碩士學位論文

비유클리드 평면상의 피타고라스정리 연구

濟州大學校　大學院

數　學　科

金　賢　娥

2013年　02月

비유클리드 평면상의
피타고라스정리 연구

指導敎授　鄭　承　達

金　賢　娥

이 論文을 理學 碩士學位 論文으로 提出함

2012年 11月

金賢娥의 理學 碩士學位 論文을 認准함

審査委員長 ＿＿＿＿＿＿ 印

委　　員 ＿＿＿＿＿＿ 印

委　　員 ＿＿＿＿＿＿ 印

濟州大學校 大學院

2012年 11月

The Pythagorean Theorem in Non-Euclid plane

Hyeon A Kim
(Supervised by professor Seoung Dal Jung)

A thesis submitted in partial fulfillment of the requirement for the degree of Master of Science

2012. 11.

Department of Mathematics
GRADUATE SCHOOL
JEJU NATIONAL UNIVERSITY

목　　차

<초록>

비유클리드 평면상의 피타고라스정리 연구

본 논문에서는 비유클리드 평면상의 피타고라스 정리를 연구하였다. 특히 Taxicab 거리함수와 Chinese 거리함수를 이용하여 피타고라스 정리에 대해 증명하였다. Taxicab 기하학은 택시거리 함수를 이용한 기하로, 택시의 움직이는 거리를 그 모델로 삼은 비유클리드 기하학이고, Chinese checker 기하학은 중국의 게임의 일종인 장기의 말의 움직임을 일반화한 비유클리드 기하학이다. 또한 α-기하에 대해 정의하고 피타고라스 정리를 증명하였다.

Ⅰ. 서론

Euclid 기하학은 그리스의 수학자 유클리드가 ‘원론’에서 보인 10개의 공리 및 공준, 또는 이들을 수정한 것을 바탕으로 점, 선, 각, 표면, 입체 등에 대해 연구한 내용을 의미한다. 우리가 흔히 알고 있는 공식들이 거의 이 Euclid 기하학에 속한다고 보아도 된다. 또한 우리의 실생활에 큰 도움을 주는 사실을 수학적으로 설명하는 토대를 인류의 시작부터 이 모든 과학에서 절대적인 가치를 지닌 것으로 인식되어 왔다. Euclid 기하학의 제5공리인 ‘평행선 공리’를 보면, ‘직선 밖의 한 점 P를 지나고 그 직선과 만나지 않는 직선은 오직 하나이다.’ 즉, 평행선은 아무리 연장을 해도 만나지 않는다는 사실이다. 비유클리드 기하학이 Euclid 기하에서의 평행선 공리로부터 탄생하게 된다.

여러 비유클리드 기하학 중에 Taxicab 기하학이나 Chinese checker 기하학은 학생들이 쉽게 이해할 수 있는 기하학이다. 그 이유는 첫째, Euclid 기하학과 매우 유사하다. 실제로, 점, 선, 각 등 대부분의 정의가 Euclid 기하와 동일하기 때문에 큰 어려움 없이 비유클리드기하학을 경험할 수 있다. 둘째, 우리 주변에서 쉽게 접할 수 있는 소재에서 아이디어를 얻을 수 있고, 다른 쌍곡기하학이나 타원기하학 등에 비해 응용성이 높다. Taxicab 기하학은 우리가 살고 있는 도시에서 택시의 움직이는 거리를 그 모델로 삼은 비유클리드 기하학이고, Chinese checker 기하학은 중국의 게임의 일종인 장기(Chinese checker)의 말의 움직임을 일반화한 비유클리드 기하학이기 때문이다.

즉, Taxicab 기하학, Chinese checker 기하학은 중고등학생이 쉽게 이해할 수 있는 비유클리드 기하(non-Euclid geometry)이다. Taxicab 기하학, Chinese checker 기하학을 공부함으로써 자신감과 흥미를 잃기 쉬운 수학에 관심을 갖게 해줄 수 있다. 또한 실생활에 이용할 수 있는 수학으로서 많은 응용성을 갖고 있기 때문에 수학도들에게 깊이 생각할 수 있는 주제가 되고, 도시지리학 등을 공부하는 이들에게는 실제적인 응용에 수학적 뒷받침을 제공할 수 있으리라 본다.

이 논문의 제 2장에서는 $\mathbb{R}^2$에서의 다양한 거리함수(metric function)와 각 거리함수에 따른 원추곡선(원, 타원, 쌍곡선, 포물선)의 정의를 제시하고, 한 점에서 직선사이의 거리에 대하여 알아보고, 원추곡선의 일반형을 이해하며, 제 3장에서

는 각 거리함수에 따른 피타고라스정리에 대해 이해하고, 더 나아가 Taxicab 기하와 Chinese Checker 기하의 일반적인 형태로 α-기하에 대해 논의하기로 한다.

Ⅱ. $\mathbb{R}^2$에서의 거리함수

2.1 다양한 거리함수

정의 2.1 (거리함수) 평면 $\mathbb{R}^2$상의 임의의 두 점을 $X(x_1,y_1)$, $Y(x_2,y_2)$라 하자.

1) **Euclid 거리함수** d_E는

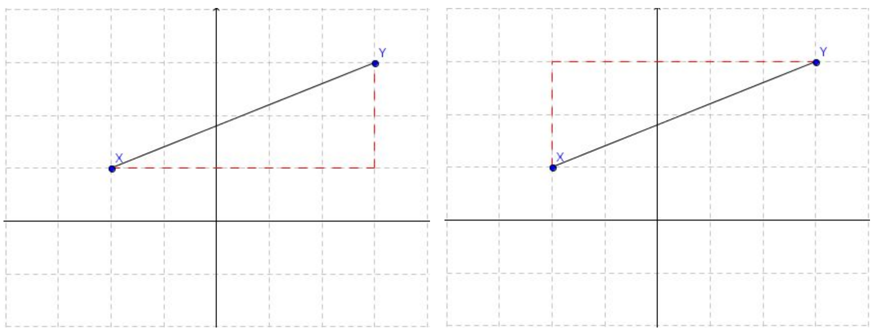
$$d_E(X,Y)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

이다. Euclid 거리가 정의된 평면을 Euclid 평면이라 한다.

2) Taxicab 거리함수 d_T는

$$d_T(X,Y)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

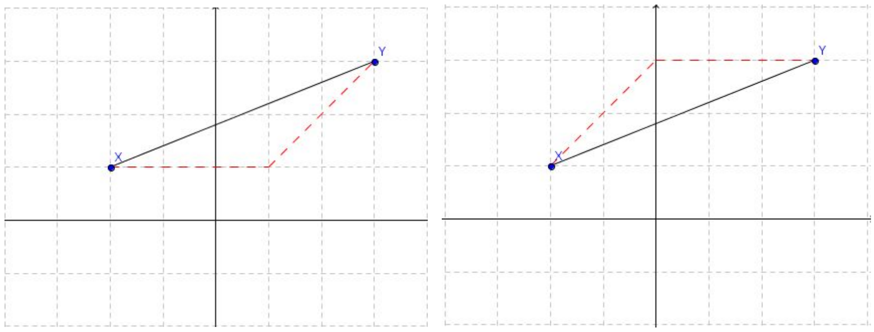
이다. Taxicab 거리가 정의된 평면을 Taxicab 평면이라 한다.



3) Chinese Checker 거리함수 d_C는

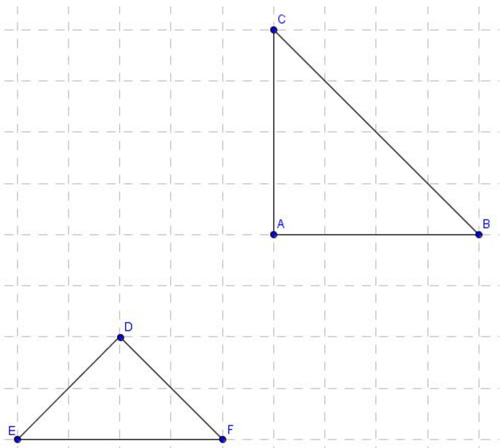
$$d_C(X, Y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sqrt{2} - 1)\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

이다. Chinese Checker 거리가 정의된 평면을 Chinese Checker 평면이라 한다.



앞으로 Chinese checker를 ‘CC’로 줄여서 쓰기로 하자.

참고 2.2 택시기하학에서는 삼각형의 합동공리가 성립하지 않는다. 유클리드기하학에서는 ‘대응하는 두 쌍의 변과 그 사이에 끼인 각이 각각 합동인 두 삼각형은 합동이다.’인 삼각형의 합동공리(SAS)가 있다. 그리고 나머지 두 개의 삼각형의 합동조건은 이 공리에 기초한 것이다.



위의 그림에서 삼각형 ABC, DEF는 $\angle A = \angle D = 90^\circ$인 직각이등변삼각형이다. 각 변을 $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$, $c = d(A, B)$, $d = d(E, F)$, $e = d(F, D)$, $f = d(D, E)$라 하면, 택시거리는 다음과 같다.

$$b_T = 4,\ c_T = 4,\ e_T = 4,\ f_T = 4.$$

따라서 두 삼각형 $\triangle ABC$ 와 $\triangle DEF$는 두 쌍의 대응변의 길이가 각각 같고, 그

끼인 각의 크기가 같은 삼각형이다. 그러나 이 두 삼각형은 서로 포개어지지 않으므로 합동이 아니다. 따라서 택시평면에서는 유클리드평면에서 성립하던 삼각형의 SAS 합동공리가 성립하지 않는다. 마찬가지 이유로 유클리드기하학에서 성립하던 삼각형의 나머지 두 가지 합동공리도 택시기하학에서는 성립하지 않는다. CC기하학에서도 삼각형의 합동공리가 성립하지 않는다.

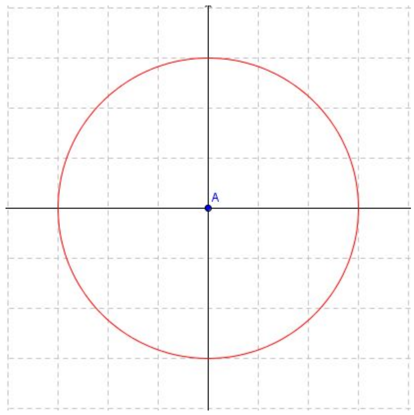
2.2 원추곡선

정의 2.3 (원) 평면 $\mathbb{R}^2$상에서 정점 A로부터 P까지의

1) **(Euclid 원)** Euclid 거리가 $r(>0)$인 모든 점 P의 집합

$$\{P \mid d_E(P, A) = r\}$$

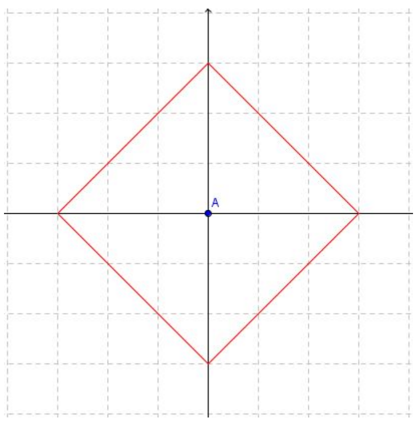
을 Euclid 평면에서의 Euclid 원이라 한다.



2) **(Taxicab 원)** Taxicab 거리가 $r(>0)$인 모든 점 P의 집합

$$\{P \mid d_T(P, A) = r\}$$

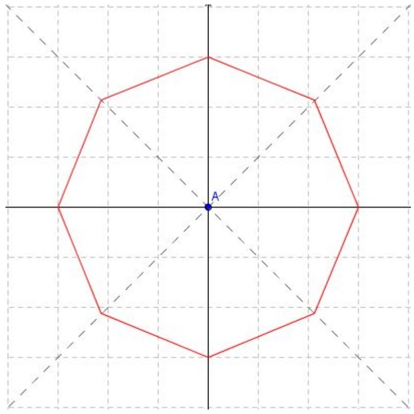
을 Taxicab 평면에서의 Taxicab 원이라 한다.



3) **(CC 원)** CC 거리가 $r(>0)$인 모든 점 P의 집합

$$\{P \mid d_C(P, A) = r\}$$

을 CC 평면에서의 CC 원이라 한다.



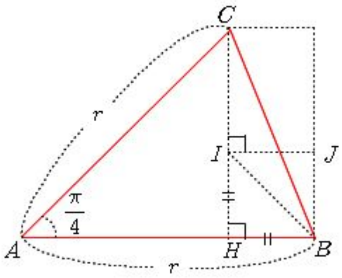
정의 2.4 (원주율) 반지름 r인 원의 원주의 길이를 l이라 하면, 원주의 길이 l과 지름의 길이 $2r$와의 비는 반지름의 길이에 관계없이 일정하다. 이 비 $\dfrac{l}{2r}$이 원주율이며, 둘레를 뜻하는 그리스어 περίμετρο(perimeter)의 머리글자를 따서 그리스문자 π(파이)로 나타낸다.

정리 2.5 Taxicab 원주율 π_T는 택시원의 지름에 대한 원주의 비이다. 이 때 $\pi_T = 4$이다.

증명) Taxicab 원 $C_T(0, r)$에서 지름의 길이는 $2r$이고 원주는 $8r$이다. 따라서 Taxicab 원주율 $\pi_T = \dfrac{8r}{2r} = 4$가 된다. □

정리 2.6 CC 원주율 π_C는 CC 원의 지름에 대한 원주의 비이다. 이 때 $\pi_C = 8(\sqrt{2}-1)$이다.

증명)



그림과 같이 점 H, I, J를 잡으면 $d_C(A,B)=d_c(A,C)=d_E(A,B)=r$이고,

$d_E(C,H)=r\sin\frac{\pi}{4}=d_E(A,H)$이므로 $d_E(I,H)=d_E(H,B)=d_E(A,B)-d_E(A,H)$

$=r-\frac{\sqrt{2}}{2}r=\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})r$이다. 따라서 $d_E(B,I)=\sqrt{2}\,d_E(I,H)=(\sqrt{2}-1)r$이고,

$d_E(I,C)=d_E(C,H)-d_E(I,H)=\frac{\sqrt{2}}{2}r-\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})r=(\sqrt{2}-1)r$이다.

따라서 $d_C(B,C)=d_E(B,I)+d_E(I,C)=2(\sqrt{2}-1)r$이다.

$\therefore$ C.C 원의 둘레 = $16r(\sqrt{2}-1)$.

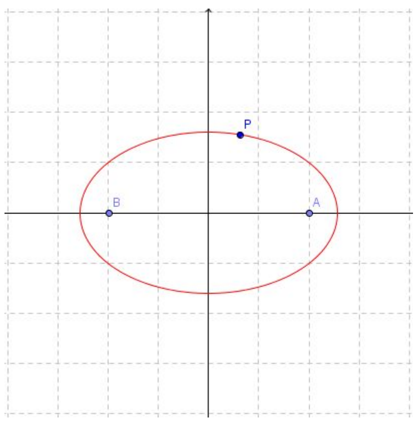
$\therefore\ \pi_C=\frac{16r(\sqrt{2}-1)}{2r}=8(\sqrt{2}-1)$. □

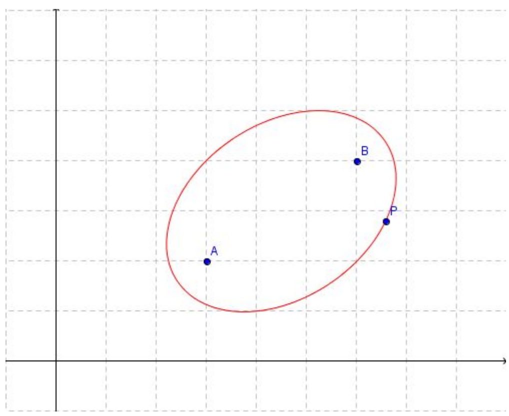
정의 2.7 (타원) 두 정점 A, B로부터 P까지의

1) **(Euclid 타원)** Euclid 거리의 합이 a(일정)인 모든 점 P의 집합

$$\{P \mid d_E(P,A)+d_E(P,B)=a\}$$

을 Euclid 평면에서의 Euclid 타원이라 한다.

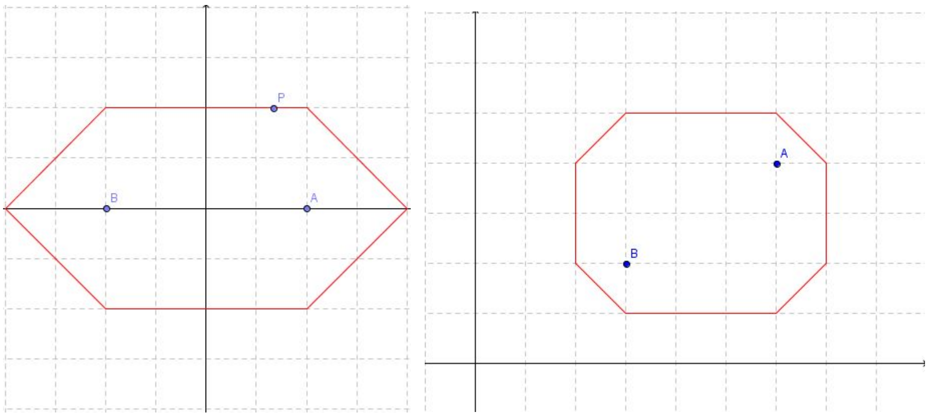




2) **(Taxicab 타원)** Taxicab 거리의 합이 a(일정)인 모든 점 P의 집합

$$\{P \mid d_T(P, A) + d_T(P, B) = a\}$$

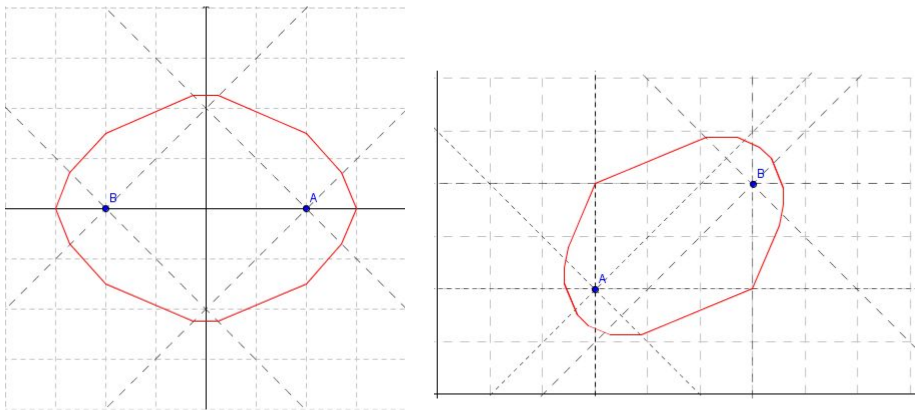
을 Taxicab 평면에서의 Taxicab 타원이라 한다.



3) **(CC 타원)** CC 거리의 합이 a(일정)인 모든 점 P의 집합

$$\{P \mid d_C(P, A) + d_C(P, B) = a\}$$

을 CC 평면에서의 CC 타원이라 한다.

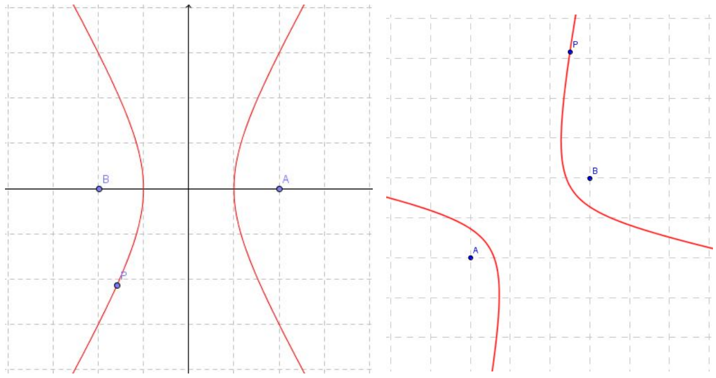


정의 2.8 (쌍곡선) 두 점 A, B로부터 P 까지의

1) **(Euclid 쌍곡선)** Euclid 거리의 차가 b(일정)인 모든 점 P의 집합

$$\{P \mid |d_E(P, A) - d_E(P, B)| = b\}$$

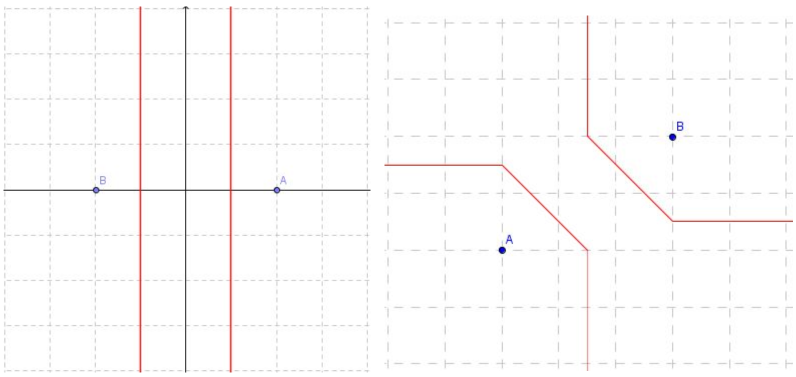
을 Euclid 평면에서의 Euclid 쌍곡선이라 한다.



2) **(Taxicab 쌍곡선)** Taxicab 거리의 차가 b(일정)인 모든 점 P의 집합

$$\{P \mid |d_T(P,A) - d_T(P,B)| = b\}$$

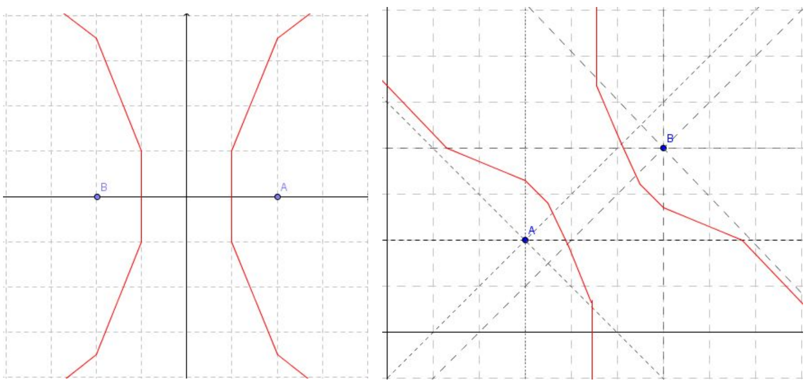
을 Taxicab 평면에서의 Taxicab 쌍곡선이라 한다.



3) **(CC 쌍곡선)** CC 거리의 차가 b(일정)인 모든 점 P의 집합

$$\{P \mid |d_C(P,A) - d_C(P,B)| = b\}$$

을 CC 평면에서의 CC 쌍곡선이라 한다.

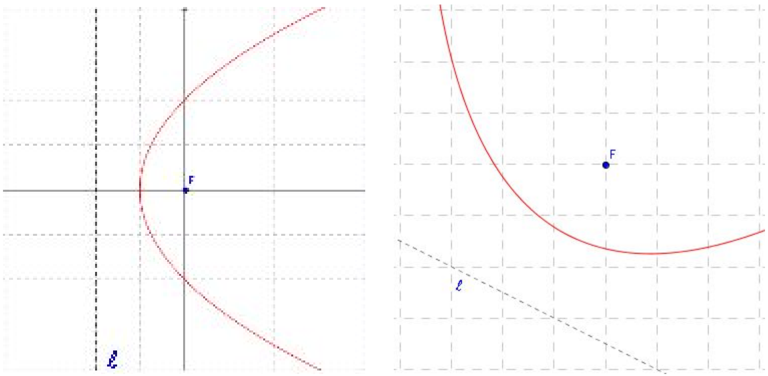


정의 2.9 (포물선) 정점 F와 F를 지나지 않는 정직선 l에 대하여

1) **(Euclid 포물선)** Euclid 거리가 같은 모든 점 P의 집합

$$\{P \mid d_E(P, F) = d_E(P, l)\}$$

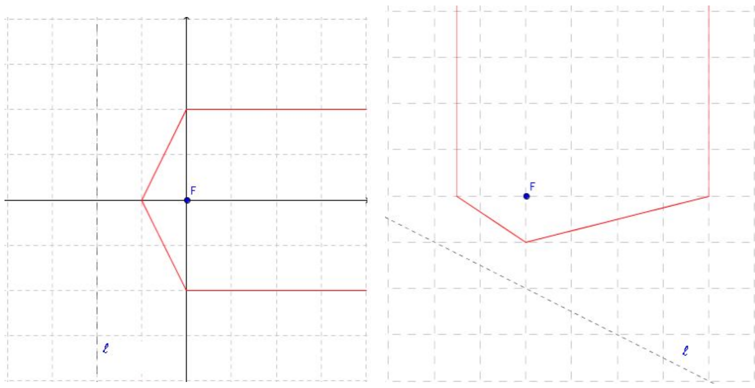
을 Euclid 평면에서의 Euclid 포물선이라 한다. 여기서 $d_E(P,l)$은 점 P에서 직선 l 까지의 거리이다.



2) **(Taxicab 포물선)** Taxicab 거리가 같은 모든 점 P의 집합

$$\{P \mid d_T(P, F) = d_T(P, l)\}$$

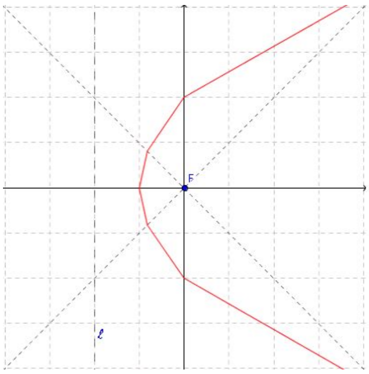
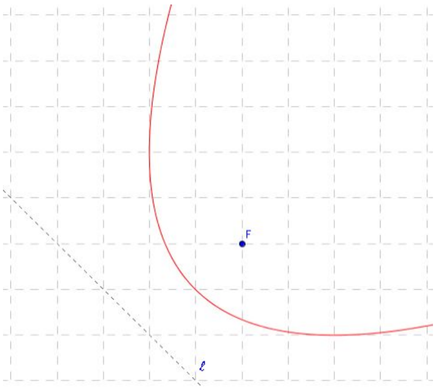
을 Taxicab 평면에서의 Taxicab 포물선이라 한다. 여기서 $d_T(P,l)$은 점 P에서 직선 l 까지의 택시거리이다.



3) **(CC 포물선)** CC 거리가 같은 모든 점 P의 집합

$$\{P \mid d_C(P, F) = d_C(P, l)\}$$

을 CC 평면에서의 CC 포물선이라 한다. 여기서 $d_C(P,l)$은 점 P에서 직선 l 까지의 CC거리이다.


F
ℓ

F
ℓ

2.3 한 점에서 직선까지의 거리

정리 2.10 (Euclid 기하) Euclid 평면에서 한 점 $P=(x_0, y_0)$가 주어질 때, 한 점 P에서 직선 $l: ax+by+c=0$까지의 Euclid 거리는 다음과 같이 주어진다.

$$d_E(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad .$$

정리 2.11 (Taxicab 기하) Taxicab 평면에서 한 점 $P=(x_{0,} y_0)$가 주어질 때, 한 점 P에서 직선 $l: ax+by+c=0$까지의 Taxicab 거리는 다음과 같이 주어진다.

$$d_T(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|, |b|\}} \quad .$$

증명) X는 직선 l과 $x=x_0$, Y는 직선 l과 $y=y_0$의 교점이라 하자. 그 때

$$d_T(P, l) = \min\{d_T(P, X), d_T(P, Y)\}.$$

i) $a \neq 0 \neq b$일 때,

$X=(x_1, y_1)$는 $x_1 = x_0$이고, 직선 l 위의 점이므로 $ax_0 + by_1 + c = 0$이다. 이를 y_1에 대하여 정리하면 $y_1 = -\dfrac{ax_0+c}{b}$이다. 따라서,

$$\begin{aligned} d_T(P, X) &= |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0| \\ &= |y_1 - y_0| \\ &= \left| -\frac{ax_0+c}{b} - y_0 \right| \\ &= \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{b} \right| \end{aligned}$$

이다.

$Y=(x_2, y_2)$는 $y_2 = y_0$이고, 직선 l 위의 점이므로 $ax_2 + by_0 + c = 0$이다. 이를 x_2에 대하여 정리하면 $x_2 = -\dfrac{by_0+c}{a}$이다. 따라서,

$$d_T(P,\ Y) = \left|\frac{ax_0+by_0+c}{a}\right|$$

이다.

$d_T(P,l) = \min\{d_T(P,X), d_T(P,\ Y)\}$이므로,

$$d_T(P,l) = \min\left\{\left|\frac{ax_0+by_0+c}{a}\right|, \left|\frac{ax_0+by_0+c}{b}\right|\right\}$$

이다.

ii) $a=0$일 때,

$X=(x_1,y_1)$는 $x_1=x_0$이고, 직선 l 위의 점이므로 $by_1+c=0$이다. 이를 y_1에 대하여 정리하면 $y_1=-\frac{c}{b}$이다. 따라서,

$$\begin{aligned} d_T(P,X) &= |x_1-x_0|+|y_1-y_0| \\ &= |y_1-y_0| \\ &= \left|-\frac{c}{b}-y_0\right| \\ &= \left|\frac{by_0+c}{b}\right| \end{aligned}$$

이다.

iii) $b=0$일 때,

$Y=(x_2,y_2)$는 $y_2=y_0$이고, 직선 l 위의 점이므로 $ax_1+c=0$이다. 이를 x_1에 대하여 정리하면 $x_1=-\frac{c}{a}$이다. 따라서,

$$\begin{aligned} d_T(P,X) &= |x_1-x_0|+|y_1-y_0| \\ &= |y_1-y_0| \\ &= \left|-\frac{c}{a}-x_0\right| \\ &= \left|-\frac{ax_0+c}{a}\right| \\ &= \left|\frac{ax_0+c}{a}\right| \end{aligned}$$

이다.

i)~iii)에 의하여,

$$
d_T(P,l)=\begin{cases}\min\left\{\left|\frac{ax_0+by_0+c}{a}\right|,\left|\frac{ax_0+by_0+c}{b}\right|\right\} & \text{if } a\neq 0\neq b,\\ \left|\frac{by_0+c}{b}\right| & \text{if } a=0,\\ \left|\frac{ax_0+c}{a}\right| & \text{if } b=0,\end{cases}
$$
$$
=(\max\{|a|,|b|\})^{-1}\cdot|ax_0+by_0+c|.
$$

□

정리 2.11 (CC 기하) CC 평면에서 한 점 $P=(x_0,y_0)$가 주어질 때, 한 점 P에서 직선 $l: ax+by+c=0$까지의 CC 거리는 다음과 같이 주어진다.

$$
d_C(P,l)=\begin{cases}\left|\frac{ax_0+by_0+c}{b}\right| & \text{if } |m|\le s,\\ \frac{\sqrt{2}}{|b|}\cdot\left|\frac{ax_0+by_0+c}{1+|m|}\right| & \text{if } s\le|m|\le s+2,\\ \left|\frac{ax_0+by_0+c}{a}\right| & \text{if } |m|\ge s+2.\end{cases}
$$

여기서 $m=-\frac{a}{b}$은 직선 l의 기울기이고, $s=\sqrt{2}-1$이다.

증명)

X는 직선 l과 $x=x_0$, Y는 직선 l과 $y=y_0$, Z는 직선 l과 $y-y_0=x-x_0$, W는 직선 l과 $y-y_0=-(x-x_0)$의 교점이라 하자. 그 때

$$
d_C(P,l)=\min\{d_C(P,X),d_C(P,Y),d_C(P,Z),d_C(P,W)\}.
$$

i) $|m|\le s$이면 $d_C(P,l)=d_C(P,X)$.

$X=(x_1,y_1)$는 $x_1=x_0$이고, 직선 l 위의 점이므로 $ax_0+by_1+c=0$이다. 이를 y_1에 대하여 정리하면 $y_1=-\frac{ax_0+c}{b}$이다. 따라서,

$$
\begin{aligned}
d_C(P,l) &= d_C(P,X) \\
&= \max\{|x_1-x_0|,|y_1-y_0|\}+(\sqrt{2}-1)\min\{|x_1-x_0|,|y_1-y_0|\} \\
&= |y_1-y_0| \\
&= \left|-\frac{ax_0+c}{b}-y_0\right| \\
&= \left|\frac{ax_0+by_0+c}{b}\right|
\end{aligned}
$$

이다.

ii) ① $s \le m \le s+2$이면 $d_C(P,l)=d_C(P,Z)$.

$Z=(x_2,y_2)$는 $y_2-y_0=-x_2+x_0=k$이고, 직선 l 위의 점이므로 $x_2=x_0-k$, $y_2=y_0+k$를 대입하면 $a(x_0-k)+b(y_0+k)+c=0$이다. $k(-a+b)+ax_0+by_0+c=0$이므로 $k=-\dfrac{ax_0+by_0+c}{-a+b}$이다. 따라서,

$$
\begin{aligned}
d_C(P,l) &= d_C(P,Z) \\
&= \max\{|x_2-x_0|,|y_2-y_0|\}+(\sqrt{2}-1)\min\{|x_2-x_0|,|y_2-y_0|\} \\
&= |k|+(\sqrt{2}-1)|-k| \\
&= \sqrt{2}|k| \\
&= \sqrt{2}\cdot\left|\frac{ax_0+by_0+c}{-a+b}\right| \\
&= \frac{\sqrt{2}}{|b|}\cdot\left|\frac{ax_0+by_0+c}{1+|m|}\right|
\end{aligned}
$$

이다.

② $m \ge -(s+2)$ 또는 $m \le -s$이면 $d_C(P,l)=d_C(P,W)$.

$W=(x_4,y_4)$는 $y_4-y_0=x_4-x_0=k$이고, 직선 l 위의 점이므로 $x_4=x_0+k$, $y_4=y_0+k$를 대입하면 $a(x_0+k)+b(y_0+k)+c=0$이다. $k(a+b)+ax_0+by_0+c=0$이므로 $k=-\dfrac{ax_0+by_0+c}{a+b}$이다. 따라서,

$$
\begin{aligned}
d_C(P,l) &= d_C(P,W) \\
&= \max\{|x_4-x_0|,|y_4-y_0|\}+(\sqrt{2}-1)\min\{|x_4-x_0|,|y_4-y_0|\} \\
&= |k|+(\sqrt{2}-1)|k| \\
&= \sqrt{2}|k| \\
&= \sqrt{2}\cdot\left|-\frac{ax_0+by_0+c}{a+b}\right| \\
&= \frac{\sqrt{2}}{|b|}\cdot\left|\frac{ax_0+by_0+c}{1+|m|}\right|
\end{aligned}
$$

이다.

즉, $s \le |m| \le s+2$이면,

$$d_C(P,l) = \frac{\sqrt{2}}{|b|} \cdot \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{1+|m|} \right|$$

이다.

iii) $|m| \ge s+2$ 이면 $d_C(P,l) = d_C(P,Y)$.

$Y=(x_{3,}y_3)$는 $y_3 = y_0$이고, 직선 l 위의 점이므로 $ax_3 + by_0 + c = 0$이다. 이를 x_3에 대하여 정리하면 $x_3 = -\frac{by_0 + c}{a}$이다. 따라서,

$$\begin{aligned} d_C(P,l) &= d_C(P,Y) \\ &= \max\{|x_3 - x_0|, |y_3 - y_0|\} + (\sqrt{2}-1)\min\{|x_3 - x_0|, |y_3 - y_0|\} \\ &= |x_3 - x_0| \\ &= \left| -\frac{by_0 + c}{a} - x_0 \right| \\ &= \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{a} \right| \end{aligned}$$

이다.

□

2.4 원추곡선의 일반형

정의 2.12 (이심률) 타원, 쌍곡선, 포물선에 대하여 이를 지나는 한 점과 초점간의 거리, 준선에 이르는 거리의 비를 이심률이라 한다. 즉 임의의 점 P, 초점 F, 준선 l이라 할 때,

$$e = \frac{d(P,F)}{d(P,l)}.$$

이 때, $0 < e < 1$이면 타원, $e > 1$이면 쌍곡선, $e = 1$이면 포물선이라 한다.

정리 2.13 (Euclid 원추곡선) Euclid 원추곡선은 다음과 같은 방정식의 형태를 따른다.

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0.$$

참고. 단, $k = \frac{C^2}{A} + \frac{D^2}{B} - AB$라 할 때, $A = B$, $k > 0$이면 Euclid 원, $A \neq B$, $AB > 0$, $k > 0$이면 Euclid 타원, $AB < 0$, $k \neq 0$이면 Euclid 쌍곡선이다. 그리고 $A = 0$, $BC \neq 0$ 또는 $B = 0$, $AD \neq 0$이면 Euclid 포물선이다.

정리 2.14 (Taxicab 원추곡선) 초점 $F_1(x_1, y_1)$, $F_2(x_2, y_2)$ 또는 초점 (x_1, y_1)과 준선 $l: ax + by + c = 0$을 갖는 Taxicab 원추곡선은 다음과 같은 방정식의 형태를 따른다.

$$|x - x_1| + |y - y_1| + \alpha(|x - x_2| + |y - y_2|) + \beta|ax + by + c| \mp \alpha\gamma = 0. \qquad ㉠$$

여기서, $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$, $\beta = e(\alpha^2 - 1)(\max\{|a|, |b|\})^{-1}$, $\gamma \le 0$, e는 원추곡선의 이심률이다.

증명) 초점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)을 갖는 택시원추곡선의 방정식의 형태는

$$|x-x_1|+|y-y_1|+t_1(|x-x_2|+|y-y_2|)=\mp t_2 \tag{1}$$

이다. 여기서 $t_1 \in \{-1,1\}$, $t_2 \geq 0$이다.

유사하게 초점 (x_1, y_1), 준선 $l: ax+by+c=0$을 갖는 택시원추곡선의 방정식의 형태는

$$|x-x_1|+|y-y_1|+\gamma|ax+by+c|=0,\ \gamma<0. \tag{2}$$

이다. 따라서 (1)과 (2) 의 일차결합

$$a_1(|x-x_1|+|y-y_1|)+a_2(|x-x_2|+|y-y_2|)+a_3|ax+by+c|\mp a_4=0 \tag{3}$$

을 얻는다. 이 (3)식이 모든 택시원추곡선을 나타낸다. 식 (3)에서 $a_1 \neq 0$임은 분명하다. 따라서 $a_1=1$이라고 해도 무관하다. 그러면 방정식 (3)이 (1)을 포함할 필요충분조건은 $a_2 \in \{-1,1\}$, $a_3=0$, $a_4 \leq 0$이고, 따라서 $a_3=({a_2}^2-1)s$, $s \in R$이다. 방정식 (3)이 (2)를 포함할 필요충분조건은 $a_2=0$, $a_3<0$, $a_4=0$, $a_4=a_2\gamma$, $\gamma \leq 0$ 이다.

만약 $a_2=\alpha$라 하자. 방정식 (3)은

$$|x-x_1|+|y-y_1|+\alpha(|x-x_2|+|y-y_2|)+(\alpha^2-1)s|ax+by+c|\mp\alpha\gamma=0 \tag{4}$$

이다. 여기서 $\alpha \in \{-1,0,1\}$, $s>0$, $\gamma \leq 0$이다.

특히, $\alpha=0$인 경우, 방정식 (4)로부터

$$s=\frac{|x-x_1|+|y-y_1|}{|ax+by+c|}$$

이다. 원추곡선의 이심률 e를 다음과 같이 두자.

$$e=\max\{|a|,|b|\}\cdot\frac{|x-x_1|+|y-y_1|}{|ax+by+c|}.$$

그러면 $e=s\cdot\max\{|a|,|b|\}$이기 때문에 $s=e\cdot(\max\{|a|,|b|\})^{-1}$ 이고, 따라서 $(\alpha^2-1)s=e(\alpha^2-1)(\max\{|a|,|b|\})^{-1}=\beta$이다.

□

방정식 ㉠에 의해 나타나는 모든 Taxicab 원추곡선은 계수 α을 사용함으로써 두 가지로 분류할 수 있다. 방정식 ㉠에 의해 나타나는 택시원추곡선은 $\alpha=1$이

면 택시타원, $\alpha = -1$이면 택시쌍곡선이다. 그리고 $\alpha = 0$일 때 택시포물선이다. 이 경우 $0 < e < 1$이면 타원, $e = 1$이면 포물선, $e > 1$이면 쌍곡선이라고 부른다.

정리 2.15 (CC 원추곡선) 초점 $F = F_1 = (x_1, y_1)$, $F_2 = (x_2, y_2)$ 또는 초점 F_1과 준선 $l : ax + by + c = 0$을 갖는 CC 원추곡선은 다음과 같은 방정식의 형태를 따른다.

$$\begin{aligned}&\max\{|x-x_1|,|y-y_1|\} + s\min\{|x-x_1|,|y-y_1|\}\\&+\alpha(\max\{|x-x_2|,|y-y_2|\} + s\min\{|x-x_2|,|y-y_2|\}) + \mu|ax+by+c| \pm \alpha t = 0.\end{aligned} \tag{ㄴ}$$

여기서 $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$, $t \le 0$, e는 CC 원추곡선의 이심률이고,

$$\mu = \begin{cases} \dfrac{e(\alpha^2 - 1)}{|b|} & \text{if } |m| \le s, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{|b|}\dfrac{e(\alpha^2-1)}{|1+|m||} & \text{if } s \le |m| \le s+2, \\ \dfrac{e(\alpha^2 - 1)}{|a|} & \text{if } |m| \ge s+2 \end{cases}$$

이다.

증명) 초점 $F_1(x_1, y_1)$와 $F_2(x_2, y_2)$을 갖는 CC 원추곡선의 방정식의 형태는

$$\begin{aligned}&\max\{|x-x_1|,|y-y_1|\} + s\min\{|x-x_1|,|y-y_1|\}\\&+t_1(\max\{|x-x_2|,|y-y_2|\} + s\min\{|x-x_2|,|y-y_2|\}) = \pm t\end{aligned} \tag{5}$$

이다. 여기서 $t_1 \in \{-1, 1\}$, $t \ge 0$이다.

유사하게, 초점 $F_1(x_1, y_1)$, 준선 $l : ax + by + c = 0$을 갖는 CC 원추곡선의 방정식의 형태는

$$\max\{|x-x_1|,|y-y_1|\} + s\min\{|x-x_1|,|y-y_1|\} + t_2|ax+by+c| = 0 \tag{6}$$

이다. 여기서 $t_2 < 0$이다.

따라서 (5)과 (6)의 일차결합

$$\begin{aligned}&a_1\max\{|x-x_1|,|y-y_1|\} + s\min\{|x-x_1|,|y-y_1|\}\\&+a_2(\max\{|x-x_2|,|y-y_2|\} + s\min\{|x-x_2|,|y-y_2|\}) + a_3|ax+by+c| \pm a_4 = 0\end{aligned} \tag{7}$$

을 얻는다. 이 (7) 식이 모든 CC 원추곡선을 나타낸다.

식 (7)에서 $a_1 \neq 0$임은 분명하다. 따라서 $a_1 = 1$이라고 해도 무관하다. 그러면 방정

식 (7)이 (5)를 포함할 필요충분조건은 $a_2 \in \{-1, 1\}$, $a_3 = 0$, $a_4 \le 0$이고, 따라서 $a_3 = (a_2^2 - 1)a'$, $a' \in R$이다. 방정식 (7)이 (6)을 포함할 필요충분조건은 $a_2 = 0$, $a_3 < 0$, $a_4 = 0$이고, 따라서 $a_4 = a_2 t$, $a' > 0$, $t \le 0$이다.

$a_2 = \lambda$라 하자. 방정식 (7)는

$$\begin{aligned} &\max\{|x-x_1|, |y-y_1|\} + s\min\{|x-x_1|, |y-y_1|\} \\ &+ \alpha(\max\{|x-x_2|, |y-y_2|\} + s\min\{|x-x_2|, |y-y_2|\}) + (\alpha^2-1)a'|ax+by+c| \pm \alpha t = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

이다. 여기서 $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$, $a' > 0$, $t \le 0$이다.

특히 $\alpha = 0$인 경우 방정식 (8)으로부터

$$\frac{\max\{|x-x_1|, |y-y_1|\} + s\min\{|x-x_1|, |y-y_1|\}}{|ax+by+c|} = a'$$

이다. 원추곡선의 이심률 e를 다음과 같이 두자.

$$e = k \cdot \frac{\max\{|x-x_1|, |y-y_1|\} + q\min\{|x-x_1|, |y-y_1|\}}{|ax+by+c|}.$$

여기서,

$$k = \begin{cases} |b| & \text{if } |m| \le s, \\ \dfrac{|b||1+|m||}{\sqrt{2}} & \text{if } q \le |m| \le s+2, \\ |a| & \text{if } |m| \ge s+2. \end{cases}$$

그러면 $e = ka'$이기 때문에 $a' = ek^{-1}$이고, 따라서 $(\alpha^2-1)a' = e(\alpha^2-1)k^{-1} = \mu$이다.

□

방정식 ㉡에 의해 나타나는 모든 CC 원추곡선은 계수 α을 사용함으로써 두 가지로 분류할 수 있다. 방정식 에 의해 나타나는 CC 원추곡선은 $\alpha = 1$이면 CC 타원, $\alpha = -1$이면 CC 쌍곡선이다. 그리고 $\alpha = 0$일 때 CC 포물선이다. 이 경우 $0 < e < 1$이면 타원, $e = 1$이면 포물선, $e > 1$이면 쌍곡선이라고 부른다.

Ⅲ. 피타고라스정리

3.1 Taxicab 및 CC 피타고라스정리

정리 3.1 (Euclid 피타고라스정리) Euclid 평면에서 직각삼각형의 3개의 변을 $a_E = d_E(B, C)$, $b_E = d_E(A, C)$, $c_E = d_E(A, B)$라 하고 각 A가 직각일 때, ${a_E}^2 = {b_E}^2 + {c_E}^2$이다. 역도 성립한다.

보조정리 3.2 임의의 두 점 $X(x_1, y_1)$, $Y(x_2, y_2)$ $(x_1 \neq x_2)$를 지나는 직선의 기울기가 m이라 하면, 다음이 성립한다.

$$d_E(X, Y) = \begin{cases} \rho(m) d_T(X, Y) \\ \sigma(m) d_C(X, Y) \end{cases}.$$

여기서 $\rho(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+|x|}$, $\sigma(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\max\{1,|x|\} + s\min\{1,|x|\}}$, $s = \sqrt{2} - 1$.

만약 $x_1 = x_2$이면 $d_E(X, Y) = d_T(X, Y) = d_C(X, Y)$이다.

증명) $X(x_1, y_1)$, $Y(x_2, y_2)$ $(x_1 \neq x_2)$이면 $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$이다. $d_E(X, Y)$와 $d_T(X, Y)$의 정의에 m을 대입하여 계산하면

$$\begin{aligned} \frac{d_E(X, Y)}{d_T(X, Y)} &= \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \left(\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2}}{1 + \left|\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right|} \\ &= \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|} \\ &= \rho(m) \end{aligned}$$

이므로 $d_E(X, Y) = \rho(m) d_T(X, Y)$이다. 같은 방법으로 $d_E(X, Y) = \sigma(m) d_C(X, Y)$이다. □

보조정리 3.3 임의의 0이 아닌 m에 대하여, $m' = -\dfrac{1}{m}$이라 하자. 그러면

$$\rho(m) = \rho(m'),\ \sigma(m) = \sigma(m').$$

여기서, $\rho(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+|x|}$, $\sigma(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\max\{1,|x|\} + s\min\{1,|x|\}}$, $s = \sqrt{2}-1$이다.

증명)

$$\begin{aligned}
\rho\left(-\frac{1}{m}\right) &= \frac{\sqrt{1+\left(-\dfrac{1}{m}\right)^2}}{1+\left|-\dfrac{1}{m}\right|} \\
&= \frac{\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}}}{\dfrac{|m|+1}{|m|}} \\
&= \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+|m|} = \rho(m)
\end{aligned}$$

이므로 $\rho(m') = \rho(m)$이다. 같은 방법으로 $\sigma(m) = \sigma(m')$이다. □

보조정리 3.4 $\dfrac{b_E}{c_E} = \dfrac{b_T}{c_T} = \dfrac{b_C}{c_C}$.

증명)

만약 직각삼각형 ABC의 두 변 AB, AC가 좌표축과 평행하면, $b_E = b_T = b_C$이고 $c_E = c_T = c_E$이다. 따라서 비는 일정하다.

만약 직각삼각형 ABC의 변 중 하나가 좌표축에 평행하지 않을 때, AB의 기울

기를 m이라 하면 AB와 AC는 수직이므로 AC의 기울기는 $m' = -\frac{1}{m}$이다. 보조정리 3.2에 의하여 $b_E = \rho(m')b_T = \sigma(m')b_C$, $c_E = \rho(m)c_T = \sigma(m)c_C$이고, 보조정리 3.3에 의하여 정리가 성립한다. □

정리 3.5 (Taxicab 피타고라스정리) Taxicab 평면에서 직각삼각형 ABC의 3개의 변을 $a_T = d_T(B,C)$, $b_T = d_T(A,C)$, $c_T = d_T(A,B)$라 하고 m_1, m, m'을 각각 BC, AB, AC의 기울기라고 하자. 삼각형 ABC의 변들이 y축과 평행하지 않을 때, 각 A가 직각일 필요충분조건은

$$\rho^2(m_1){a_T}^2 = \rho^2(m)({b_T}^2 + {c_T}^2) = \rho^2(m')({b_T}^2 + {c_T}^2)$$

이다. 여기서 $\rho(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+|x|}$이다.

증명) 우선, $\angle A = 90^\circ$라고 가정하자. 그러면 정리 3.1에 의해 ${a_E}^2 = {b_E}^2 + {c_E}^2$이다. 보조정리 3.2에 의하여 $\rho^2(m_1){a_T}^2 = \rho^2(m){b_T}^2 + \rho^2(m'){c_T}^2$가 된다. 또한, $m' = -\frac{1}{m}$이므로 보조정리 3.3에 의해 $\rho^2(m) = \rho^2(m')$이다. 그러므로

$$\rho^2(m_1){a_T}^2 = \rho^2(m){b_T}^2 + \rho^2(m'){c_T}^2 = \rho^2(m){b_T}^2 + \rho^2(m){c_T}^2 = \rho^2(m)({b_T}^2 + {c_T}^2)$$

또는

$$\rho^2(m_1){a_T}^2 = \rho^2(m){b_T}^2 + \rho^2(m'){c_T}^2 = \rho^2(m'){b_T}^2 + \rho^2(m'){c_T}^2 = \rho^2(m')({b_T}^2 + {c_T}^2)$$

이다.

따라서 $\rho^2(m_1){a_T}^2 = \rho^2(m)({b_T}^2 + {c_T}^2) = \rho^2(m')({b_T}^2 + {c_T}^2)$가 되어 충분조건이 성립한다.

이제 필요조건을 보이자. $\rho^2(m_1){a_T}^2 = \rho^2(m)({b_T}^2 + {c_T}^2) = \rho^2(m')({b_T}^2 + {c_T}^2)$라고 가정하면, $\rho^2(m) = \rho^2(m')$이다.

$\rho^2(m_1){a_T}^2 = \rho^2(m){b_T}^2 + \rho^2(m){c_T}^2 = \rho^2(m'){b_T}^2 + \rho^2(m'){c_T}^2$이므로

$$\rho^2(m_1){a_T}^2 = \rho^2(m'){b_T}^2 + \rho^2(m){c_T}^2$$

이다. 따라서 보조정리 3.2에 의하여 $a_E{}^2 = b_E{}^2 + c_E{}^2$가 된다. 따라서 정리 3.1에 의하여 $\angle A = 90^\circ$ 이다. □

정리 3.6 (CC 피타고라스정리) CC 평면에서 직각삼각형의 3개의 변을 $a_C = d_C(B, C)$, $b_C = d_C(A, C)$, $c_C = d_C(A, B)$라 하고 m_1, m, m'을 각각 BC, AB, AC의 기울기라고 하자. 삼각형 ABC의 변들이 y축과 평행하지 않을 때, 각 A가 직각일 필요충분조건은

$$\sigma^2(m_1)a_C{}^2 = \sigma^2(m)(b_C{}^2 + c_C{}^2) = \sigma^2(m')(b_C{}^2 + c_C{}^2)$$

이다. 여기서 $\sigma(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\max\{1,|x|\} + s\min\{1,|x|\}}$, $s = \sqrt{2} - 1$이다.

증명) 우선, $\angle A = 90^\circ$ 라고 가정하자. 그러면 정리 3.1에 의해 $a_E{}^2 = b_E{}^2 + c_E{}^2$이다. 보조정리 3.2에 의하여 $\sigma^2(m_1)a_C{}^2 = \sigma^2(m)b_C{}^2 + \sigma^2(m')c_C{}^2$가 된다. 또한, $m' = -\dfrac{1}{m}$이므로 보조정리 3.3에 의해 $\sigma^2(m) = \sigma^2(m')$이다. 그러므로

$$\sigma^2(m_1)a_C{}^2 = \sigma^2(m)b_C{}^2 + \sigma^2(m')c_C{}^2 = \sigma^2(m)b_C{}^2 + \sigma^2(m)c_C{}^2 = \sigma^2(m)(b_C{}^2 + c_C{}^2)$$

또는

$$\sigma^2(m_1)a_C{}^2 = \sigma^2(m)b_C{}^2 + \sigma^2(m')c_C{}^2 = \sigma^2(m')b_C{}^2 + \sigma^2(m')c_C{}^2 = \sigma^2(m')(b_C{}^2 + c_C{}^2)$$

이다.

따라서 $\sigma^2(m_1)a_C{}^2 = \sigma^2(m)(b_C^2 + c_C{}^2) = \sigma^2(m')(b_C{}^2 + c_C{}^2)$가 되어 충분조건이 성립한다.

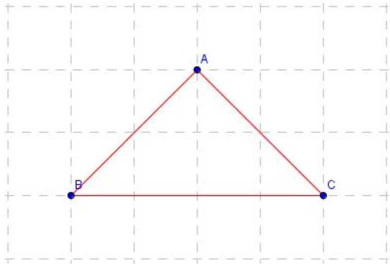
이제 필요조건을 보이자. $\sigma^2(m_1)a_C{}^2 = \sigma^2(m)(b_C{}^2 + c_C{}^2) = \sigma^2(m')(b_C{}^2 + c_C{}^2)$라고 가정하면, $\sigma^2(m) = \sigma^2(m')$이다.

$\sigma^2(m_1)a_C{}^2 = \sigma^2(m)b_C{}^2 + \sigma^2(m)c_C{}^2 = \sigma^2(m')b_C{}^2 + \sigma^2(m')c_C{}^2$이므로

$$\sigma^2(m_1)a_C{}^2 = \sigma^2(m')b_C{}^2 + \sigma^2(m)c_C{}^2$$

이다. 따라서 보조정리 3.2에 의하여 $a_E{}^2 = b_E{}^2 + c_E{}^2$가 된다. 따라서 정리 3.1에 의하여 $\angle A = 90^\circ$ 이다. □

예제 3.7 다음 직각삼각형의 3개의 변을 $a=d(B,C)$, $b=d(A,C)$, $c=d(A,B)$라 하자. 각 거리함수에 대하여 피타고라스가 성립하는지 알아보자.



풀이)

$a_E=4,\ b_E=2\sqrt{2},\ c_E=2\sqrt{2}$ 이므로, $a_E{}^2=b_E{}^2+c_E{}^2$이다.

$a_T=4,\ b_T=4,\ c_T=4,\ \rho(0)=1,\ \rho(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로, $\rho^2(0)a_T{}^2=\rho^2(1)(b_T{}^2+c_T{}^2)$이다.

$a_C=4,\ b_C=2\sqrt{2},\ c_C=2\sqrt{2}\ \ \sigma(0)=1,\ \sigma(1)=1$이므로, $\sigma^2(0)a_C{}^2=\sigma^2(1)(b_C{}^2+c_C{}^2)$이다.

참고 3.8

직각삼각형 ABC 에서 3개의 변을 $a=d(B,C)$, $b=d(A,C)$, $c=d(A,B)$라 하고, 각 A가 직각이라 하자. 그러면,

1) b 또는 c가 좌표축에 평행할 때, 정의에 의하여,

(Taxicab) $a_T=b_T+c_T$

(CC) $a_C=\max\{b_C,c_C\}+(\sqrt{2}-1)\min\{b_C,c_C\}$

2) a가 좌표축에 평행할 때,

(Taxicab) $a_T=\dfrac{b_T{}^2+c_T{}^2}{b_T+c_T}$. 만약 $b_T=c_T$ 이면 $a_T=b_T=c_T$.

(CC) $a_C=\dfrac{b_C{}^2+c_C{}^2}{\max\{b_C,c_C\}+(\sqrt{2}-1)\min\{b_C,c_C\}}$.

3.2 α-피타고라스정리

정의 3.9 $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$에 대하여, 임의의 두 점 $X(x_1, y_1)$, $Y(x_2, y_2)$의 α-거리 d_α는

$$d_\alpha(X, Y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \tau(\alpha)\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

이다. 여기서 $\tau(\alpha) = \sec\alpha - \tan\alpha$이다. α-거리가 정의된 평면을 α-평면이라 한다.

참고. α-거리에서 $\alpha = 0$이면 Taxicab 거리가 되고, $\alpha = \frac{\pi}{4}$이면 CC 거리가 된다.

정리 3.10 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$에 대하여, $\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} > 0$이면,

$$d_E(X, Y) < d_C(X, Y) < d_\alpha(X, Y) < d_T(X, Y).$$

$\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = 0$이면 A와 B는 수평선 혹은 수직선상에 놓여있고, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$에 대하여,

$$d_E(X, Y) = d_C(X, Y) = d_\alpha(X, Y) = d_T(X, Y).$$

증명) 정의에 의하여

$$\begin{aligned} d_E(X, Y) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \\ &= \sqrt{\max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}^2 + \min\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_T(X, Y) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}, \end{aligned}$$

$$d_C(X, Y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sqrt{2} - 1)\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\},$$

$d_\alpha(X, Y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \tau(\alpha)\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$이다.

ⅰ) $\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} > 0$ 일 때,

$d_E{}^2(X,Y)-d_C{}^2(X,Y)<0$ 이므로 $d_E(X,Y)<d_C(X,Y)$이다.

$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$에 대하여 $\sqrt{2}-1<\tau(\alpha)<1$이므로 $d_C(X,Y)<d_\alpha(X,Y)<d_T(X,Y)$이다.

따라서

$$d_E(X,Y)<d_C(X,Y)<d_\alpha(X,Y)<d_T(X,Y)$$

이다.

ii) $\min\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}=0$ 일 때,

$$\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}=d_E(X,Y)=d_C(X,Y)=d_\alpha(X,Y)=d_T(X,Y)$$

이다.

□

보조정리 3.11 임의의 두 점 $X(x_1,y_1)$, $Y(x_2,y_2)$ $(x_1\neq x_2)$를 지나는 직선의 기울기가 m이라 하면, 다음이 성립한다.

$$d_E(X,Y)=\mu(m)d_\alpha(X,Y).$$

여기서, $\mu(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\max\{1,|x|\}+\tau(\alpha)\min\{1,|x|\}}$이다. 만약 $x_1=x_2$이면 $d_E(X,Y)=d_\alpha(X,Y)$이다.

증명) $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ $(x_1\neq x_2)$이면 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$이다. $d_E(P,Q)$와 $d_\alpha(P,Q)$의 정의에 m을 대입하여 계산하면 정리가 성립한다. □

보조정리 3.12 임의의 0이 아닌 m에 대하여,

$$\mu(m)=\mu(-m)=\mu(m')=\mu(-m').$$

여기서 $\mu(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\max\{1,|x|\}+\tau(\alpha)\min\{1,|x|\}}$이고, $m'=-\dfrac{1}{m}$이다.

증명) 직접적인 계산에 의해 증명이 쉽게 된다. □

보조정리 3.13 $\frac{b_E}{c_E}=\frac{b_\alpha}{c_\alpha}$.

증명) 만약 직각삼각형 ABC의 두 변 AB, AC가 좌표축과 평행하면, $b_E=b_\alpha$이고 $c_E=c_\alpha$이다. 따라서 비는 일정하다.
만약 직각삼각형 ABC의 변 중 하나가 좌표축에 평행하지 않을 때, AB와 AC는 수직이므로 다른 변 또한 좌표축에 평행하지 않는다. 만약 AB의 기울기를 m이라 하면 AC의 기울기는 $m'=-\frac{1}{m}$이다. 보조정리 3.11에 의하여 $b_E=\mu(m')b_\alpha$, $c_E=\mu(m)c_\alpha$이고, 보조정리 3.12에 의하여 정리가 성립한다. □

정리 3.14 (α-피타고라스정리) α-평면에서 직각삼각형의 3개의 변을 $a_\alpha=d_\alpha(B,C)$, $b_\alpha=d_\alpha(A,C)$, $c_\alpha=d_\alpha(A,B)$라 하고 m_1, m, m'을 각각 BC, AB, AC의 기울기라고 하자. 삼각형 ABC의 변들이 y축과 평행하지 않을 때, 각 A가 직각일 필요충분조건은

$$\mu^2(m_1){a_\alpha}^2=\mu^2(m)({b_\alpha}^2+{c_\alpha}^2)=\mu^2(m')({b_\alpha}^2+{c_\alpha}^2)$$

이다. 여기서 $\mu(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\max\{1,|x|\}+\tau(\alpha)\min\{1,|x|\}}$이다.

증명)
우선, $\angle A=90^\circ$라고 가정하자. 그러면 정리 3.1에 의해 ${a_E}^2={b_E}^2+{c_E}^2$이다. 보조정리 3.11에 의하여 $\mu^2(m_1){a_\alpha}^2=\mu^2(m){b_\alpha}^2+\mu^2(m'){c_\alpha}^2$가 된다. 또한, $m'=-\frac{1}{m}$이므로 보조정리 3.12에 의해 $\mu^2(m)=\mu^2(m')$이다. 그러므로

$$\mu^2(m_1){a_\alpha}^2=\mu^2(m){b_\alpha}^2+\mu^2(m'){c_\alpha}^2=\mu^2(m){b_\alpha}^2+\mu^2(m){c_\alpha}^2=\mu^2(m)({b_\alpha}^2+{c_\alpha}^2)$$

또는

$$\mu^2(m_1){a_\alpha}^2=\mu^2(m){b_\alpha}^2+\mu^2(m'){c_\alpha}^2=\mu^2(m'){b_\alpha}^2+\mu^2(m'){c_\alpha}^2=\mu^2(m')({b_\alpha}^2+{c_\alpha}^2)$$

이다. 따라서 $\mu^2(m_1){a_\alpha}^2=\mu^2(m)({b_\alpha}^2+{c_\alpha}^2)=\mu^2(m')({b_\alpha}^2+{c_\alpha}^2)$가 되어 충분조건이 성립한다.

이제 필요조건을 보이자. $\mu^2(m_1){a_\alpha}^2=\mu^2(m)({b_\alpha}^2+{c_\alpha}^2)=\mu^2(m')({b_\alpha}^2+{c_\alpha}^2)$라고 가정하면, $\mu^2(m)=\mu^2(m')$이다.

$\mu^2(m_1){a_\alpha}^2=\mu^2(m){b_\alpha}^2+\mu^2(m){c_\alpha}^2=\mu^2(m'){b_\alpha}^2+\mu^2(m'){c_\alpha}^2$이므로

$$\sigma^2(m_1){a_C}^2=\sigma^2(m'){b_C}^2+\sigma^2(m){c_C}^2$$

이다.

따라서 보조정리 3.11에 의하여 ${a_E}^2={b_E}^2+{c_E}^2$가 된다. 따라서 정리 3.1에 의하여 $\angle A=90^\circ$ 이다. □

참고 3.15

직각삼각형 ABC 에서 3개의 변을 $a_\alpha=d_\alpha(B,C)$, $b_\alpha=d_\alpha(A,C)$, $c_\alpha=d_\alpha(A,B)$라 하자.

1) b 또는 c가 좌표축에 평행할 때, 정의에 의하여,

$$a_\alpha=\max\{b_\alpha,c_\alpha\}+(\sec\alpha-\tan\alpha)\min\{b_\alpha,c_\alpha\}.$$

2) a가 좌표축에 평행할 때,

$$(\max\{b_\alpha,c_\alpha\}+(\sec\alpha-\tan\alpha)\min\{b_\alpha,c_\alpha\})a_\alpha={b_\alpha}^2+{c_\alpha}^2.$$

참고문헌

[1] 전기정, 거리함수와 기본도형에 관한 연구 : CHINESE CHECKER 거리함수를 중심으로, 성균관대학교 교육대학원 석사학위논문, 2009.

[2] 고선미, 택시기하학에서의 택시원추곡선의 특성, 제주대학교 교육대학원 석사학위논문, 2006.

[3] M. Turan, M. Özcan, Two-foci chinese checker ellipses, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 16, No. 1 (2004), 119-127.

[4] M. Turan, M. Özcan, Two-foci chinese checker hyperbolas, International Journal of Applied Mathematics, 16, No. 4 (2004), 509-520.

[5] M. Turan, M. Özcan, General equation for chinese checker conics and focus-directrix chinese checker conics, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 30, No. 3 (2006), 393-401.

[6] H. Baris, R. kaya, Taxicab Versions of the Pythagorean Theorem, Pi Mu Epsilon Journal, 12, No. 9 (2008), 535-539.

[7] H. Baris, R. kaya, Chinese Checker Versions of the Pythagorean Theorem, Int. J. Contemp. Math. Siences, 4, No. 2 (2009), 61-69.

[8] S. Tian, Alpha distance - A Generalization of Chinese Checker distance and Taxicab distance, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 17 (1) (2005), 35-40.

[9] H. Baris, Ö. Gelisgen, R. kaya, Pythagorean Theorems in the alpha plane, Mathematical Communications, 14, No. 2 (2009), 211-221.

<Abstract>

The Pythagorean Theorem in Non-Euclid plane

In this thesis, we study the Pythagorean theorem in non-Euclid plane. In particular, we study the Taxicab versions of the Pythagorean theorem and Chinese checker versions of the Pythagorean theorem. Taxicab geometry is the geometry by the taxicab distance function, which the distance between two points is measured by moving distance of taxi and so it is non-Euclidean geometry. In terms of Chinese checker geometry, it has originated from the movement of Chinese checker's pieces. In other words, the length of route which consist of line segments on parallel to coordinate axis and diagonal lines segments(45° or 135°) becomes the metric between two points. Also, we study the Pythagorean theorem in alpha plane.

감사의 글

석사 과정을 시작하고 얼마 지나지 않아 감사의 글을 쓰는 날만 기다렸고, 그 순간이 오면 10장이라도 쓸 자신이 있었습니다. 연말 시상식 장면을 볼 때면 '왜 저렇게 말을 잘 하지 못할까?', '감사하다는 표현이 저렇게 힘들까?' 라는 생각을 종종 했었는데 막상 제가 감사의 글을 쓰려하니 공부하는 것보다 힘든 것이 이 마지막 페이지임을 새삼 느끼게 됩니다.

2012년은 정말 힘든 한 해였습니다. 공부하랴, 일하랴, 열심히 한다고 했는데 생각지 못하게 찾아온 림프절염. 아파서 모든 것을 포기하고 싶을 때도 많았습니다. 아프다, 힘들다, 이런 저런 이유로 포기하고 싶을 때마다 포기하지 못하게, 힘내서 끝까지 달릴 수 있게 옆에서 도와주시고 버팀목이 되어주신 정승달 교수님께 진심으로 감사드립니다. 공부하라고 잔소리하고 싶어도, 아픈 몸이 걱정되어 건강부터 챙기라 하셨을 때 너무 죄송했습니다. 교수님의 모든 말씀이 제게는 달달한 사랑과 관심으로 힘이 되었습니다.

대학시절부터 수학 공부에 흥미를 갖게 해주시고 도움을 많이 주신 양영오 · 송석준 · 방은숙 · 윤용식 · 유상욱 · 진현성 교수님, 이지순 · 강경태 · 박외숙 선생님께도 감사의 마음을 전합니다. 대학원에 들어와서 동기 한명 없이 혼자 공부하느라 외로웠던 제게 공부와 대학원 생활에 큰 도움을 준 민주 · 금란 · 연정 · 혜정 선생님, 희란이언니, 그리고 미분기하학을 공부하며 알게 된 소중한 미기팀 선생님들께도 이 마음을 전합니다.

누구보다도 걱정과 이해로 제게 버팀목이 되어주신 부모님과 오빠, 사랑하고 감사합니다. 힘들 때, 아플 때, 울고 싶을 때, 언제나 옆에서 달래주던 남자친구님, 고맙습니다. 저를 뒤돌아볼 수 있도록 도와준 지나, 명해, 민선이언니, 문관이오빠, 선아, 명효오빠, 나리, 행클 언니오빠들, 생활과학교실 선생님들, 그 외에 많은 분들께도 이 글을 빌어 고맙다는 말을 전합니다.

2012년 12월