

정적-내연적 강소성 유한요소법을 이용한 트렁크 리드의 단면해석

정 동 원 * · 이 승 훈 **

1. 서 론

많은 산업분야에서 박판 성형이 차지하는 비중은 매우 크며 또한 많은 영향을 미치고 있다. 박판 성형 공정의 수치적해석 방법으로는 평형 방정식을 이용한 기하학적인 방법과 유한요소해석 방법이 널리 사용되고 있다.[1]

박판성형 공정의 평면변형 해석을 박막이론을 사용한 강소성 유한요소법(Rigid-Plastic Finite Element Method)으로 수행하였고, 박판 재료는 수직이방성(Normal Anisotropy)이고 Hill의 신이방성 이론[2]을 따른다고 가정하였다. 기하학적 비선형은 질점좌표계(Convect Coordinate System)를 도입하여 수치계산의 효율을 개선하였다.

최근에 박판성형의 해석에 탄소성 유한요소법과 강소성 유한요소법이 성공적으로 적용되고 있다. Toh와 Kobashi[3]는 박판의 3차원 대변형에 대하여 강소성 유한요소 수식을 유도하고 이를 사각형 컵의 딥-드로잉에 적용하였다. Wang[4]은 한 변형단계 동안에 변형경로를 가정하여 에너지법으로 강소성 유한요소 수식화를 유도하고 정수압 벌징과 신장성형에 적용하였다.

재료는 수직이방성을 갖는 강소성으로 가정하고, 평면변형 문제로 취급할 수 있는 임의의 형상을 갖는 박판(Sheet)의 성형공정을 해석할 수 있도록 되어 있다.

본 연구의 목적은 실제 금형 설계과정에서 활용할 수 있도록 2차원 강소성 유한요소법을 이용하여 박판성형의 제반특성을 고려하여 변형상태를 경제적

* 제주대학교 기계·에너지·생산 공학부

** 제주대학교 기계공학과 대학원

이고 효과적으로 시뮬레이션하는 방법을 이용하여 박판성형을 해석 및 적용하는 것이다.

2. 본 론

2.1 평면 변형도 강소성 유한요소법

박판성형을 효과적으로 해석하기 위해서는 기하학적, 재료적 비선형성을 고려한 해석이 필수적이다. 위와 같은 점을 고려하여 양동열과 김영진[5]은 Hill의 2차 항복이론을 이용하고 주 질점좌표계와 한 단계동안의 변형경로에 대한 가정을 사용하여 수직이방성의 가정하에서 박막요소를 사용하여 3차원 박판성형에 대한 강소성 유한요소법을 수식화 하였다. 정완진[6]등은 Hill의 신이방성이론[2]을 따르는 재료에 대하여 강소성 유한요소법을 유도하였다. 본 연구에서는 정완진등에 의해 개발된 유한요소법을 평면변형 문제 경우에 한하여 적용하였다. 강소성 유한요소법의 변분식은 다음과 같이 나타난다.[7]

$$\int_{A^0}^r \bar{\sigma} \delta(\Delta \bar{\epsilon}) \tau^0 dA^0 - \int_{S^r} t \cdot \delta u dS^r = 0 \quad (1)$$

유한요소 수식화 과정을 적용하면 다음과 같은 비선형 방정식을 얻을 수 있다.

$$Q(\tilde{U}) = P(\tilde{U}) + F \quad (2)$$

여기서 $P(\tilde{U})$ 는 압력에 의한 절점력을 나타내고 f 는 그 외의 힘에 의한 절점력을 나타내며 식(1)의 첫째항에 해당하는 $Q(\tilde{U})$ 는 다음과 같다.

$$Q(\tilde{U}) = \sum_e \int_{A^{e0}}^r \bar{\sigma}^e g^1 \frac{\partial(\Delta \bar{\epsilon})}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_1} K_1 t^0 dA^0 \quad (3)$$

식(2)는 비선형 방정식이므로 식 (4)와 같이 선형화하여 뉴턴 랩슨방법으로 해를 구한다.[7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial U} [Q(\tilde{U}) - P(\tilde{U})] \bar{U} = \bar{U}_{(i-1)} \cdot \Delta \tilde{U}_{(i)} \\ = F - Q(\tilde{U}_{(i-1)}) + P(\tilde{U}_{(i-1)}) \end{aligned} \quad (4)$$

본 연구에서 사용하는 강소성 재료의 특성방정식은 해중의 경우 그 부분에서의 응력을 알 수 없어 해가 발산하게 되는데 이러한 어려움을 수치적으로 해결하기 위하여 Osakad등[8]이 사용한 방법을 채용하여 변형률 증분을 다음과 같이 수정하여 사용하였다.

$$d\bar{\epsilon} = \sqrt{d\epsilon^2 + d\epsilon_o^2} \quad (5)$$

이때 구성방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}_o}{\sqrt{d\epsilon^2 + d\epsilon_o^2}} d\bar{\epsilon} \quad (6)$$

2.2 경사면 경계조건을 이용한 접촉처리 방법

박막요소를 사용한 유한요소법에서 접촉문제를 고려할 때 요소내에서 수직 응력을 구할 수 없으므로 절점단위로 접촉을 고려하는 것이 편리하다.

Fig.1과 같이 두 물체가 접촉할 때 접촉조건을 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$\sigma_n \cdot \phi = 0 \quad (7.a)$$

$$\phi \geq 0 \quad (7.b)$$

$$\sigma_n \leq 0 \quad (7.c)$$

본 연구에서는 경사좌표계를 사용하여 2차원형상의 금형에 의한 박판성형 해석 시 접촉조건을 만족시켰다. 2차원 상의 임의의 곡면형상은 다음과 같이 매개변수로 나타낼 수 있다.

$$r(u) = X^S(u)e_x + Y^S(u)e_y \quad (8)$$

Fig.2에서 접촉면상의 접촉점 P에 가장 가까운 점 Q는 P와 Q사이의 거리를 최소화함으로써 얻어진다.

$$|QP|^2 = (X(P) - X^S(u))^2 + (Y(P) - Y^S(u))^2 \quad (9)$$

fig.2와 같이 금형표면위의 점 Q에서의 금형바깥 방향의 수직벡터의 방향을

$e_{\bar{y}}$, 절점 P의 편치에 대한 상대변위 U_r 이 $e_{\bar{y}}$ 에 수직인 성분벡터의 방향을 $e_{\bar{x}}$ 로 한다. $e_{\bar{y}}$, $e_{\bar{x}}$ 는 다음과 같다.

$$e_{\bar{x}} = \frac{U_r - (U_r \cdot e_{\bar{y}})e_{\bar{y}}}{|U_r - (U_r \cdot e_{\bar{y}})e_{\bar{y}}|}$$

$$e_{\bar{y}} = \frac{n(Q)}{|n(Q)|} \tag{10}$$

여기서 U_r 은 절점의 금형에 대한 상대변위를 나타낸다. 변환행렬 T는 다음과 같다.

$$\Delta U = T \Delta \bar{U} \tag{11}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\bar{X}, X) & \cos(\bar{Y}, X) \\ \cos(\bar{X}, Y) & \cos(\bar{Y}, Y) \end{bmatrix} \tag{12}$$

식(12)의 변환행렬을 이용하여 접촉절점에 대하여 유한요소 방정식을 원래의 직교좌표계 (X, Y)로부터 경사좌표계 (\bar{X} , \bar{Y})로 변환한다.

$$\bar{K} \Delta U = \bar{R} \tag{13}$$

여기서, $\bar{K} = T^T K T$, $\bar{R} = T^T R$ 이다.

coulomb 마찰조건을 만족시키기 위해 마찰력을 경사좌표계에서 절점력으로 다음과 같이 표시하였다.

$$(F_S)_i = -\frac{2}{\pi} \mu (F_y)_i \tan^{-1}(k |U_{\bar{x}}|) \tag{14}$$

$$U_{\bar{x}} = U_r - (U_r \cdot e_{\bar{y}})e_{\bar{y}} \tag{15}$$

여기서 k는 큰 상수이다. 식 (14)에 의해 생기는 강성행렬에 기여하는 항들은 좌표변환 후에 계산되었다. 접촉 조건 중에서 식(7.c)을 만족하기 위해서는 접촉절점과 금형사이에 작용하는 절점력이 압축력 이어야 한다. 따라서 접촉중인 절점의 바깥방향의 수직력이 음이면 (접촉 --> 비접촉) 상태전환을 하여 반복 계산한다. 이때 절점력은 근사적으로 다음과 같이 구해진다.

$$P_{\bar{y}} = \sum_{j=1}^n (\Delta U_j K_{\bar{y}\bar{y}}) - R_{\bar{y}} \tag{16}$$

만일 $P_{\bar{y}}$ 가 음이면 (접촉 --> 비접촉) 절점의 접촉상태를 변경하고 변위

벡터를 수정하지 않고 다시 계산한다. 이때 강성행렬 K는 마찰력에 의한 부분만 제외하고는 다시 계산할 필요가 없다.

2.3 초기 변위장 생성 수식화

강소성 유한요소법에서는 수렴성이 초기 변위장에 크게 의존한다.[8] 본 연구에서 사용한 비선형 탄성 초기 변위장 생성 수식화는 다음과 같다. 평면 변형 하에서 내부에너지(W)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} W &= \int_{A^o} \sigma_1 \epsilon_1 t^o dA^o = \int_{A^o} \frac{E}{(1-\nu^2)} \epsilon_1^2 t^o dA^o \\ &= \sum_e \int_{A^{e,o}} \frac{E}{(1-\nu^2)} \epsilon_1^2 t^o dA^o \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,

$$\epsilon_1 = \ln({}^rL/{}^rL) = \frac{1}{2} \ln({}^r g_1 / {}^o g_1)$$

식 (17)에 변분을 취한 후 비선형 방정식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\delta W \equiv \delta \tilde{U}^T Q(\tilde{U})$$

$$Q(\tilde{U}) = \sum_e \int_{A^{e,o}} \frac{2E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_o + \epsilon_1) \frac{\partial \epsilon_1}{\partial {}^r g_1} \frac{\partial {}^r g_1}{\partial \tilde{U}} t^o dA^o$$

위의 비선형 방정식을 뉴턴랩슨(Newton-Raphson)방법으로 방정식의 해를 구한다. 본 수식화에서는 수렴성을 위하여 ϵ_1 대신에 $\epsilon_1 + \epsilon_o$ 로 대치하였다. 여기서 ϵ_o 는 충분히 작은 상수이다. 본 연구에서는 비선형 탄성 초기 변위장 생성 프로그램을 이용하여 초기 변위장을 생성하였으며 다음과 같이 두 단계로 나누었다. 첫 단계에서는 접촉 조건을 무시하고 가장 먼저 박판과 접촉하는 절점에 수직 방향의 변위를 조금 준 후 변위장을 생성한다. 두 번째 단계에서는 첫 단계에서 얻어진 변위장을 원하는 변위만큼 증폭시키고 접촉조건을 고려한 후 실제적인 초기 변위장을 생성한다.

3. 해석 결과

수식화 된 결과에 따라 평면 변형 유한요소 해석 프로그램을 작성하여 성형 품의 각 단면들을 성형단계에 따라 2차원 해석하였다. 해석에 사용된 재료는 다음과 같다.

$$\text{응력-변형도 곡선 : } \bar{\sigma} = 51.915 (\bar{\epsilon})^{0.25}$$

수직 이방성 계수 : $R = 2.00$

재료 두께 : $t = 0.8\text{mm}$

Coulomb 마찰계수 : $\mu = 0.2$

구속력(Binding Force) : 15kgf/mm(오른쪽), 15kgf/mm(왼쪽)

성형단계 : Maximum allowable punch stroke = 110mm

Each step punch stroke = 0.5mm

해석에 사용된 유한요소 격자를 각 단면에서 224개의 선형요소로 분할하였다. 그래프상의 각 점들은 노드점(node point)을 나타내고 매 계산 단계에서의 최대 유효 변형도는 0.025 이내로 제한되도록 계산단계의 크기를 조정하였다.

초기 변위는 초기 변위장 생성 프로그램으로 구하여 본 프로그램의 초기 변위로 사용하였다.

양측의 끝절점에 단위폭당 15kgf/mm의 제한력(restraining force)을 가하여 그 절점의 내부 절점력의 반경 방향성분이 제한력 보다 작을 때는 양측 끝 절점을 고정시키고, 제한력 보다 커지면 그 절점이 안으로 빨려 들어오도록 하여 드로잉 공정을 해석하였다. 평면변형드로잉의 경우 축대칭 문제와 달리 기하학적인 구속조건이 없어서 재료의 강제 운동이 발생하여 강소성 유한요소법에서 해의 수렴성이 급격히 악화되어 식(6)에서 $\bar{\epsilon}_0$ 의 값을 크게 하여야 해가 수렴하므로 변형률이 약간 커진다.

Fig.3은 프로그램상에서 박판성형되는 데이터들을 단계별로 도시하였고, Fig.4는 두께분포를 나타낸다.

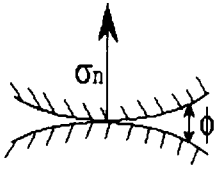


Fig. 1 두 물체간의 접촉조건

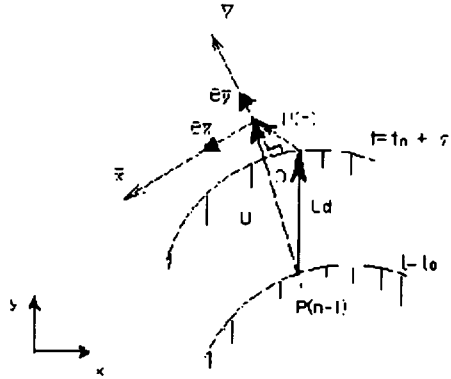


Fig. 2 경사좌표계의 설정

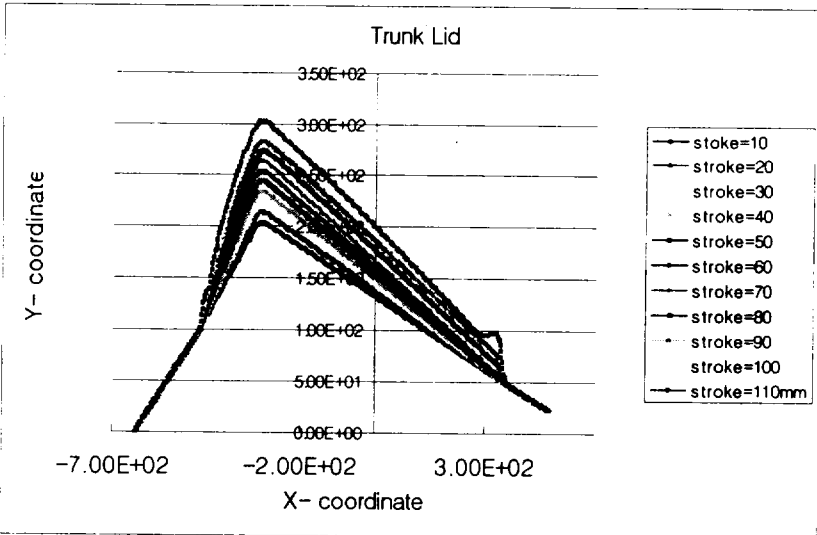


Fig. 3 Shape curve

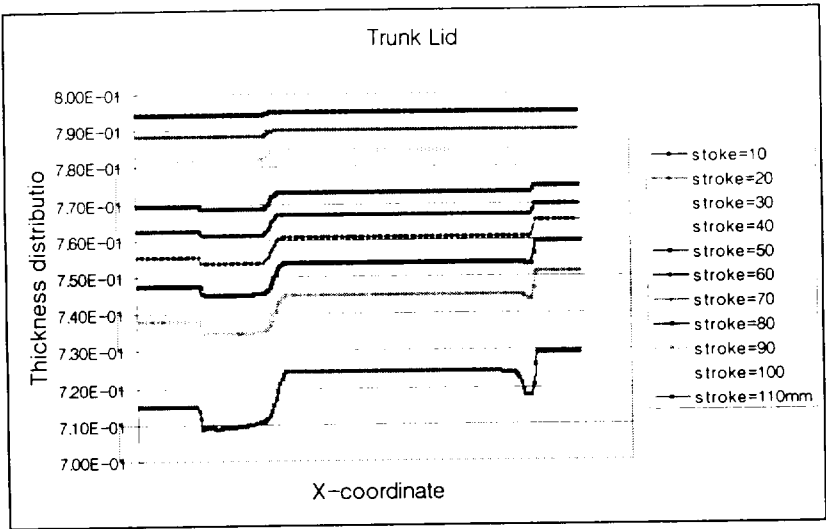


Fig. 4 Thickness distribution

참 고 문 헌

- [1] 윤정환, 유동진, 송인섭, 양동열, 이장희, "평형해법에 의한 스템핑 공정의 단면해석", 한국정밀공학회지 제11권 4호, 1994.
- [2] R. Hill. 1979, Theoretical of textured aggregates, Math Proc. Camb. phil. Soc., Vol.85, pp179-191.
- [3] Toh, C.H. and Kohbayashi, S. 1983. Finite Element Process of Metal forming of General Shapes, Proc. Int. Symp. Fundamentals of Metal forming Technique-State and Trend, Springer-Verlag, West Germany, 13-14, October, : 39-57.
- [4] Wang, N.M. 1984, A Rigid-plastic Rate Sensitive Finite Element Method for Modeling Sheet Metal Forming Process, Numerical Analysis of Forming Process, John Wiley & Sons, Chichester, : 117-164.
- [5] Y.J. Kim and D.Y. Yang, A rigid-plastic finite element formulation

- considering the effect of geometric change and its application to hydrostatic bulging, *Int.J.Mech.Sci.*, Vol.27, pp453-463, 1985.
- [6] W.J. Chung, Y.J. Kim and D.Y. Yang, Rigid-plastic finite element analysis of hydrostatic bulging of elliptic diaphragms using Hill's new criterion, *Int.J.Mech.Sci.*, Vol.31, pp193-207, 1989
- [7] 정동원, 송인섭, 양동열, 이장희, "유한요소법을 이용한 박판성형의 단면 해석과 자동차 금형설계에의 응용", *대한기계학회 춘계학술대회논문집 (I)*, pp380-383, 1992
- [8] K. Osakada, J. Nakano and K. Mori. 1982. Finite element method for rigid-plastic analysis of metal forming formulations for finite deformation, *Int.J. Mech. Sci.*, Vol.24, pp459-468