高等學校 數學敎室에서 Fractals 圖形의 活用

金 忠 勳* · 康 承 弼**

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

구불구불한 해안선, 불규칙적인 산등성, 뭉게뭉게 피어오르는 구름 같은 자연의 모습은 직선과 원만을 고집하는 유클리드 기하학만으로는 충분히 설명할 수 없다. 유클리드 기하학에서 다루는 도형은 선분, 평면, 원, 구, 삼각형 그리고 원추 등이다. 이들 도형은 2000여년 동안 많은 분야에서 모델의 역할을 해왔다. 예술가들은 이들 도형에서 이상적인 미를 발견했고, 천문학자들은 이들 도형을 이용하여 우주론을 정립했다.

그러나 유클리드 기하학은 해안선의 구조, 산맥의 형상, 구름의 현상 같은 자연 현상을 모델링하는 데는 부족함이 많다.

프랙탈 기하학(Fractal Geometry)의 창시자 Mandelbrot(1975)는 다음과 같이 말했다. "구름은 구가 아니고, 산은 원추가 아니며, 번개는 직선으로 내려치지 않는다. 새로운 기하학은 둥글둥글하지 않고 우툴두툴한, 또 매끄럽지 않고 움푹 파이고 자리고 꼬이고 서로 엉켜 있는 기하학이다." 그는 자연 현상을 묘사하고 설명할 수 있는 새로운 수학의 필요성을 역설했다. 이에 대한 해결 방안으로 등장한 이론이 바로 프랙탈 이론이다. 이 이론은 우주를 전체로 파악하려는 것이 아니라, 부분에서 전체의 구조를 파악해 나가는 기하학이다.

금세기에 와서 컴퓨터의 출현으로 이러한 자연 속에 널리 퍼져있는 불규칙한 사물들을 나타내기 위한 수많은 시도들이 있었다. 그 결과 컴퓨터를 사용하여 자연의 미세한 부분에 내포되어 있는 부분까지 샅샅이 그려내어 추상적인

* 제주제일고등학교 교사
** 제주대학교 교육과학연구소 연구원

형태들을 소개해 주고, 수학자와 자연과학자들에게 자연을 측량하고 탐구할 수 있는 새로운 방법의 학문으로 프랙탈이 제시되었다.

이와 같이 20세기에 들어와서 컴퓨터의 출현으로 인하여 수학 분야(현대 수학)에 프랙탈과 같은 새로운 학문들이 시도되고 있음에도 불구하고 오늘날 우리들의 중등수학에서 기하교육의 내용은 삼각형, 사각형, 원과 같은 단편적인 것을 강조하는 유클리드 기하의 바탕에서 그 고정된 틀을 벗어나지 못하고 있다.[1]

단순한 도형에서 시작하여 반복 연산을 수행하는 과정은 고등학교 수학교육 과정 중 확률, 극한, 수열의 개념으로 쉽게 접근할 수 있을 것이다. 여러 가지 형태로 나타나는 프랙탈 도형은 학생들에게 수학의 아름다움을 느낄 수 있게 해준다. 또한 무한히 계속된다는 그 특성은 무한 세계로의 호기심과 흥미를 불러일으킨다.

이와 같은 프랙탈을 수학교육에 도입하려는 시도는 국내외에서 활발히 일어나고 있다. 예를 들어, 캐나다의 온타리오교육부는 1993년에 고등학교 이수과목으로서 프랙탈과 카오스를 승인하여 온타리오주에 있는 고등학교 grade12 (우리 나라 교육과정의 고등학교 3학년에 해당됨)에서 'Fractals In Your Future'란 교재로 가르치고 있다. 또한 미국 수학 교사협의회(NCTM)는 수학자들과 협력하여 'Fractals for the classroom'(1992)이란 교재와 연습책을 펴내어 프랙탈을 수학교육의 현장에 소개할 수 있는 자료를 제공하였다. 우리 나라에서도 '수학교사를 위한 프랙탈 기하' 등 프랙탈에 관한 서적들이 출간되고 있으며, 수학 동아리를 중심으로 연구가 활발하게 이루어지고 있다.

프랙탈 기하를 중등 수학교육에 도입하면 첫째, 학생들에게 프랙탈과 그 배경이 되는 수학적 원리에 접근하기 쉽게 하여 활동적인 경험을 제공하게 되고, 둘째, 프랙탈이 수학의 다른 측면과 어떻게 연결되며 프랙탈 학습이 이들 아이디어를 어떻게 모을 수 있는지 보여 주고, 셋째, 시각과 상상력을 통하여 프랙탈의 구조와 형상의 아름다움을 느낄 수 있을 것이다.(Peitgen et al. 1992.) 또한 학생들이 직접 프랙탈 도형을 구성하고, 프랙탈 차원을 계산하며 컴퓨터를 통해 프랙탈 도형을 시각화하는 등 전략적인 활동을 통해 수학에 색다른

1) 유병옥(1999), "중등수학교육 과정에 프랙탈의 소개", 석사학위논문, 울산대학교 교육대학원, P.1.

즐거움과 주위 환경에 대한 새로운 인식을 가질 수 있다. 그리고 프랙탈에 대한 호기심과 상상력, 흥미를 가지고 수학이 우리 생활과 얼마나 밀접한가를 체험할 수 있다. 그러므로 우리 나라 수학교육에서의 프랙탈에 관한 구체적인 연구가 필요하다.

따라서 본 연구는 고등학교 수학교육에 적절한 프랙탈 학습 내용을 알아보고, 프랙탈 학습자료의 예를 제시함으로써 프랙탈의 고등학교 교실에의 활용 가능성을 모색하는 데 그 목적을 두고 있다.

2. 연구 내용

본 연구를 수행하는 데 있어서, 다음과 같은 연구 내용을 설정하였다.

가. 고등학교 수학교육에 적절한 프랙탈 학습 내용을 제시한다.
나. '가'에서 제시한 학습내용에 대한 몇 가지 예를 보인다.
다. 선정한 학습 내용에 적절한 프랙탈을 활용한 학습지의 예를 제시한다.

II. 프랙탈의 기초 개념

1. 프랙탈의 정의 및 특징

1975년 만델르로트(Mandelbrot)가 수학 및 자연계의 비정규적인 패턴에 대한 체계적 고찰을 담은 자신의 에세이에 표제를 주기 위해서 프랙탈(fractal)이란 말을 만들었다.[2] 그러나 실제로 프랙탈이 출현한 것은 1800년대로 거슬러 올라간다. 1872년에 Cantor가 Cantor set, 1875년에 Weierstrass가 모든 점에서 연속이면서 미분 불가능한 곡선을 발견하고 1906년에 von Koch가 코흐눈송이를 발견했을 당시에는 이러한 것들을 병적인 대상으로 취급하였으며, Poincaré가 '괴물들의 전시회'라 부를 정도로 수학이나 과학에서는 중요한 대상은 아니었다. 그러나 오늘날에는 프랙탈이 물리, 화학, 수학 등에서 활발히 연구되고 있다.

---

2) 제임스 글리크(1993), 「카오스:현대과학의 대혁명」, 박배서 · 성운하 역, 동문사, p.122

프랙탈은 자연에서 흔히 볼 수 있는 불규칙한 조각난 모양들이며, 그 예로 고사리잎의 가지치기 모양, 구름의 무정형 패턴, 번개의 불규칙한 궤적, 해안선의 드나드는 모양 등을 들 수 있다. 프랙탈의 다른 예로서는 눈의 결정이 성장하는 모습, 전기의 방전패턴, 허파·실핏줄·신경의 가지 구조, 불규칙적인 주가의 등락 패턴, 분자들의 무질서한 운동, 은하계의 비정규적 분포 등 분자부터 천문학적 단위까지 모든 척도의 자연 현상들에서 나타난다.[3]

프랙탈 도형을 정의하기 위하여 연속적인 도형에 미분 가능성의 의미를 우선 부여한다. 어떤 연속 도형을 임의로 아주 미세한 부분들로 분할하면 할수록 그 작은 부분들은 평면 또는 직선의 형태로 변해 갈 경우 그 도형은 미분가능하다고 말한다. 내부가 있는 도형인 경우는 경계가 미분가능하면 미분가능한 도형이라고 부른다.

예를 들면, 직선, 평면, 구 등은 미분가능한 도형이다. 삼각형은 세 꼭지점에서는 미분불가능하고 나머지 점에서는 미분가능하다. 정육면체는 6개의 꼭지점과 각 모서리에서 미분불가능하고 나머지는 미분가능하다. 연속적인 도형이 모든 점에서 미분불가능하면 그 도형을 프랙탈 모양을 갖는다고 말한다.

프랙탈 이론이란 지금까지 과학자가 사용해온 곡선이나 곡면으로는 충분하지 않은 자연 속에 있는 복잡한 모양과 현상들, 이 울퉁불퉁한 상태를 밝히는 수단이라 할 수 있으며 전체와 부분에 내재하는 유사성을 만들어 내는 객관적 방법을 연구하는 것이다.

프랙탈 모양은 다음과 같이 대략적으로 요약될 수 있다.

첫째, 무한하게 세분된다.
둘째, 무한한 길이를 가진다.
셋째, 대부분 정수가 아닌 차원(프랙탈 차원)을 가진다.
넷째, 규모가 작아지는 방향으로 스스로 닮아간다.
다섯째, 간단한 반복 작업을 계속하여 만들 수 있다

.

프랙탈 기하학은 무한과 카오스를 표현하는 새로운 기하학이며 우주의 본질을 완전히 새로운 접근 방법으로 이해하는 정성적 수단이다.[4] 우리가 만드는

---

3) 김승환(1993), 「정보사회와 문화예술:프랙탈」, 공간, p.53.
4) 이승준(1994), 「새로운 과학으로 부상하는 혼돈과학」, Softworld, p.267.

프랙탈은 자기유사성과 정수가 아닌 차원을 가지는 도형이 된다. 자기 유사성은 아무리 규모를 확대하거나 작게 하여도 여전히 같은 형태를 지님을 의미하며 불규칙한 형상을 작도하는 방법이다. 프랙탈 차원은 비정수로서 물체의 거칠거칠한 정도, 불규칙한 정도를 측정하는 방법이며 공간을 채우는 능력에 대한 척도로서 도형의 불규칙한 상태를 특징 짓는 양으로서 이용되고 있다. 프랙탈은 무한의 반복이므로 특정한 길이를 갖지 않으며 접선, 접평면을 정의할 수 없다.

프랙탈은 전체집합이 그 집합의 일부분에 비선형적 반복 대응되어 얻어지는, 즉 자신의 모양을 몇 단계에 걸쳐 축소시키고 회전시켜 만든 결정형(deterministic) 프랙탈과 무작위 변이의 크기를 통계적으로 자기 유사적으로 배열시킬 수 있는데 작은 부분들을 계속 확대하면 전체집합과 같은 통계적 분포를 갖는 비결정형(undeterministic) 프랙탈로 분류할 수 있다. 결정형 프랙탈의 예로는 시어핀스키 삼각형, 코흐 눈송이, 페아노 곡선 등을 들 수 있으며, 비결정형 프랙탈의 예로는 자연 속의 형상(구름, 산맥, 고사리 잎사귀 등)을 들 수 있다.

결정형 프랙탈 도형은 다음과 같은 특성을 가진다.

첫째, 프랙탈은 자연의 모습과 비슷한 형태를 보여준다. 자연의 불규칙하고 복잡한 모습처럼 프랙탈 형상들은 복잡하게 서로 엉켜있고, 때론 부서져 있는 것처럼 보인다. 유클리드 기하학이 자와 컴퍼스로 그리는 단순하고 매끈한 인공의 기하학이라면, 프랙탈 기하학은 자연스러운 자연의 모습을 그대로 묘사하고 해석하는 자연의 기하학인 것이다.

둘째, 자기유사성(self-similarity)을 들 수 있다. 즉, 전체의 모습이나 구조가 부분의 구조와 같다는 것이다. 프랙탈은 전체에서 볼 수 있는 것과 그 전체의 부분에서 볼 수 있는 것과의 관계를 보여준다.

셋째, 프랙탈 형상들은 1차원, 2차원이 아닌 소수 차원에서 나타난다는 것이다. 이에 대해서는 다음 장에서 자세히 다루도록 한다.

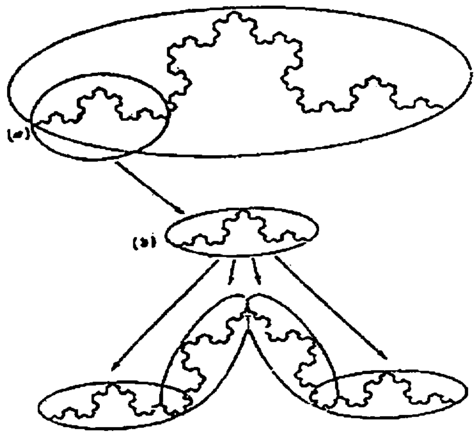
프랙탈은 수학뿐만 아니라 물리학, 경제학, 컴퓨터 과학, 그리고 예술 분야에까지 영향을 미치고 있으며, 프랙탈의 색, 아름다움, 기하학적 구조들에서 이제까지 수학에서 경험하지 못했던 색다른 시각적 감각을 제공한다. 프랙탈에 많은 사람들이 관심을 쏟는 이유는 프랙탈은 아직 해결하지 못한 문제들을 해결할 수 있는 도구를 제공하기 때문이다. 또한 프랙탈의 많은 부분들이 접근하기 쉽고 컴퓨터 그래픽 이미지로 아름답게 표현될 수 있는 심미성 때문이다.[5)]

2. 자기유사성(self-similarity)

자기유사성이란 도형의 일부분을 확대했을 때 다시 전체의 모습이 되는 성질을 말한다. 즉, 똑같은 모양의 부분이 계속 결합되어 같은 모습의 전체가 되는 것을 말한다. 이러한 자기유사성이 프랙탈을 결정짓기는 하지만 구조가 자기유사성을 가진다고 해서 반드시 프랙탈이 되는 것은 아니다. 선분, 사각형, 직육면체 등은 자기유사성을 가지고 있으나 프랙탈은 아니다. 자기유사성의 종류를 2가지로 분류해 보면 다음과 같다.

1) 자기 동형(self-affinity)

<그림Ⅱ-1>에서와 같이 코흐 곡선의 $\frac{1}{4}$을 3배로 확대하면 전체의 코흐 곡선이 되다. 이와 같이 일부분을 확대하면 완전히 일치하는 것을 자기 동형(self-affinity)라고 한다.

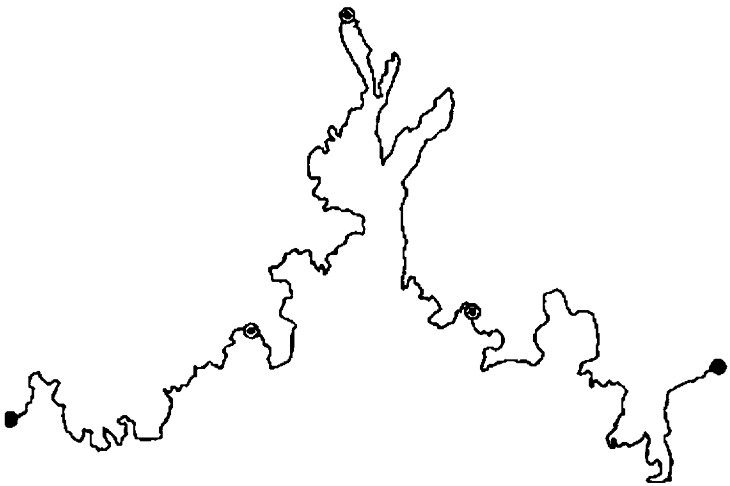


<그림Ⅱ-1> 코흐 곡선의 자기유사성
(출처 : 김선화(1994), 교실밖 수학여행, p.317.)

5) 유병옥(1999), 전게서, p.4.

2) 통계적 자기유사성(statistical self-similarity)

<그림Ⅱ-2>는 우리 나라 남해안의 해남반도와 화원반도 사이에 있는 일부 해안선을 약 45° 정도 좌로 회전시켜 놓은 것이다. 이 해안선을 코흐 곡선과 마찬가지로 한 변을 3등분하면 구불구불한 정도가 거의 닮은 작은 해안선이 4개 생긴다.[6] 그러나, 각각의 해안선들을 3배로 확대해서 보았을 때 전체의 해안선과 완전히 일치하지 않는 것을 통계적 자기유사성이라고 한다.

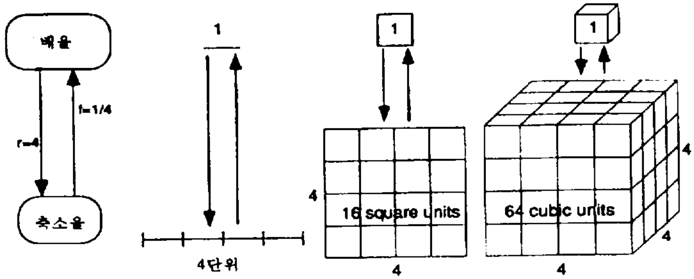


<그림Ⅱ-2> 해안선의 자기유사성
(출처 : 김용운 · 김용국(1998), 프랙탈과 카오스의 세계, p.70.)

3. 프랙탈 차원

<그림Ⅱ-3>에서 보듯이 차원이 다른 도형을 확대할 때 그 척도가 달라진다. 가령 일정한 길이의 1차원 도형인 선분을 4배 확대하면 자기닮음인 조각이 수가 4개가 된다. 그러나, 2차원 도형인 정사각형을 4배로 확대하면 자기닮음인 조각의 수가 16개가 되며 3차원 도형인 경우 4배로 확대하면 조각의 수는 64개로 늘어난다.

6) 김용운 · 김용국(1998), 「프랙탈과 카오스의 세계」, 도서출판 우성, p.69.



<그림Ⅱ-3> 차원이 다른 각각의 도형을 4배로 확대할 때의 크기의 변화 (출처 : 파이트겐 외 5명(1999), 수학교사를 위한 프랙탈 기하, 신인선·류희찬 역, p.118.)

확대율과 각 도형의 조각의 수를 관계지으면,

41 = 4 (1차원), 42 = 16 (2차원), 43 = 64 (3차원),

즉, (확대율)차원 = 조각의 수이다. 여기서 log를 취하면,

$$\frac{\log 4}{\log 4} = 1\text{차원}, \quad \frac{\log 16}{\log 4} = 2\text{차원}, \quad \frac{\log 64}{\log 4} = 3\text{차원}$$

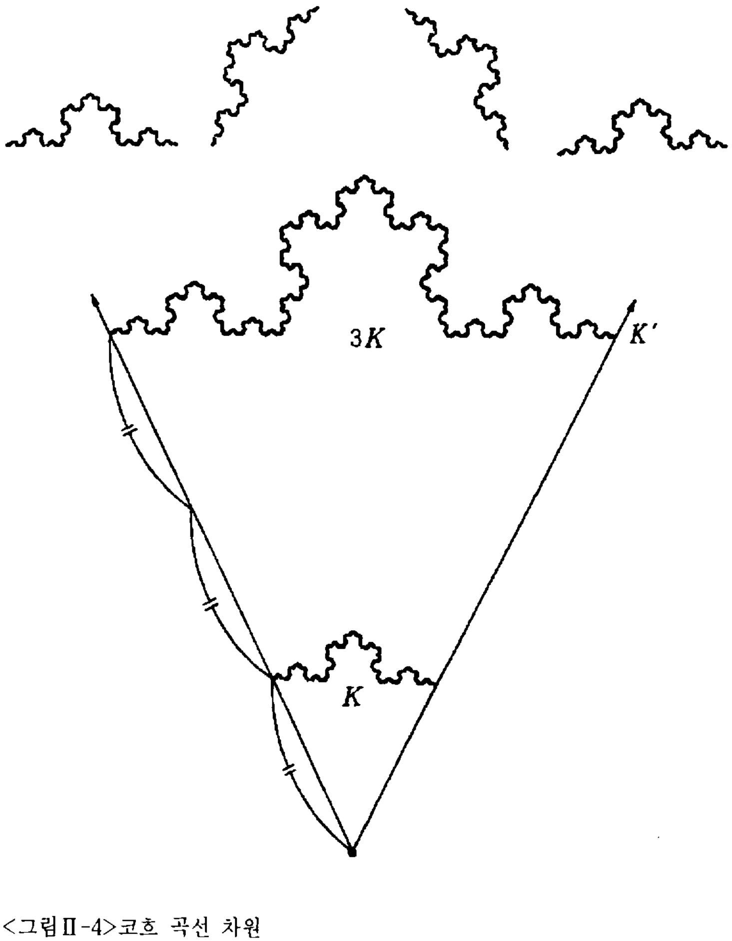
으로 계산된다.7) 이것을 일반화하면

$$\text{차원} = \frac{\log(\text{조각의 수})}{\log(\text{확대율})}$$

이제 위에서 정의한 차원을 '코흐 곡선'에 적용해 보면, <그림Ⅱ-4>와 같이 코흐 곡선 K을 3배 확대된 코흐 곡선 K'에는 원래의 코흐 곡선이 4개 있다. 따라서, 조각의 수=4, 확대율=3이므로

$$\text{차원} = \frac{\log(\text{조각의 수})}{\log(\text{확대율})} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.261\cdots$$

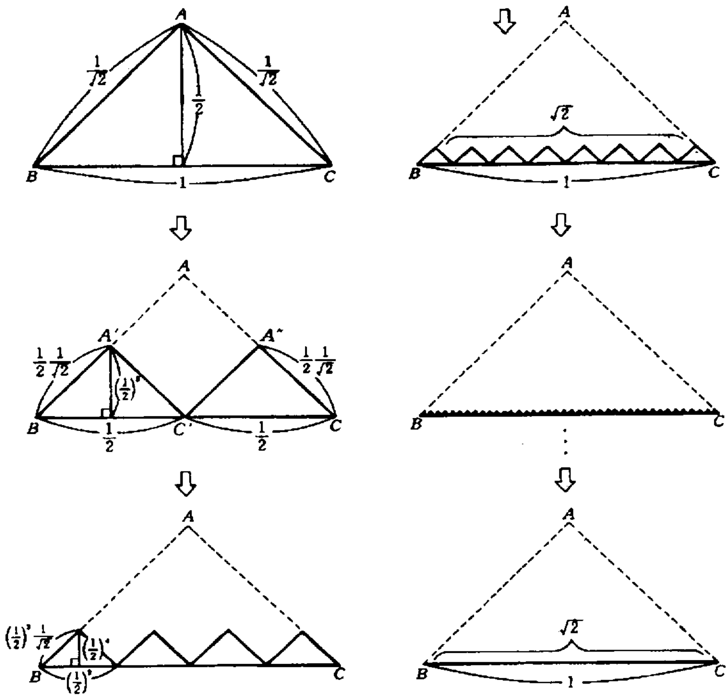
7) 파이드겐외 5명(1999), 「수학교사를 위한 프랙탈 기하」, 신인선·류희찬 역, 경문사, p.118.



<그림Ⅱ-4>코흐 곡선 차원
(출처 : 김용운 · 김용국(1998), 프랙탈과 카오스의 세계, p.61.)

코흐 곡선의 차원, 즉 복잡도는 1차원인 직선보다는 복잡하고 2차원인 평면보다는 단순한 것이다. 그러나 1에 좀더 가깝기 때문에 직선에 가깝다고 볼 수 있다. 코흐 곡선은 무한한 길이를 가지고 있지만 평면을 가득 채우지 못하기 때문에 그것은 직선 이상의 것이지만 평면 이하의 것이다. 즉, 1차원 이상이지만 2차원 이하이다.

4. 유클리드 도형과 프랙탈 도형의 비교



<그림Ⅱ-5> 프랙탈 도형이 아닌 예
(출처 : 김용운 · 김용국(1998), 프랙탈과 카오스의 세계, p.75.)

유클리드 도형을 계속적으로 꺾어 프랙탈 도형을 만든다. 이러한 과정에서 얻어지는 프랙탈 도형의 가장 큰 특징은 '소수 차원을 갖는다'는 것과 '자기닮음'이다. 계속적으로 꺾어서 만든 도형이 어떤 경우에는 프랙탈적인 형태를 갖지 않는다. 앞의 과정에서는 단순한 극한 개념만 포함하지만, 뒤의 과정에는 극한 개념이 중복되어 있다. <그림Ⅱ-5>와 같이 먼저 직각이등변삼각형의 두 변을 이등분한다. 그리하여 나눈 변의 위쪽 반을 각각 밑변을 향해 꺾어 내린다. 이때 작은 두 개의 이등변삼각형이 생긴다. 이 조작을 새로 생긴 이등변삼각형에 대해서도 똑같이 실시한다.

그러면 4개의 보다 작은 이등변삼각형이 생긴다. 이 조작을 무한히 반복한다. 그 결과, 극한의 상태에서는 밑변 위의 모든 점에서 꺾이기 때문에 미분불가능인 연속곡선이 생긴다.

처음의 삼각형에서 두 변의 길이의 합은 $\sqrt{2}$이고, 밑변의 길이는 1이었다. 하지만 한없이 꺾어가다 보면 두 변의 길의 합은 마침내 밑변과 같아지는 것처럼 보인다. 그러나 다음 식에서 보는 것처럼 두 변의 길이의 합은 여전히 $\sqrt{2}$이다. 작은 삼각형의 길이가 같은 두 변의 합을 L_n이라고 하면,

$$L_0=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^0\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2\right\}\times 2^0=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2=\sqrt{2}$$

$$L_1=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2\right\}\times 2^1=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2=\sqrt{2}$$

$$L_2=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2\right\}\times 2^2=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2=\sqrt{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L_n=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2\right\}\times 2^n=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2=\sqrt{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

이기 때문이다. 즉, 이등변삼각형의 두 변을 무한히 꺾어서 만든 이 곡선의 길이는 밑변의 길이인 1이 되지 않고, 항상 $\sqrt{2}$로 변함이 없는 것이다. 그리고 그 차원도 1차원이다.

그러나 <그림Ⅱ-6>과 같이 먼저 꼭지각이 $120°$인 이등변삼각형의 밑변을 3등분한다. 그리하여 나눈 밑변의 가운데 부분을 버리고 꼭지점과 잇는다. 이 때 작은 두 개의 이등변삼각형이 생긴다. 이 조작을 새로 생긴 이등변삼각형에 대해서도 똑같이 실시한다. 그러면 4개의 보다 작은 이등변삼각형이 생긴다. 이 조작을 무한히 반복한다. 작은 삼각형의 길이가 같은 두 변의 합을 KL_n이라고 하면,

$$KL_0=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^1\times 2\right\}\times 2^0=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^1$$

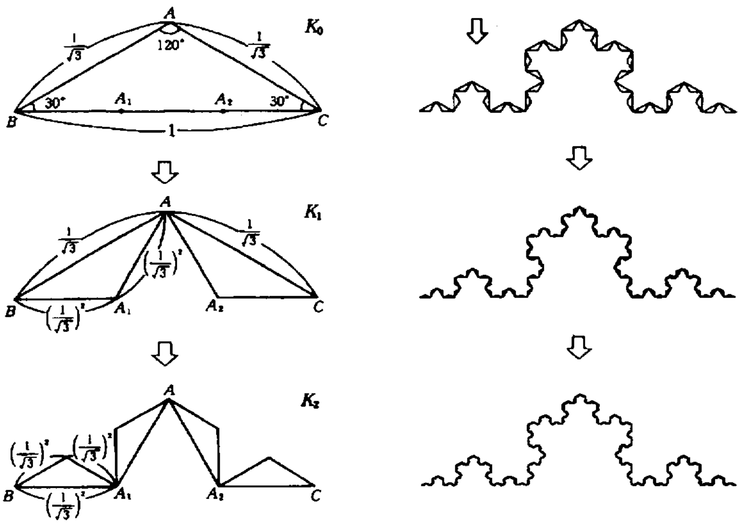
$$KL_1=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\times 2\right\}\times 2^1=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$KL_2=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\times 2\right\}\times 2^2=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

. . . .

$$KL_n=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\times 2\right\}\times 2^n=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}$$

. . . .



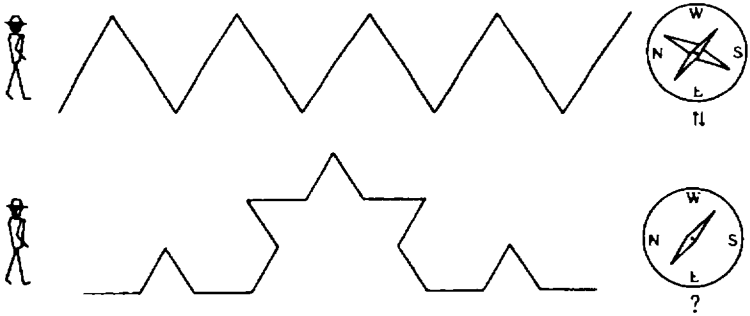
<그림Ⅱ-6> 길이가 무한대인 코흐 곡선
(출처 : 김용운 · 김용국(1998), 프랙탈과 카오스의 세계, p.76.)

그 결과, 극한의 상태에서는 작은 이등변삼각형들이 길이가 같은 두 변의 길이의 합은 무한대로 접근한다. 즉 코흐 곡선은 그 길이가 무한대가 되고, 차원은 프랙탈 차원이다. 여기에 프랙탈 도형과 유클리드적인 도형과의 기본적인 차이가 있는 것이다. 이등변삼각형의 두 변을 단순히 꺾어가며 만든 도형에는

길이의 변화가 일어나지 않는다. 프랙탈 도형을 만드는 과정에서 최초의 도형을 '창시자'(initiator)라고 부른다. 여기에 프랙탈 도형을 만드는 규칙이 주어졌을 때 생기는 도형을 '생성자'(generator)라고 부른다. 이 생성자를 어떻게 반복하느냐에 따라서 조금씩 다른 프랙탈 도형이 얻어진다. 코흐 곡선은 생성자의 조작을 반복해 나갈수록 길이가 늘어나고, 결국에는 길이가 무한대로 발산되어 간다. 즉, 코흐 곡선의 양 끝점을 잡고 늘이면 끝없이 늘어나는 직선이 된다.

이 차이는 단순히 2등분해서 반복적으로 꺾어 가는 것과, 생성자를 복잡하게 방향을 바꾸어 가면서 반복하는 차이에서 나온다. 이 사실은 곧, 단순함과 복잡함의 차이를 말하는 것이다. 이등변삼각형은 단순하게 위 아래로만 선분이 교대로 나타나지만, 코흐 곡선은 매우 복잡하게 배열되어 있다는 점이다. 뿐만 아니라, 반복 회수가 거듭될수록 이등변삼각형과 코흐 곡선의 늘어나는 선분의 개수는 크게 차이가 난다.

이들의 질적인 차이를 알아보기 위해 <그림Ⅱ-7>에서와 같이 이 두 곡선을 따라 나침반을 들고 여행하는 사람이 있다고 가정하자.



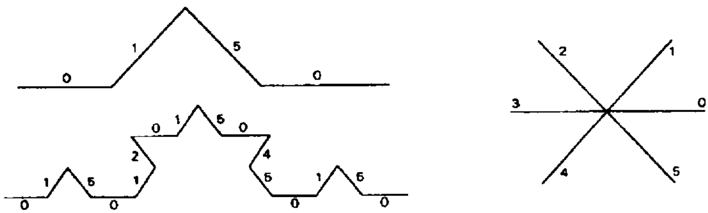
<그림Ⅱ-7> 유클리드 도형과 코흐 곡선의 방향성
(출처 : 김용운 · 김용국(1998), 프랙탈과 카오스의 세계, p.77.)

먼저 이등변삼각형의 중점을 한없이 되풀이하여 꺾어서 만든 곡선을 따라 여행할 때의 나침반을 보면, 바늘은 두 방향 사이를 왔다 갔다할 뿐이다. 이번에는 코흐 곡선 위를 여행한다고 하자.

이 때의 나침반의 바늘은 <그림Ⅱ-8>에서 처럼 1단계의 코흐 곡선을 가지고

생각해 보면, 나침반은 다음과 같은 순서로 움직인다. 0→1→5→0, 그 다음 2단계의 코흐 곡선에서는 0→1→5→0→1→2→0→1→5→0→4→5→0→1→5→0의 순서로 나침반이 돌아간다.

이와 같이 코흐 곡선에서는 나침반이 360o 어느 방향으로나 돌아간다. 방향이라는 측면에서 생각하면, 코흐 곡선은 어디를 향하고 있는지 전혀 알 수 없는 카오스 그 차체이다. 이러한 사실에서 우리는 복잡성, 프랙탈, 카오스가 서로 밀접한 관계에 있음을 알 수 있다. 코흐 곡선은 반복 회수를 늘려감에 따라 선분의 수가 폭발적으로 늘어나며, 그 방향도 종잡을 수 없이 변한다. 즉, 정보가 폭발적으로 증가하는 것이다. 코흐 곡선을 아무리 보고 있어도 싫증나지 않는 이유는 파도치는 해변에서 바다를 보는 것처럼 순간마다 조금씩 변하는 그 모양에 수없이 많은 정보가 숨어있기 때문이다. 복잡성과 단순함에는 이처럼 많은 질적 차이가 있다.[8)]

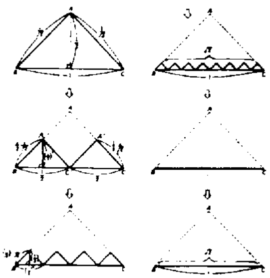
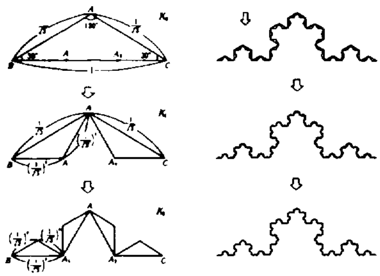


<그림Ⅱ-8> 코흐 곡선의 방향성
(출처 : 김용운 · 김용국(1998), 프랙탈과 카오스의 세계, p.77.)

이상에서 유클리드 도형과 프랙탈 도형을 비교하면 <표-1>과 같이 요약할 수 있다

8) 김용운 · 김용국(1998), 전게서, pp.74~77.

<표-1> 유클리드 도형과 프랙탈 도형의 비교

구 분	유클리드 도형	프랙탈 도형(코흐곡선)
그 림		
생성 원리	이등변삼각형의 두 변을 2등분해서 무한히 꺾은 도형	선분을 3등분해서 가운데의 선분을 위로 구부려 올려 만든 도형
차 원	1차원	프랙탈 차원(약 1.26차원)
선 길이 변화	길이 변화 일어나지 않음	길이가 늘어나고, 무한대로 발산, 양쪽잡고 늘이면 끝없는 직선이 됨
생성형태차이	단순히 2등분해서 반복적으로 꺾은 것(단순함)	생성자를 복잡하게 방향을 바꾸어 가면서 반복한 것(복잡함)
방 향	일정한 방향으로 진행	어느 방향을 향하고 있는지 알 수 없음. 반복 횟수를 늘려감에 따라 선분의 수가 폭발적으로 늘어나며, 그 방향도 종잡을 수없이 변함. 순간마다 조금씩 변하는 모양에 수없이 많은 정보가 있다. 확률적이다.

III. 프랙탈의 예

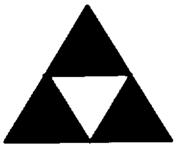
1. 시어핀스키 삼각형(Siepinski Triangle)과 시어핀스키 사면체(Siepinski tetrahedron)

시어핀스키 삼각형은 1916년 폴란드의 유명한 수학자 Waclaw Siepinski(1882~1969)에 의해서 처음 소개되었다.

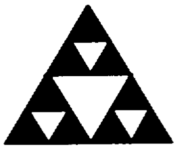
시어핀스키 삼각형의 생성 과정은 다음과 같다.

(0단계) 정삼각형을 하나 그린다.(창시자)

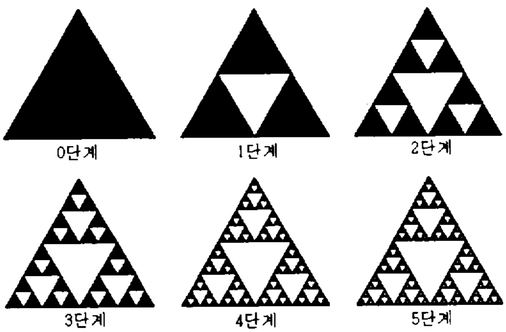
(1단계) 각 변의 중점을 연결한 후 나누어진 삼각형 중 가운데 부 분을 잘라낸다.



(2단계) 남아 있는 삼각형에 대하여 같은 조작을 한다.



이 과정을 무한히 반복했을 때 나타나는 평면 위의 점들의 집합이 바로 시어핀스키 삼각형이다.



<그림Ⅲ-1> 시어핀스키 삼각형의 생성 단계
(출처 : 김용운 · 김용국, 프랙탈과 카오스의 세계, P.97.)

처음 정삼각형의 한 변의 길이를 1로 하고 시어핀스키 삼각형의 넓이를 계산하자.

1단계에서 남은 3개의 정삼각형의 집합을 S_1이라 하고 이 절차를 반복해서 n번째 단계에서 얻어진 정삼각형의 집합을 S_n이라고 하자.

여기서 시어핀스키 삼각형을 S라 하면 $S = \bigcap_{k \in N} S_k$이다. S_k는 각 변의 길이 2^{-k}이고 3^k개의 정삼각형을 가지므로 S_k의 총 면적은

$$3^k \cdot (2^{-k})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

따라서 S의 면적은

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

그러므로 시어핀스키 삼각형의 면적은 0이다. 또한 S_n의 총 길이는

$$3 \cdot 3^k \cdot 2^{-k} = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^k$$

따라서

$$\lim_{k \to \infty} 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^k = \infty$$

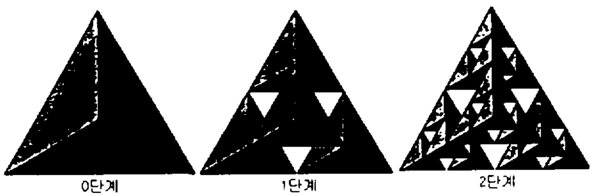
즉, 시어핀스키 삼각형의 길이는 ∞이다.

<그림Ⅲ-1>에서 첫 번째 단계 후에 남아있는 3개의 작은 삼각형 중에서 좌측 아래에 있는 삼각형의 중앙 부분은 제거하고 얻은 부분을 면밀히 관찰하면

이 삼각형의 한 변의 길이는 원래 주어진 삼각형의 한 변의 길이의 $\frac{1}{2}$이 된다. 이 삼각형을 2배의 비율로 확대하면 전체의 시어핀스키 삼각형을 보게 된다. 즉, 확대율=2, 조각의 수=3,

$$\text{차원} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.584\cdots$$

시어핀스키 삼각형을 3차원으로 확장한 것이 시어핀스키 사면체인데 시어핀스키 삼각형과 똑같은 조작을 행하여서 얻을 수 있다. 정사면체의 모서리의 중점을 연결하면 네 모퉁이에 생긴 4개의 작은 정사면체와 중앙부의 정팔면체가 생긴다. 정사면체로부터 정팔면체를 빼고, 네 모퉁이에 있는 작은 정사면체를 남긴다. 이 조작을 계속하면 시어핀스키 사면체가 된다. 작은 정사면체는 원래의 정사면체와 비교해서 체적은 $\frac{1}{8}$, 표면적은 $\frac{1}{4}$, 모서리의 길이는 $\frac{1}{2}$이다. 4개의 작은 정사면체와 원래의 정사면체를 비교하면 체적은 $\frac{1}{2}$, 표면적은 불변, 모서리의 길이는 2배이다. 따라서 이 조작을 계속해나가면 표면적은 불변이고, 모서리의 길이는 증가하고, 꼭지점의 수는 증가한다.



<그림Ⅲ-2> 시어핀스키 사면체의 생성 단계
(출처 : Peitgen et al(1992), Fractals for the Classroom, part one, p.17.)

프랙탈 차원을 생각하면 확대율=2, 조각의 수 =4,

$$\text{차원} = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$

에서 프랙탈 차원 2가 표면적의 불변의 조작으로 만든 것과 아주 잘 일치하고 있다.

2. 만델브로트 집합(Mandelbrot Set)

수학적 프랙탈 중 일반에게 가장 널리 알려진 것은 만델브로트 집합이다. 복소수 평면에서 모든 점, 즉 모든 복소수는 그 집합 안에 있거나 밖에 있다. 그 집합을 정의하는 하나의 방법은 모든 점에 대해 간단한 산술을 반복하여 조사해 보는 것이다.

$$Z^2 + C = \text{어떤 수}$$

z : 변화하는 복소수
c : 상수

먼저 어떤 복소수를 취하고, 그것을 제곱한 다음 그것을 처음의 수를 더하고, 이를 반복하면 된다. 계산된 점들이 원점과의 거리가 무한대로 접근하면 그 점은 만델브로트 집합 내에 있지 않고, 유한하다면 그 점은 만델브로트 집합내에 존재한다. 하나의 과정을 무한히 되풀이하여 그 결과가 무한한지 여부를 묻는 이 작업은 일상 세계의 피드 백 과정과 비슷하다. 만델브로트 집합에 대하여 좀더 정확히 정의해 보면 다음과 같다.

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

에서 초기값 $z_0 = 0$으로 고정해 놓고, c를 변화시켜서 $|z_n|$이 무한대가 되지 않는 c의 집합을 만델브로트 집합이라고 한다. 즉,

$$M = \left\{ c \mid z_{n+1} = z_n^2 + c,\ \ z_0 = 0,\ \ \lim_{n \to \infty} |z_n| < \infty \right\}$$

<그림Ⅲ-3> 만델브로트의 집합
(출처 : 김용운 · 김용국(1998), 프랙탈과 카오스의 세계, p.251.)

만델브로트 집합은 어느 부분을 확대해도 다시 전체의 모습, 즉 매우 조그만 만델브로트 집합이 계속해서 나타난다. 따라서 만델브로트 집합의 경계는 그 둘레의 길이가 무한대이다. 또한 놀랍게도 그 프랙탈 차원은 2차원임이 밝혀져 있다.[9)]

Ⅳ. 프랙탈을 이용한 수학 학습지의 예

고등학교 수학교실에 도입할 수 있는 프랙탈을 활용한 수학 학습지의 구성은 Peitgen 외 5명의 저서 '수학교사를 위한 프랙탈 기하'에서 교육과정의 연계성에 근거하여 우리나라 교육과정에 알맞게 구성하였다.

---

9) M. Shishikura(1991), The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot Set and Julia Set, SUNY Stony Brook, Institute for Mathematics Sciences, Preprint # 1991. 7.

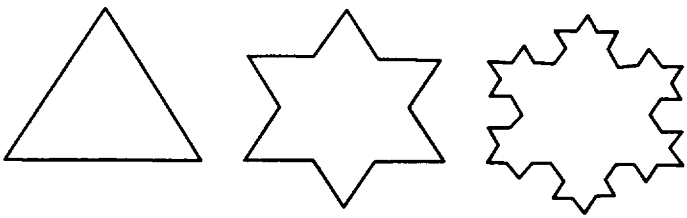
1. 시어핀스키 삼각형의 각 단계에 남아있는 삼각형의 수를 구하여라.

단계	0	1	2	3	4	· · ·	n
개수	1						

2. 시어핀스키 삼각형의 0단계에서 정삼각형의 면적을 1이라 할 때 각 단계에서 남아 있는 삼각형의 면적을 구하여라.

단계	0	1	2	3	4	· · ·	n
면적	1						

3. 시어핀스키 삼각형에서 과정을 무한히 반복하면 남아 있는 삼각형의 면적은 어떻게 되는가?
4. 시어핀스키 삼각형에서 과정을 무한히 반복하면 남아 있는 점들의 개수는?
5. 시어핀스키 삼각형의 성질을 말하여라.
6. 코흐 곡선의 프랙탈 차원을 계산하여라.
7. 다음 그림은 코흐 눈송이의 생성 과정이다. 프랙탈 차원을 계산하여라.



0단계 1단계 2단계

8. 시어핀스키 삼각형의 프랙탈 차원을 계산하여라.

V. 결 론

프랙탈은 새로운 수학교육 목표를 달성하는데 아주 적절한 내용이다. 어떤 수학 내용보다 응용성이 넓고, 탐구 활동을 통해 수학적 사고력과 수학적 의사소통 능력을 향상시킬 수 있도록 내용을 조직하기 쉬울 뿐만 아니라, 컴퓨터의

사용과 밀접히 관련되며, 최근에 각광받는 이산수학의 분야이다. 또, 프로그래밍 활동을 통해 컴퓨터 그래픽을 생성하고 조작해 봄으로써 수학의 아름다움을 생생하게 느끼게 할 수 있으며 그 결과 학생들로 하여금 바람직한 수학적 성향을 길러줄 수 있다고 한다.[10]

그리고 제7차 교육과정의 수학과 교수, 학습에서는 학생들의 구체적인 경험에 근거하여 사물의 현상을 수학적으로 해석하고 조직하는 활동, 구체적인 사실에서 점진적인 추상화 단계로 나아가는 과정, 직관이나 구체적인 조작 활동에 바탕을 둔 통찰 등의 수학적 경험을 통하여 형식이나 관계를 발견하고, 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 이해한다. 또, 수학적 문제를 해결할 때에는 먼저 문제를 분명히 이해한 후, 문제 해결을 위한 합리적이고 창의적인 해결 계획을 작성하여 실행한 다음, 반성 과정을 거치는 사고 태도를 지니도록 한다. 그리고 수학적 지식과 기능을 활용하여 실생활의 여러 가지 문제를 해결해 봄으로써 수학의 필요성과 실용성 등을 인식할 수 있게 하여 수학에 대한 긍정적인 태도를 가지게 한다.

수학 학습을 통하여 학생들은 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙을 습득하고 기능을 익혀, 자연과 사회에서 일어나는 현상이나 문제를 수학적인 방법으로 조직하고 해결할 수 있는 문제 해결 능력을 높이며, 유연하고 다양한 사고 활동을 통하여 수학적 사고력과 창의력을 배양할 수 있다고 한다. 그리고 수학과의 교과목표를 수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고, 수학적으로 사고하는 능력을 길러, 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기른 것이라고 기술하고 있다. 그러므로 프랙탈과 같은 새로운 수학 내용은 이러한 수학과의 교과목표에 합당한 것이고 학생들에게는 새로운 수학의 세계를 경험할 수 있는 대상이다.

본 논문에서는 고등학교 수학교실에서 적절한 프랙탈 학습 내용을 알아보고, 프랙탈 학습자료의 예를 제시함으로써 프랙탈의 고등학교 교실에의 활용 가능성을 모색하고자 하였다.

이를 위하여 먼저 Ⅱ절에서는 프랙탈이 무엇인가를 알기 위하여, 프랙탈의 정의와 특징을 살펴보고, 프랙탈 도형의 특징 중 자기유사성과 프랙탈 차원에 대하여 알아보았다. 또, 유클리드 도형과 프랙탈 도형을 비교하였다.

---

10) 파이트겐 외 5명(1999), 전게서, pp.147~148.

Ⅲ절에서는 프랙탈의 예로 시어핀스키 삼각형과 시어핀스키 사면체, 만델브로트 집합 등을 살펴보았다.

Ⅳ절에서는 고등학교 교과과정에 프랙탈 개념을 도입하고 난 후 이용할 수 있는 학습지의 예를 간단히 기술하였다.

Ⅲ절의 예에서 본 것처럼 수학교육에 프랙탈이 도입이 된다면 학생들이 직접 프랙탈을 구성하고 프랙탈 도형을 시각화하는 등 전략적 활동을 통하여 수학에 대한 색다른 즐거움과 흥미를 느낄 수 있다. 그리고 수학에 대한 동기 유발과 긍정적인 태도를 기대할 수 있으며, 프랙탈 모델이 일상생활 속에서 쉽게 관찰될 수 있기 때문에 프랙탈을 배우면서 수학이 우리 생활과 얼마나 밀접한가를 체험할 수 있다.

참 고 문 헌

교육부(1997), 「고등학교 교육과정(1)」, 교육부.

김승환(1993), 「정보사회와 문화예술:프랙탈」, 공간.

김용운 · 김용국(1994), 「프랙탈-혼돈의 질서」, 동아출판사.

김용운 · 김용국(1998), 「프랙탈과 카오스의 세계」, 도서출판 우성.

이승준(1994), 「새로운 과학으로 부상하는 혼돈과학」, Softworld.

제임스 글리크(1993), 「카오스:현대과학의 대혁명」, 박배서 · 성운하 역, 동문사.

파이트겐 외 5명(1999), 「수학교사를 위한 프랙탈 기하」, 신인선 · 류희찬 역, 경문사.

김순덕(1994), "중등수학교육에서 프랙탈에 대한 연구", 석사학위논문, 한국교원대학교.

유병옥(1999), "중등수학 교육과정에 프랙탈의 소개", 석사학위논문, 울산대학교 교육대학원.

Shishikura,M(1991), The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot Set and Julia Set, SUNY Stony Brook, Institute for Mathematics Sciences, Preprint

Peitgen, Jurgens, Sape(1992), Fractals for the Classroom, NCTM & Springer- Verlag.