤 특징이 있는지 살펴보면서 위상에서 다루던 정리들을 수열수렴공간으로 확장하여 내용을 재해석해 정리해보겠다.

1. 하우스도르프 수열수렴공간

(정의) (X, ξ)를 수열수렴공간이라 하고 (x_n)을 수렴하는 수열이라 하자. 만일 $((x_n), x) \in \xi$이고 $((x_n), y) \in \xi$이면 $x = y$일 때, (X, ξ)를 하우스도르프 수열수렴공간 (Hausdorff sequential convergence space)이라고 한다.

[예제 5] 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$은 하우스도르프 수열수렴공간이다.

기본내용에서 소개한 [예제 3]은 하우스도르프 수열수렴공간의 예가 된다. 그리고 위상공간에서 비이산위상은 하우스도르프가 되지 않는 대표적인 경우라 볼 수 있다. 특정 원소를 포함하는 열린 집합이 전체집합뿐이므로 수렴하는 수열에 대하여 수렴하는 값이 충분히 여러 가지가 나올 수 있기 때문이다. 다음의 예제는 하우스도르프 공간이 되지 않는 또 다른 경우를 보여주고 있는데 특별히 어떠한 형태의 공간이 수열수렴공간이 될 수 있는지도 참고 가능한 예제이다.

[예제 6] 집합 $X=\{a,b\}$에 대하여 다음과 같이 정의하자.

(1) 모든 수열 (x_n)은 a로 수렴한다.

(2) 수열 (x_n)에 대하여 적당한 자연수 N이 존재해서 N보다 같거나 큰 모든 n에 대하여 $x_n = b$이면 수열 (x_n)은 b로 수렴한다.

그러면 X는 수열수렴공간이 된다.

풀이 : ① 모든 n에 대하여 $x_n = a$이면 (x_n)은 a로 수렴하고 $x_n = b$이면 (x_n)은 b로 수렴한다. 따라서 $x_n = x$이면 수열 (x_n)은 x로 수렴한다.

② (x_n)이 x로 수렴한다고 하자. 그러면 (x_n)은 a로 수렴하거나 (x_n)은 b로 수렴한다. 만약 (x_n)이 a로 수렴하면 임의의 부분수열 $x_{s(n)}$에 대하여 $(x_{s(n)})$은 a로 수렴한다. 만약 (x_n)이 b로 수렴하면 적당한 자연수 N이 존재해서 모든 $n \geq N$에 대하여 $x_n = b$이다. x_n의 임의의 부분수열 $x_{s(n)}$에 대하여

$$K=\min\{s(n) \mid s(n) \geq N\}$$

이라 하면 $s(n) \geq K$인 모든 $s(n)$에 대하여 $x_{s(n)} = b$이므로 $(x_{s(n)})$은 b로 수렴한다.

③ 수열 x_n의 모든 부분수열 $x_{s(n)}$에 대하여 어떤 부분수열 $x_{st(n)}$이 존재해서 $(x_{st(n)})$이 x로 수렴한다고 하자. 그러면 $(x_{st(n)})$은 a로 수렴하거나 $(x_{st(n)})$은 b로 수렴한다. 만약 $(x_{st(n)})$이 a로 수렴하면 (x_n)은 a로 수렴한다. $(x_{st(n)})$이 b로 수렴할 때, (x_n)이 b로 수렴하지 않는다고 가정해보자. 그러면 모든 자연수 N에 대하여 특정한 $n \geq N$이 존재해서 $x_n = a$이다.

$N=1$로 택하면 $x_{n_1} = a$를 만족하는 1보다 큰 적당한 자연수 n_1이 존재한다.

$N=n_1$으로 택하면 $x_{n_2} = a$를 만족하는 n_1보다 큰 적당한 자연수 n_2가 존재한다.

$N=n_2$로 택하면 $x_{n_3} = a$를 만족하는 n_2보다 큰 적당한 자연수 n_3가 존재한다.

이와 같은 방법으로 모든 항이 a가 되는 (x_n)의 부분수열 (x_{n_k})를 얻을 수 있다. 이 부분수열을 $(x_{s(n)})$이라 하면 이 수열의 부분수열도 역시 b로 수렴하지 않으므로 가정에 모순이다. 따라서 (x_n)은 b로 수렴한다.

(정리 2.1) I를 임의의 첨수집합이라 하고 모든 $i \in I$에 대하여 (X_i, ξ_i)를 하우스도르프 수열수렴공간이라 하자. 그러면 $\{(X_i, \xi) | i \in I\}$의 곱공간은 하우스도르프 수열수렴공간이다.

증명 : $\{(X_i, \xi) | i \in I\}$의 곱공간을 X라 하고 (x_n)을 X의 수열이라 할 때 (x_n)이 x와 y로 수렴한다고 하자. 모든 $i \in I$에 대하여 사영함수 p_i가 연속이므로 $(p_i(x_n))$은 $p_i(x)$와 $p_i(y)$로 수렴한다. 그런데 X_i가 하우스도르프 수열수렴공간이므로 $p_i(x) = p_i(y)$이다. 따라서 $x = y$이므로 곱공간 X는 하우스도르프 수열수렴공간이다.

2. 수열 컴팩트 수열수렴공간

(정의) X가 수열수렴공간일 때 X의 모든 수열이 수렴하는 부분수열을 가지면 X를 수열 컴팩트(sequential compact)공간이라고 한다.

[예제 7] 위의 [예제 6]는 수열 컴팩트 공간이다.

(정리 2.2) $\{X_n | n \in \mathbb{N}\}$을 수열 컴팩트 공간의 모임이라 하면 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$도 수열 컴팩트 공간이다.

증명 : 수열 (a_n)을 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$의 수열이라 하자.

(a_n)의 첫 번째 좌표로 이루어진 수열은 X_1의 수열이고 X_1은 수열 컴팩트이므로 (a_n)은 첫 번째 좌표가 어떤 q_1으로 수렴하는 부분수열 $\left(a_{s_1(n)}\right)$을 갖는다.

이 부분수열의 두 번째 좌표로 이루어진 수열은 X_2의 수열이고 X_2는 수열 컴팩트이므로 $\left(a_{s_1(n)}\right)$은 두 번째 좌표가 어떤 q_2로 수렴하는 부분수열 $\left(a_{s_2(n)}\right)$을 갖는

다. 이 수열은 첫 번째 좌표는 q_1으로 수렴하고 두 번째 좌표는 q_2로 수렴하는 (a_n)의 부분수열이다. 이와 같은 과정을 반복하면 모든 자연수 k에 대하여 다음 두 조건을 만족하는 (a_n)의 부분수열 $(a_{s_k(n)})$을 얻을 수 있다.

(조건1) 수열 $(a_{s_{k+1}(n)})$은 수열 $(a_{s_k(n)})$의 부분수열이다.

(조건2) k보다 작거나 같은 자연수 i에 대하여 수열 $(a_{s_k(n)})$의 i 번째 좌표로 이루어진 수열은 X_i에서 q_i로 수렴한다.

다음과 같이 수열 (x_n)을 정의하자.

(정의) 모든 자연수 k에 대하여 x_k은 수열 $(a_{s_k(n)})$의 k번째 원소이다.

그러면 (x_n)은 (a_n)의 부분수열이고 모든 자연수 i에 대하여 i 번째 좌표로 이루어진 수열은 X_i에서 q_i로 수렴한다. 따라서 $q=(q_n)$이라 하면 (a_n)은 q로 수렴하는 부분수열을 포함한다. 그러므로 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$은 수열 컴팩트 공간이다.

(정리 2.3) 수열 컴팩트 공간의 닫힌 부분집합은 수열 컴팩트이다.

증명 : X를 수열 컴팩트 공간이라 하고 A를 X의 닫힌 부분집합이라 하자. (a_n)을 A의 수열이라 하면 X가 수열 컴팩트이므로 X의 원소 a로 수렴하는 적당한 부분수열 $(a_{s(n)})$이 존재한다. 그러면 $k(A)$의 정의에 의하여 $a \in k(A)$이고 $A=k(A)$이므로 $a \in A$를 만족한다. 따라서 A는 수열 컴팩트이다.

3. 하우스도르프 및 수열 컴팩트 수열수렴공간의 성질

이 절에서는 하우스도르프와 수열 컴팩트 위상공간에 관련된 여러 가지 정리들이 수열수렴공간에서는 어떻게 유지되는지에 대해 살펴보겠다.

(정리 2.4) X와 Y를 수열수렴공간이라 하고 $f: X \to Y$를 수열연속이라 하자. Y가 하우스도르프이면 $\{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$는 $X \times Y$에서 닫힌 집합이다.

증명 : $\{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$를 A라고 하자. $(x,y) \in k(A)$라 하면 (x,y)로 수렴하는 적당한 수열 (a_n)이 A에 존재한다. $a_n = (x_n, y_n)$이라 두면 곱공간의 정의에 의하여

$$p_1(a_n) = x_n \to x \ , \ p_2(a_n) = y_n \to y$$

이다. f가 수열연속이므로 $(f(x_n))$은 $f(x)$로 수렴한다. 그런데 A의 정의에 의하여 $y_n = f(x_n)$이므로 수열 $(f(x_n))$은 y로 수렴하고 Y가 하우스도르프이므로 $f(x) = y$이다. 따라서 $(x,y) \in A$이다.

(정리 2.5) X를 수열수렴공간이라 하자. X가 하우스도르프이기 위한 필요충분조건은 $\{(x,x) \mid x \in X\}$가 $X \times X$에서 닫힌 집합인 것이다.

증명 : $(\Rightarrow)$ 위 정리에서 $Y = X$라 하고 f를 항등함수로 생각하면 증명된다.

$(\Leftarrow)$ (x_n)을 X의 수열이라 하고 (x_n)이 x와 y로 수렴한다고 하자. 모든 n에 대하여(x_n, x_n)는 A의 원소이므로 $((x_n, x_n))$은 A의 수열이다. 그런데 $p_1((x_n, x_n))$은 (x_n)이므로 x로 수렴하고 마찬가지로 $p_2((x_n, x_n))$은 (x_n)이므로 y로 수렴한다. 따라서 수열 $((x_n, x_n))$은 (x,y)로 수렴하고, 가정에 의하여 A가 닫힌 집합이므로 (x,y)는 A의 원소이다. 따라서 $x = y$이고 그러므로 X는 하우스도르프 수열수렴공간이다.

(정리 2.6) X와 Y를 수열수렴공간이라 하고 함수 $f:X \to Y$와 $g:X \to Y$를 수열연속이라 하자. Y가 하우스도르프이면 $\{x \in X | f(x)=g(x)\}$는 X에서 닫힌 집합이다.

증명 : $\{x \in X | f(x)=g(x)\}$를 A라 두고 $k(A) \subset A$임을 보이기 위하여 $x \in k(A)$라 하자. 그러면 x로 수렴하는 A의 수열 (x_n)이 존재한다. f와 g가 수열연속이므로 $(f(x_n))$은 $f(x)$로 수렴하고 $(g(x_n))$은 $g(x)$로 수렴한다. (x_n)이 A의 수열이므로 모든 n에 대하여 $f(x_n)=g(x_n)$이므로 $(f(x_n))$과 $(g(x_n))$은 같은 수열이다. 가정에 의하여 Y가 하우스도르프이므로 $f(x)=g(x)$이다. 따라서 $x \in A$이고 그러므로 $k(A) \subset A$이다. 따라서 A는 닫힌 집합이다.

(따름정리) X를 하우스도르프 수열수렴공간이라 하고 함수 $f:X \to X$를 수열연속함수라 하자. 그러면 $\{x \in X | f(x)=x\}$는 X에서 닫힌 집합이다.

증명 : 위 (정리 2.6)에서 함수 g에 대해 Y를 X라 두고 항등함수로 생각하면 증명된다.

(정리 2.7) X와 Y를 수열수렴공간이라 하고 함수 $f:X \to Y$를 수열연속이라 하자. Y가 하우스도르프이면 $\{(x_1,x_2) | f(x_1)=f(x_2)\}$는 $X \times X$에서 닫힌 집합이다.

증명 : $\{(x_1,x_2) | f(x_1)=f(x_2)\}$를 A라 하자. $(x_1,x_2) \in k(A)$라 하면 (x_1,x_2)로 수렴하는 적당한 수열 (a_n)이 A에 존재한다. $a_n=(x_n^1,x_n^2)$이라 두면 곱공간의 정의에 의하여 수열 (x_n^1)은 x_1으로 수렴하고 수열 (x_n^2)는 x_2로 수렴한다. 그리고 f가 수열연속이므로 $(f(x_n^1))$은 $f(x_1)$으로 수렴하고 $(f(x_n^2))$는 $f(x_2)$로 수렴한다. 그런데 $f(x_n^1)=f(x_n^2)$이므로 $(f(x_n^1))$와 $(f(x_n^2))$는 서로 같은 수열이고 Y가 하우스도르프이므로 $f(x_1)=f(x_2)$이다. 따라서 $(x_1,x_2) \in A$이다. 그러므로 A는 닫힌 집합이다.

(정리 2.8) X와 Y를 수열수렴공간이라 하고 함수 $f:X \to Y$와 $g:X \to Y$를 수열연속이라 하자. A를 X의 부분집합이라 하고 A 위에서 $f=g$라 하자. Y가 하우스도르프이면 $k(A)$ 위에서 $f=g$이다.

증명 : a를 $k(A)$에 속하는 원소라 하자. 정의에 의하여 a로 수렴하는 A의 수열 (x_n)이 존재한다. 가정에 의하여 f와 g가 수열연속이므로 $(f(x_n))$은 $f(a)$로 수렴하고 $(g(x_n))$은 $g(a)$로 수렴한다. 그리고 A 위에서 $f=g$이므로 모든 n에 대하여 $f(x_n)=g(x_n)$이다. 따라서 Y가 하우스도르프이므로 $f(a)=g(a)$이다. 그러므로 $k(A)$ 위에서 $f=g$이다.

(정리 2.9) X가 하우스도르프이고 X의 부분집합 A가 수열 컴팩트이면 A는 닫힌 집합이다.

증명 : $a \in k(A)$일 때 $a \in A$임을 보이자. $a \in k(A)$라 하면 a로 수렴하는 적당한 수열 (a_n)이 A에 존재한다. 그리고 A가 수열 컴팩트이므로 수열 (a_n)은 수렴하는 부분수열을 갖는다. 즉, 적당한 A의 원소 a'으로 수렴하는 (a_n)의 부분수열 $(a_{s(n)})$이 존재한다. 그런데 X가 수열수렴공간이므로 $(a_{s(n)})$은 a로도 수렴한다. 그런데 X가 하우스도르프이므로 $a=a'$이고 따라서 $a \in A$이다. 그러므로 A는 닫힌 집합이다.

(정리 2.10) X가 수열 컴팩트이고 함수 $f:X \to Y$가 전사인 수열연속함수라 하면 Y는 수열 컴팩트이다.

증명 : (y_n)을 Y의 수열이라 하자. f가 전사함수이므로 모든 자연수 n에 대하여 $f^{-1}(y_n) \neq \varnothing$이다. $f^{-1}(y_n)$에서 적당한 x_n을 택하여 X의 수열 (x_n)을 만들자. 그러면 X가 수열 컴팩트이므로 수렴하는 부분수열 $(x_{s(n)})$이 존재한다. 이 때, f가 수열연속이므로 수열 $(f(x_{s(n)}))$은 수렴하고

$$f(x_{s(n)}) = y_{s(n)}$$

이므로 (y_n)의 부분수열이다. 따라서 Y는 수열 컴팩트이다.

(정리 2.11) X와 Y를 수열수렴공간이라 하자. 함수 $f : X \rightarrow Y$가 수열연속이면 Y의 임의의 닫힌 부분집합 C에 대하여 $f^{-1}(C)$는 X에서 닫힌 집합이다.

증명 : $a \in k(f^{-1}(C))$일 때 $a \in f^{-1}(C)$ 즉, $f(a) \in C$임을 보이자.

$a \in k(f^{-1}(C))$이므로 집합 $f^{-1}(C)$에서 수열 (a_n)이 존재해서 (a_n)은 a로 수렴하고 f가 수열연속이므로

$$f(a_n) \rightarrow f(a)$$

을 만족한다. 이때 $(f(a_n))$은 C의 수열이므로 $f(a) \in k(C)$이다. C가 닫힌 집합이므로 $C = k(C)$이다. 따라서 $f(a) \in C$이다.

(정의) X와 Y를 수열수렴공간이라고 할 때, 함수 $f : X \rightarrow Y$가 닫힌 함수라는 것은 X의 임의의 닫힌 부분집합 C에 대하여 $f(C)$가 Y에서 닫힌 부분집합이 되는 것이다.

(정리 2.12) X와 Y를 수열수렴공간이라 하자. 함수 $f^{-1} : Y \rightarrow X$가 수열연속이면 f는 닫힌 함수이다.

증명 : f^{-1}가 연속이므로 (정리 2.11)에 의하여 $C \subseteq X$인 닫힌 집합 C에 대해 $(f^{-1})^{-1} = f$에 대하여 $f(C)$가 Y상에서 닫힌 집합이다. 그러면 f는 닫힌 함수이다.

(**정리** 2.13) X와 Y를 수열수렴공간이라 하자. X가 수열 컴팩트이고 Y가 하우스도르프일 때 함수 $f: X \to Y$가 수열연속이고 일대일 대응이면 f^{-1}는 수열연속이다.

증명 : 수열 (y_n)이 y로 수렴할 때,

$$f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$$

을 보이면 된다. f가 일대일 대응이므로 모든 n에 대해 적당한 x_n과 x가 존재하여

$$f^{-1}(y_n) = x_n, \quad f^{-1}(y) = x$$

을 만족한다. 즉, (x_n)이 x로 수렴함을 보이면 된다.

(y_n)이 y로 수렴하므로 (y_n)의 부분수열 $(y_{s(n)})$에 대하여 $(y_{s(n)})$이 y로 수렴한다. 이때 수열 (x_n)에 대해 X가 수열 컴팩트이므로 어떤 x_1에 대해

$$x_{st(n)} \to x_1$$

을 만족하는 적당한 $x_{st(n)}$이 존재한다. f가 수열연속이므로 수열 $(y_{st(n)})$이 y_1으로 수렴하고 $(y_{s(n)})$이 y로 수렴하므로 $(y_{s(n)})$의 모든 부분수열 $(y_{st(n)})$도 y로 수렴한다. Y가 하우스도르프이므로 $y = y_1$가 되고 결국 $x = x_1$을 만족하게 된다. 따라서 수열 $(x_{st(n)})$은 x로 수렴하고 X가 수열수렴공간이므로 (x_n)은 x로 수렴한다.

Ⅲ. 함수공간

X와 Y를 수열수렴공간이라 하고 $C(X,Y)$를 X에서 Y로 가는 모든 수열연속함수를 모아놓은 집합이라 하자. 그리고 $C(X,Y)$의 수열 (f_n)과 수열연속함수 f에 대하여 다음과 같이 정의하자.

(정의) (f_n)의 모든 부분수열 $(f_{s(n)})$과 x로 수렴하는 X의 임의의 수열 (x_n)에 대하여 수열 $(f_{s(n)}(x_n))$이 $f(x)$로 수렴할 때 수열 (f_n)이 $C(X,Y)$에서 f로 수렴한다고 하고 기호로

$$f_n \rightarrow f$$

로 나타낸다.

다음 정리는 위의 (정의)에 의하여 $C(X,Y)$가 수열수렴공간이 됨을 보여준다.

(정리 3.1) 위에서 정의된 수렴은 다음 성질을 만족한다.

(1) 모든 n에 대하여 $f_n = f$이면 수열 (f_n)은 f로 수렴한다.

(2) 수열 (f_n)이 f로 수렴하면 (f_n)의 모든 부분수열 $(f_{s(n)})$도 f로 수렴한다.

(3) (f_n)을 수열이라 하자. (f_n)의 모든 부분수열 $(f_{s(n)})$에 대하여 f로 수렴하는 적당한 부분수열 $(f_{st(n)})$이 존재하면 (f_n)도 f로 수렴한다.

증명 : (1) 모든 n에 대하여 $f_n = f$이라 하고 (x_n)을 x로 수렴하는 수열이라 하자. $(f_{s(n)})$을 (f_n)의 모든 부분수열이라 하면 $f_{s(n)} = f$이므로 $(f_{s(n)}(x_n)) = (f(x_n))$이다. 그런데 f가 수열연속이므로 이 수열은 $f(x)$로 수렴하고 따라서 (f_n)은 f로 수렴한다.

(2) (f_n)을 f로 수렴하는 수열이라 하자. $(f_{s(n)})$을 (f_n)의 부분수열이라 하고 (x_n)을 x로 수렴하는 수열이라 하자. $(f_{st(n)})$을 $(f_{s(n)})$의 부분수열이라 하면 $(f_{st(n)})$은 (f_n)의 부분수열이다. 그런데 (f_n)이 f로 수렴하므로 수열 $(f_{st(n)}(x_n))$

은 $f(x)$로 수렴한다. 따라서 정의에 의하여 $(f_{s(n)})$은 f로 수렴한다.

(3) 수열 (f_n)의 모든 부분수열 $(f_{s(n)})$에 대하여 f로 수렴하는 적당한 부분수열이 존재한다고 하자. (f_n)이 f로 수렴함을 보이기 위하여 (f_n)의 부분수열 $(f_{s(n)})$과 x로 수렴하는 수열 (x_n)을 택하자. 수열 $(f_{s(n)}(x_n))$이 $f(x)$로 수렴함을 보이면 된다. Y가 수열수렴공간이므로 $(f_{s(n)}(x_n))$의 모든 부분수열 $(f_{st(n)}(x_{t(n)}))$이 $f(x)$로 수렴하는 부분수열을 가짐을 보이면 된다. 그런데 $(f_{st(n)})$은 (f_n)의 부분수열이므로 가정에 의하여 f로 수렴하는 적당한 부분수열 $(f_{stw(n)})$을 갖는다. 그런데 수열 $(x_{tw(n)})$은 (x_n)의 부분수열이므로

$$x_{tw(n)} \rightarrow x$$

이고, 따라서 정의에 의하여

$$f_{stw(n)}(x_{tw(n)}) \rightarrow f(x)$$

이다. 즉, $f(x)$로 수렴하는 $(f_{st(n)}(x_{t(n)}))$의 부분수열 $(f_{stw(n)}(x_{tw(n)}))$이 존재한다. 따라서 $(f_{s(n)}(x_n))$이 $f(x)$로 수렴하고, 정의에 의하여 (f_n)은 f로 수렴한다.

(정리 3.2) Y가 하우스도르프공간이면 $C(X,Y)$는 하우스도르프공간이다.

증명 : $C(X,Y)$의 수열 (f_n)이 f와 g로 수렴한다고 하자. 모든 X의 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$임을 보이자. (x_n)을 x로 수렴하는 X의 수열이라 하자. 함수공간의 정의에 의하여 (f_n)의 임의의 부분수열 $(f_{s(n)})$에 대하여 수열 $(f_{s(n)}(x_n))$은

$$f_{s(n)}(x_n) \rightarrow f(x) \text{ 이고 } f_{s(n)}(x_n) \rightarrow g(x)$$

이다. 그런데 Y가 하우스도르프이므로 $f(x)=g(x)$을 만족한다. 즉, $f=g$이고 따라서 $C(X,Y)$는 하우스도르프공간이다.

(정리 3.3) 다음과 같이 정의된 함수 $ev : X \times C(X,Y) \to Y$

$$ev((x,f)) = f(x)$$

는 수열연속이다.

증명 : 수열 (x_n, f_n)가 $X \times C(X,Y)$에서 (x,f)로 수렴한다고 할 때, $ev((x_n,f_n))$가 $ev((x,f))$로 수렴함을 보이면 된다. 그런데 $ev((x_n,f_n)) = f_n(x_n)$이고 $ev((x,f)) = f(x)$이므로 $(f_n(x_n))$이 $f(x)$로 수렴함을 보이면 된다. 곱공간의 정의에 의하여

$$x_n \to x \text{ 이고 } f_n \to f$$

이다. $C(X,Y)$의 정의에 의하여 (f_n)의 임의의 부분수열 $(f_{s(n)})$에 대하여 수열 $(f_{s(n)}(x_n))$이 $f(x)$로 수렴한다. 그런데 (f_n)도 (f_n)의 부분수열이므로 $(f_n(x_n))$이 $f(x)$로 수렴한다. 따라서 $ev((x_n,f_n))$가 $ev((x,f))$로 수렴하므로 ev는 수열연속이다.

(정리 3.4) 함수공간 $C(X \times Y, Z)$와 $C(X, C(Y,Z))$는 서로 같은 공간이다. 즉, 전단사함수이면서 연속이고 역함수도 연속인 함수

$$\Phi : C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y,Z))$$

가 존재한다.

증명 : 함수 Φ를 $f : X \times Y \to Z$에 대하여 $\Phi(f) : X \to C(Y,Z)$일 때

$$\Phi(f)(x)(y) = f(x,y)$$

로 정의된 함수라 하자.

(1) 함수 Φ가 전단사함수임을 보이자.

먼저 단사함수임을 보이자. $f, g \in C(X \times Y, Z)$일 때 $f \neq g$라 하면 $\Phi(f) \neq \Phi(g)$이어야 한다. $\Phi(f) = \Phi(g)$라고 해보자. 이때 임의의 x에 대해 $\Phi(f)(x) = \Phi(g)(x)$를 만족해야 하고 $\Phi(f)(x)$와 $\Phi(g)(x)$는 다시 $C(Y,Z)$의 원소이므로 각각은 정의역을 Y로 하는 함수가 된다. 다시 모든 y에 대해

$$\Phi(f)(x)(y) = \Phi(g)(x)(y)$$

를 만족하고 Φ의 정의에 의해 $f(x,y) = g(x,y)$가 되는데 이는 가정에 모순이 된다.

이번엔 전사함수임을 보이자. $C(X, C(Y,Z))$의 원소 h에 대해서 $\Phi(l) = h$를 만족하

는 l이 $C(X\times Y,Z)$에 존재함을 보이자. l이 수열연속함수임을 보이면 된다. (x,y)로 수렴하는 임의의 수열 (x_n,y_n)을 잡자. 이때 $l(x_n,y_n)=h(x_n)(y_n)$이다.

h는 $C(X,C(Y,Z))$의 원소이므로 수열 $(h(x_n))$은 $h(x)$로 수렴하고 $h(x_n)$과 $h(x)$는 다시 $C(Y,Z)$의 원소이므로

$$h(x_{s(n)})(y_n)\ \rightarrow\ h(x)(y)$$

을 만족한다. 이때 수열 $(h(x_n))$은 $(h(x_n))$의 부분수열이 되므로 결국

$$h(x_n)(y_n)\ \rightarrow\ h(x)(y)$$

가 된다. 따라서 함수의 정의에 의해

$$l(x_n,y_n)\ \rightarrow\ l(x,y)$$

라 할 수 있고 결국 s는 수열연속이다.

(2) 함수 Φ가 수열연속임을 보이자.

함수공간 $C(X\times Y,Z)$의 수열 (f_n)이 f로 수렴한다고 하자. 이때, 함수공간 $C(X,C(Y,Z))$의 수열 $(\Phi(f_n))$이 $\Phi(f)$로 수렴함을 보이면 된다. 이를 보이기 위하여 (x_n)을 x로 수렴하는 X의 수열이라 하고 $(\Phi(f_{s(n)}))$을 $(\Phi(f_n))$의 임의의 부분수열이라 할 때 수열 $(\Phi(f_{s(n)}(x_n)))$이 $C(Y,Z)$에서 $\Phi(f)(x)$로 수렴함을 보이면 된다. (y_n)을 y로 수렴하는 Y의 수열이라 하고 $(\Phi(f_{st(n)})(x_{t(n)}))$을 $(\Phi(f_{s(n)}(x_n)))$의 임의의 부분수열이라 하자. 이때,

$$(\Phi(f_{st(n)})(x_{t(n)})(y_n))\ \rightarrow\ \Phi(f)(x)(y)$$

임을 보이면 된다. 함수 Φ의 정의에 의하여

$$\Phi(f_{st(n)})(x_{t(n)})(y_n)=f_{st(n)}(x_{t(n)},y_n)$$

이다. 가정에 의하여 (f_n)이 f로 수렴하므로 (f_n)의 부분수열 $(f_{st(n)})$도 f로 수렴하고, x로 수렴하는 수열 (x_n)의 부분수열 $(x_{t(n)})$도 x로 수렴한다. 따라서

$$(f_{st(n)}(x_{t(n)},y_n))\ \rightarrow\ f(x,y)$$

이다. 그러므로 $(\Phi(f_{st(n)})(x_{t(n)})(y_n))$은 $f(x,y)$로 수렴하고 $f(x,y)=\Phi(f)(x)(y)$이므로

$$(\Phi(f_{st(n)})(x_{t(n)})(y_n))\rightarrow\Phi(f)(x)(y)$$

이다. 따라서 Φ는 수열연속이다.

(3) 함수 Φ^{-1}가 수열연속임을 보이자.

함수공간 $C(X, C(Y,Z))$의 수열 (f_n)이 f로 수렴한다고 하자. 이때, 함수공간 $C(X \times Y, Z)$의 수열 $\left(\Phi^{-1}(f_n)\right)$이 $\Phi^{-1}(f)$로 수렴함을 보이면 된다. 이를 보이기 위하여 (x_n, y_n)을 (x,y)로 수렴하는 $X \times Y$의 수열이라 하고 $\left(\Phi^{-1}(f_n)\right)$의 임의의 부분수열 $\left(\Phi^{-1}(f_{s(n)})\right)$에 대하여 $\left(\Phi^{-1}(f_{s(n)})(x_n, y_n)\right)$이 $\Phi^{-1}(f)(x,y)$로 수렴함을 보이면 된다. Φ의 정의에 의하여

$$\Phi^{-1}(f_{s(n)})(x_n, y_n) = f_{s(n)}(x_n)(y_n)$$

이다. 가정에 의하여

$$f_n \to f\ , \qquad x_n \to x\ , \qquad y_n \to y$$

이므로 수열 $\left(f_{s(n)}(x_n)(y_n)\right)$은 $f(x)(y)$로 수렴하고 따라서 수열 $\left(\Phi^{-1}(f_{s(n)})(x_n, y_n)\right)$은 $f(x)(y)$로 수렴한다. 그런데 $f(x)(y) = \Phi^{-1}(f)(x,y)$이므로 Φ^{-1}는 수열연속이다.

(따름정리) 함수 $f: Y \times X \to Z$를 수열연속이라 하자. 그러면 적당한 수열연속 함수 $\overline{f}: X \to C(Y,Z)$가 존재하여

$$f = ev \circ \left(1_Y \times \overline{f}\right)$$

이다.

$$\begin{tikzcd}
Y \times C(Y, Z) \arrow[r, "ev"] & Z \\
Y \times X \arrow[u, "1_Y \times \overline{f}"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

증명 : (정리 3.3)과 (정리 3.4)에 의해 자명하다.

(정리 3.5) $C\left(X, \prod_{i \in I} X_i\right)$와 $\prod_{i \in I} C(X, X_i)$는 서로 같은 공간이다. 즉 전단사함수이면서 연속이고 역함수도 연속인 함수

$$\Phi : C\left(X, \prod_{i \in I} X_i\right) \to \prod_{i \in I} C(X, X_i)$$

가 존재한다.

증명 : 함수 Φ에 대해 $\Phi(f) = \prod_{i \in I} p_i(f)$라 하자.

(1) Φ가 전단사함수임을 보이자.

단사함수임을 보이자. $f \neq g$라 하자. 그러면 어떤 x에 대해서는 $f(x) \neq g(x)$을 만족하는 x가 존재한다. $\Phi(f) = \Phi(g)$라고 해보자. 그러면 함수의 정의에 의해서

$$\Phi(f) = \prod_{i \in I} p_i(f) = \prod_{i \in I} p_i(g) = \Phi(g)$$

이므로 결국 모든 $i \in I$에 대해 $p_i(f) = p_i(g)$가 되는데 이는 모든 x에 대하여 $p_i(f)(x) = p_i(g)(x)$임을 의미한다. 그런데 이것은 가정에 모순이다.

이번에는 전사함수가 됨을 보이자. $h \in \prod_{i \in I} C(X, X_i)$에 대해 함수 $\Phi(l) = h$를 만족하는 l이 $C\left(X, \prod_{i \in I} X_i\right)$에 존재함을 보이면 충분하다. 즉, 수열 (x_n)이 x로 수렴할 때 수열 $(l(x_n))$이 $l(x)$로 수렴함을 보이면 된다. 사영함수에 의해

$$l(x_n) \to l(x)$$

의 필요충분조건은 모든 $i \in I$에 대해 X_i에서

$$p_i(l)(x_n) \to p_i(l)(x)$$

를 만족하는 것이다.

$h = \prod_{i \in I} p_i(l)$이고 각각의 $p_i(l)$들은 수열연속이므로

$$p_i(l)(x_n) \to p_i(l)(x)$$

를 만족한다.

(2) Φ가 수열연속임을 보이자.

$C\left(X, \prod_{i \in I} X_i\right)$에서 수열 (f_n)이 f로 수렴할 때, 수열 $(\Phi(f_n))$이 $\Phi(f)$로 수렴함을 보이면 된다. $\Phi(f_n)$와 $\Phi(f)$ 는 함수의 정의에 의하여

$$\Phi(f_n) = \prod_{i \in I} p_i(f_n), \qquad \Phi(f) = \prod_{i \in I} p_i(f)$$

이고 가정에서 수열 (f_n)이 f로 수렴하므로 (x_n)이 x로 수렴할 때, (f_n)의 모든 부분수열 $(f_{s(n)})$에 대하여 $C\left(X, \prod_{i \in I} X_i\right)$에서

$$f_{s(n)}(x_n) \rightarrow f(x)$$

을 만족한다. 그러면 사영함수 p_i에 대하여

$$p_i(f_{s(n)})(x_n) \rightarrow p_i(f)(x)$$

를 만족하므로 $(\Phi(f_n))$이 $\Phi(f)$로 수렴한다.

(3) Φ^{-1}가 연속임을 보이자.

$\prod_{i \in I} C(X, X_i)$에서 수열 (h_n)이 h로 수렴할 때, 수열 $\left(\Phi^{-1}(h_n)\right)$이 $\Phi^{-1}(h)$로 수렴함을 보이면 된다. 즉 (x_n)이 x로 수렴할 때, $\left(\Phi^{-1}(h_n)\right)$의 모든 부분수열 $\left(\Phi^{-1}(h_{s(n)})\right)$에 대하여

$$\Phi^{-1}(h_{s(n)})(x_n) \rightarrow \Phi^{-1}(h)(x)$$

가 성립함을 보이면 된다.

이때 Φ는 전단사함수이므로 적당한 함수 l이 $C\left(X, \prod_{i \in I} X_i\right)$에 존재해서 다음을 만족시킨다.

$$\Phi^{-1}(h_{s(n)})(x_n) = l_{s(n)}(x_n), \ \Phi^{-1}(h)(x) = l(x)$$

그리고 Φ의 정의에 의하여 $\Phi(l) = \prod_{i \in I} p_i(l) = h$를 만족한다. 그리고 모든 $i \in I$에 대해 수열 $(p_i(s_{s(n)}(x_n)))$은 가정에 의하여 (h_n)이 h로 수렴하므로

$$p_i(l_{s(n)})(x_n) \rightarrow p_i(l)(x)$$

를 만족하고 결국 $(l_{s(n)}(x_n))$은 $l(x)$로 수렴한다. 따라서

$$\Phi^{-1}(h_{s(n)})(x_n) \rightarrow \Phi^{-1}(h)(x)$$

가 성립한다.

(정리 3.6) 다음과 같은 함수

$$\Phi : C(X,Y) \times C(Y,Z) \to C(X,Z)$$

에 대해 함수 Φ를 $\Phi(f,g) = g \circ f$와 같이 정의할 때 Φ는 수열연속이다.

증명 : f, g가 수열연속이므로 수렴하는 수열 (x_n)에 대해

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

이다. 따라서 $\Phi(f,g)$는 $C(X,Z)$상에서 수열연속이 되므로 잘 정의된 함수이다.

이제 Φ가 수열연속임을 보이자. $h_n = (f_n, g_n)$, $h = (g,h)$라 하고 (h_n)이 h로 수렴한다고 하자.

$$\Phi(h_n) = \Phi(f_n, g_n) = g_n \circ f_n$$

이고 $(g_n \circ f_n)$의 임의의 부분수열 $(g_{s(n)} \circ f_{s(n)})$과 수렴하는 모든 수열 (x_n)에 대하여 다음이 성립한다.

$$(g_{s(n)} \circ f_{s(n)})(x_n) = g_{s(n)}(f_{s(n)}(x_n))$$

그리고 가정에서

$$f_n \to f, \; g_n \to g$$

를 만족하므로

$$g_{s(n)}(f_{s(n)}(x_n)) \to g(f(x)) = (g \circ f)(x) = \Phi(h)(x)$$

이다. 즉 $(\Phi(h_n))$이 $\Phi(h)$로 수렴한다.

참고문헌

1. 김영선, 1998, “수열수렴공간, 수렴공간 그리고 위상공간에 대한 연구”, Journal of Natural Science Pai Chai University, Korea, 11(1) (1998), 7-10

2. 유정옥, 2008, “제 2판 알기쉬운 위상수학”, 교우사

3. 이석종, 이승온, 위상수학의 기초, 교우사, 2011

4. R. Beattie and H. P. Butzmann, Sequentially determined convergence spaces, Czechoslovak Mathematical Journal, 37(2) (1987) 231-247

5. E. Binz, Continuous convergence in C(X), Lecture notes in mathematics 469, Springer-verlag, 1975

6. R. M. Dudley, On sequential convergence, Trans. Amer. Math. Soc. 112 (1964), 483-507

7. J. W. Park, Fibrewise exponential laws in sequential convergence spaces, J. of Basic Sciences, Jeju Nat. Univ., 9(1) (1996), 67-78

8. S. Willard, General topology, Addison-Wesley Pub. Co., 1970

Abstract

The sequence is a very useful tool in the first countable spaces, especially in the metric spaces. In this thesis, I investigate some properties of sequential convergence spaces. The main contents are as follows.

In chapter 1, I introduce the definition and some examples of sequential convergence spaces and investigate the relations between the sequential convergence spaces and topological spaces. In chapter 2, I introduce the notions of Hausdorff spaces and sequential compact spaces and investigate some properties of these spaces. In chapter 3, I introduce the function space structure in sequential convergence spaces, and give some proofs for the exponential laws with respect to this function space structure

$$Z^{X\times Y} = (Z^Y)^X$$

and

$$\left(\prod_{i\in I} X_i\right)^X = \prod_{i\in I}(X_i)^X$$