석 사 학 위 논 문

초등학교 학생들의 분수 스키마 분석

A Analysis of Children's Fractional Scheme

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

홍 정 주

2011년 8월

석 사 학 위 논 문

초등학교 학생들의 분수 스키마 분석

A Analysis of Children's Fractional Scheme

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

홍 정 주

2011년 8월

초등학교 학생들의 분수 스키마 분석

A Analysis of Children's Fractional Scheme

지도교수 최 근 배

이 논문을 교육학 석사학위 논문으로 제출함

제주대학교 교육대학원

초등수학교육전공

홍 정 주

2011년 7월

홍정주의

교육학 석사학위 논문을 인준함

심사위원장 　　　　　　　　　　 인

심사위원 　　　　　　　　　　 인

심사위원 　　　　　　　　　　 인

제주대학교 교육대학원

2011년 　8월

목 차

표 목 차

그 림 목 차

국 문 초 록

학생들의 분수 스키마 분석

홍 정 주

제주대학교 교육대학원 초등수학교육전공

지도교수 최 근 배

분수는 초등학교에서 학생들이 가장 어려워하는 개념 중 하나이다. 분수 스키마는 학생들이 기존에 가지고 있던 정수 스키마로는 해결할 수 없으며 개념 자체가 복합적인 개념을 포함하기 때문이다. 따라서 학생들의 분수를 조작하는 방식인 다양한 분수 스키마를 파악하고 분석하기 위한 연구의 필요성이 제기되었다.

이에 본 연구에서는 Steffe와 Olive가 그들의 교수실험에 의하여 제시한 5가지의 가설을 양적 분석을 통하여 확인해 보았다. 분석 결과 가설 가는 선행 연구와는 다른 결과가 나왔으며 가설 나, 다, 라, 마는 선행 연구와 같은 결과가 나왔다.

따라서, 학년에 따른 학생들의 분수 스키마 발달 경향과 분수 스키마에 따른 조작 특성을 살펴보고 분수 스키마 발달 순서를 파악하였다. 또한 이렇게 얻어진 결과를 통해 학습에 어떻게 적용하면 좋을지 살펴보았다.

이러한 연구는 학생들의 분수 학습에 적절한 과시 제시 방법, 후속 스키마 발달을 위한 적절한 활동 구현 등 이해 중심의 분수 학습 구현에 도움을 줄 수 있을 것이다.

주요어 : 부분-전체 분수 스키마, 부분 단위 분수 스키마, 부분 분수 스키마, 역 부분 분수 스키마, 반복 분수 스키마, 분리 스키마

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

분수는 초등학교 수학에서 학생들이 가장 이해하기 어렵고 또한 배우기 힘든 개념 중 하나이다. 실제로, 분수 개념 자체가 여러 가지의 복합적인 의미를 가지고 있어서 이해하기 어려울 뿐만 아니라 학생들이 이러한 어려운 개념을 진정으로 이해할 수 있는 방식의 학습 기회를 갖지 못하고 있다. (정은실, 2006) 그러한 이유로 초등학교 고학년으로 올라갈수록 학생들은 분수 단원에서 오류를 많이 범하고 난이도가 커서 저항감을 갖는다. 앞에서 언급했듯이 분수는 초등학교 수학에서 학생들이 경험하게 되는 가장 복잡하고 중요한 수학적 개념 중의 하나로 이러한 영역에 많은 시간과 노력을 분수학습에 투여하고 있지만, 그 성과는 기대에 못 미치고 있다. 그 원인은 여러 가지가 있겠지만 분수 개념이 여러 가지 의미를 지닐 뿐만 아니라, 학생들이 이전에 학습한 자연수와 달리 표기법, 크기 비교, 연산 방법이 훨씬 복잡하다는데 있으며, 또한 학교 수업 중 상당 부분이 근본적 이해보다는 절차적 기능과 계산적인 측면을 강조하는데도 그 원인이 있다. (김정식, 2005)

학생들의 분수 스키마 구성에 관하여 학자들 간의 여러 가지 논의가 있으나 크게 두 가지 관점에서 살펴보자면 분수 스키마를 수세기(counting) 스키마의 재조직으로 보는 가설과 수세기(counting) 스키마가 오히려 분수 스키마 형성에 간섭이 된다는 가설로 나누어 살펴볼 수 있다.

분수를 수세기(counting) 스키마로부터 재조직된 스키마로 보는 Steffe(2002)는 스키마의 구성에 작용하는 수세기 스키마를 'ENS(the Explicitly nested Number Sequence)' 스키마라고 부른다. 내면화된 수세기 스키마인 ENS 스키마는 단위 항목을 반복하는 조작과 전체에서 일부를 꺼내는 조작으로 이루어진다. Steffe와 Olive는 분수를 구성한다는 것은 ENS에서 발전된 'FCNS(Fractional Connected Number석 Sequence)'스키마를 구성하는 것이라고

생각하였다. FCNS는 분수 단위로 이루어진 CNS로 예를 들면 $\frac{1}{8}$을 단위로 $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{8}$는 $\frac{1}{8}$이 여러 개 모여 만들어 지는 하나의 전체로서 '합성단위'이다. Steffe는 학생의 분수 스키마 구성이 ENS에서 출발하여 다양한 조절과 경로를 거쳐 FCNS에 이르게 된다고 가정하였다.

이와는 반대로 수세기 스키마가 오히려 분수 스키마의 형성에 방해가 된다고 주장하는 가설이 있다. 분수를 학습할 때, 학생들은 앞에서 언급한 분수개념의 다양한 의미를 쉽게 잊어버리고 대신 단지 분수를 두 자연수의 독립된 결합(분자와 분모를 분리하여 생각)으로 인식하는 경향이 있다. 이러한 경향은 두 분수의 덧셈에서 분자와 분모를 끼리끼리 더하여 계산하는 오류를 초래할 수 있다. 결국, 이러한 점은 학생들의 인지구조가 이전에 배운 자연수 연산의 스키마에서 벗어나지 못함을 나타내고 있다.

이렇게 학생들의 분수 스키마에 대한 논의는 끊임없이 이어지고 있다. 하지만 두 가설 모두 그 기저에 깔고 있는 내용은 학생들의 의미 있는 분수학습을 위해서는 절차적 학습이 아닌 개념적 학습이 이루어져야 한다는 것이다. 따라서 분수 학습에서 학생들이 가지고 있는 스키마를 이해하고 그에 맞게 분수를 가르칠 필요가 있다.

따라서 본 연구에서는 학교 현장에서 학습하고 있는 학생들에게 분수 스키마 검사지를 투입하여 양적 분석을 함으로써 Steffe와 Olive가 다양한 교수 실험 연구를 통해 제시한 가설들을 확인하는 데 있다. 그리고 더 나아가 분수 스키마의 특성 및 발달단계를 파악하여 학생들에게 효과적인 분수 지도 방법과 분수 스키마 개발을 위한 기초 자료를 제공하는 데 그 목적이 있다.

2. 연구 문제

Steffe와 Olive가 제시한 분수 스키마에 관한 가설을 양적 분석을 통해 확인한다.

가. 부분-전체 분수 스키마에서 단위분수를 포함한 문제를 해결하는 것과 단위분수가 아닌 진분수를 포함한 문제를 해결하는 것 사이에는 아무런 관련이 없다.

나. 부분 분수 스키마에서 단위분수를 포함한 문제를 해결하는 것과 단위분수가 아닌 진분수를 포함한 문제를 해결하는 것 사이에는 관련성이 있다. 즉, 단위분수를 포함한 문제를 해결할 수 있어야만 단위분수가 아닌 진분수를 포함한 문제를 해결할 수 있다.

다. 학생들이 역 부분 분수 스키마와 관련된 문제를 해결하기 위해서는 분리 작업(splitting operationg)을 할 수 있어야 한다.

라. 학생들이 반복 분수 스키마와 관련된 문제를 해결하기 위해서는 분리 작업(splitting operationg)을 할 수 있어야 한다.

마. 학생들은 부분 분수 스키마와 분리 스키마(splitting)가 독립적으로 발달한다.

3. 연구 방법 및 절차

가. 연구 대상

본 연구의 대상은 제주도 제주시에 소재하고 있는 D초등학교의 2~6학년 각 1개 반 학생들로 선정하였다. 이 학교는 한 학년이 5~6개 반으로 이루어져 있으며 아파트 단지 내에 위치하고 있어 학생들의 학력 수준과 가정의 사회, 경제적인 수준이 중상위권에 속한다.

나. 연구 기간 : 2010년 3월 ~ 2011년 3월

다. 연구 절차

1) 선행 연구 탐독 및 내용 파악

선행 연구들을 탐독하여 주요 내용 및 개념, 용어들을 파악하고 현행 연구 실정에 맞게 연구계획을 수립한다.

2) 학생들의 분수 스키마를 파악을 위한 검사지 제작

선행 연구에서 제시된 분수 스키마 가설들을 확인하기 위하여 학생들의 분수 스키마를 파악할 수 있도록 검사지를 제작한다.

3) 분수 스키마 검사지 현장 투입

제작한 분수 스키마 검사지를 현장에 투입하여 결과를 얻는다.

4) 분수 스키마 검사지 결과 분석· 정리

학생들의 분수 스키마 검사지를 채점하고 통계 프로그램을 통해 결과를 분석한다.

4. 연구의 제한점

가. 학생들의 분수 스키마를 분석하기 위해 본 연구에서는 분수 스키마 검사지를 사용하였다. 학생들의 작성한 검사지에 표시된 답, 나눈 그림, 색칠한 것, 계산한 것 등을 통해 그들의 스키마를 파악하였으나 학생들의 검사지 작성 능력

의 차이 혹은 머리로는 이해하고 있으나 표현력이 약한 경우 등 다양한 요인으로 인하여 학생들의 스키마가 온전히 검사지를 통해 표현되는 것은 아니므로 검사지를 통한 스키마 확인에는 한계가 있다.

나. 본 연구문제 해결을 위한 연구대상은 제주특별자치도 제주시 D초등학교 2~6학년 각 1개 반으로 표본의 크기 및 선정이 제한되어 있으므로 사회적, 경제적, 문화적 환경이 다른 학년 학생들에게는 본 연구의 결과가 다르게 나타날 수도 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 분수 조작

분수와 관련된 중요한 조작활동은 크게 4가지로 요약할 수 있다.(Norton&McCloskey, 2008).

첫째, 단위화하기(utilizing)는 사물이나 사물들의 모임을 단위 또는 전체로 다루는 것을 의미한다.

둘째, 분할하기(partitioning)는 단위나 전체를 합동인 부분으로 조각내는 활동을 의미한다.

셋째, 재편하기(diembedding)는 전체를 본래대로 유지하면서 머릿속 상황으로 분할된 전체에서 몇 개의 부분을 복재하여 꺼내는 조작을 의미한다. 예를 들어, 학생들은 전체를 4부분으로 등분할하고 4부분 중에서 3개를 재편함으로써 $\frac{3}{4}$을 만들 수 있다.

끝으로, 반복하기(iterating)는 부분과 동일한 크기의 복재본을 만들기 위하여 되풀이하기(repeating)의 조작을 의미한다. (최근배, 2010)

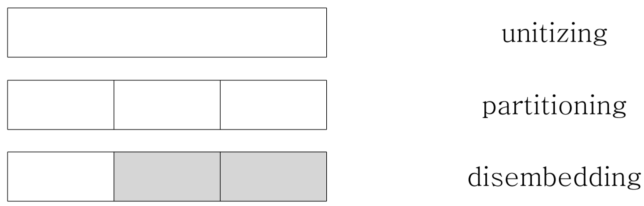
2. 분수 스키마

가. 분리 스키마

분리 스키마(splitting scheme)는 분수와 관련된 모든 조작활동의 가장 근본적인 스키마이다. Steffe(2003)에 따르면 분리 스키마는 분할(partitioning)과 반복(iterating)의 동시적 개념이다. 두 개념은 상반된 것으로 여겨질 수 있으나 분리 스키마 문제 해결을 위해서는 전체를 분할하고 그 중 일부분을 꺼내 그것을 다시 반복하여 분할 전 전체를 만들 수 있어야 하며 두 조작을 동시에 수행할 수 있을 때 분리 스키마가 구성되었다고 본다.

나. 부분-전체 스키마

부분-전체 분수 스키마(part-whole fractional scheme)는 세 가지 조작활동으로 설명할 수 있다. 먼저 전체를 인식하는 것(단위화하기, unitizing), 두 번째로 전체를 똑같이 나누는 것, 마지막으로 등분할 된 전체에서 일부를 빼는 것(disembbeding)이다. 예를 들어 $\frac{2}{3}$를 만들기 위해서 주어진 전체를 3부분으로 등분할 하고 그 들 중 2개를 빼는 활동이 부분-전체 스키마에 해당한다.



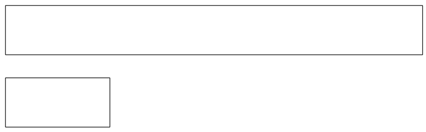
[그림 Ⅱ-1] 부분-전체 스키마 (최근배. 2010)

분수를 지도할 때 기호화하기(분자, 분모), 읽기(… 중의 …)를 신중히 다루지 않으면 등분할 조작활동을 간과하기 쉽다. 예를 들어, $\frac{2}{3}$를 똑같이 나눈 3조각 중 2조각의 의미보다 단순히 '3조각 중의 2조각으로 인식할 수 있다.

다. 부분 단위분수 스키마

부분 단위분수 스키마(partitive unit fractional scheme)는 단위분수 부분과 분할되지 않은 전체가 주어졌을 때 단위분수를 반복하여 전체를 구성함으로써 전체에 대한 단위분수의 상대적 크기를 알아내는 것이다.

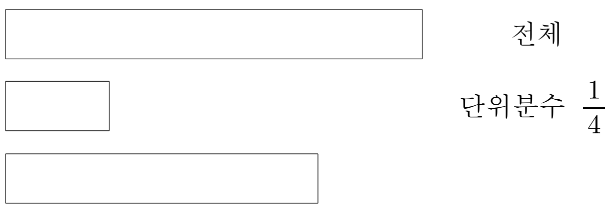
부분 단위분수 스키마의 근본적 목적은 단위분수의 반복을 통해서 전체에 대한 부분의 상대적 크기를 결정하는 것이다. 또한 부분 단위분수 스키마는 양의 측정 관점에서 분수를 인식할 수 있는 조작 활동과 관계된다.



[그림 Ⅱ-2] 부분 단위분수 스키마의 예: 짧은 막대기의 크기는 $\frac{1}{4}$

라. 부분 분수 스키마

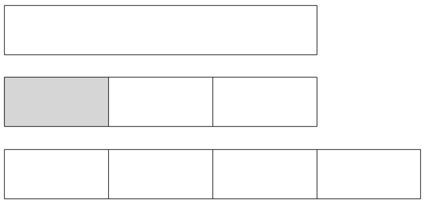
부분 분수 스키마(partitive fractional scheme)는 부분 단위분수 스키마의 일반화된 형태이다. 부분 분수 스키마는 단위분수와 전체사이의 관계를 유지하고 있는 동안, 반복을 통하여 단위분수로부터 합성분수를 만드는 것이다. [그림 Ⅱ-3]과 같이 부분 단위분수 스키마를 통해 단위분수의 크기를 $\frac{1}{4}$로 정하였다면 세 번째 막대의 크기는 단위분수의 3번 반복으로서 $\frac{3}{4}$이라고 할 수 있다.



[그림 Ⅱ-3] 부분 분수 스키마의 예: 짧은 막대기의 크기는 $\frac{3}{4}$

마. 역 부분 분수 스키마

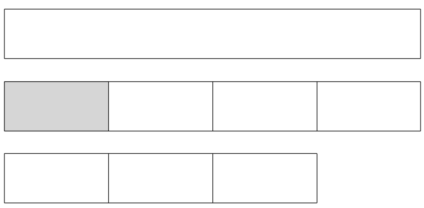
역 부분 분수 스키마(reversible partitive fractional scheme)는 부분 분수로부터 전체를 구성하기 위해서 역으로 부분 분수 스키마를 사용하는 것이다. 이 경우 [그림 Ⅱ-4]와 같은 과정이 필요하다. 주어진 부분 분수는 분할을 통하여 단위분수를 만들어내고 단위분수의 반복을 통해 전체를 구성할 수 있는 것이다.



[그림 Ⅱ-4] 역 부분 분수 스키마의 예

바. 반복 분수 스키마

부분 분수를 통해 전체를 구성할 때 역 부분 분수 스키마를 사용한다. 그러나 만약 가분수로부터 전체를 구성하고자 한다면 역 부분 분수 스키마를 사용할 수 없다. 가분수는 전체를 넘어서기 때문이다. 이럴 때 반복 분수 스키마(iterative fractional scheme)가 사용된다. [그림 Ⅱ-5]와 같이 주어진 막대($\frac{4}{3}$)를 4부분으로 나누고 그 부분들 중 하나($\frac{1}{3}$)를 선택하여 3번 반복함으로써 전체($\frac{3}{3}$)를 만들 수 있다. 어진 부분 분수는 분할을 통하여 단위분수를 만들어내고 단위분수의 반복을 통해 전체를 구성할 수 있는 것이다.



[그림 Ⅱ-5] 반복 분수 스키마의 예

3. 분수 개념에 관한 여러 가지 가설

가. 재조직 가설

급진적 구성주의자들에 의하면, 수학 학습 곧 수학적 지식의 구성은 반성과 추상화에 의한 개념구조, 즉 조작적인 수학적 스키마의 변화를 뜻한다. (Steffe&Tzur, 1994) 따라서 급진적 구상주의자들은 학생 개개인이 현재 가지고 있는 개념 구조를 이해하는 일(Glasersfeld, 1995b; Steffe, 1991; Davis et al., 1990)과 동요와 반성을 통해 이를 변화시키는 것을 강조한다(Confrey, 1995; Wood, 1995; Wheatley, 1992; Noddings, 1990; Steffe, 1983).

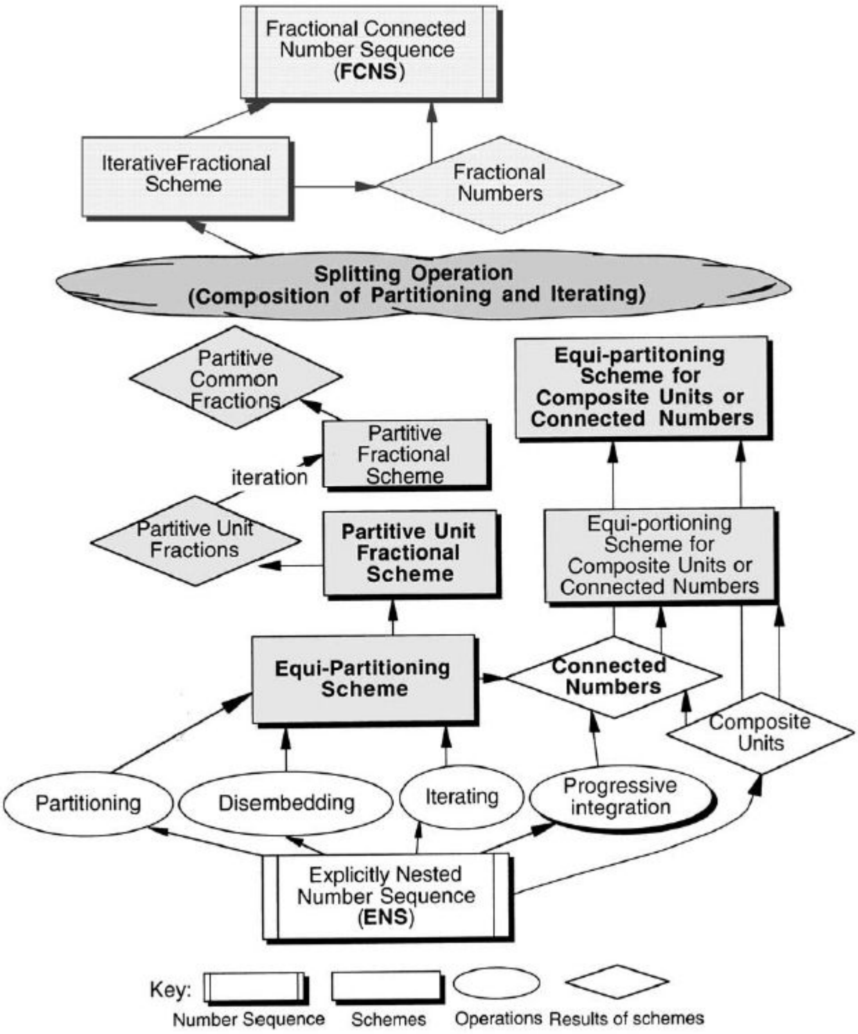
Steffe는 분수를 세기(counting) 스키마로부터 재조직된 스키마로 보고 있다. (Steffe, 2002) 그는 분수 스키마의 구성에 작용하는 세기 스키마를 'ENS(the Explicitly Number Sequence)' 스키마라고 부른다.[1] 내면화된 세기 스키마인 ENS 스키마는 단위 항목을 반복하는 조작과 전체에서 일부를 꺼내는 조작으로 이루어진다. Steffe와 Olive는 분수를 구성한다는 것은 ENS에서 발전된 'FCNS(Fractional Connected Number Sequence)'스키마를 구성하는 것이라고 생각하였다. FCNS는 분수 단위로 이루어진 CNS[2]로, 예를 들면 $\frac{1}{8}$을 단위로 $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{8}$는 $\frac{1}{8}$이 여러 개 모여 만들어지는 하나의 전체로서 '합성단위'이다. Steffe는 학생의 분수 스키마 구성이 ENS에서 출발하여 <그림 >와 같은 경로를 거쳐 FCNS에 이르게 된다고 가정하였다.[3]

---

1) ENS 이 다이어그램에 있는 스키마는 전체를 한 단위이면서 동시에 단위 여러 개의 모임이라고 보는 것이다. 예를 들어, "19페니를 가지고 있던 아이에게 한 줌의 동전이 더 주어졌고, 이를 세었더니 27페니였다. 더해진 돈은 얼마인가?"를 묻는 문제가 있다고 하자. 이 문제에 대답하기 위해서는 27에서 19를 꺼내고, 이를 '합성단위(a composite unit)'로 보아야 한다. 즉, 27은 하나의 전체이면서 동시에 단위가 27개 모여 있는 것으로 간주되어야 한다. 이것이 바로 Steffe가 설명하는 ENS이다.

2) CNS(Connected Number Sequence)는 연속적인 작은 단위가 여러 개 모여 있으면서 동시에 하나의 전체가 되는 것을 나타내는 스테피의 용어로, 분수 스키마 구성에 있어 매우 중요하게 취급되는 개념이다.

3) 스테피의 연구물에서, 연구자들이 처음부터 <그림 >와 같은 경로를 세우고 이에 따라 수업을 전개한 것은 아니다. 또, 모든 아이들이 이 경로를 거친다고 생각하였다고 보기도 어렵다. 그러나 가설을 세우고 아이들과 수업하며 이 가설을 확인하였다고 하고 있으



[그림 Ⅱ-6] 분수 스키마의 구성 경로(Steffe & Olive, 2002)[4]

므로(Olive & Steffe, 2002), 스테피를 비롯한 연구자들이 이 경로를 정확한 형태는 아니더라도 마음에 두고 있으면서 수업을 진행하였음은 분명하다.

4) 관례상 이 다이어그램에 있는 각 용어를 국문으로 번역하여야겠지만, 대부분의 용어가 올리브와 스테피가 창안한 것으로, 이를 국문으로 옮기기 매우 까다롭게 되어 있다. 그렇기 때문에 국문으로 옮겼을 때 오히려 의미 전달이 어려워 질 수 있다. 이런 이유로 이 다이어그램은 번역하지 않고 원문 그대로 제시하였다.

나. 간섭 가설

수세기 스키마가 분수 스키마의 바탕이 된다는 재조직 가설과는 반대로 오히려 정수 지식이 분수 학습에 방해가 된다는 믿음도 널리 인정된 가설 중 하나이다. 예를 들어, Post 외 여러명의 학자들은(1993) 다음과 같이 말했다.

학생들은 자주 분수나 소수를 학습하는 동안 정수 아이디어로 인하여 어려움을 겪는다. $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{2}$ 같은 분자가 같은 분수를 학습할 때, 조각의 크기에 대한 충분한 학습에도 불구하고 숫자가 클수록 큰 수가 된다는 학생들의 정수 아이디어는 계속하여 분수의 새로운 개념을 발달시키는 데 간섭이 되었다.

또한 Nick Pa의 연구 또한 정수 스키마로 인한 분수 스키마 형성의 간섭을 보여준다. 9명의 10~11세 아동들을 인터뷰하면서 Nick Pa는 그들의 10개의 물건들 중 $\frac{1}{5}$을 알지 못함을 발견하였다. 왜냐하면 그들에게 $\frac{1}{5}$은 5개의 묶음 중 하나를 언급한 것이기 때문이다. 학생들은 10개의 묶음 중 2개와 5개의 묶음 중 하나를 분리하여 생각한다. 이 학생들은 그들의 수 개념을 이용하여 분수 언어를 사용했으며 이는 그들의 분수 스키마 형성에 방해가 되었음을 보여준다.

다음과 같은 상황도 정수 스키마가 분수 스키마를 간섭한 경우이다.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}$$

이 학생은 말하자면 나름대로 분수의 덧셈에 대하여 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 더하여 계산했던 경험을 가지고 있을 것이다. 그리고 지금까지 자신의 경험 세계 속에서는 이러한 계산 방법에 대하여 아무런 모순을 느끼지 못했던 것이다. 이렇게 자연수의 덧셈 알고리즘에서 벗어나지 못하고 분수 개념에 자연수의 덧셈 방법을 막연히 적용하였다.

이러한 경우 교사는 학생들이 분모가 서로 다른 분수의 덧셈인 경우 통분하여 분수의 덧셈을 하는 분수 덧셈의 알고리즘을 지도해야 한다. 즉,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$

라고 하는 수학적 개념을 학생들이 학습할 수 있는 환경을 만들어야 한다. 이러

한 경우 앞서 가지고 있던 정수 스키마에 대한 '신념의 파괴'가 전제되어야 함은 분명하다.

Ⅲ. 연구의 실제

학생들의 분수 스키마에 관하여 Steffe와 Olive가 제시한 가설을 확인하기 위하여 2학년부터 6학년까지 학생을 대상으로 학생들에게 분수 스키마를 측정하기 위한 검사지를 제작·투입하였다. 학생들의 분수 스키마를 분석하여 결과를 학습 현장에 적용하는 일은 분수 학습 지도의 방향을 제시하고 학생들의 분수 개념 확립에 도움을 주는 연구가 될 것이다.

1. 분수 스키마 검사 방법

가. 분수 스키마 검사지 제작

검사지는 9개의 문항이 포함되어 있으며 문항 구성은 <표 Ⅲ-1>과 같다. 9개의 문항 중 첫 번째 문항은 이번 연구와는 관련이 없는 문항으로 가장 기본적인 분수의 개념을 묻는 문항이다. 그 외에 8개의 문항은 분리 스키마 측정을 위한 문항 2개, 부분-전체 분수 스키마 문항 2개, 부분 단위 분수 스키마 문항 1개, 부분 분수 스키마 문항 1개, 역 부분 분수 스키마 문항 1개, 반복 분수 스키마 문항 1개로 구성되어 있다. 이 중 부분-전체 분수 스키마 문항은 단위 분수가 포함된 상황과 단위 분수가 아닌 진분수가 포함된 상황 각 각 1문항씩으로 구성되었다. 각 문항은 특정 스키마의 존재 여부를 나타낼 수 있도록 만들어졌다. 즉, 각 문제에 대한 학생들의 응답을 통해 우리는 학생들이 어떠한 스키마를 가지고 있는지 확인할 수 있다.

<표 Ⅲ-1> 분수 스키마 검사지 문항 구성

문항번호	관련 스키마	문항 수
2~3	분리 스키마(splitting scheme)	2
4~5	부분-전체 분수 스키마(part-whole fractional scheme)	2
6	부분 단위 분수 스키마(partitive unit fractional scheme)	1
7	부분 분수 스키마(partitive fractional scheme)	1
8	역 부분 분수 스키마(reversible partitive fractional scheme)	1
9	반복 분수 스키마(iterative fractional scheme)	1

나. 분수 스키마 평가 방법

학생들의 분수 스키마 검사지는 2명의 평가자가 채점했으며 각 각의 문항에 대해 학생들이 수행한 내용들(쓴 답, 그린 그림, 색칠한 것, 계산한 것 등)을 총체적으로 종합하여 스키마의 존재 여부를 확인한다. 평가자들은 스키마의 행동양식에 맞지 않는 풀이나 오답을 적었을 경우에는 0점을 주며 스키마의 행동양식에 알맞은 풀이를 하고 정답을 적었을 경우에는 1점을 부여한다.

만약 추론이 조금 더 요구되는 문제들은 0.5로 채점하였다가 추가적인 질문 및 면담 등을 통하여 0점 또는 1점으로 결정한다.

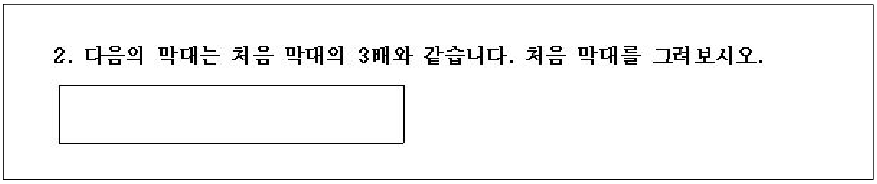
다. 분수 스키마 평가 문항

1) 분리 스키마(splitting scheme) 측정

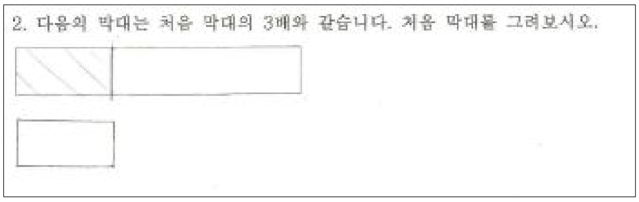
분리 스키마가 포함된 문제는 [그림 Ⅲ-1]과 같다. 분리 스키마를 가지고 있는 학생은 이와 같은 문제를 해결하기 위해 막대를 3부분으로 나누어 처음 막대를 구할 수 있으며 나누어진 부분을 3번 반복하면 다시 전체의 막대를 만들 수 있음을 알 수 있다. 한 문제를 맞으면 1점을 얻으므로 측정 점수 결과는 0부터 2까지 범위에서 매겨지며 이 측정의 결과는 분리 스키마와 부분 분수 스키마, 역 부분 분수 스키마, 반복 분수 스키마 사이의 관계를 검증할 때 사용된다.

[그림 Ⅲ-2] 학생의 응답은 전체를 3부분으로 나누어 처음의 막대를 구하였고 이를 3배하면 다시 전체가 됨을 알고 있다. 이 학생의 경우는 분리 스키마가 형성되어 있으나 [그림 Ⅲ-3] 학생은 전체를 3배하는 오류를 범함으로써 아직 분

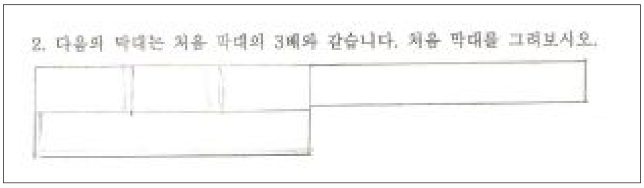
리 스키마가 형성되지 않았음을 보여준다.



[그림 Ⅲ-1] 분리 스키마 측정 문항



[그림 Ⅲ-2] 분리 스키마 문항의 바른 풀이



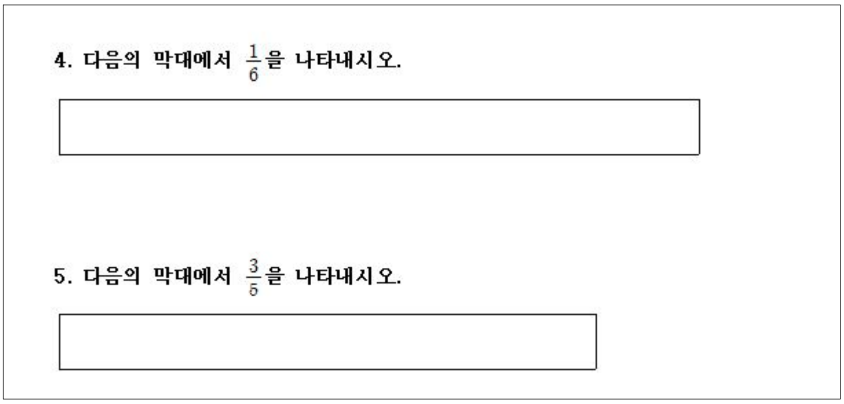
[그림 Ⅲ-3] 분리 스키마 측정 문항의 잘못된 풀이

2) 부분-전체 분수 스키마 측정

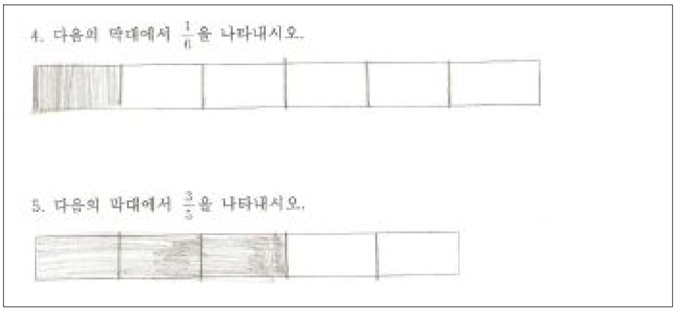
부분-전체 분수 스키마를 측정하기 위해 2개의 문항이 사용된다. 하나의 문제는 단위분수를 포함하고 있으며 또 다른 문제는 단위분수가 아닌 진분수를 포함하고 있다. 부분-전체 분수 스키마는 전체를 똑같이 나누는 것, 나눈 것으로부터 정해진 부분을 선택하는 것이 포함된다. [그림 Ⅲ-4]와 같은 문제의 측정 결과는 단위분수가 포함된 상황과 단위분수가 아닌 진분수가 포함된 상황 사이의 관련성을 파악하는 데 사용된다.

[그림 Ⅲ-5] 학생의 경우 분모가 나타내는 수로 전체를 똑같이 나누고 분자만큼 색칠함으로써 부분-전체 분수 스키마가 형성되어져 있음을 알 수 있다. 반

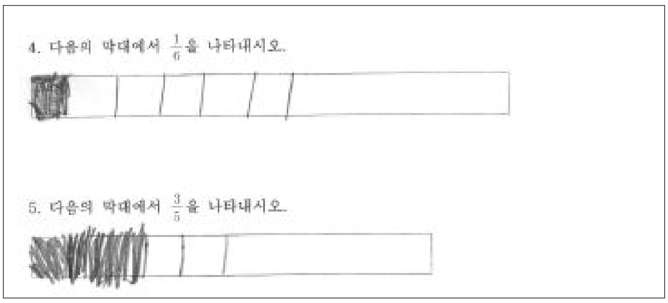
면에 [그림 Ⅲ-6] 학생은 전체를 분모가 나타내는 수만큼 똑같이 나누어야 한다는 스키마를 형성하지 못했으므로 부분-전체 분수 스키마가 형성되지 못함을 알 수 있다.



[그림 Ⅲ-4] 부분-전체 분수 스키마 측정 문항



[그림 Ⅲ-5] 부분-전체 분수 스키마 문항의 바른 풀이

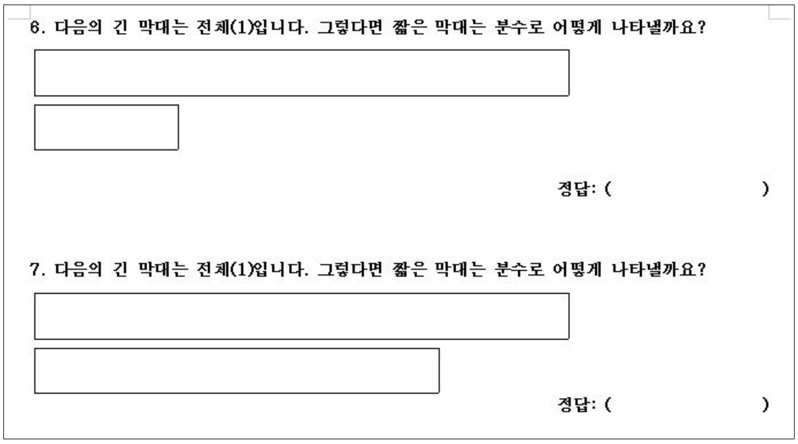


[그림 Ⅲ-6] 부분-전체 분수 스키마 측정 문항의 잘못된 풀이

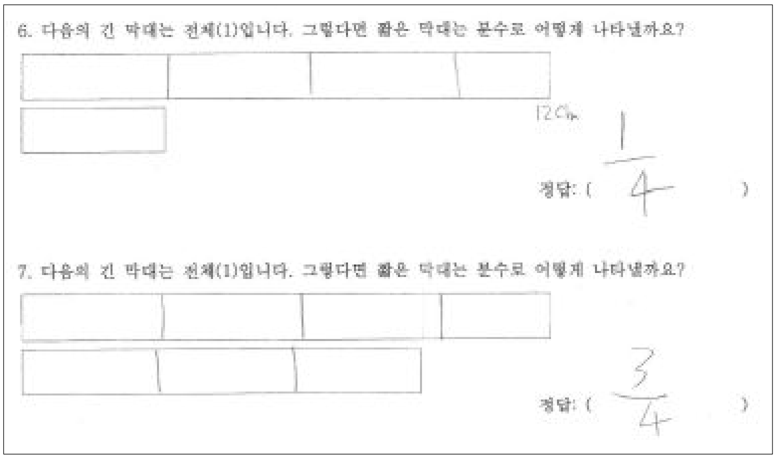
3) 부분 분수 스키마 측정

[그림 Ⅲ-7]은 부분 분수 스키마를 측정하기 위한 2개의 문항이다. 하나의 문제는 단위분수를 포함하고 있고 이는 부분 단위 분수 스키마를 나타낸다. 또 다른 문제는 단위분수가 아닌 진분수를 포함하고 있으며 이는 부분 분수 스키마를 나타낸다. 2개의 문제는 부분 단위분수와 부분 분수 문제 사이의 관계를 확인하는 데 사용되며 이 2개의 문항이 결합하여 0부터 2까지의 범위에서 점수가 매겨진 후 분리 스키마와의 관계를 확인하는 데 사용될 것이다.

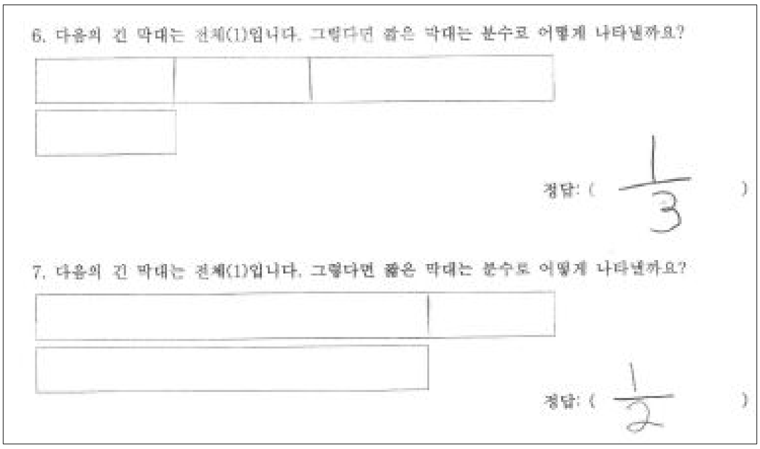
[그림 Ⅲ-8]의 학생은 짧은 막대를 4번 반복하면 전체가 됨을 알고 짧은 막대를 $\frac{1}{4}$로 인식하고 있으며 더 나아가 7번 문항의 짧은 막대는 단위 막대를 3번 반복했을 때의 크기와 같으므로 $\frac{3}{4}$으로 인식함을 알 수 있다. 그러므로 이 학생은 부분 단위 분수 스키마와 부분 분수 스키마를 형성하였음을 알 수 있다. 반면 [그림 Ⅲ-9]의 학생은 짧은 막대와 전체의 관계를 잘 파악하지 못해 오답을 작성함으로써 부분 단위 분수 및 부분 분수 스키마를 형성하지 못했음을 알 수 있다.



[그림 Ⅲ-7 부분 분수 스키마 측정 문항



[그림 Ⅲ-8] 부분 분수 스키마 문항의 바른 풀이



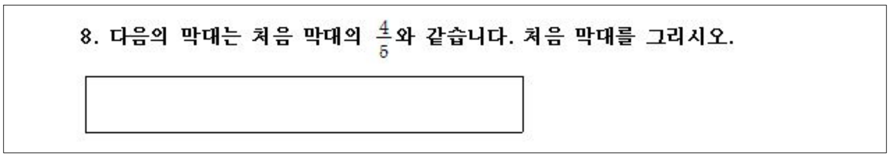
[그림 Ⅲ-9] 부분 분수 스키마 문항의 잘못된 풀이

4) 역 부분 분수 스키마 측정

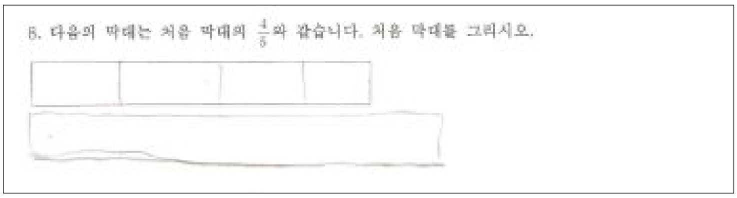
[그림 Ⅲ-10]은 역 부분 분수 스키마를 측정하기 위한 문항이다. 이 측정 결과는 분리 스키마와 역 부분 분수 스키마 사이의 관계를 확인하는 데 사용한다.

[그림 Ⅲ-11]의 학생은 $\frac{4}{5}$를 $\frac{1}{5}$의 4개로 인식하며 전체를 구성하기 위해 $\frac{4}{5}$를 4부분으로 나누어 $\frac{1}{5}$을 만들었다. 그리고 이렇게 만든 $\frac{1}{5}$을 5번 반복함으로써 전체를 구성할 수 있었다. 이러한 과정을 통해 이 학생은 역 부분 분수 스키

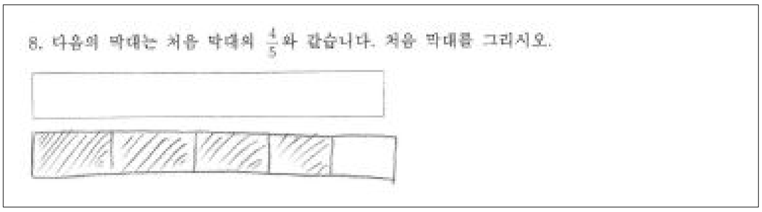
마를 형성하고 있다고 판단할 수 있다. 반대로 [그림 Ⅲ-12]의 학생은 전체를 5등분하고 4부분을 선택하는 조작활동을 통해 아래의 문제를 부분-전체 분수 스키마의 개념으로 접근하여 문제를 해결했다. 이 학생은 역 부분 분수 스키마가 형성되지 않았음을 알 수 있다.



[그림 Ⅲ-10] 역 부분 분수 스키마 측정 문항



[그림 Ⅲ-11] 역 부분 분수 스키마 문항의 바른 풀이



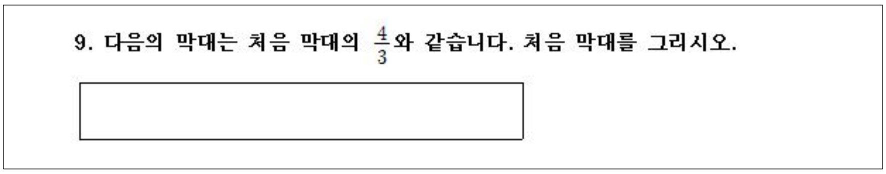
[그림 Ⅲ-12] 역 부분 분수 스키마 문항의 잘못된 풀이

5) 반복 부분 분수 스키마 측정

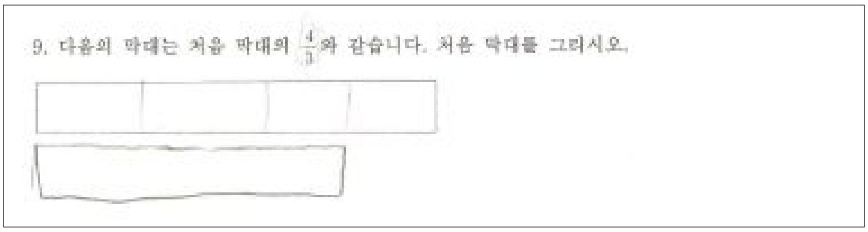
[그림 Ⅲ-13]은 역 부분 분수 스키마를 측정하기 위한 문항이다. 이 측정 결과는 분리 스키마와 반복 부분 분수 스키마 사이의 관계를 확인하는 데 사용한다.

[그림 Ⅲ-14]의 학생은 주어진 막대($\frac{4}{3}$)를 4부분으로 나누어서 단위분수($\frac{1}{3}$)

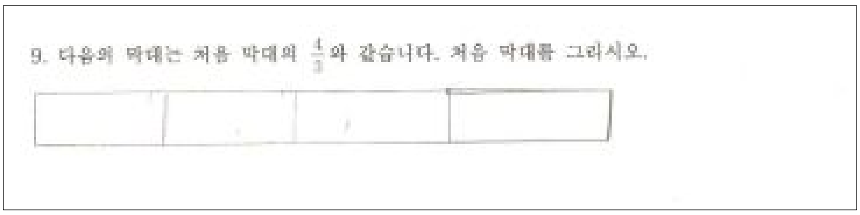
를 만들고 그 부분 중 하나를 3번 반복함으로써 전체($\frac{3}{3}$)를 구성하였다. 이 학생은 $\frac{4}{3}$과 같은 가분수를 만들기 위해 단위분수를 전체를 넘어 반복시킬 수 있음을 이해한다. 이는 이 학생이 반복 분수 스키마를 가지고 있음을 확인할 수 있다. [그림 Ⅲ-15]의 학생은 전체를 3부분으로 나누고 그렇게 하여 얻어진 단위분수를 한 번 더 반복함으로써 처음 막대를 그렸는데 이는 $\frac{4}{3}$을 $\frac{3}{4}$로 인식하여 문제를 해결했음을 알 수 있다. 이 학생은 아직 반복분수 스키마를 발달시키지 못했음을 알 수 있다.



[그림 Ⅲ-13] 반복 분수 스키마 측정 문항



[그림 Ⅲ-14] 반복 분수 스키마 문항의 바른 풀이



[그림 Ⅲ-15] 반복 분수 스키마 문항의 잘못된 풀이

라. 분수 스키마 분석 방법

하나의 스키마의 생성이 다른 스키마의 생성에 선행하는가 혹은 두 스키마의 생성에는 관련성이 없는가 하는 문제를 판단하기 위하여 우리는 감마 통계와 Somer's D 통계를 사용하였다.

1) Gamma

감마 통계는 변수들 간 순서의 일치쌍과 불일치쌍을 비교하여 관계를 정의하는 것으로 -1부터 1까지의 범위에서 값이 매겨진다.

독립 / 종속	0	1
0	a	b
1	c	d

[그림 Ⅲ-16] 독립변수와 종속변수 사이의 일치쌍 영역

독립 / 종속	0	1
0	a	b
1	c	d

[그림 Ⅲ-17] 독립변수와 종속변수 사이의 불일치쌍 영역

$$P=a\times d \qquad Q=b\times c$$

$$_{n}C_{2} = \frac{N(N-1)}{2} = P + Q + Tx + Ty + \sum \frac{f(f-1)}{2}$$

$$G = \frac{P-Q}{P+Q}$$

위의 집단에서 임의로 2개의 표본 (i, j), (h, k)를 추출하였을 때 나올 수 있는 경우는 다음과 같다.

(1) 일치쌍인 경우

$i < h, j < k$ 또는 $i > h, j > k \Rightarrow$ a와 d에서 표본 추출, $P=a\times d$

(2) 불일치쌍인 경우

$i < h, j > k$ 또는 $i > h, j < k \Rightarrow$ b와 c에서 표본 추출, $Q=b\times c$

(3) tie쌍인 경우

$i = h, j > k(j < k) \Rightarrow$ a와 c 또는 b와 d에서 표본 추출, $Tx=a\times c+b\times d$

$i > h(i < h), j = k \Rightarrow$ a와 b 또는 c와 d에서 표본 추출, $Ty=a\times b+c\times d$

$i = h, j = k \Rightarrow$ a, b, c, d에서 각각 2개씩 표본 추출,

$$\sum_{f\in\{a,b,c,d\}}\frac{f(f-1)}{2}$$

임의의 표본 (i, j), (h, k)에서 독립변수 i와 h의 문제 해결 능력의 순서와 종속변수 j, k의 문제 해결 능력의 순서가 일치할 때 우리는 이를 일치쌍이라고 부른다.([그림 Ⅲ-16]) 반대로 독립변수 i와 h의 문제 해결 능력의 순서와 종속변수 j, k의 문제 해결 능력의 순서가 반대일 때 우리는 이를 불일치쌍이라고 부른다.([그림 Ⅲ-17]) 또한 독립변수와 종속변수 중 하나의 변수 또는 모든 변수가 같을 때 이를 tie쌍이라고 부른다.

감마 통계는 독립변수 X의 “순서”를 아는 것이 종속변수 Y의 “순서”를 예측하는 데 있어 어느 정도 오차를 감소시켜 주는가 하는 것이 초점이 된다. 즉, tie쌍을 뺀 일치쌍과 비일치쌍의 합에서 (P+Q)에서 일치쌍과 비일치쌍을 뺀 나머지의 비율이 감마 통계의 값이 되는 것이다. 만약, 값이 1 또는 -1이 나온다면 이는 독립변수 X의 순서를 알면 종속변수 Y의 순서를 정확히 예측할 수 있다는 것이며 0이 나온다면 독립변수 X의 순서를 안다고 해도 종속변수 Y의 순서를 예측할 수 없다는 것이다. 감마 통계의 경우에는 독립변수와 종속변수가 바뀐다 하더라도 그 값에는 차이가 없으므로 대칭적 통계라고 할 수 있다.

부분-전체 분수 스키마에서 단위분수 문제와 비단위분수 문제 사이에는 해결상의 관련성이 없다는 가설과 분리 스키마와 부분 분수 스키마는 독립적으로

발달한다는 가설을 확인하기 위해 우리는 감마 통계를 사용할 것이다. 만약 감마 통계의 값이 0에 가깝게 나온다면 이는 독립변수가 종속변수의 순서를 예측할 수 없다는 말로 가설이 참이 될 것이다.

2) Somer's D

Somer's D는 감마 통계와 달리 비대칭적 통계이다. 감마 통계가 두 표본 값의 일치쌍과 불일치쌍만을 고려한 데 반하여 Somer's D는 종속변수의 tie쌍을 고려한다. 즉, 감마 통계의 범위에서 다음의 경우를 더 고려하는 것이다.

독립 / 종속	0	1
0	a	b
1	c	d

독립 / 종속	0	1
0	a	b
1	c	d

[그림 Ⅲ-18] 종속변수의 tie쌍 영역

그림과 같이 Somer's D는 독립변수가 tie가 되는 모든 경우를 제거함으로써 독립변수 X의 순서가 있을 경우 종속변수 Y의 순서 경향을 예측하는 데 오차를 줄이는 경향을 의미한다. 따라서 Somer's D는 두 개의 표본의 종속변수가 순서가 없는 경우를 뺀 모든 경우 일치쌍인 경우와 불일치쌍인 경우, 그리고 종속변수가 tie쌍인 경우 중 일치쌍에서 불일치쌍을 뺀 경우의 비율로 구할 수 있다.

$$D_{yx} = \frac{P-Q}{P+Q+Ty}$$

Somer's D 역시 감마 통계와 마찬가지로 독립변수 X의 순서를 아는 것이 종속변수 Y의 순서를 예측하는 데 있어 어느 정도 오차를 감소시켜 주는 가 하는 것으로 그 값이 1 또는 -1일 때 독립변수 X의 순서가 종속변수 Y의 순서를 정확히 예측할 수 있음을 보여준다.

부분 단위 분수 스키마가 발달해야 부분 분수 스키마가 발달한다는 가설과

분리 스키마가 있어야 역 부분 분수 스키마와 반복 분수 스키마 문제를 해결할 수 있다는 가설은 Somer's D를 사용하여 분석할 수 있다. 여기서 부분 분수 스키마, 역 부분 분수 스키마, 반복 분수 스키마는 독립 변수가 되고 부분 단위분수 스키마와 분리 스키마는 종속 변수가 된다. 분리 스키마가 반복 분수 스키마의 전제조건이라는 가설에도 불구하고 분리 스키마가 있다고 반드시 반복 분수 스키마가 있다고 할 수 없기 때문에 즉, 분리 스키마는 필요조건이지 충분조건이 아니기 때문에 분리 스키마가 종속 변수가 되고 반복 분수 스키마는 독립변수가 된다.

2. 분수 스키마 분석 결과

가. 학년에 따른 분수 스키마의 차이

<표 Ⅲ-2>는 학년에 따른 분수 스키마의 차이를 나타낸 것이다. 표의 내용들은 스키마들과 관련된 문항에 대한 정답률을 나타낸 것으로 높은 수치는 해당 학년의 학생들이 스키마가 많이 발달해 있음을 알려준다. <표 Ⅲ-2>를 살펴보면 앞서 제시한 가설과 일치되는 경향을 보이는 데 부분-전체 분수 스키마가 가장 일찍 발달하고 부분 분수 스키마가 뒤이어 발달한다. 그리고 역 부분 분수 스키마와 반복 분수 스키마는 상대적으로 늦게 발달함을 알 수 있다.

또한 학생들 간의 차이는 있으나 대부분의 경우 3학년까지 부분-전체 스키마를 발달시키고 4학년에서는 부분 단위분수 스키마를 발달시키며 5학년 이상의 학생들은 부분 분수 스키마를 발달시켰다. 특히 5, 6학년의 70%정도의 학생들이 부분 분수 스키마를 가지고 있으나 역 부분 분수 스키마의 경우는 약 35%, 반복 분수 스키마의 경우에는 약 30%의 학생들만이 스키마를 가지고 있었다. 분리 스키마의 정답률을 살펴보면 4학년까지는 40%가량이 학생들이 맞춘데 반하여 5학년이 70%, 6학년이 60% 정도 맞춘 것으로 보아 5학년 이후에 많은 학생들이 분리 스키마를 발달시킴을 확인할 수 있다.

<표 Ⅲ-2> 학년에 따른 분수 스키마의 차이

스키마		2학년 (N=36)		3학년 (N=33)		4학년 (N=30)		5학년 (N=33)		6학년 (N=31)	
		M	SD	M	SD	M	SD	M	SD	M	SD
부분-전체	단위	.58	.49	.85	.39	.93	.30	.94	.28	.94	.24
	비단위	.64	.48	.79	.44	.87	.37	.91	.33	.97	.17
부분 단위 분수		.33	.47	.12	.33	.63	.50	.75	.45	.77	.41
부분 분수		.05	.22	.24	.44	.30	.46	.67	.49	.71	.46
역 부분 분수		.03	.17	.09	.28	.02	.44	.36	.49	.35	.48
반복 분수		.00	.00	.03	.17	.10	.30	.27	.45	.32	.47
분리	단위	.06	.22	.09	.28	.40	.50	.73	.46	.61	.49
	비단위	.06	.22	.09	.28	.27	.45	.73	.46	.58	.49

나. 부분-전체 분수 스키마 결과 분석

우리는 부분-전체 분수 스키마 상황에서 단위분수 문제와 단위분수가 아닌 진분수가 포함된 문제를 해결하는 것 사이에는 아무런 관련이 없다는 가설을 세웠다. 이를 확인하기 위하여 감마 통계를 사용한 결과 G=.96, p=.000으로 강한 연관성이 있음을 확인할 수 있었다. 또한 강한 연관성을 확인하기 위해서 Somer's D를 측정한 결과 .67로 강한 비대칭적 관계가 있음을 알 수 있었다. 즉, 부분-전체 분수 스키마 상황에서 단위분수 문제와 비단위 분수 문제 사이에는 조작적 차이가 있다는 결과가 도출되었다. 이는 가설과 배치되는 결과이다.

<표 Ⅲ-3> 부분-전체 분수 상황에서 단위와 비단위 문제에서의 성공

		비단위 부분-전체		합계
		0	1	
단위 부분 -전체	0	20	6	26
	1	8	129	137
합계		28	135	163

G=.96, D=.67 (p=.000)

다. 부분 분수 스키마 결과 분석

우리는 <표 Ⅲ-4>에서 부분 단위분수 스키마와 부분 분수 스키마의 성공 빈도를 나타냈다. 우리는 앞서 부분 분수 스키마에서 단위분수를 포함한 문제를 해결하는 것과 단위분수가 아닌 진분수를 포함한 문제를 해결하는 것 사이에 관계가 있다는 가설을 세웠다.

이러한 부분 단위 분수와 부분 분수의 비대칭적 관계를 확인하기 위하여 통계처리를 한 결과 의미 있는 통계적 결과를 얻었다. (Somer's D=.53, p=.000) 일반적으로 부분 단위 분수 스키마와 부분 분수 스키마 사이에 조작적 차이가 있으며 부분 분수 스키마에 앞서 부분 단위 분수 스키마가 더 일찍 발달하는 경향이 있다.

<표 Ⅲ-4> 부분 분수 상황에서 단위와 비단위 문제에서의 성공

		부분		합계
		0	1	
부분 단위	0	69	10	79
	1	31	53	84
합계		100	63	163

Note: D=.53 (p=.000)

라. 분리 스키마와 역 부분 분수 스키마 결과 분석

학생들의 분리 스키마 점수와 역 부분 문제의 성공 점수를 나타낸 결과가

<표 Ⅲ-5>에 나타나 있다. 우리는 분리 스키마를 가지고 있는 학생이 역 부분 분수 스키마 문제를 해결할 수 있을 것이라는 가설을 세웠다. 역 부분 분수 스키마를 독립변수로, 분리 스키마를 종속 변수로 놓고 Somer's D를 사용하여 확인하였더니 .41로 통계적으로 의미 있는 수치를 얻었다. 즉, 분리 스키마를 발달한 학생들은 역 부분 분수 문제를 해결할 수 있음을 나타낸다.

<표 Ⅲ-5> 분리 스키마와 역 부분 분수 스키마 사이의 관계

		역 부분 분수		합계
		0	1	
분리	0	93	10	103
	1	3	2	5
	2	34	21	55
합계		130	33	163

Note: D=.41 (p=.000)

마. 분리 스키마와 반복 분수 스키마 결과 분석

학생들의 분리 스키마 점수와 반복 부분 문제의 성공 점수를 나타낸 결과가 <표 Ⅲ-6>에 나타나 있다. 우리는 분리 스키마를 가지고 있는 학생이 반복 부분 분수 스키마 문제를 해결할 수 있을 것이라는 가설을 세웠다. 반복 부분 분수 스키마를 독립변수로, 분리 스키마를 종속 변수로 놓고 Somer's D를 사용하여 확인하였더니 .44로 통계적으로 의미 있는 수치를 얻었다. 즉, 분리 스키마를 발달한 학생들은 반복 부분 분수 문제를 해결할 수 있음을 나타낸다.

<표 Ⅲ-6> 분리 스키마와 반복 분수 스키마 사이의 관계

		반복 분수		합계
		0	1	
분리	0	97	6	103
	1	4	1	5
	2	39	16	55
합계		140	23	163

Note: D=.44 (p=.000)

바. 분리 스키마와 부분 분수 스키마 결과 분석

우리는 <표 Ⅲ-7>에 분리 스키마와 부분 분수 스키마의 성공 빈도를 나타냈다. 우리는 분리 스키마와 부분 분수 스키마는 독립적으로 발달한다는 가설을 세웠다. 이는 앞선 가설들과는 다른 관계로 Somer's D가 아닌 Gamma통계를 사용하여 가설을 검증하였다. 검증 결과(G=.49, p=.000) 분리 스키마와 부분 분수 스키마는 통계적으로 의미 있는 방향성 있는 관계라는 결과를 얻었다. 더 나아가 분할표의 대각선 오른쪽 위 값을 보면 부분 분수 스키마 문제를 해결했으나 분리 스키마 문제를 해결하지 못한 학생이 분리 스키마 문제를 해결했으나 부분 분수 스키마를 해결하지 못한 학생보다 훨씬 많음을 통하여 부분 분수 스키마의 발달이 분리 스키마 발달에 선행됨을 알 수 있다.

<표 Ⅲ-7> 분리 스키마와 부분 분수 스키마 사이의 관계

		부분 분수 스키마			합계
		0	1	2	
분리 스키마	0	55	25	23	103
	1	0	3	2	5
	2	14	13	28	55
합계		69	41	53	163

Note: G=.49 (p=.000)

3. 교과서 분수 단원 분석

가. 분수 문제를 만드는 세 가지 방법

유형	분수 구하기(부분과 전체가 주어지고 분수를 찾기)	부분 구하기(전체와 분수가 주어지고 부분을 찾기)	전체 구하기(부분과 분수가 주어지고 전체를 찾기)
이산량을 통하여	제리는 12개의 사탕 가운데 3개를 먹었다. 제리가 먹은 사탕을 분수로 나타내면?	제리는 12개의 사탕 가운데 $\frac{1}{4}$을 먹었다. 제리가 먹은 사탕은 몇 개인가?	제리는 사탕 3개를 먹었다. 이것은 처음 사탕의 $\frac{1}{4}$이다. 처음에 있었던 사탕은 모두 몇 개인가?

	만약 ●●●●●● ●●이 전체라면, ●●은 전체의 얼마인가?	만약 ●●●●●● ●●이 전체라면, $\frac{1}{4}$은 몇 개의 원이 되는가?	만약 ●●이 $\frac{1}{4}$이라면, 전체의 원은 모두 몇 개인가?
연속량을 통하여	민호는 피자를 8등분하여 그 가운데 2개를 먹었다. 민호가 먹은 피자를 분수로 나타내면?	민호는 피자를 8등분해서 그 중 $\frac{1}{4}$을 먹었다. 민호는 몇 조각을 먹었는가?	민호는 피자 2조각을 먹었다. 이것은 전체 피자의 $\frac{1}{4}$이다. 전체 피자는 모두 몇 조각인가?
	검은 직사각형 부분을 분수로 나타내면?	직사각형의 $\frac{1}{4}$을 색칠하여라	다음은 어떤 직사각형의 $\frac{1}{4}$을 나타낸다. 전체 직사각형을 그려보아라.

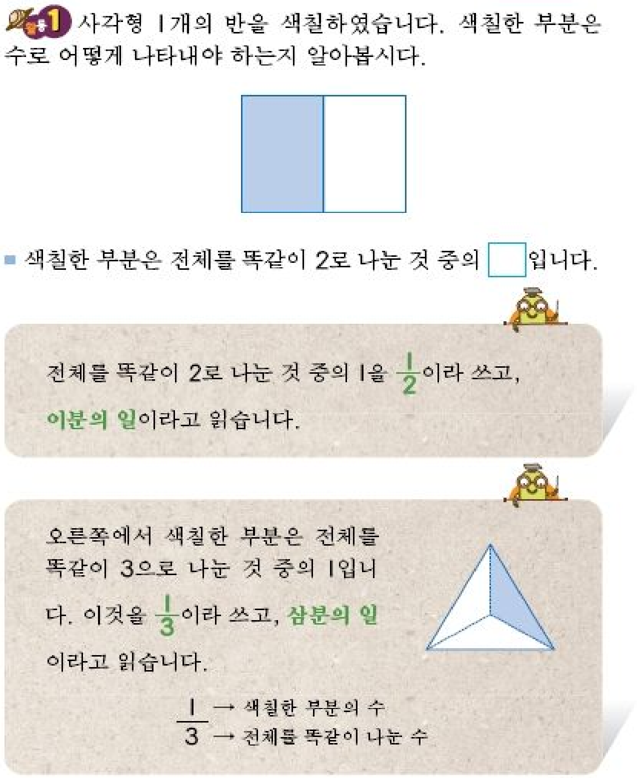
[그림 Ⅲ-19] 분수 문제를 만드는 세 가지 방법(권성룡 외 11명. 2005)

학생들이 분수가 전체와 부분의 관계를 표현할 수 있다는 것을 인식하기 위하여 [그림 Ⅲ-19]과 같이 세 가지 유형으로 분수 문제를 만들 수 있다. 세 가지 유형을 살펴보면 '전체와 분수가 주어지고 부분을 찾기'의 경우는 부분-전체 분수 스키마, '부분과 전체가 주어지고 분수를 찾기'의 경우는 부분 단위 분수 스키마와 부분 분수 스키마를 이용하는 것이라고 볼 수 있다. 또한 '부분과 분수가 주어지고 전체를 찾기'는 역 부분 분수 스키마와 반복 분수 스키마를 이용하여 문제를 해결하는 경우라고 생각할 수 있다. 이제부터는 현재 교육과정 상에서는 이러한 세 가지 유형의 분수 문제, 즉, 앞서 제시한 스키마를 이용한 문제들이 어떻게 제시되고 있는지 살펴보고자 한다.

나. 부분-전체 분수 스키마의 예

초등학교 교과서에 가장 많이 제시되는 분수 스키마는 부분-전체 분수 스키마이다. 초등학교에서 가장 처음 분수를 다루게 되는 '2학년 2학기 5. 분수'에서는 [그림 Ⅲ-20]와 같이 분수의 개념을 다룬다. '전체를 똑같이 2로 나눈 것 중의 1을 $\frac{1}{2}$이라고 쓰고, 이분의 일이라고 읽습니다.' 라고 약속하는 것은 전체를 똑같이 나누고 분수만큼 부분을 선택하는 부분-전체 분수 스키마에 해당하는 예이다. 그리고 [그림 Ⅲ-21]와 같이 '3학년 1학기 7.분수'에서 6의 $\frac{1}{3}$이 얼마인지 알아보는 것 역시 전체와 분수가 나오고 부분을 구하는 것이므로 부분-전체 분수 스키마의 경우라고 할 수 있다. 앞의 내용은 연속량의 상황에서의 부분-전체 분수 스키마이고 뒤의 내용은 이산량에서의 부분-전체 분수 스키마이다. 같은 단원에서 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{4}$의 크기를 비교하는 것도 전체에서 분수만큼 색칠을 한 후 길이 비교로 크기를 비교하므로 부분-전체 분수 스키마의 예라고 할 수 있고 '4학년 1학기 6.분수'에서 진분수, 가분수, 대분수 등을 정의하거나 '5학년 1학기 2. 약분과 통분', '5학년 1학기 3. 분수의 덧셈과 뺄셈', '5학년 1학기 4. 분수의 곱셈', '6학년 1학기 1. 분수의 나눗셈' 모두 부분-전체 분수 스키마를 이용하는 경우라고 할 수 있다. 그리고 '6학년 1학기 8. 연비와 비례배분'에서 [그림 Ⅲ-22]와 같은 문제를 보면 전체인 연필 10자루를 오빠와 동생이 3:2로 나누어 가질 때 몇 자루씩 가지게 되는지 알아보는 문제가 제시된다. 이 때 오빠는 10자루의 $\frac{3}{5}$, 동생은 10자루의 $\frac{2}{5}$를 가지게 된다. 이는 전체가 주어지고 분수만큼을 알아내는 것으로 이 역시 부분-전체 분수 스키마라고 할 수 있다.

부분-전체 분수 스키마는 다른 스키마에 비해 비교적 일찍 발달되는 스키마로 2학년 분수의 도입부터 제시되기 시작한다. 그리고 학년이 올라갈수록 분수의 크기 비교, 분수의 연산 등 심화되는 개념을 이해하는 데 있어서도 그 바탕에는 부분-전체 분수 스키마는 필요함을 알 수 있다.


활동1 사각형 1개의 반을 색칠하였습니다. 색칠한 부분은 수로 어떻게 나타내야 하는지 알아봅시다.

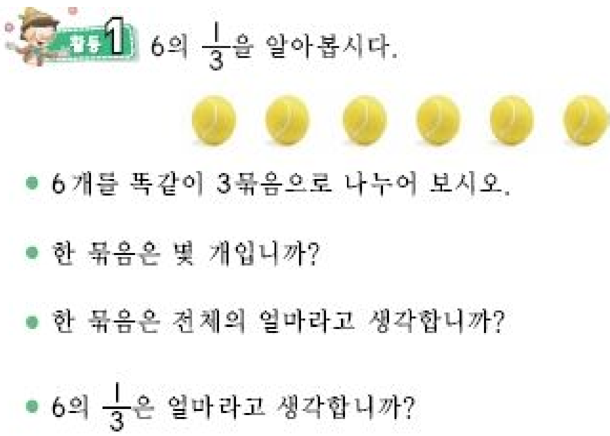
■ 색칠한 부분은 전체를 똑같이 2로 나눈 것 중의 $\boxed{}$입니다.

전체를 똑같이 2로 나눈 것 중의 1을 $\frac{1}{2}$이라 쓰고, **이분의 일**이라고 읽습니다.

오른쪽에서 색칠한 부분은 전체를 똑같이 3으로 나눈 것 중의 1입니다. 이것을 $\frac{1}{3}$이라 쓰고, **삼분의 일**이라고 읽습니다.

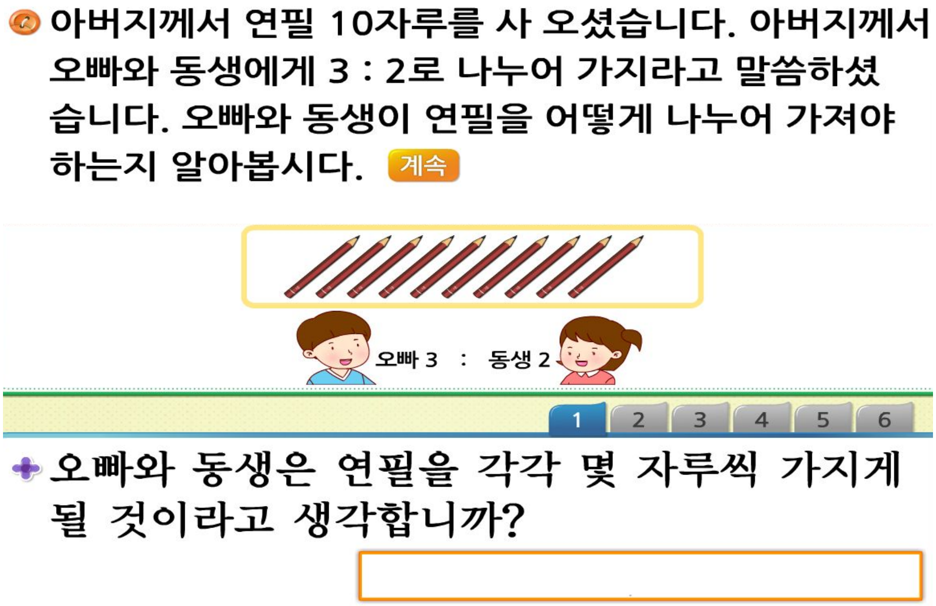
$\frac{1}{3}$ 1 → 색칠한 부분의 수, 3 → 전체를 똑같이 나눈 수

[그림 Ⅲ-20] '2학년 2학기 수학 5. 분수' 단원 학습 내용(부분-전체)


활동1 6의 $\frac{1}{3}$을 알아봅시다.

- 6개를 똑같이 3묶음으로 나누어 보시오.
- 한 묶음은 몇 개입니까?
- 한 묶음은 전체의 얼마라고 생각합니까?
- 6의 $\frac{1}{3}$은 얼마라고 생각합니까?

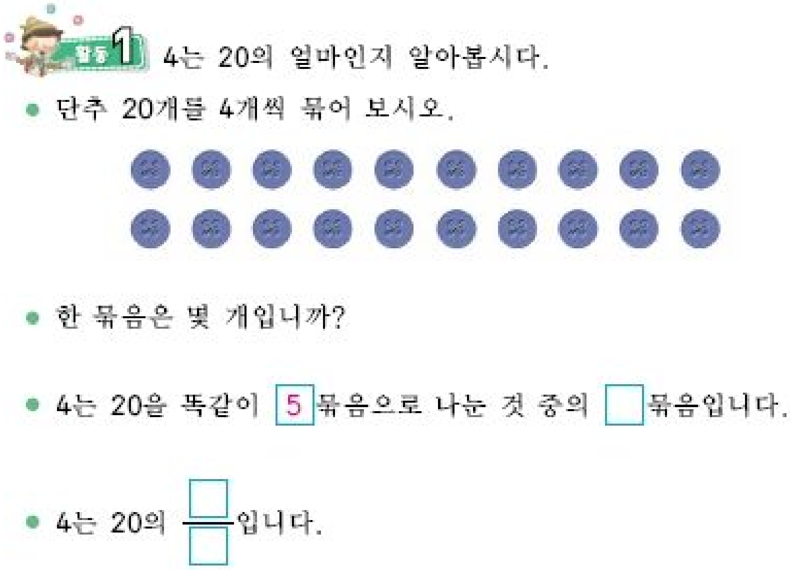
[그림 Ⅲ-21] '3학년 1학기 수학 7. 분수' 단원 학습 내용(부분-전체)



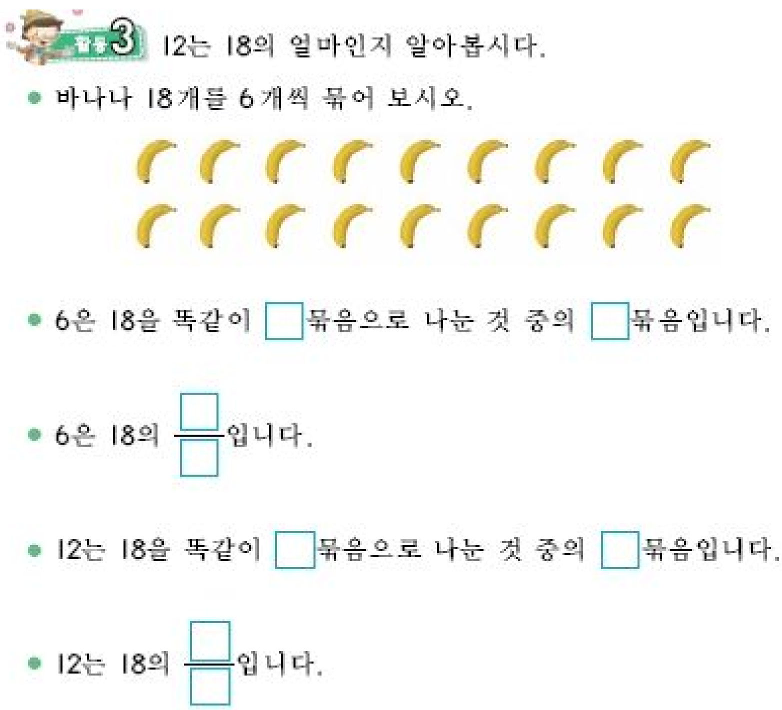
[그림 Ⅲ-22] '6학년 1학기 수학 8. 연비와 비례배분' 단원 학습 내용(부분-전체)

나. 부분 (단위) 분수 스키마의 예

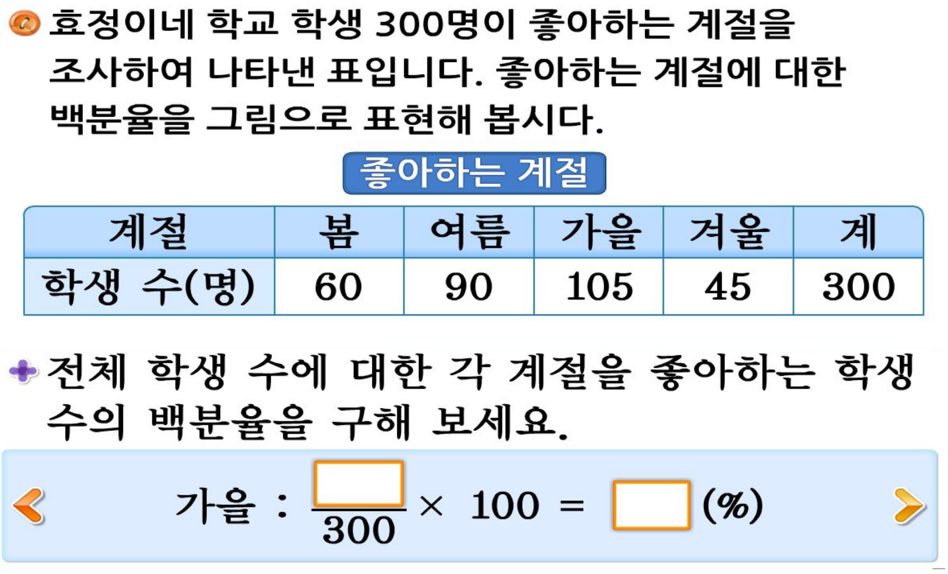
3학년 1학기 7단원 분수의 2차시 '분수로 나타낼 수 있어요'에서는 [그림 Ⅲ-23]와 같이 '4는 20의 얼마인지 분수로 나타내기'가 제시된다. 전체 20을 부분 4로 묶어 보고 4는 20을 5 개 묶음으로 똑같이 나눈 것 중 묶음임을 알아서 $\frac{1}{5}$로 나타낸다. 이는 부분과 전체를 주고 부분이 전체의 얼마인지를 살펴보는 부분단위 분수 스키마의 예라고 할 수 있다. 또한 [그림 Ⅲ-24]은 12는 18의 얼마인지 아는 활동으로 18을 6개씩 똑같이 묶으면 3묶음이 나옴을 알고 12는 18을 똑같이 3묶음으로 나눈 것 중 2묶음임을 알아서 $\frac{2}{3}$임을 아는 부분 분수 스키마의 예라고 할 수 있다. 또한 [그림 Ⅲ-25]와 같이 '6학년 1단원 6. 비율 그래프'에서 비율 그래프를 그리기 위하여 전체와 부분을 통하여 백분율(비율)을 구하는 문제가 나오는 데 이 역시 부분 분수 스키마를 활용하는 문제이다.



[그림 Ⅲ-23] '3학년 1학기 수학 7. 분수' 단원 학습 내용(부분 단위 분수)



[그림 Ⅲ-24] '3학년 1학기 수학 7. 분수' 단원 학습 내용(부부 분수)



효정이네 학교 학생 300명이 좋아하는 계절을 조사하여 나타낸 표입니다. 좋아하는 계절에 대한 백분율을 그림으로 표현해 봅시다.

좋아하는 계절

계절	봄	여름	가을	겨울	계
학생 수(명)	60	90	105	45	300

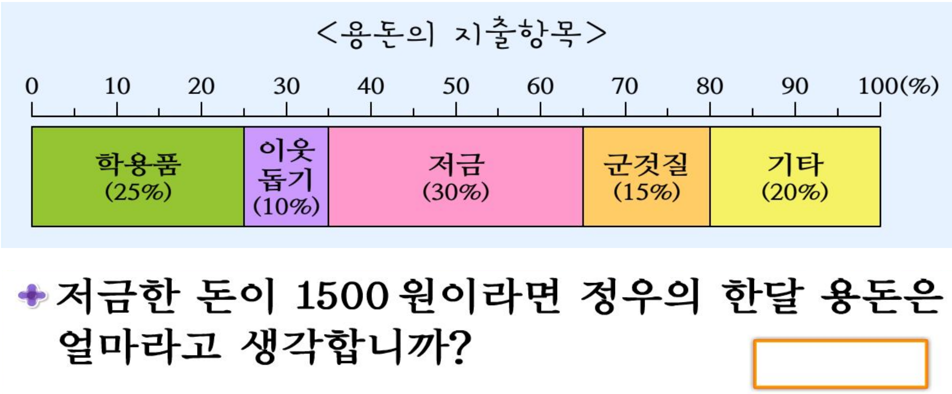
전체 학생 수에 대한 각 계절을 좋아하는 학생 수의 백분율을 구해 보세요.

가을 : $\frac{\square}{300} \times 100 = \square$ (%)

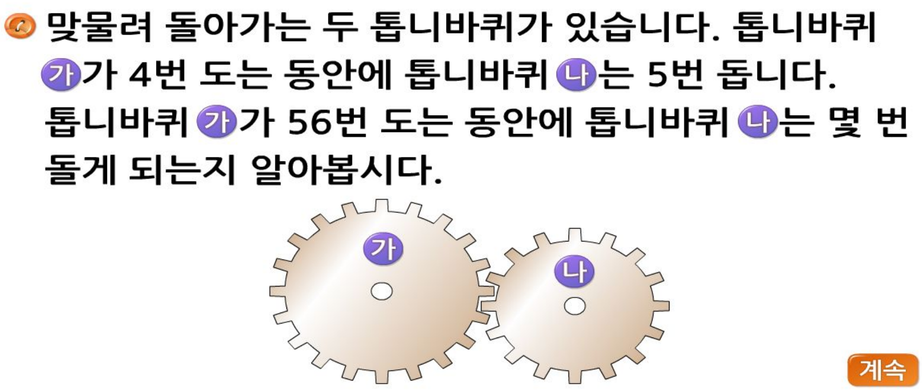
[그림 Ⅲ-25] '6학년 1학기 수학 6. 비율 그래프' 단원 학습 내용(부분 분수)

다. 역 부분 분수 스키마의 예

6학년 1학기 수학 교과서 6단원에서 다루는 비율 그래프에서는 [그림 Ⅲ-26]과 문제가 나온다. 이는 전체의 30%가 1500원일 때 전체(100%)를 묻는 문제로 $\frac{30}{100}$이 1500원이므로 $\frac{1}{100}$은 50원이고 전체인 1, 즉 전체는 5000원임을 구하는 것이다. 이는 부분과 분수를 제시해 주고 전체를 구하는 역 부분 분수 스키마의 예라고 할 수 있다. 또한 6학년 1학기 7. 비례식에서 [그림 Ⅲ-27]와 같은 문항은 톱니바퀴 ㉮의 회전수와 톱니바퀴 ㉯의 회전수의 비 $\frac{4}{5}$가 주어지고 톱니바퀴 ㉮의 회전수 56이 주어졌을 때 톱니바퀴 ㉯의 회전수를 구하는 문제이다. 여기에서 톱니바퀴 ㉮를 부분, 톱니바퀴 ㉯를 전체로 본다면 부분과 분수가 제시되고 전체를 구하는 형식이 되므로 [그림 Ⅲ-26]와 같이 유사한 방식으로 문제를 해결할 수 있다. 따라서 역 부분 분수 스키마 문항이라고 할 수 있다.



[그림 Ⅲ-26] '6학년 1학기 수학 6. 비율 그래프' 단원 학습 내용(역 부분 분수)



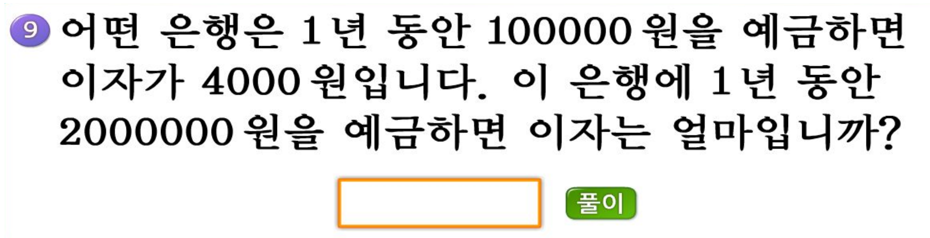
[그림 Ⅲ-27] '6학년 1학기 수학 7.비례식' 단원 학습 내용(역 부분 분수)

라. 반복 분수 스키마의 예

6학년 1학기 7단원의 비례식에서 [그림 Ⅲ-28]와 같은 문제는 100000원 예금에 이자가 4000원일 때 2000000원 예금일 때 이자를 구하는 문제로 $\frac{100000}{4000} = \frac{2000000}{\text{이자}}$와 같이 나타낼 수 있다. 이를 해결하여 이자(전체)를 구하기 위해서는 부분인 2000000을 100000으로 나눈 것 중 4000만큼을 세야한다. 이는 부분과 전

체를 넘어선 분수가 제시되고 전체를 구하는 문제이므로 반복 분수 스키마를 가지고 해결할 수 있는 문항이다.

그러나 이 외에 초등학교 교과서 상에서는 반복 분수 스키마 문항이 거의 제시되지 않는다.



[그림 Ⅲ-28] '6학년 1학기 수학 7.비례식' 단원 학습 내용(반복 부분 분수)

Ⅳ. 결론 및 제언

본 연구는 Steffe와 Olive의 가설에 바탕을 두어서 학생들이 가지고 있는 분수 스키마를 확인하고 분수 스키마들 사이의 관계를 확인하는 데 그 목적을 두었다.

선행 연구에 바탕을 둔 분수 스키마 검사지를 학생들에게 투입하여 확인한 결과 우리는 Steffe와 Olive가 제안한 이론적 스키마 발달 순서에 관한 내용을 확인할 수 있었다. 즉, 학생들은 부분-전체 분수 스키마를 가장 먼저 발달시키며 부분 단위 분수 스키마, 부분 분수 스키마. 역 부분 분수 스키마, 반복 분수 스키마 순서로 발달시켰다. 학생들 간의 차이는 있으나 대부분의 경우 3학년까지 반복-분수 스키마를 발달시키고 4학년에서는 부분 단위분수 스키마를 발달시키며 5학년 이상의 학생들은 부분 분수 스키마를 발달시켰다. 특히 5, 6학년의 70%정도의 학생들이 부분 분수 스키마를 가지고 있으나 역 부분 분수 스키마의 경우는 약 35%, 반복 분수 스키마의 경우에는 약 30%의 학생들만이 스키마를 가지고 있었다. 또한 분리 스키마도 5학년 이후에 많은 학생들이 발달시킴

을 확인할 수 있었다.

교과서의 분수 관련 단원들을 분석한 결과 '2학년 2학기의 5. 분수'에서 전체를 똑같이 나누고 부분을 분수로 나타내기, '3학년 1학기 7. 분수'에서 $\frac{3}{4}$은 $\frac{1}{4}$이 몇 개인지 알기, '4학년 1학기 6. 분수'에서 진분수와 가분수, 대분수의 정의 모두 부분-전체 분수 스키마의 예라고 할 수 있다. 이 외에도 부분=-전체 분수 스키마의 경우 복잡한 분수의 연산 문제 해결을 위해서도 반드시 필요한 스키마라고 할 수 있다. 그리고 3학년 1학기 7. 분수'에서 '4는 20의 몇 분의 몇인가?'의 경우나 '12는 18의 몇 분의 몇인가?'의 경우는 전체와 부분을 제시하고 분수를 묻는 부분 (단위) 분수 스키마의 예라고 할 수 있다. 반대로 부분과 분수가 제시되고 전체를 구하는 역 부분 분수 스키마의 예는 '6학년 1학기 6. 비율 그래프'에서 부분의 비율과 그 값이 나오고 전체의 값을 구하는 문제에서 찾을 수 있다. 반복 분수 스키마의 경우는 초등학교 교육과정 상에서는 해당하는 문제를 거의 찾을 수 없었으나 6학년에서 주어지는 몇 가지 비례식 문제 중 반복 분수 스키마를 가지고 해결해야 하는 문제들이 몇 가지 제시되어 있었다. 이는 앞의 분석 결과에서 초등학교 3학년까지 부분-전체 분수 스키마를 발달시키고 4학년 이상부터 부분 분수 스키마를 발달시킨다는 결과에 일치하는 것으로 학생들의 스키마 발달과 교육과정 상의 학습 내용에 상당히 일치하는 경향을 보인다. 5학년 이상 학생들이 약 35%정도 가지고 있는 역 부분 분수 스키마의 경우에는 6학년이 돼서야 교과서에 관련 내용이 제시되어 있다.

또한 부분 단위분수 스키마의 발달이 부분 분수 스키마의 발달에 선행하며 분리 스키마의 발달이 역 부분 분수와 반복 분수 스키마의 발달을 조장한다는 가설을 학생들의 가지고 있는 스키마의 양적 분석을 통하여 확인하였다. 또한 부분 분수 스키마가 분리 스키마의 발달이 전제조건이 된다는 사실도 가설 검증을 통해 확인할 수 있었다.

이러한 결과를 바탕으로 우리는 5학년은 후에 더 높은 단계의 분수 스키마 (역 부분 분수 스키마와 반복 분수 스키마) 발달을 도와줄 수 있도록 분리 스키마의 발달을 위한 풍부한 바탕을 제공해야 한다는 시사점을 줄 수 있다.

이와 같이 분수 스키마의 발달 패턴과 전제 조건 등에 관한 우리의 연구 결과는 분수 학습 지도에 많은 정보를 제공할 수 있을 것이다. 교육과정은 학생들

의 수학 능력을 무시한 표준 척도에 의한 구성보다는 학생들의 조작 발달의 정도에 기초하여 구성되어야 한다. 연구를 통하여 제시한 분수 스키마의 발달 기준은 학생들이 다음 수준의 분수 스키마로 발달을 촉진하며 몰두할 수 있는 적절한 과제를 제안하며 교육과정 구성에도 도움을 줄 것이다.

또한 우리의 연구는 교실의 학생들이 각자 다른 수준의 분수 스키마를 가지고 있음으로 인하여 다른 수준의 조작활동을 할 것임을 알려준다. 예를 들어 4학년 학생들의 경우 40%정도의 학생들이 부분 분수 스키마를 발달 시켰으나 60%의 학생은 발달시키지 못했음을 보여준다. 이렇듯 학생들이 가지고 있는 스키마의 다양성을 확인하여 분수 학습 시 학생들의 스키마에 적합한 과제를 제시할 수 있도록 해야 한다. 이는 교사에게 매우 도전적이고 어려운 일이지만 학생들의 분수 스키마 발달을 돕고 학습 이해력을 높일 수 있을 것이다. 우리 연구에서 사용한 검사 문항들은 학생들의 분수에 관한 조작적 차이를 평가하는 지침을 제공하고 학생들의 조작적 발달을 도와준다는 교육적 목표 달성에 기여할 것이다.

본 연구에서는 부분 분수 스키마 없이 분리 스키마를 가지고 있는 학생의 경우를 통해 부분 분수 스키마와 분리 스키마는 독립적으로 발생할 것이라는 가설을 세다. 그러나 분석 결과 분리 스키마의 발달 전에 부분 분수 스키마를 발달시킨다는 결론을 도출했으며 학생들의 부분 분수 스키마 문제 해결 경험이 분리 스키마의 발달을 도와준다는 결과를 얻었다. 이러한 결과는 부분 분수 스키마가 분리 스키마 발달에 어떠한 원인이 되는지 영향을 주는지에 관한 가능성을 조사할 필요를 준다. 즉, 현장 사례를 통해 수립한 가설을 양적 연구로 확인하고 추후 실험의 방향을 제시하는 것이다. 이러한 피드백은 새로운 연구 주제들을 제공할 수 있을 것이다.

또한 앞에서도 밝혔듯이 본 연구에서 검증한 사실은 극히 일부 학생의 결과로 모든 학생들에게 똑같이 적용되지 않는다. 따라서 학습 현장 상황에 따라 다른 결과가 도출될 수 있으며 결과에 따라 학생들에게 맞는 분수 지도의 방향을 제시할 수 있을 것이다. 그리고 학생들의 분수 스키마 분석과 함께 수학 교과서 분수 단원의 내용 분석이 이루어져 학생들의 분수 스키마의 발달단계에 맞도록 내용이 구성된다면 학생들의 의미 있는 분수 학습에 큰 도움이 될 것이다.

참 고 문 헌

강홍규, 고정화. (2003). 양의 측정을 통한 자연수와 분수 지도의 교수학적 의의, 학교수학, 5(3), 385-399.

교육과학기술부. (2010). 수학 교과서 2-2. 두산동아.

교육과학기술부. (2010). 수학 교과서 3-1. 두산동아.

교육과학기술부. (2010). 수학 교과서 3-2. 두산동아.

교육과학기술부. (2010). 수학 교과서 4-1. 두산동아.

교육과학기술부. (2010). 수학 교과서 4-2. 두산동아.

교육과학기술부. (2010). 수학 교과서 5-1. 두산동아.

교육과학기술부. (2010). 수학 교과서 6-1. 두산동아.

권성룡 외 11명. (2006). 수학의 힘을 길러주자 왜? 어떻게?. 경문사.

김형조. (2006). 분수 개념 이해 프로그램이 초등학교 수학 학습부진아의 분수개념 이해에 미치는 효과. 석사학위논문. 여수대학교 교육대학원. 여수.

남진영. (2008). 수학적 지식의 구성. 경문사.

우정호. (2004). 수학교육학의 지평. 경문사.

정은실. (2006). 분수 개념의 의미 분석과 교육적 시사점 탐구, 학교수학, 8(2), 123-138.

최근배. (2010). 분할과 반복 조작을 통한 분수지도 탐구. 대한수학교육학회지: 학교수학. 12(3), 411-424.

홍두승. (2008). 사회조사분석. 다산출판사.

Amy J. Hackenberg. (2007). Units coordination and the construction of improper fractions: A revision of the splitting hypothesis, Journal of Mathematical Behavior, 26, 27-47.

Anderson Norton, Jesse L.M. Wilkins. (2009). A quantitative analysis of children's splitting operations and fraction schemes. The Journal of Mathematical Behavior, 28, 150-161.

Anderson Norton and Beatriz S. D'Ambrosio. (2008). ZPC and ZPD: Zone of Teaching and Learning. Jounal for Research in Mathematics

Education, 36(3), 220-246.

Anderson Norton and Andrea McCloskey. (2008). Modeling student's mathematics using Steffe's fraction schemes. Teaching Children Mathematics (August 2008), 48-54.

John Olive, Eugenia Vomvoridi (2006). Making sense of instruction on fractions when a student lacks necessary fractional schemes: The case of Tim, Journal of Mathematical Behavior, 25, 18-45.

Norton, A. H. and McCloskey A. V. (2008). Modeling Students' Mathematics using Steffe's Fraction Schemes, Teaching Children Mathematics (August 2008), 48-54.

Olive, J. (2002). Bridging the Gap: Using Interactive Computer Tools to Build Fractiona Schemes, Teaching Children Mathematics (February 2002), 356-361.

Olive, J. and Steffe, L. P. (2002). The construction of an iterative fractional scheme: the case of Joe, Journal of Mathematical Behavior, 20, 413-437

Siebert, D. and Gaskin, N. (2006). Creating, Naming, and Justifying Fractions, Teaching Children Mathematics (April 2006), 394-400.

Steffe, L. P. (2003). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. Journal of Mathematical Behavior, 20 (3), 267-307.

Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge, Journal of Mathematical Behavior, 20, 267-307.

Steffe, L. P. and Olive, J. (1996). Symbolizing as a constructive activity in an computer micro world, Journal of Educational Computing Research, 14(2), 113-137.

A B S T R A C T *

A Analysis of Children's Fractional Scheme

Hong, Jung Ju

Major in Elementary Mathematics Education
Graduate School of Education
Jeju National University

Supervised by Professor Choi, Keunbae

An fraction is one of the most difficult concept in elementary school. Because of fractional scheme includes complex concept and they can't resolve by whole number scheme. therefore, we need study and analysis about fractional schemes.

Teaching experiments with pair of children have generated several hypotheses about students' construction of fractions(Steffe and Olive). our study aims to test some of these hypotheses in a quantitative study. result of analysis hypothesis A is different from the precedent study. on the other hand, hypotheses B, C, D, E is agreement with the precedent study.

Therefore, in our study affirms the theoretical hierarchy of schemes and provides some indication of development by grade level, sequence of fractional scheme development. also these assessments should inform curricular design and instructional practice. Curricula should be developed based on students' exciting ways of operating, rather than benchmarks set irrespective of students' mathematics. the

---

* A thesis submitted to the committee of Graduate School of Education, Jeju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education conferred in August, 2011.

developmental norms indicated by our assessments should inform curricular design by suggesting appropriate tasks in which students can emerge, while provoking development toward the next level in the fraction scheme hierarchy.

key word : part-whole fractional scheme(부분-전체 분수 스키마), partitive unit fractional scheme(부분 단위 분수 스키마), partitive fractional scheme(부분 분수 스키마), reversible partitive fractional scheme(역 부분 분수 스키마), iterative fractional scheme(반복 분수 스키마), splitting scheme(분리 스키마)

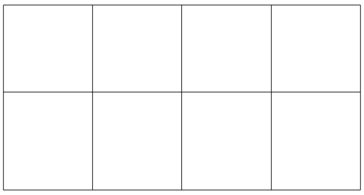
[부록 1] 분수 개념 검사지

분수 개념 검사지

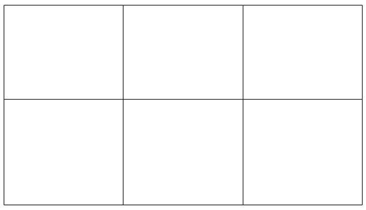
동화초등학교 (　　)학년　(　　)반　(　　)번　이름(　　　　　　)

1. 다음 도형에 분수만큼 색칠하시오.

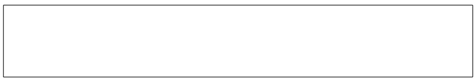
(1) $\frac{1}{8}$



(2) $\frac{4}{6}$

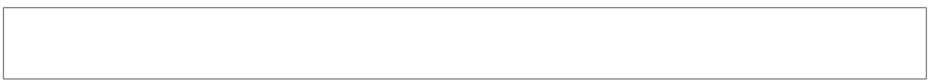


2. 다음의 막대는 처음 막대의 3배와 같습니다. 처음 막대를 그려보시오.

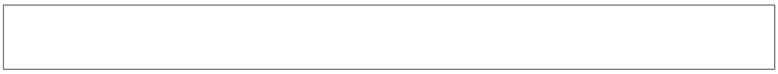


3. 다음의 막대는 처음 있던 막대의 5배와 같습니다. 처음 막대를 그리시오.

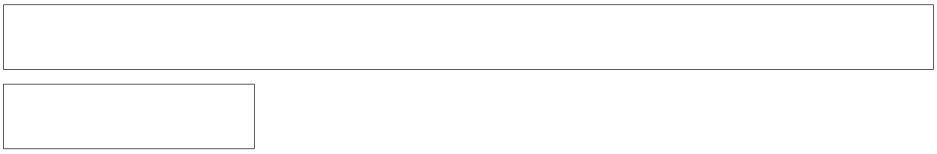
4. 다음의 막대에서 $\frac{1}{6}$을 나타내시오.



5. 다음의 막대에서 $\frac{3}{5}$을 나타내시오.

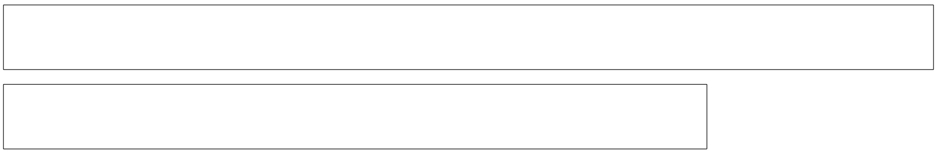


6. 다음의 긴 막대는 전체(1)입니다. 그렇다면 짧은 막대는 분수로 어떻게 나타낼까요?



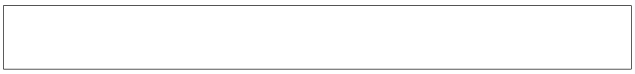
정답: (   )

7. 다음의 긴 막대는 전체(1)입니다. 그렇다면 짧은 막대는 분수로 어떻게 나타낼까요?

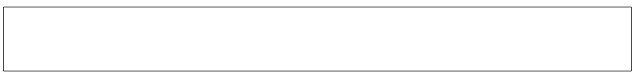


정답: (   )

8. 다음의 막대는 처음 막대의 $\frac{4}{5}$와 같습니다. 처음 막대를 그리시오.



9. 다음의 막대는 처음 막대의 $\frac{4}{3}$와 같습니다. 처음 막대를 그리시오.



[부록 2] 2학년 분수 개념 검사 결과표

분수 개념 검사 평가 결과표 (2학년, N=36)

문항 번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1				1	1	1		
2	1				1	1			
3	1			1	1				
4	1			1	1	1			
5	1					1			
6	1								
7	1			1					
8	1				1				
9	1			1	1				
10	1	1	1	1	1				
11	1			1	1				
12	1			1	1				
13	1								
14	1								
15	1			1	1	1		1	
16	1								
17	1								
18	1								
19	1			1	1				
20	1			1	1				
21	1	1	1						
22	1			1	1				
23	1			1	1	1			
24	1			1	1				
25	1								
26	1								
27	1			1	1	1			
28	1			1	1				
29	1			1	1				
30	1			1	1	1			
31	1			1	1				
32	1			1	1	1			
33	1					1	1		
34	1			1	1	1			
35	1			1	1				
36	1					1			
계	36	2	2	21	23	12	2	1	0

[부록 3] 3학년 분수 개념 검사 결과표

분수 개념 검사 평가 결과표 (3학년, N=33)

번호＼문항	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1			1	1				
2	1			1					
3	1			1	1				
4	1			1	1				
5	1			1					
6	1	1	1	1	1	1			
7	1			1	1				
8	1			1	1				
9	1			1	1				
10	1								
11	1					1	1		
12	1			1	1		1		
13	1			1	1				
14	1			1	1				
15	1				1				
16	1			1	1		1		
17	1			1	1			1	1
18	1			1	1				
19	1			1	1				
20	1			1	1				
21	1	1	1	1	1	1	1	1	
22									
23	1								
24	1			1			1		
25	0								
26	1	1	1	1	1		1	1	
27	1			1	1		1		
28	1			1	1		1		
29	1			1	1				
30	1			1	1				
31	1			1	1				
32	1			1	1				
33	1			1	1	1			
34	1			1	1				
35									
36									
계	32	3	3	28	26	4	8	3	1

[부록 4] 5학년 분수 개념 검사 결과표

분수 개념 검사 평가 결과표 (4학년, N=30)

번호＼문항	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1					1	1		
2	1	1	1	1		1			
3	1	1		1	1	1		1	
4	1	1		1	1	1	1		
5	1			1	1			1	
6	1			1	1	1			
7	1	1	1	1	1				
8	1			1	1			1	
9	1			1	1	1	1		
10	1			1	1	1			
11	1	1	1	1	1				
12	1	1		1	1	1			
13	1	1	1	1	1				
14	1	1	1	1	1	1		1	1
15									
16	1			1	1				
17	1			1	1	1			
18	1	1	1	1	1			1	
19	1				1	1	1		
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	1	1	1	1	1		1		
22	1	1		1	1	1			
23	1			1	1				
24	1			1	1	1			
25	0			1					1
26	1			1	1	1			
27	1			1	1	1	1		
28	1			1	1	1			
29	1			1	1	1	1		
30	1			1	1				
31	1			1		1	1		
32									
33									
34									
35									
36									
계	29	12	8	28	26	19	9	6	3

[부록 5] 5학년 분수 개념 검사 결과표

분수 개념 검사 평가 결과표 (5학년, N=33)

문항 번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1			1	1	1	1		
3	1	1	1	1	1	1		1	1
4	1	1	1	1	1			1	1
5									
6	1	1	1	1	1	1	1		
7	1	1	1	1	1	1	1		
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1								
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1		1	1		
12	1			1	1	1	1	1	
13	1	1	1	1	1	1	1		
14	1			1	1	1	1		
15	1	1	1	1	1		1	1	1
16	1			1	1	1			
17	1			1	1	1			
18	1	1	1	1	1	1			
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1	1		
21	1			1	1	1	1	1	
22	1	1	1	1	1	1	1	1	
23	1	1	1	1	1	1	1		
24	1	1	1	1	1				
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1
26	1	1	1	1	1	1	1		
27	1	1	1	1	1	1	1		
28	1	1	1	1	1				
29	1	1	1	1	1		1		
30	1	1	1	1	1				
31	1	1	1						
32	1	1	1	1	1	1	1	1	1
33	1			1	1	1			
34	1			1	1	1	1		
35									
36									
계	33	24	24	31	30	25	22	12	9

[부록 6] 6학년 분수 개념 검사 결과표

분수 개념 검사 평가 결과표 (6학년, N=31)

문항 / 번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1		1
2	1	1	1	1	1				
3	1	1	1	1	1			1	1
4	1	1	1	1	1			1	1
5	1				1	1	1		
6	1			1	1				
7	1	1	1	1	1	1			
8	1	1	1	1	1	1	1		
9	1	1	1	1	1	1	1		
10	1	1	1	1	1	1	1		
11	1			1	1	1	1		
12	1	1		1	1	1	1	1	1
13	1			1	1	1	1		
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1			1	1	1	1		
16	1	1	1	1	1	1	1		
17	1			1	1	1	1		
18	1	1	1	1	1	1	1	1	
19	1			1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1	1		
21	1			1	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	1	1	1	1	
23	1	1	1	1	1	1			
24	1			1	1	1	1		
25	1								
26	1	1	1	1	1		1	1	1
27	1	1	1	1	1	1	1		
28	1	1	1	1	1	1			
29	1			1	1			1	1
30	1	1	1	1	1	1	1		
31	1			1	1	1	1	1	1
32									
33									
34									
35									
36									
계	31	19	18	29	30	24	22	11	10