석사학위논문

함수 지도에 관한 연구
- 중학교 함수 단원을 중심으로 -

지도교수　현 진 오

제주대학교 교육대학원

수학교육전공

홍 경 호

2005년　8월　　일

석사학위논문

함수 지도에 관한 연구
- 중학교 함수 단원을 중심으로 -

지도교수 현 진 오

제주대학교 교육대학원

수학교육전공

홍 경 호

2005년 8월 일

함수 지도에 관한 연구
- 중학교 함수 단원을 중심으로 -

지도교수 현 진 오

이 논문을 교육학석사학위논문으로 제출함.

2005년 5월 일

제주대학교 교육대학원 수학교육전공

제출자 홍 경 호

홍경호의 교육학 석사학위논문을 인준함.

2005년 7월 일

심사위원장____________________인

심 사 위 원____________________인

심 사 위 원____________________인

<초록>

함수 지도에 관한 연구

- 중학교 함수 단원을 중심으로 -

홍 경 호

제주대학교 교육대학원 수학교육전공

지도교수 현 진 오

수학적 개념은 생활 경험을 통해 얻어지는 것이 아니라 교사에 의해서 전달받아지는 것이므로 수학 학습의 초기 단계에서 교사의 책임은 매우 크다. 그리고 함수의 개념을 학생들에게 설명하는 문제는 대부분의 수학 교사들이 안고 있는 어려움 중의 하나이다.

이 논문은 '어떻게 하면 학생들에게 함수의 개념을 잘 이해시킬 수 있을까?"하는 문제점에 초점을 두어 실제 교육 현장에서 함수의 효율적인 지도 방법을 모색해 보고자 하는 데 그 목적이 있다.

이에 본문에서는 먼저 함수의 개념 및 역사적 변천과정을 통해 함수 개념에 관한 이론적 배경을 살펴보았는데, 7차 교육과정에서는 6차 교육과정과는 달리 함수의 고전적 개념인 종속적 관점에서 함수를 정의하고 있으며, 역동적이고 변화 현상과의 관련성을 중시하였다. 이러한 개념의 변화는 학생들에게 함수를 이해하기 쉽게 하려는 노력의 하나일 것이다

다음으로 함수 개념 지도에 관한 기존의 연구를 살펴보았다. 기존의 연구 결과를 종합한 결과 함수의 개념 지도에서 주목해야 할 점은 개념에 대한 정확한 이해를 바탕으로, 적절한 연계성을 가지도록 지도하며 방법적인 면에서는 다양한 표현과 많은 예제, 실생활과의 연관을 중요한 요소로 지적하고 있다.

이를 바탕으로 본 연구에서는 함수 개념의 효율적인 지도방안을 위한 구체적인 지도 방법을 제시하였는데, 기존의 연구 결과에 Wheatley(1991)에서 제시한 문제중심 교수 학습 방법을 도입하였다. 그 구체적인 방법으로는 함수 개념에 대한 정확한 이해를 돕기 위한 다양한 표현과 많은 예제, 함수에 대한 새로운 명명, 실생활과 연결, 학습지를 이용한 함수 학습 내용의 재구성, 그래프 해석 능력 및 작성 능력 향상, 오류 수정을 통한 이해 능력 향상과 같은 방법을 제시하였고 이를 학습자들에게 적용하여 학생들의 반응을 살펴보았다.

연구 결과 학습자들은 연구자가 개발한 학습지를 통해 함수의 개념을 쉽게 이해하고 있었고, 원리 이해에 자신감을 보였다. 또한 함수에 대한 재미와 흥미를 가지게 되었으며 스스로 학습하고자 하는 의욕을 보였다.

위의 연구 결과를 토대로 함수의 개념을 지도하는 데 있어서 몇 가지의 제언을 하고 싶다.

첫째, 함수 개념 설명에 있어서 학생들의 마음 속으로 파고들 수 있는 적절한 용어를 선택해야 한다.
둘째, 개념을 이해하고 있는지에 대한 적절한 예시 문제를 제시해야 한다.
셋째, 학생들이 그래프를 그리고, 그래프를 해석하는 능력이 많이 뒤지므로 이에 따른 좌표지와 적절한 예제를 준비를 해야 한다.
넷째, 학생들 스스로 생각하며 문제를 풀 수 있도록 학습지를 활용해야한다. 또한 학습지를 구성할

때는 문제만 적어서 풀어보라고 할 것이 아니라 , 예제 문제를 자세히 다뤄서 문제를 풀기 전에 자신감을 갖게 하는 것이 중요하다고 본다. 이는 수업시간에 잘 듣지 못한 학생이나, 이해가 잘 되지 않았던 학생들을 위한 시각화 작업이기도 하다.

※ 본 논문은 2005년 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임.

목　　차

그림목차

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

수학교육의 개혁론자였던 John Perry도 그의 유명한 강의 “수학교육”에서 다음과 같이 말한 바 있다.

“내가 공원으로 있을 적에…공학의 이론을 알고 싶었다. 이용할 수 있었던 단 두 권의 책에는 알 수 없었던 처음 보는 수학의 기호가 있었다…내가 알고 싶었던 것은 단지 $\frac{dy}{dx}$ 와 $\int$의 지식이었다. 돌이켜 생각하여 보면 나는 이들 기호의 사용법을 알고 싶은 일념에 수 년을 보냈던 것 같다”[1)]

John Perry처럼 우리 학생들은 $f(x)$의 뜻을 알려고 수 년을 학교 교실에서 보내고 있는 것일지도 모른다. 홍정아는 “함수의 기호 f의 뜻을 모르겠어요...” “선생님! 일차함수는 알겠는데요... 일차함수에서 ‘함수’는 어떤 뜻인가요?”라는 질문을 자주 접한다고 했듯이[2)] 함수에 대한 문제는 우리 수학교사들이 공통적으로 안고 있는 문제라고 생각한다.

실제로 수학의 단원 중 가장 어려운 분야를 차례대로 3개만 적으라는 설문을 2, 3학년 학생들에게 해봤더니 역시 대부분의 학생들이 함수를 택했다.[3)]

수학 학습의 초기단계에 있어서 교사의 책임은 매우 크다. 왜냐하면 수학적 개념이란 결코 범속한 생활 경험을 통해서는 얻어질 수 없는 것이고 과거의 수학자들이 만들어 낸 개념을 써서 비로소 얻어지는 것이므로 그들 개념들은 어떤 방법으로든 교사에 의하여 전달받아져야 하는 것이기 때문이다.[4)]

이 논문은 어떻게 하면 학생들에게 함수의 개념을 잘 이해시킬 수 있을까? 라는 문제에 초점을 두어 실제 현장에서 함수의 지도방법을 어떻게 할 것인가에

---

1) 오병승(1986), “수학학습에서의 기호의 의미와 기능”,「수학교육논총」, 제 4집, 대한수학회,p.65~66.

2) 홍정아(2000), “중학교 함수단원의 연계성에서 각 개념에 대한 학습자의 이해수준 연구”, 석사학위논문, 강원대학교 교육대학원, p.2.

3) 부록1 - <수학 단원에 대한 설문지 및 결과표 , 2004. 03. 16.>

4) 오병승(1986), 전게서, p.84.

대해 논의함으로써 현장학습지도에 도움이 되고자 하는데 그 목적이 있다.

2. 연구의 범위

위와 같은 목적을 달성하기 위한 본 논문의 연구 내용을 살펴보면 다음과 같다. Ⅱ장에서는 함수의 개념에 관한 이론적 배경으로 함수의 개념 및 역사적 변천과정과 함수 개념에 관한 기존의 연구를 살펴보았고, Ⅲ장에서는 함수 개념의 효과적인 지도방안을 위한 구체적인 지도방법 제시와 이를 통해서 만든 학습지를 푼 학생들의 반응을 살펴보았다.

3. 연구의 제한점

본 연구는 함수 지도에 대한 구체적인 지도방법을 제시했지만, 실제 수업시간과 병행하는 검증과정을 거치지 못하였다. 따라서 제시된 연구 결과의 일반화에 한계가 있을 수 있다.

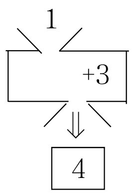
이러한 한계점을 극복하기 위해서는 본 연구 결과를 실제 수업에 직접 적용해봄으로써 그 효율성을 점검해보고 지속적인 후속 연구가 필요하다고 본다.

Ⅱ. 함수에 관한 이론적 배경

함수의 개념을 알기 위해서는 함수의 어원, 정의와 생겨난 역사적 배경을 아는 것이 당연하리라 본다. 지금의 함수 개념이 성립되기까지 기나긴 역사적 발생 과정과 정규화된 정의를 내리기까지 수많은 학자들의 노력이 있었으며, 함수를 학습자에게 보다 효율적으로 가르치려는 부단한 노력이 있었다. 따라서, 함수를 지도하는 데 있어 함수의 개념, 역사적 변천과정, 함수 개념에 관한 기존의 연구를 고찰해보는 것이 함수개념을 지도하는 데 있어서 큰 안내자의 역할을 할 수 있을 것이다.

1. 함수의 개념

함수(funtion)라는 용어는 1694년 라이프니츠(Gottfried W. Leibniz)가 라틴어(funtio)로 처음 사용했다고 알려지고 있는데, 추기에는 곡선 위의 점의 좌표나 곡선의 기울기, 곡률반경 등과 같은 곡선과 관련된 양을 나타내는데 사용되었다.[1]
이 함수가 중국에 전래되었을 때 음과 의미가 비슷한 것으로 번역되어 함수(函數)가 되었다고 한다. 이렇게 전달된 말은 일본에서는 관수(關數)라고 불린다.[2]
"函數"의 函은 '기능을 나타내는 상자'를 의미하고, 이 함(函)이란 글자로 함수의 개념을 함께 나타내고 있는 것이다. 이러한 개념의 함수는 하나의 변량의, 다른 변량에 대한 수치적 의존성을 말한다고 할 수 있다. 函數란 한자의 뜻을 가장 적절하게 사용한 것이 아래의 그림과 같다고 할 수 있다.



즉, 이 상자는 들어오는 값을 정해진 규칙에 따라 변형시켜서 어떤 값을 만들어 내는 것이다. 하지만 이 상자가 기호인 'f'로 바뀌면서 많은 학생들이 이해에 어려움을 나타내고 있다.

---

1) 김인수 (1997),「해석학의 기초개념과 학습지도」, 전남대학교출판부, p. 136.
2) 나카노리오, 박시진 역(2001),「수학의 의문64」,자음과 모음: 강옥기 외(2002),「교사용지도서 8-가」,(주)두산, p.199에서 재인용.

함수의 개념이 학교 수학에 도입된 것은 20세기 초 독일의 Klein이 수학 교육 개혁을 주창한 이후이다. ‘함수적 사고’(functional thinking) 교육의 중요성을 강조하고 그 절정으로서의 미적분 지도의 필요성을 주장한 Klein의 주도로 독일에서 수학 교육 개혁 운동이 일어나고, 독일 학교수학의 헌장이라고 일컬어지는 ‘Meran 교육과정’이 그러한 정신에 따라 제정된 이래, 여러 가지 함수와 그 미분법·적분법은 학교수학의 또 하나의 커다란 줄기를 이루게 된 것이다. Klein은 “함수 개념은 단순히 하나의 수학적 방법이 아니라 수학적 사고의 심장이요 혼이다”(Hamley, p. 53)라고 하면서 함수 개념이 학교수학의 중심 관념이 되어야 한다고 주장하였다. 그리고 그는 정신 도야의 핵심은 개념적 사고 방법에서 개념이 수학 수업에 효소처럼 스며들도록 해야 하며 학생들에게 살아있는 자산이 되도록 지도되어야 한다고 주장하였다.[3)]

그러면 함수 정의에 대한 고전적인 개념과 현대적인 개념을 살펴보자.

첫째, 수집합의 어느 한 원소를 나타내는 기호를 변수라 하자. 두 변수 x와 y가 있어서 x에 어떤 값이 주어지면 어떤 규칙이나 대응에 의하여 자동적으로 y에 값이 주어질 때, y를 x의 함수라고 한다. 마음대로 값을 줄 수 있는 변수 x를 독립변수, x의 값에 따라 결정되는 변수 y를 종속변수, x가 취할 수 있는 가능한 값들의 집합을 함수의 정의역, y가 갖는 값들은 함수의 치역이라 한다. (Dirichlet)

둘째, 두 집합 A, B가 주어졌을 때, A의 각 원소에 B의 원소가 꼭 하나씩 대응되는 규칙이 있으면 이 대응 규칙을 A에서 B로의 사상이라고 하고, 특히 B가 수로 이루어진 집합이면 이 사상을 함수라고 한다(R. Dedekind)

셋째, 두 집합 A, B가 있을 때 모든 $x \in A$에 대하여 x와 주어진 관계에 있는 $y \in B$가 꼭 하나 있으면 그 관계를 함수관계라고 정의함으로써 함수를 순서쌍의 집합 $A \times B$의 부분집합으로 정의하였다.(N. Bourbaki)[4)]

첫째 정의는 함수의 고전적인 개념으로서 7차 교육과정에서 중등학교 함수 개념 지도가 이 관점을 따르고 있다. 종속적 관점에서 보고 있으므로, 역동적이고 변화현상과의 관련성이 풍부하다.

둘째 정의는 현대적인 개념으로서 6차 교육과정이 이 관점을 따랐으며, 대응 규칙을 강조한 관점으로서 정의역, 치역, 일대일 대응, 함수의 합성 등의 개념을 유도하는데 적합한 정의이지만 진술과정의 몇 부분에서 발생되는 미묘한 표현 및 서술의 차이로 파생되는 문제점이 있다.

---

3) 우정호(2000), 「학교수학의 교육적 기초」, 서울대학교출판부, p. 353.

4) 김인수(1997), 상게서, p. 137 ~ 138.

셋째 정의는 집합론적인 관점으로 극히 일반화되고 추상화되어 있어서 학생들은 함수 개념의 본질을 이해하는데 어려움이 많다.
위에 나와 있는 세 가지의 정의들 모두가 함수를 설명하고 있다. 관점의 차이를 벗어나서 모두가 함수를 설명하고 있지만 각자가 완벽한 것은 없다. 어쩔 수 없이 서로를 의지해야하는 상호보완적인 관계라고 생각한다. 결국 함수개념은 문맥에 따라 역동적인 변화현상 가운데의 종속 관계를 기술하고 해석하고 예언하기 위한 수단으로서의 변수 측면과 그 규칙성을 나타내는 식 표현과 그래프 표현 그리고 다양한 대응 관계적 측면을 포괄하는, 수학 내적 외적인 제현상을 이해하고 조직할 수 있는 수단으로 작용해야 하며, 현장에서의 함수 지도 방법은 6차와 7차 교육과정 속의 함수의 개념인 대응적인 관점과 종속적인 관점을 동시에 가르쳐야 한다고 생각한다.

2. 함수 개념의 역사적 변천과정

함수의 개념은 비례관계, 종속변수, 식, 대응 등과 같이 오랜 역사적 발생과정을 거쳐 세련되어 온 매우 강력한 개념으로 수학의 밑바탕에 폭넓게 스며있는 기본적인 개념이다.

함수 개념의 근원은 고대 바빌로니아 사람들의 수표에서 찾아 볼 수 있다. 그들은 천체의 위치의 주기성을 발견하고 경험적 자료를 바탕으로 천체의 운동을 나타내는 경로를 추정하고 이를 수표로 나타내었다. 그리스 천문학자들은 구면삼각법을 사용하였으며 천체 운동을 기술하는데 원운동 모델을 이용하였는데 이는 수학적으로 보면 천체운동을 삼각함수로 기술한 것이다. 그리스 천문학자들이 오늘날 삼각함수라고 불리우는 것을 알고 있었다는 사실은 Ptolemaeus의 천문학책(Great Syntax) 속에는 현의 표가 나오는데 원에서 중심각 α에 대한 현의 길이와 사인값 사이의 관계는 $chod\,\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha$임을 보면 알 수 있다. 이를 라틴어로 번역하여 'sinus'가 되었다고 한다. sine보다 오래된 기울기나 그림자의 길이와 관련되어 자연스럽게 제기된 tangent로 그 기원은 바빌로니아 수학까지 거슬러 올라간다. 일차함수, 이차함수, 삼차함수와 같은 초등함수의 기원 역시 비록 그것이 의식적으로 다루어지지는 않았지만 바빌로니아 수학에서 찾아볼 수 있다.[5)]

좌표계의 사용은 Apollonius(기원전 262~190)의 <원뿔곡선>에서 찾아볼 수가 있다. 일반적으로 보조선을 응용한다거나, 그 특별한 경우로서 지름과 끝점에서 그은 접선을 활용하는 것은 그것들이 서로 직각으로 만나든, 비스듬히 만나든 본질적으로 좌표축을 사용하는 것과 같았다.[6)]

17세기에 John Napier는 <놀라운 로그체계의 기술>(Mirifici logarithmorum canonis descriptio)에서 로그를 보여줬다. 하지만 로그함수의 개념은 Napier의 로그에 관한 정의와 로그에 대한 그의 모든 저작에 들어 있으나 그에게 함수관계는 최대의 관심사가 아니었다. Napier가 로그체계를 애써 쌓아올린 것은 단 하나의 목적, 곧 계산, 특히 곱셈과 나눗셈의 간소화에 있으므로 개념 정립에는 도달하지 못했다.[7)]

---

5) 우정호(2000), 전게서, p.358~359.

6) 칼 B외(2000),「수학의 역사 상·하(A history of mathematics)」, 양영오·조윤동 역(2000), 경문사, p.253~254.

7) 칼 B외(2000) , 상게서, p.508~511

개념화된 함수는 17세기에 이르러 역학에서 물체의 운동을 곡선으로 나타내어 연구하는데 시간과 거리가 같은 변량 사이의 관계로서 수학에 도입되었다. 함수란 용어는 17세기에 Leibniz와 Bernouilli의 서신에서 '변수와 상수가 무엇이든 그것으로 어떠한 방식으로든 구성된 양을 그 변수의 함수라 하자.' 라고 함으로써 함수에 대한 형식적인 정의를 최초로 하였고 두 학자의 서신 왕래에서 라틴어의 funtio에서부터 함수라는 용어를 사용하게 되었다.

18세기에 Euler와 d'Alembert 가 함수의 기호인 'f'를 처음 사용하였다. Euler는 그의 저서 무한소 해석 입문(Introductio in analysin infinitorum)에서 변량의 함수를 "변량과 정량(수)으로 된 임의의 해석적 식"이라고 정의한다.[8] 그는 그래프가 하나의 연속곡선으로 나타나는 것에 대하여 함수라는 용어를 사용하였으며, 식의 형태에 따라 양함수, 음함수, 대수함수, 초월함수라는 용어를 사용하였다. 함수에 대한 이러한 개념은 중·고등학교 교육과정 속에서 수학을 배우는 학생들 대부분에 형성되는 개념인 것이다.

19세기에 들어와 Cauchy는 '변수들 사이에 어떤 관계가 있어서, 어느 한 변수의 값이 주어지면, 다른 것의 값이 정해질 때, 후자를 전자의 함수'라고 불렀고, Dirichlet는 Cauchy의 정의를 엄격히 지켜 아래와 같이 확장하여 정의하였다.

> $a < x < b$인 모든 x의 값에 대하여 y의 값이 대응하면,이 구간에서 정의된 y는 변수 x의 함수이다. 또한 이 대응이 어떤 식으로 만들어지든 그것은 관계없다.'

이는 현대적 의미의 함수 개념과 가장 유사한 정의이며, 대응관계로 함수를 정의하는 일반적인 함수 개념이 제기된 것이다. 이러한 Dirichlet의 정의는 미적분학을 도입하는 단계에서 접하는 것으로 대단히 넓은 의미를 지니는 것이다. 즉 x와 y의 관계를 어떤 해석적인 식으로 나타낼 수 있느냐 하는 것은 문제로 생각하지 않고 두 수의 집합 사이의 대응 관계를 강조하고 있다. 1829년에 Dirichlet 함수라고 불리우게 된 함수의 한 예를 제시하였는데 그 함수는

$$f(x) = \begin{cases} c, & x\text{가 유리수일때} \\ d, & x\text{가 무리수일때} \end{cases}$$

이다. Dirichlet 함수는 해석적 표현으로 주어지지도 않고, 자유롭게 그려진 곡선도 아닌 어디에서도 불연속인 함수의 예로서 임의의 대응으로 함수의 개념을 설명하는 것이다.

19세기에 함수론에 눈부신 발전이 있은 후 임의의 집합들 사상으로서의 함수의 개념이 20세기 수학에서 점차 지배적인 개념이 되었다.

---

8) 칼 B외(2000) , 상게서, p.723~724.

이 후 함수의 개념은 변수 x, y를 실수에서 복소수까지 확장해 갔으며, Cantor의 집합론, Dedekind가 확립한 사상의 개념에 의해서 뒷받침되었는데, 1887년에 Dedekind는 두 집합 A, B가 주어졌을 때 A의 각 원소에 대응하여 B의 원소가 오직 하나씩 대응되는 규칙이 있으면 이 대응 규칙을 'A에서 B로의 사상'이라 하였고, 특히 A와 B가 수로 이루어진 집합이면 이 사상을 함수라 정의하였다. 1887년에 Volterra는 '함수들의 함수'라고 부르는 범함수를 정의하였고, 1939년에 Bourbaki는 또한 함수를 순서쌍의 집합 A×B의 부분집합으로 정의하기도 하였다. 이러한 정의는 함수를 광범위하게 정의한 것이고 이전의 함수를 해석적인 식과 같은 것에 의해 출발시키려는 태도를 완전히 바꾸어서 두 집합 사이의 일대일 대응관계에 의하여 함수를 정의하려는 것이다.[9)]

오늘날의 함수 개념은 운동학적인 변수 측면이나 규칙성과 알고리즘적인 대수식 표현 및 그래프적인 표현에 구애되지 않는 '임의의 집합 사이의 임의적인 일가적 대응 관계' 곧, 적집합의 부분집합인 순서쌍의 집합이란 Bourbaki식의 관계적 정의로 일반화되어 현대적인 함수개념을 초등화한 내용이 학교수학에 조기에 도입되게 되었다.[10)]

9) 조한숙(1991), "함수 개념 형성에 관한 연구", 교육학석사학위논문, 서울대학교 대학원 수학교육과, p. 11 ~ 13.

10) 우정호(2000), 전게서, p.361 ~ 362.

3. 함수 지도에 관한 기존의 연구

함수 개념에 관한 기존의 연구는 다음과 같다.

이승빈(2000)은 “함수지도에 관한 연구”에서 함수적 사고를 신장시키기 위해서 효율적 지도방법으로는 정의구역에 따라 그래프가 다르게 나타남을 주시시킬 것, 개념의 지도에 있어서 혼동이 없을 것, 선수학습에 의한 효과적인 학습지도가 필요하다고 했다.

정혜일(2002)은 “함수의 개념과 함수지도 방안 연구”에서 제7차 수학과 교육과정의 방향과 규칙성과 함수 단원을 어떻게 다루고 있는지 중학교 1, 2, 3학년의 단계별 내용을 살펴보았고, 효율적 지도방안으로는 8-가 범위에서 각 차시별로 물음을 통해 지도하고자 하는 개념을 이끌어 내고 예제를 통하여 정의역의 범위를 확장시키며 문제를 학생들에게 제시하도록 하였다.

김미경(2000)은 “함수지도에 관한 연구”에서 여태까지 함수시간은 대응에 대한 설명과 규칙 찾기, 함수개념의 정의부터 시작되며, 교과서의 대부분의 예에서도 실생활과의 거의 관계가 없는 것으로 짜져있다고 보면서 실생활과 접목시킬 수 있는 예를 제시하였으며, 이를 통해 학생들 스스로 수학화의 경험을 하도록 유도하자고 했다.

강동원(2000)은 “함수의 효율적인 지도방안 연구”에서 몇 가지의 지도상 유의점을 제시하였다. 첫째, 대응관계를 이용하여 함수의 정의를 이해시킬 때 그림으로 나타내면 이해하기 쉽다. 둘째, 주어진 점의 좌표의 위치를 좌표평면에 능숙하게 나타내도록 하여 순서쌍 (x, y)와 (y, x)가 다름을 알게 하고 몇 사분면의 점인가 확실하게 알 수 있도록 한다. 셋째, 정의역에 따라 그래프가 다르게 나타남을 주지시켜 그래프 그리는 방법을 정확히 지도하여야 한고 하였다.

이근정(2001)은 “발견학습 이론을 적용한 수학 교수·학습 지도에 관한 연구”에서 발견학습이론을 적용할 수 있는 구체적인 학습지도안을 작성하였다.

김민정(2003)은 “수학7-가 함수단원 지도에서 학습자료 중심의 상호작용에 의한 효과”에서 실험집단은 학습자료를 중심으로 학생들간의 상호작용을 통한 수업을, 통제집단은 학습내용을 강의식으로 수업한 후 실험집단과는 다른 활동지를 풀게하였다. 연구 결과는 수학 수업의 학업성취도면과 수학적 자기효능감면에서 유의수준 .05에서 모두 유의한 차이가 나타났으며, 학습자료중심의 상호작용을

통한 수업을 지지하였다.

한혜진(2001)은 “ 수학7-가 함수 단원 분석과 중학생들의 함수 개념 연구”에서 1, 2학년의 함수 개념에 대한 관점에 대해 연구하였고, 7차 교과서가 대응중심적 관점의 6차 교과서에서 종속 중심적 관점으로 전환하는 과도기임을 보여줬다고 했으며 종속 중심의 관점의 함수 전개를 위해서 함수의 표현 중 그래프를 많이 활용 하여야한다고 했다.

박희진(1993)은 “함수 개념 지도유형에 따른 학습효과에 관한 연구”에서 실험집단은 종속 중심적 관점의 함수 개념 지도, 통제집단은 대응 중심적 관점의 함수 개념 지도를 3주간 실시하였고, 연구 결과는 99% 수준에서 매우 유의적인 차이가 있는 것으로 나타났다. 즉, 종속 중심적 관점의 함수 개념 지도가 대응 중심적 관점의 함수 개념 지도보다 효과적이었다고 했다.

최윤경(2001)은 “효율적인 함수지도 방안연구”에서 여러 종류의 교과서를 살펴보고 대체로 문제의 양은 크게 부족하지 않았으나 개념은 너무나 간단하고 그러한 개념이 어떻게 만들어 졌는지 어떻게 이용되는지 보다는 계산과정을 위한 전단계정도로 취급하고 있다고 보았으며 ,학교실정과 부족한 수업시간을 고려해서 교과서를 재구성해 보았다.

박현정(2002)은 “함수 단원에서의 오류유형과 지도상의 유의점에 관한 조사연구”에서 함수의 효과적인 지도를 위해 다음과 같은 유의점을 지적하였다. 첫째, 함수의 개념이나 용어들을 분명히 이해하지 못하는 학생들이 많으므로 함수의 개념을 다양한 표현으로 알기 쉽게 해야 한다. 둘째, 함수의 그래프를 지도할 때 좌표평면 위에서 직선이나 곡선으로 그려지는 도형이라고 생각하기 쉬우나 점들의 집합이 함수의 그래프가 됨을 인식시킬 필요가 있다. 셋째 수학의 확장적 사고를 기를 수 있는 함수의 정의와 관련된 많은 예제나 새로운 지도법을 적용해야 한다. 넷째, 함수의 실생활과 관련시켜 관계로부터의 지도를 의미있게 경험할 수 있도록 해야한다고 했다.

민경호(2002)는 “중학교 수학에서의 함수의 생활속 응용에 대한 연구”에서 비례·반비례, 함수의 개념, 함수의 그래프 세 부분에 대하여 교재를 개발함으로써 실생활 속에서 함수를 찾아내서 쉽고, 재미있는 내용으로 구성하려고 하였다.

홍정아(2000)는 “중학교 함수단원의 연계성에서 각 개념에 대한 학습자의 이해

수준 연구"에서 함수 개념에 대한 본질적인 이해 없이 수학공식을 적용하여 문제 풀기에만 집중하므로 문제해결 능력이 신장되지 못하고 학습자의 학습동기를 낮추고 있다고 보면서, 하나의 개념에 대한 정확한 이해를 바탕으로 상위개념에 대한 이해도를 확장시켜 나가야한다고 보았으며, 이를 위해서는 제7차 교육과정에 따른 수학교과서의 함수단원이 적절한 연계성이 있는지 학습자의 이해수준을 연구하였다. 학년별 이해수준 분석에서 흥미로운 사실은 집합간의 대응관계에서 함수인 것을 고르라는 문제는 1, 2, 3학년이 각각 88.89%, 82.38%, 92.65%의 정답율을 보인 반면 그래프에서 함수를 고르라는 문제에서는 1, 2, 3학년이 각각 28.40%, 22.38%, 23.53%의 정답률을 보였다. 또한 $X=\{-2,-1,0,1,2\}$일 때, $f(x)=-3x$의 그래프를 그리라는 문제는 1, 2, 3학년이 각각 35.39%, 34.76%, 37.25%의 정답률을 보였다. 그리고 반비례 문제(y가 x에 반비례할 때, $x=4$일 때 y가 3이다. 그러면, $x=2$일 때, y의 값은 얼마인가?)에서는 1, 2, 3학년이 각각 50.89%, 16.19%, 13.24%의 정답률을 보였다.

이상에서 살펴본 바를 종합하면 함수의 개념 지도는 '함수란 무엇인가?'에 대한 개념의 정확한 이해를 바탕으로, 학년간 적절한 연계성을 가지고 함수의 내용을 지도해야하며 방법적인 면에서는 다양한 표현과 많은 예제, 실생활과의 연관을 중요한 요소로 지적하고 있다.

필자는 위의 내용을 바탕으로 함수에 대한 지도방법을 다음과 같은 기준을 설정하여 지도하고자 한다.

첫째, 함수의 개념을 지도할 때는 종속 중심적이냐 대응 중심적이냐 하는 관점의 문제가 아니라, 어떻게 이해를 시킬 것인가에 초점을 맞춰야 하며 이를 위해서는 필요시 두 가지를 고루 적용한다.

둘째, 첫 단추를 바르게 꿰어야 옷을 잘 입을 수 있듯이 함수 개념 설명에 있어서 학생들의 마음 속으로 파고들 수 있는 적절한 용어를 선택한다.

셋째, 학생들이 그래프를 그리고, 그래프를 해석하는 능력이 많이 뒤지므로 이에 따른 적절한 준비를 한다.

넷째, 교과서를 분석하여 정리함으로써 학생들 스스로 생각하며 문제를 풀 수 있는 기회를 제공한다.

다섯째, 실제 수업에 바로 적용시킬 수 있는 방법을 제시한다.

Ⅲ. 함수 지도의 효과적 방안

교수 학습에 있어서 효과적인 지도방법은 주어진 것을 얼마만큼 잘 전달하고 잘 이해시킬 수 있느냐에 달렸다고 해도 과언이 아닐 것이다. ‘함수’라는 ‘의미’를 학생들에게 어떻게 ‘전달’시킬 것인가?

사실 ‘의미전달’이라는 말속에는 ‘이해되지 않았던 사실을 어떻게 이해시킬 것인가’ 라는 문제가 내포되어 있다. 어떤 사람이 지금까지 이해되지 않았던 사실을 잘 이해할 수 있도록 의도적으로 이루어지는 커뮤니케이션을 우리는 ‘설명’이라고 말할 수 있다. 모든 학습에서도 그렇지만 수학학습에서 특히 이 설명이란 매우 중요한 역할을 한다. 왜냐하면 수학의 학습에서 모든 개념은 새롭게 수학자의 내부에서 만들어져야 하는 것이지만 그것은 과거의 수학자가 만들어 낸 개념을 사용함으로써 비로소 가능한 것이므로 그 개념은 설명되어지지 않으면 안되기 때문이다.[11)]

필자는 학생들에게 함수의 개념을 어떻게 전달할 것인가에 초점을 맞췄고 이를 위해 치밀한 구성을 꾀하려고 노력했다. 또한 문제중심 교수·학습을 주창한 Wheatley(1991)가 제시한

① 출발점에 있어서 모든 학생들에게 접근하기 쉬운 것이어야 하고
② 결론을 도출해낼 수 있도록 학생들을 도와주어야 하고
③ “만약 ~라면 어떻게 될까?” 라는 질문을 고무해야 하고
④ 학생들이 자기 자신의 방법을 사용하도록 격려해야 하고
⑤ 토론과 대화를 조장해야 하고
⑥ 방법이 풍부해야 하고
⑦ 정해진 어떤 곳에 이르도록 해야 하고
⑧ 놀라운 요소가 있어야 하고
⑨ 재미있어야 하며
⑩ 발전적으로 확장될 수 있는 것이어야 한다.[12)]

을 토대로 함수 개념 이해를 위한 구체적인 지도방법을 들어 보고자 한다.

---

11) 오병승(1986), 전게서, p.65~66.
12) 우정호(2003), 「수학교육의 지평」, 경문사, p.28~29.

1. 함수 지도의 구체적 방법

1) 함수의 정의

앞에서 살펴본 바와 같이 함수는 종속 중심적인 관점과 대응 중심적인 관점 두 가지 관점에서 정의를 내릴 수 있다.

종속 중심적인 관점에서 볼 때 함수의 정의는, 변하는 대상으로서의 동적인 측면을 강조하면서, 두 양 x, y가 있을 때 x의 값이 변하면 y의 값도 그에 따라 변하는 관계이며 y는 x의 함수라고 한다. 따라서 이와 같은 관점에서는 변수라는 개념이 따로 설명되어야 하며, 공역이 정의될 필요가 없다.

중학교 7차 교육과정에서도 함수의 개념을 종속 중심적인 관점에서 정의를 내리고 있는데, 함수 개념의 전개를 보면 정비례와 반비례를 정의하고 난 뒤 함수 $y=f(x)$를 정의하고 있다. 그러나 이와 같은 종속 중심적인 관점의 함수 정의는 정비례, 반비례를 배우기 앞서서 "함수가 뭘까?"하는 의문점을 가지게 만들고 있으며, 함수의 정의를 대응적인 관점에서 설명하고 있는 고등학교 과정인 수학 10-가의 내용과 연계성이 없다는 문제점을 가지고 있다.

대응 중심적인 관점에서의 함수의 정의는 두 집합 X, Y에서 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 하나씩만 대응 될 때, 그러한 대응 f를 집합 X에서 집합 Y로의 함수라고 정의하고 있다. 그런데 이와 같은 정의는 두 집합 사이의 관계를 강조함으로써 간단히 함수의 정의를 설명할 수 있다는 장점이 있지만, 임의 없는 두 집합의 대응까지 확장시킴으로써 함수의 개념을 너무 추상적으로 확장시킴으로써 학생들이 이해하는데 어렵다는 단점을 가지고 있다.

그러므로, 중학교 수학 교육에서 함수의 개념 정의는 고등학교 교육과정과의 연계성을 위하여 대응적인 관점에서 함수 정의를 하되, 임의 없는 두 집합 사이의 관계 설명을 지양해야한다. 그리고 함수에 대해 학생들이 쉽고 재미있게 이해할 수 있고, 오래 기억할 수 있도록 학생들의 일상 용어를 사용하여 새로운 명명을 하면 더욱 좋다. 다음은 그러한 예이다.

X의 원소가 모두 대응되어야 하므로 간단히 : X 몽땅
Y의 원소에 한 개씩 만 대응되어야 하므로 : 갈래치지 않기

정리하면, 함수란 $\begin{cases} 1)\ X \text{ 몽땅} \\ 2)\ \text{갈래치지 않기} \end{cases}$를 만족하는 대응이다.

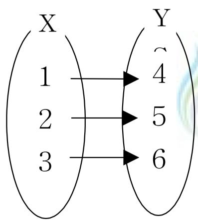
(Y는 상관이 없고, X에서만 확인하면 된다.)

이와 같은 새로운 명명을 통하여 함수를 설명하고 난 뒤 학생들이 얼마나 함수의 개념을 잘 이해하고 있는지 문제를 통해 알아보는 활동을 하면 더욱 좋다.

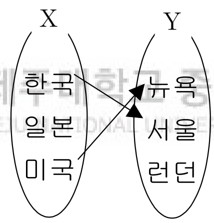
다음은 함수의 정의를 잘 이해하고 있는지 알아보는 예이다.

(예제1) 다음의 예를 보면서 대응과 함수를 알아보자.

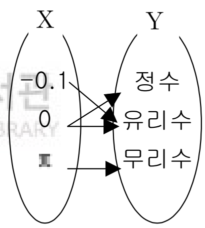
①



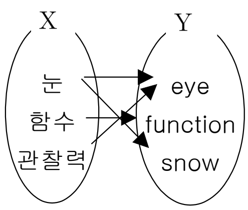
②



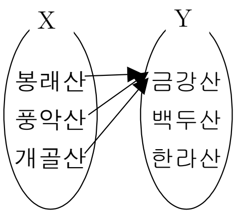
③



④



⑤



(풀이) ① X의 원소가 모두 대응되었고, X의 한 원소에 Y의 원소 두 개가 대응되는 것이 없으므로 함수이다.

② X의 원소 중 일본이 대응되지 않으므로 함수가 아니다.

③ 0이 두 개에 대응이 되므로 함수가 아니다.

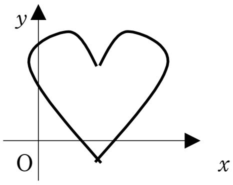
④ 눈이 두 개에 대응이 되므로, 함수가 아니다.

⑤ 함수의 두 가지 조건을 만족하므로, 함수이다.(이 함수를 우리는 상수 함수라고 부르는데, 밥을 하기 위해 전기 밥솥에 쌀과 물을 넣는

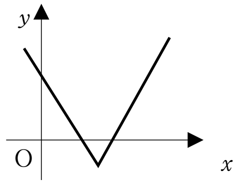
다. 그러면 전기밥솥에 의해 밥이 되는데, 이 전기밥솥과 같이 X 의 모든 원소들을 Y의 한 원소에 대응시키는 역할을 하는 함수이다)

(예제2) 함수의 정의를 그래프에서 자연스럽게 확인해 보자.

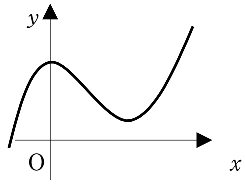
①



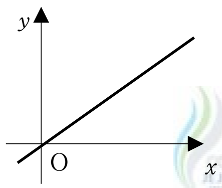
②



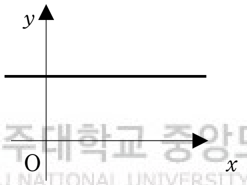
③



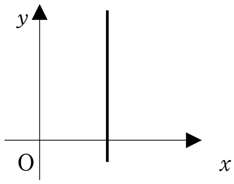
④



⑤



⑥



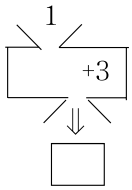
(풀이) 학생들은 대응 관계 속에서 함수를 찾아내라면 쉽게 찾아내지만, 그래프로 옮기면 어렵게 느낀다. 그러므로 반드시 확인해야 한다. 아직 좌표평면을 배우지 않았으므로 X의 원소를 x축에 Y의 원소를 y축에 모아 놓았다고 설명한 뒤, 함수의 대응관계가 그래프에서는 어떻게 보이는가에 집중시키며, 자연스럽게 위에 나와있는 내용들을 가볍게 설명한다. (예를 들어, ①번의 경우 사랑은 함수로 나타낼 수 없는 아주 복잡한 관계이다 등.) 이외에도 포물선, 쌍곡선, 원, 이차함수, 삼각함수, 가우스함수 등 함수에서 다루는 다양한 그래프를 제시함으로 그래프에 대한 친근감을 갖게 한다.

2) 함수의 표현방법

그렇다면 $f(x)$의 의미는 학생들에게 어떻게 설명할 것인가? 이는 기호를 시각화해주는 방법을 택하면 좋다. 다음을 보자.

함수란 어떤 값을 넣으면 다른 값으로 (그냥 나오기도 함 : $y=x$) 바꿔주는

상자를 말한다.



위와 같이 기호를 시각화하여 $f(x)$를 설명하면 학생들은 금방 이해하며 문제를 푼다. 하지만, 똑같은 상황이라 하더라도 학생들은 $f(x)=x+3$에서 $f(x)$를 $f(1)$로 치환하여 답을 구하라는 문제는 이해하기 힘들어한다. 이러한 점 때문에 $f(x)$의 의미를 제대로 파악하게 하기 위해서는 많은 노력이 필요하다.

지금부터 함수의 여러 가지의 표현을 학생들에게 이해시킬 수 있는 방법을 찾아보도록 하자. 먼저 실생활과 연관된 다양한 예를 제시하는 방법을 들 수 있다.

물을 어떤 상자에 집어넣었더니 얼음이 되어 나왔다. 그 때 물을 얼음으로 바꾼 냉장고가 바로 함수이다.

입력 (물) ⟶ $\boxed{\text{냉장고}}$ ⟶ 출력 (얼음)

입력시키는 값을 x, 나오는 값을 y라하고, 상자를 function(함수)의 앞 글자 f라하면 ,

입력 x ⟶ $\boxed{f}$ ⟶ 출력 y

x를 집어넣어서 f라는 작용을 하여 y를 만들었다는 것이다.
'냉장고에 물을 집어넣었더니 얼음이 되었다'는 것을 기호로 나타내면,

(1) 물 $\xrightarrow{\boxed{\text{냉장고}}}$ 얼음 : 물을 냉장고에 넣었더니 얼음이 되었다.

(2) 냉장고 : 물 ⟶ 얼음 : 냉장고는 물을 얼음으로 바꾸는 작용을 한다.

(3) 냉장고 : 물 ⟶ $\boxed{\text{냉장고}}$(물)

(4) 얼음 = $\boxed{\text{냉장고}}$ (물) : 얼음은 냉장고에 물을 넣으면 만들어진다

위의 내용을 함수의 기호로 표현하면

$x \xrightarrow{f} y$, $f : x \longrightarrow y$

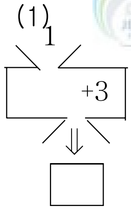
$f : x \longrightarrow f(x)$, $y = f(x)$

이 모두가 같은 표현들이다.

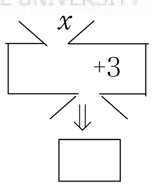
위와 같은 다양한 예를 통해 함수 개념이 확립되었다면 다음은 함수의 표현을 잘 이해하고 있는지 알아보는 예시 문제들을 통해 이해를 확장시킬 필요가 있다.

(예제1) 다음 주어진 함수를 여러 가지 표현으로 나타내 보자.

(1)



(2)



(풀이) 상자의 이름을 f 라하고 나온 값을 y라 하면 x가 f에 들어갔다 나와서 y로 변하는 것이다.

나온 값인 $x+3$은 y와 같고 $f(x)$와 같으므로

$x \xrightarrow{f} x+3$, $f : x \longrightarrow x+3$

$f(x) = x+3$, $y = x+3$

(예2) $f(x) = x+3$에서 $f(2)$의 값을 구해보자.

(풀이) 위의 관계식의 표현 방법을 달리 해보자.

$f(x)$는 y와 같은 것이고, $f(2)$는 " $x=2$일 때, y의 값"이라는 뜻이다.

그러므로, 주어진 문제를 바꿔 쓰면,

⇒ $y = x+3$ 에서 $f(2)$의 값은?

⇒ $y=x+3$ 에서 $x=2$ 일 때, y의 값은?

답 : $y=5$ 또는 $f(2)=5$ 이다.

이 단원에서는 문제를 다양하게 구성하여 학생들로 하여금 $f(x)$를 확실히 이해를 시켜야 함수에 대한 어려움이 다소 해소되리라 생각한다.

3) 함수의 용어 : 정의역, 공역, 함수값, 치역

함수의 용어를 설명할 때, 가장 중요한 것은 적절한 예를 찾는 것이라 할 수 있다. 딱딱한 예를 들거나 인위적으로 조작하여 예를 들지 않고 우리 생활에서 자연스럽게 찾을 수 있는 예를 생각해보기로 하자.

(예제1) 경호는 자기네 반에서 가장 인기 좋은 과목선생님을 뽑기로 하고, 반 학생 50명에게 물어봐서 다음과 같은 자료를 수집했다.

선생님	국어	도덕	사회	수학	과학	기술	체육	음악	미술	영어	한문
응답학생수	32	13	16	35	18	10	23	15	10	19	5

좋아하는 선생님을 모두 체크하다보니 너무 복잡하다고 생각한 경호는 반 친구들에게 가장 좋아하는 선생님 한 분만 고르라고 해서 다시 조사를 해서 다음과 같은 2차 자료를 얻었다.

선생님	국어	도덕	사회	수학	과학	기술	체육	음악	미술	영어	한문
응답학생수	10			15	5		5	1	10	4	

(1) 이 관계가 함수가 될까? 함수가 된다면 함수의 이름을 무엇이라 정할까?

(2) 입력시킨 것은 무엇인가? 입력시킨 것을 무엇이라 할까?

(3) 출력되어 나온 것은 무엇인가? 출력된 값을 무엇이라 할까?

(4) 선생님들의 집합은 무엇이라 할까?

그러나 실생활과 관련된 예를 들 때 주의할 점은 학생들이 예로 인해서 잘못된 이해를 할 수 있는 것들이 있는지 면밀한 검토를 해야한다.

다음은 자동판매기를 예로 든 문장이다.

함수의 예로 가장 낯익은 것은, 길거리, 역, 직장, 학교 등에서 흔히 이용되는 자동판매기일 것이다. 이 자동판매기가 "함수"라는 것은, 일정한 단추를 누르면 일정한 물건이 나오도록 되어 있는 구조를 가리켜서 한 말이다.[13)]

자동판매기는 분명 돈을 넣어야 작동을 하는데, 이것을 무시한 채 단추를 누르는 것을 입력시키는 값으로 표현하는 것은 학생들로 하여금 함수의 개념을 혼동할 여지를 남기는 것이다.

4) 정비례(비례) 와 반비례

정비례와 반비례는 학생들이 처음으로 함수 단원을 배우면서 접하게 되는 함수이다. 하지만 정확한 개념을 이해하지 못한 채 넘어간다면, 증가함수를 비례로 감소함수를 반비례로 아는 기존의 사고의 틀을 깰 수 없다. 명확한 정의의 이해를 위해서는 개념을 이해했는지 알 수 있는 적절한 예시가 필요하다고 하겠다. 다음은 정비례와 반비례를 설명할 수 있는 예들이다.

(1) 정비례

x가 2배, 3배, 4배,...로 변화하면, 그에 따라 y도 2배, 3배, 4배,... 로 변화할 때, x와 y는 서로 비례한다고 한다.

이때, $y=a\times x$, $\frac{y}{x}=a$ 라는 관계가 있다. (a는 일정한 상수)

(예제1) 아래에 x와 y의 대응관계를 표로 나타냈다.

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

대응표에서 x가 2배(1에서 2로), 3배(1에서 3으로), 4배(1에서 4로),…가 되면 그에 따라 y도 2배(2에서 4로), 3배(2에서 6으로), 4배(2에서 8로),... 로 변하므로, 비례이며, 관계식은 $y=2x$ 이다.

다시 한번 잘 살펴보면 $\frac{y}{x}$ 가 모두 2가 된다.

$$\frac{y}{x}=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=\frac{10}{5}=2$$

---

13) 김용운·김용국(1993), 「재미있는 수학여행」, 김영사, p.187.

(예제2) 아래에 x와 y의 대응관계를 표로 나타냈다.

x	1	2	3	4	5
y	−3	−6	−9	−12	−15

비례이며, 관계식은 $y = -3x$ 이다. 다시 한번 잘 살펴보면 $\frac{y}{x}$ 가 모두 −3이 된다.

$$\frac{y}{x} = \frac{-3}{1} = \frac{-6}{2} = \frac{-9}{3} = \frac{-12}{4} = \frac{-15}{5} = -3$$

(x에 −3배하면 반비례라고 생각하는 것은 착각임을 강조한다.)

결론 : 비례함수이다 ⇒ $y = ax\,(a \neq 0)$
정비례는 y를 x로 나눈 값이 항상 같다

(예제3) y가 x에 정비례하고, $x=-3$일 때, $y=12$ 이다. 이때, x와 y사이의 관계식을 구하여라. (두 가지 방법을 보여준다.)

(풀이1) y가 x에 정비례하므로, $y = ax\,(a \neq 0)$

이제 a값을 구하면 된다. 이 식에 $x=-3$, $y=12$를 대입하면,

$12 = a \times (-3)$, $a=-4$ 따라서, 구하는 식은 $y = -4x$ 이다.

(풀이2) 비례하므로, x와 y의 비인 $\frac{y}{x}$ 가 항상 일정한 값을 갖는다.

$$\frac{y}{x} = \frac{12}{-3} = -4 = a \qquad \therefore\ a = -4$$

따라서, 구하는 식은 $y = -4x$ 이다.

(예제4) $y=2x+1$ 는 비례인가? 아닌가? 아니면 무엇인가?

간단히 뒤에 $+1$이 붙어 있어서 $y = ax$꼴이 아니므로 비례가 아니다.
또한, 대응표에도 나와 있듯이

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11

$\frac{y}{x}\ (\frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5})$의 값이 다르므로 비례가 아니다.

후에 나오지만 $y=2x+1$ 는 $y=2x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만

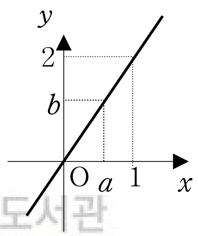
큼 평행이동 시킨 것이라고 간략하게 설명하고, 비례가 아닌 증가함수 임을 강조한다.

일단 위와 같은 예들을 통해 정비례의 뜻을 정확히 이해시켰다면 이를 확인하고, 사고를 확장하여 응용할 수 있는 문제들을 제시하여 준다. 다음은 문제들의 예이다.

1. $y=ax$에서 $x=3$이면 $y=1$이다. 이 때, x값이 2배 증가하면 y값은 몇 배 증가하는가?

2. 정비례함수 $y=ax$에서 x값이 1에서 4까지 변할 때 y값은 $\frac{1}{2}$에서 k까지 변한다고 한다. k는?

3. 오른쪽 그림과 같은 정비례함수에서 $\frac{b}{a}$의 값을 구하여라.



(2) 반비례

x가 2배, 3배,... 커져가면 y는 -2배, -3배,...로 변하는 것이 아니라, y는 2의 역수인 $\frac{1}{2}$배, 3의 역수인 $\frac{1}{3}$배,...로 변화할 때, x와 y는 서로 반비례한다고 한다.

이때, $y=\frac{a}{x}$, $xy=a$라는 관계가 있다. (a는 일정한 상수이다.)

(예제1) 아래에 x와 y의 대응관계를 표로 나타냈다.

x	1	2	4	8	16
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$

대응표에서 x가 2배(1에서 2로), 4배(1에서 4로), 8배(1에서 8로),...가 되면 그에 따라 y도 $\frac{1}{2}$ 배(8에서 4로), $\frac{1}{4}$ 배(8에서 2로), $\frac{1}{8}$ 배(8에서 1로),... 로 변하므로, 반비례이며, 관계식은 $y=\frac{8}{x}$ 이다.

다시 한번 잘 살펴보면 $x \times y$가 모두 8이 된다.

$x \times y = 1 \times 8 = 2 \times 4 = 4 \times 2 = 8 \times 1 = 16 \times \frac{1}{2} = 8$

$x \times y$가 항상 8이 되므로, $x \times y = 8$가 되고,

(양변÷ x) : $x \times y \times \frac{1}{x} = 8 \times \frac{1}{x}$, $\therefore\ y = \frac{8}{x}$

(예제2) 아래에 x와 y의 대응관계를 표로 나타냈다.

x	−4	−2	−1	1	2
y	1	2	4	−4	−2

반비례이며, 관계식은 $y = -\frac{4}{x}$ 이다.

다시 한번 잘 살펴보면 xy가 모두 −4가 된다.

$xy = -4 \times 1 = -2 \times 2 = -1 \times 4 = 1 \times (-4) = 2 \times (-2) = -4$

($y = -4x$는 비례함수이지 반비례함수가 아님을 강조한다.)

결론 : 반비례함수이다 $\Rightarrow$ $y = \frac{a}{x}\ (a \neq 0)$

반비례는 y와 x의 곱이 항상 같다

(예제3) y가 x에 반비례하고, $x = 10$일 때, $y = 2$ 이다. 이때, x와 y사이의 관계식을 구하여라.

(풀이1) y가 x에 반비례하므로, $y = \frac{a}{x}\ (a \neq 0)$

이 식에 $x = 10$, $y = 2$를 대입하면, $2 = \frac{a}{10}$. 따라서, $a = 20$

그러므로, 구하는 식은 $y = \frac{20}{x}$ 이다.

(풀이2) 반비례하므로, x와 y의 곱인 $x \times y$가 항상 일정한 값을 갖는다.

$x \times y = 2 \times 10 = 20 = a \cdot$ $\therefore\ a = 20$

따라서, 구하는 식은 $y = \frac{20}{x}$ 이다.

(예제4) $y = \frac{6}{x} + 1$ 는 반비례인가? 아닌가? 아니면 무엇인가?

간단히 뒤에 $+1$이 붙어 있어서 $y = \frac{a}{x}$ 꼴이 아니므로 반비례가 아니

다. 또한, 대응표에도 나와 있듯이

x	−1	1	2	3	6
y	−5	7	4	3	2

$x \times y$ ($(-1)\times(-5)=5$, $1\times7=7, 8, 9, 12$)의 값이 다르므로 반비례가 아니다.

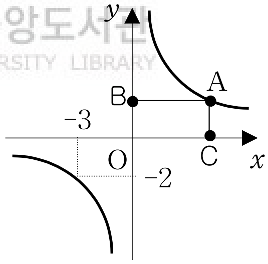
예들을 통해 반비례의 뜻을 정확히 이해하고 있었다면 다음과 같은 문제들을 통하여 이해를 확장시킬 필요가 있다. 다음은 문제의 예이다.

1. y가 x에 반비례하고, $x=2$일 때, $y=4$ 이다. 이때, x와 y의 값을 순서쌍으로 나타낼 때, 이 반비례 관계를 만족하는 값은?

   ① $(-3,-3)$　② $(-2,6)$　③ $(1,6)$　④ $(4,3)$　⑤ $(8,1)$

2. 반비례함수 $y=\frac{a}{x}$에서 x값이 1에서 5까지 변할 때, y값은 $\frac{1}{3}$에서 k 까지 변한다고 한다. k는?

3. 오른쪽 그림과 같은 반비례 함수에서 점 A가 반비례함수 위에 있을 때, 직사각형 ABOC의 넓이를 구하여라.

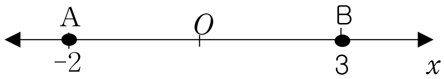


5) 순서쌍과 좌표평면

함수를 이야기할 때 빠질 수 없는 개념이 순서쌍과 좌표평면이다. 먼저 학생들에게 순서쌍이 왜 생겨났는지를 이해시키고자 할 때 가장 적절한 예가 차원에 관한 이야기이다. 각 차원을 설명하면서 순서쌍의 형태를 알아보자.

(1) 1차원

1차원에 대한 설명은 철길을 따라 움직이는 기차를 예를 들면 좋다. 기차는 오로지 앞, 뒤로만 움직인다. 어느 곳에 기차가 위치해있는지는 하나의 기준만 있으면 될 것이다. 이러한 차원이 1차원이며, 기준이 되는 축은 1개이다. 그래프로 나타내면 수직선이 된다. 아래의 점 A의 위치를 기호로 표시하면, $A(-2)$.



학생들은 기준이 되는 원점을 숫자 0이라고 생각하는 경우가 많으므로, 원점(영어로 origin)의 앞글자인 O(오)를 강조해야 한다.

또한 수직선에 대하여 학생들은 기본적으로 '수직＋선'이라고 잘못알고 있는데 이러한 개념을 '수＋직선＝수직선'이란 개념으로 수정시켜주는 일도 반드시 필요하다.

그리고 수직선이란 수로 이루어진 직선이므로, 자연수, 정수, 유리수, 실수에 대하여 직접 그려보는 작업도 병행하면 더욱 좋다.

① 자연수일 때

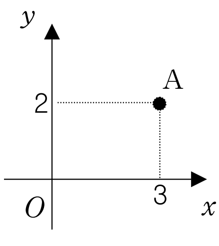
② 정수일 때

③ 유리수일 때

④ 실수일 때 : 연속인 수로 만든 직선이 된다.

(2) 2차원

2차원은 컴퓨터의 마우스처럼 앞, 뒤뿐만 아니라 상하로도 움직일 수 있기에 축이 하나 더 필요하므로, x축 외에 y축이 더 들어간다. 즉 x축이 실수이고, y축이 실수인 두 개의 수직선을 짝지어서 점을 찍다보니 평면이 되었다.

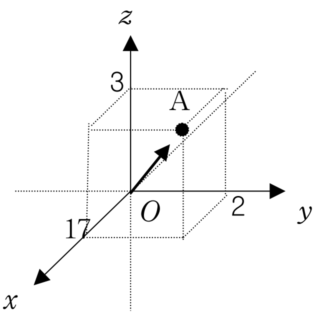


점 A의 위치를 표시하려면 기준이 되는 축이 2개가 필요한데, 여기서 순서쌍이 나왔다. 점 A는 $A(3,2)$. 원점인 O는 $O(0,0)$이다.

(3) 3차원

우리가 살고 있는 공간이며, 위치를 표시하려면 축이 세 개가 필요하다. 그 축은 x축, y축, z축이다.

원점 O는 $O(0,0,0)$, 점 A는 $A(1,2,3)$이다.



$A(1,2,3)$는 x축으로 1만큼, y축으로 2만큼, z축으로 3만큼 위치해 있는 점이며, 직육면체를 그리고 대각선(맞모금)을 그리면 된다.

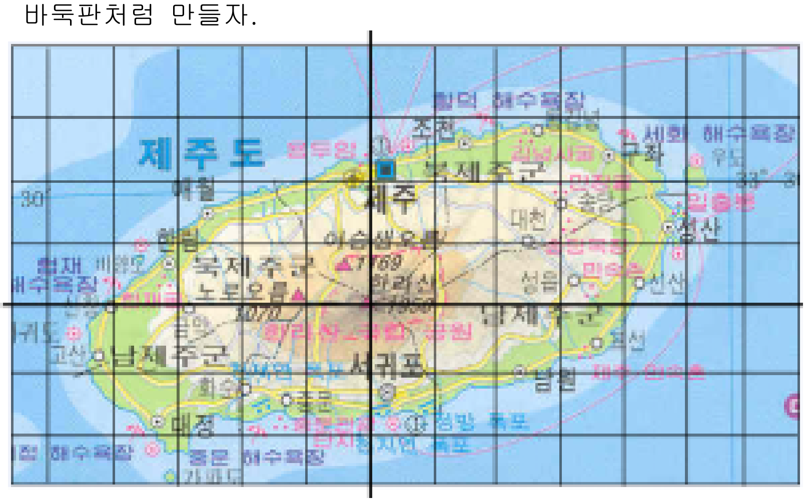
(4) 4차원

수학에서 4차원은 어떻게 설명될까? 막 꼬아서 어떻게 될 것 같지만 그래프로 나타낼 수가 없다. 하지만 수학은 축을 4개로 만들어 여러 가지의 성질을 연구해 내고 있다.

$$(x, y, z, w)\cdots\cdots$$

우리 주변에서 좌표를 공부할 적절한 도구를 찾아보았으며, 사회시간에 사용되고 있는 지도를 발견했다.

(예제1) 사회과부도에서 제주시와 한라산 백록담을 중심으로 동서, 남북으로 선을 진하게 긋고 (즉, 원점을 백록담으로 놓자), 1cm마다 선을 그어 바둑판처럼 만들자.



<그림 1> 제주도-- 「중학교 사회과부도」, 교학사, p.25.

① $(-4,0)$에 해당하는 동네는 어느 곳인가?
② 우리학교를 좌표로 나타내면 어떻게 될까?
③ 신창을 상하 축을 기준으로 대칭이동하면 어느 동네가 될까?
④ 화순과 한라산을 지나는 직선을 긋자. 이 직선에서 한라산을 기준으로 대칭이동하면 어느 동네가 되는가?

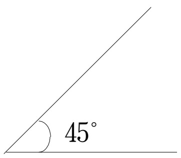
(예제2) 다음 주어진 점을 좌표평면에 표시하여라.

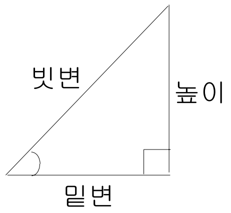
$$A(2,3),\ B(-2,3),\ C(4,1),\ D(-4,2),\ E(5,5),\ F(-6,2),$$

주의 할 점은 좌표평면에 학생들이 직접 표시할 수 있는 좌표지(부록 참조)를 사전에 준비하여 나누어주어서 신속하고, 많은 양의 좌표를 찍어볼 수 있도록 해야 된다.

6) 기울기(1)

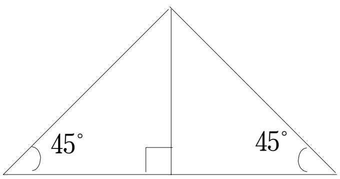
직선이 얼마나 기울어져 있을까? 기울기에 대한 설명을 할 때 보통 우리는





"30° 기울어져 있다. 45° 기울어져 있다."라고 말을 한다. 각을 재서 기울어 있는 정도를 표현한 것이다. 하지만 기울어진 정도를 아는 방법은 한가지만 있느 것이 아니다. 바로 삼각형의 밑변과 높이를 이용하는 방법이다.직선이 기울어져있는 정도를 직각삼각형에서 $\frac{\text{높이}}{\text{밑변}}$로 나타냈다. 이 그림을 직각삼각형으로 나타내면 아래와 같은데, 한 각이 45° 인 직각삼각형에서는 밑변과 높이가 똑같기 때문에 $\frac{\text{높이}}{\text{밑변}}=\frac{1}{1}=1.$ 즉, 45° 기울어져있다는 표현을 기울기가 1이라고 한다.

하지만, 아래의 그림에서는 기울어진 부분이 두 군데가 있고 각각의 $\frac{\text{높이}}{\text{밑변}}$



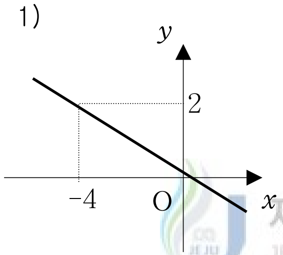
를 구하면 둘 다 1이다. 기울어져 있는 방향이 다르기 때문에 기울기의 값을 다르게 표현할 필요성이 있다. 오르막이 있으면 내리막이 있듯이 기울기 또 한 올라가는(증가하는) 것도 있지만 내려가는(감소하는) 것도 있으므로 음수값도 나온다.

기울기를 학생들에게 지도할 때 가장 유의할 점은 학생들이 개념을 혼동하지 않도록 일관성 잃지 말아야 한다는 점이다. 가장 적절한 방법은 기울기의 정의대로 문제를 푸는 것이다.

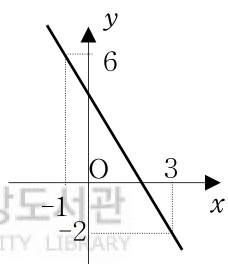
1. 두 점을 찾는다. 2. x의 증가량을 구한다. 3. y의 증가량을 구한다. 4. 기울기 $= \dfrac{y\text{의 증가량}}{x\text{의 증가량}}$을 구한다.

(예제1) 아래의 그림에서 직선의 기울기를 구하여라.

1)



2)



(풀이) 1) 직선 위에 있는 두 점 $(0,0)$, $(-4,2)$에서

y의 증가량(2-0=2)

$(0, 0) \qquad (-4, 2)$

x의 증가량(-4-0=-4)

$$\therefore \ \text{기울기} = \frac{y\text{의 증가량}}{x\text{의 증가량}} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

2) 직선 위에 있는 두 점 $(-1, 6)$, $(3, -2)$에서

y의 증가량(-2-6=-8)

$(-1, 6) \qquad (3, -2)$

x의 증가량(3-(-1)=4)

$$\therefore \quad \text{기울기} = \frac{y\text{의 증가량}}{x\text{의 증가량}} = \frac{-8}{4} = -2, \text{기울기} = \frac{-8}{4} = -2$$

우리 주변에서 기울기를 구할 수 있는 예들은 찾아보자.

1. 우리나라 지도에서 동해와 삼척을 지나는 직선을 그리고, 기울기가 얼마인지 구해보자.(원점은 경도나 위도, 특정한 지명등 자유롭게 설정)

2. 삼각자의 기울기를 구해보자.

7) 기울기(2)

$y = ax + b$ 에서 기울기는 x의 계수인 a이다. $y = ax + b$ 에서 x의 계수인 a가 이 직선의 기울기가 되는 이유를 학생들에게 설명을 해야하는데, 증명과정을 이해시키기란 쉽지 않다. 학생들의 이해도를 높이기 위한 방법으로 두 점을 임의로($(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$) 잡지말고, 특수한 점을 잡아서 보여주자. 다음은 그 예이다.

$y = ax + b$에서 $x = 1$이면, $y = a + b$이고, $x = 2$이면, $y = 2a + b$이다.
즉, $y = ax + b$에서 두 점을 잡을 수 있다. $(1, a + b)$, $(2, 2a + b)$

y의 증가량($(2a + b) - (a + b)$)

$(1, a + b)$ $(2, 2a + b)$

x의 증가량($2 - 1$)

$$\therefore \quad \text{기울기} = \frac{y\text{의 증가량}}{x\text{의 증가량}} = a$$

학생들에게 x좌표를 두 개 고르라고 한 뒤, 다시 보여줌으로써 $y = ax + b$의 기울기가 x의 계수인 a임을 설명한다.

위와 같은 방법으로 $y = ax + b$의 기울기가 x의 계수인 a임을 설명하였다면 다음은 기울기의 정의를 제대로 이해했는지 예제 문제들을 통해 확인한다.

(예제1) $y=2x-1$일 때, $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}$를 구하여라.

(풀이1) $f(4)$는 $x=4$일 때, y의 값이므로 $2\times 4-1=7$,

$f(1)$는 $x=1$일 때, y의 값이므로 $2\times 1-1=1$.

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{7-1}{4-1}=\frac{6}{3}=2$$

(풀이2) $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}$은 $\dfrac{y\text{의증가량}}{x\text{의증가량}}$ = 기울기 이다. 왜냐하면,

$x=1$일 때, 함수값은 $f(1)$, $x=4$일 때, 함수값은 $f(4)$이므로,

y의 증가량($f(4)-f(1)$)

(1 , $f(1)$) (4 , $f(4)$)

x의 증가량($4-1$)

즉, $\dfrac{y\text{의 증가량}}{x\text{의 증가량}}=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}$ = 기울기이다.

그러므로 $y=2x-1$에서 기울기는 2이다.

(예제2) $y=-\dfrac{2}{3}x-1$일 때, $\dfrac{f(5)-f(2)}{3}$를 구하여라.

(풀이) $\dfrac{f(5)-f(2)}{3}=\dfrac{f(5)-f(2)}{5-2}$ = 기울기 이다.

따라서, 답은 $-\dfrac{2}{3}$이다.

(예제3) 일차함수 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$에 대하여 x의 값이 -2에서 6까지 증가할 때, 이 증가량에 대한 y의 값의 증가량의 비율을 구하여라.

(풀이1) $x=-2$일 때, $y=2$, $x=6$일 때, $y=-2$

∴ x가 -2에서 6까지 증가(8만큼)했을 때,

y는 2에서 -2까지 증가(-4만큼) 했으므로,

x의 증가량에 대한 y의증가량은 $\dfrac{-4}{8}=-\dfrac{1}{2}$

(풀이2) 기울기를 구하는 문제이므로, 답 : $-\dfrac{1}{2}$.

일차함수에서 기울기가 차지하는 부분은 아주 크므로, 문제 예시 또한 기울기의 정의를 제대로 이해하고 있는 지를 파악할 수 있는 문제를 주로 다루어야 한다.

1. $y=-\dfrac{12345}{1234567}x+\dfrac{54321}{7654321}$ 일 때, $\dfrac{f(756)-f(3595)}{756-3595}$ 의 값을 구하여라.

2. 일차함수 $y=ax+b$에서, $f(2)-f(1)=$

3. 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 $(m,\ m)$, $(m+3,\ m+6)$의 두 점을 지날 때, 기울기를 구하여라

8) x절편과 y절편

(1) x절편

x절편이란 함수의 그래프를 x축으로 잘라냈을 때의 조각을 의미하므로, x축과 만나는 점의 x좌표를 말하는데, x축 위에 있으므로 y좌표는 0이다. 다르게 표현하면,

$y=0$일 때, x의 값이다.

(예제1) 일차함수의 $y=ax+b$의 x절편을 구하여라.

(풀이) $y=0$을 대입하면 $0=ax+b$, $-ax=b$, $ax=-b$

(여기서 $a\neq 0$. $\because$ a가 0라면 일차함수가 안되니까)

(양변÷ a) : $x=-\dfrac{b}{a}$. 즉, x절편은 $-\dfrac{b}{a}$

※ 일차함수의 $y=ax+b$의 x절편이 $-\dfrac{b}{a}$ 인 것은 공식으로 사용이 가능하다. $y=-2x+1$에서 $a=-2$, $b=1$이므로,

x절편 $=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{(1)}{(-2)}=\dfrac{1}{2}$

(2) y절편

y절편이란 함수의 그래프를 y축으로 잘라냈을 때의 조각을 의미하므로, 일차함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표를 말하는데, y축 위에 있으므로 x좌표는 0이다. 다르게 표현하면,

$x=0$일 때, y의 값이다.

(예) 일차함수의 $y=ax+b$의 y절편을 구하여라.

(풀이) $x=0$을 대입하면 $y=a\times(0)+b$, $y=+b$, $y=b$

즉, y절편은 b이다.

9) 그래프 그리기

함수를 이해하는데 있어서 그래프 그리는 것은 필수적이며, 그래프 그리기를 통하여 그래프 해석 능력을 향상시킬 수 있다. 따라서 교사는 되도록이면 그래프를 많이 그리도록 해야하는데 이 때 교사는 두 가지를 준비할 필요가 있다.

첫째, 좌표지를 준비해야한다.

둘째, 교사의 설명만으로는 학생들이 혼자서 그래프를 그리지 못하므로 유인물 등을 통하여 그리는 순서를 미리 보여줄 필요가 있다.

그래프를 그리는 방법은 4가지로 나눌 수 있다.

(1) 두 점을 찾은 후 그래프 그리기

① 임의로 x값을 정한 뒤 그때의 y값을 구한다.

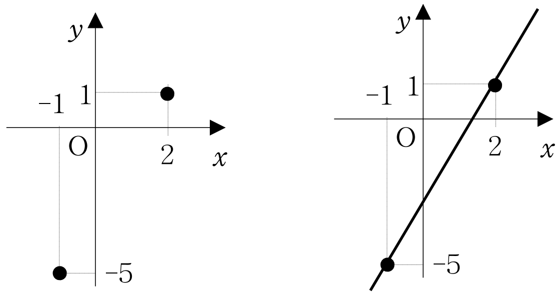
(임의로 : 아무 값이나 관계없음)

② 구해진 두 점을 좌표평면에 찍고, 자를 이용하여 직선을 긋는다.

(예제1) 일차함수 $y=2x-3$의 그래프를 그려라.

$x=-1$일 때 $y=-5$, $x=2$ 일 때, $y=1$

우리는 두 점 (-1,-5), (2,1)을 찾을 수 있다.



(2) 기울기와 y절편을 이용하여 그리기

① y절편을 이용하여 한점을 찍는다.

② 기울기를 이용하여 x의 증가량과 y의 증가량을 구한 뒤 좌표평면에 나타낸다.

③ 1)과 2)에서 구해진 점을 이용해 직선을 긋는다.

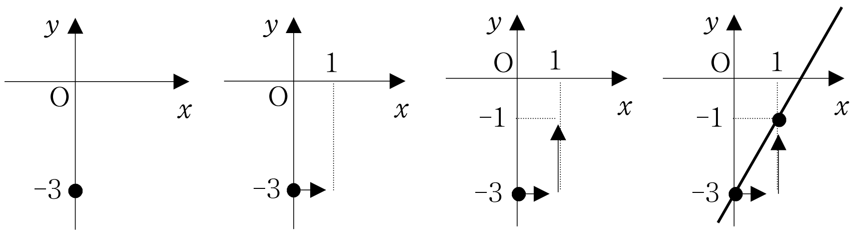
(예제2) 일차함수 $y=2x-3$의 그래프를 그려라.

y절편은 -3이므로, (0,-3)을 좌표평면에 찍는다.

기울기 $=\dfrac{y\text{의 증가량}}{x\text{의 증가량}}=2=\dfrac{2}{1}$ 이므로,

x의 증가량은 1이고, y의 증가량은 2이다.

따라서, (0,-3)에서 x축으로 1만큼 간 뒤 , y축으로 2만큼 올리고 (즉, (1,-1)이다) 직선을 긋는다.



(3) x절편과 y절편을 이용하여 그리기

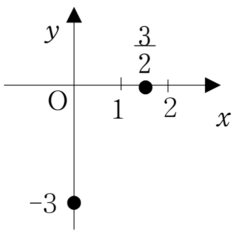
① x절편과 y절편을 구한 뒤, 좌표평면에 찍는다.

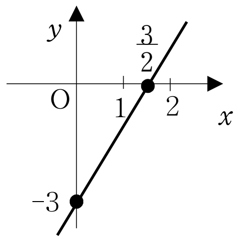
② 구해진 두 점을 이용하여 직선을 긋는다.

(예제3) 일차함수 $y=2x-3$의 그래프를 그려라.

y절편은 -3이므로, 좌표는 (0,-3)

x절편을 구하면 $0=2x-3$, $-2x=-3$, $x=\frac{3}{2}$. 좌표는 $(\frac{3}{2},0)$





(4) 평행이동을 이용하여 그리기

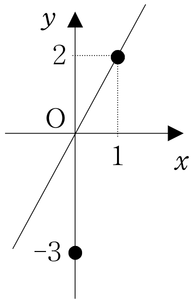
① $y=ax$의 그래프를 그린다.

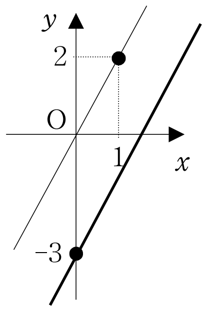
② y축의 방향으로 얼마만큼 평행이동 했는지를 구한다. (y절편이 됨)

③ $(0,b)$에 (y절편의 좌표) 고정시키고 천천히 $y=ax$와 평행이 되게 돌린 뒤 긋는다.

(예제4) 일차함수 $y=2x-3$의 그래프를 그려라.

$y=2x$를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동 시켰으므로, (0,-3)에 자를 대고 천천히 $y=2x$와 평행이 되게 돌린 뒤 긋는다.

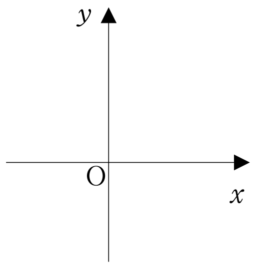




10) 일차함수의 해석

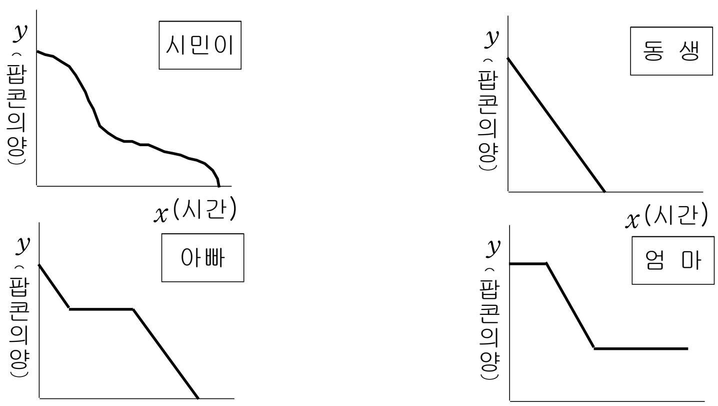
일차함수의 해석을 위해서는 일차함수의 기본적인 성질을 이해하는 문제와 그래프에 대한 해석 능력을 키우는 문제를 집중적으로 제시할 필요가 있다. 다음은 그러한 문제의 예들이다.

(예제1) 다음은 일차함수 $y=-x+2$에 대한 설명이다.
옳지 <u>않은</u> 것은?



① 제1, 2, 4사분면을 지나는 직선이다.
② $y=-x-1$과 평행하다.
③ 기울기는 -1이다.
④ x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
⑤ y절편은 2이다.
⑥ x의 값이 4만큼 증가하면 y의 값은 -4만큼 증가한다.

(예제2) 시민이네 가족은 프로야구를 보러 야구장에 갔다. 팝콘 4개를 사서 한 개씩 나누어 가지고 응원을 하면서 팝콘을 먹기 시작했다. 아래 그래프는 시간이 지남에 따라 남은 팝콘의 양을 나타낸다. (한혜진, 2001)



(1) 그래프의 높이는 무엇을 나타내는가?
(2) 아빠의 그래프에서 x축과 평행한 부분은 무엇을 의미하는가?
(3) 왜 동생의 그래프가 아빠의 그래프보다 x축과 더 빨리 만났는가?
(4) 그래프를 수평선으로 만들려면 어떻게 먹어야 하는가?

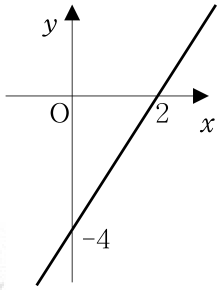
(5) 엄마의 그래프가 x축과 만나지 않은 이유를 말하여라.

11) 일차함수의 정의역과 치역

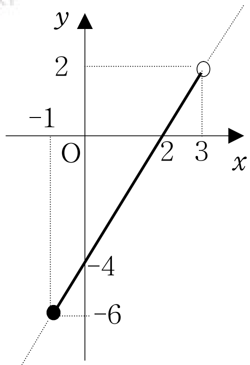
(예제1) 정의역이 $\{x \mid -1 \leqq x < 3\}$인 일차함수 $y=2x-4$ 의 치역을 구하여라.

(풀이) $y=2x-4$의 정의역에 대한 말이 없으면 수 전체의 집합(실수)가 되는데, 정의역을 줄여서 그래프 중에 일부분만을 생각하는 문제이다.
그럼 정의역이 수 전체의 집합 일 때, $\{x \mid -1 \leqq x < 3\}$,
$\{x \mid -1 \leqq x < 3,\ x$는 정수$\}$일 때, 세 가지의 경우로 문제를 풀어보자.

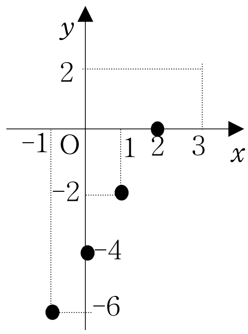
1) 정의역 : 수 전체의 집합일 때 그래프에서 알 수 있듯이 치역 또한 수 전체의 집합이다.



2) 정의역이 $\{x \mid -1 \leqq x < 3\}$일 경우
$x=-1$일 때, y값은 -6이므로 : (-1, -6)
$x=3$일 때, y값은 2이므로 : (3, 2)
x의 값이 -1에서 3까지 밖에 움직일 수 없어서 그래프가 짤릴 수 밖에 없고,
x의 값이 3일 때는 해당되지 않는다.
기울기에서 x의 증가량에 해당하는 -1에서 3까지는 정의역에 해당되므로 ,
y의 증가량에 해당하는 -6에서 2까지는 치역에 해당된다. 즉, y가 움직인 범위는 $-6 \leqq y < 2$이다. 치역도 집합이므로,
$\{y \mid -6 \leqq y < 2\}$



3) 정의역이 $\{x \mid -1 \leqq x < 3,\ x$는 정수$\}$일 경우
정의역 $=\{-1, 0, 1, 2\}$이므로,
$x=-1$이면, $y=-6$, ⋯
∴ 치역은 $\{-6, -4, -2, 0\}$

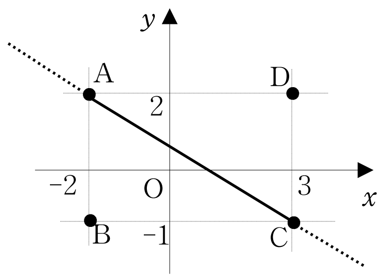


(예제2) 정의역이 $\{x \mid -2 \leqq x \leqq 3\}$, 치역이 $\{y \mid -1 \leqq y \leqq 2\}$로 주어진 일차함수 $y = ax + b \ (a < 0)$ 에서 $a + b$의 값은?

(풀이1) 기울기가 0보다 작으므로, x값이 증가할 때, y값은 감소한다. 즉, x값이 -2에서 3까지 이동할 때, y값은 2에서 -1로 이동.
∴ 두 점 (-2,2), (3,-1)을 얻을 수 있다.

두 점을 이용하여 풀면, $a=-\frac{3}{5}$, $b=\frac{4}{5}$ ∴ $a+b=\frac{1}{5}$

(풀이2) 그래프에 정의역과 치역을 표시하면 만나는 부분은 직사각형 ABCD가 된다. 기울기가 음수이면, 점A와 점C를 지나는 선분이므로 두 점 (-2,2), (3,-1)을 얻을 수 있다.



12) 일차함수의 식 세우기

일차함수의 식 세우기 항목은 함수를 실생활의 문제와 접목시키는 부분이지만 학생들은 매우 어렵게 생각하는 경향이 많다. 하지만 교사는 이러한 응용문제를 풀면서 이제까지 배웠던 내용들이 구체적으로 어떻게 실생활에 응용되는지 다양한 예들을 발굴하여 지도해야한다.

아래의 (예제1)의 2번째 풀이방법은 두 점을 이용한 일차함수의 식 구하기의 예이다. 실생활 적용문제에 있어서 복잡한 식들이 함수를 통하여 간단하게 구할 수 있음을 보여줘야 한다.

(예제1) 지면에서 10km 까지는 고도가 100m 증가함에 따라 기온이 0.6° C 씩 내려간다고 한다. 지면의 기온이 $20^\circ \ C$일 때 지면에서부터 고도가 xkm인 곳의 기온을 $y^\circ \ C$라 할 때, y를 x의 식으로 나타내어라.

(풀이1)

$100m \Rightarrow -0.6$

$200m \Rightarrow -0.6\times 2$

$300m \Rightarrow -0.6\times 3$

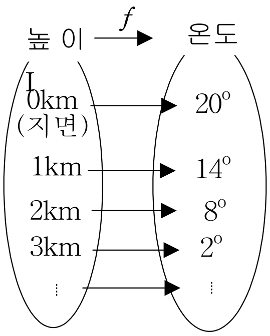
$\vdots \qquad \vdots$

$1000m \Rightarrow -0.6\times 10=-6$

즉, $1km$에 6° C떨어지므로, xkm에서는 $6\times x$ 떨어진다.

현재 지면의 온도가 $20^\circ C$이므로, $y=20-6x$

(풀이2)



지면일 때 온도는 y절편을 말하므로,

y절편$=20$

1km씩 올라갈 때, $6^\circ C$씩 내려가므로,

기울기$=\dfrac{-6}{1}=-6$

구하는 일차함수의 식은 $y=-6x+20$

즉, 주어진 문제에서 두 점만 찾으면 문제를 풀 수 있다.

(풀이3) $(0,20)$, $(1,14)$이므로 (풀이2)와 같다.

(예제2) 길이가 20cm인 양초가 있다. 불을 붙이면 10분마다 4cm씩 짧아진다고 한다. 초의 길이가 12cm가 되는 것은 불을 붙인 몇 분 후 인가?

(풀이1) 10분 뒤 남은 양초의 길이 : 16cm

20분 뒤 남은 양초의 길이 : 12cm　　　　답 : 20분

(풀이2) 두 점 $(0,20)$, $(10,16)$을 구할 수 있으므로,

$y=ax+b$에 대입하여 푼다.

기울기$=\dfrac{16-20}{10-0}=\dfrac{-4}{10}=-0.4$

y절편$=20$　　$\therefore\ y=-0.4x+20$

$y=12$를 대입하면, $x=20$.

2. 적용에 따른 학습자의 반응

위의 구체적인 실례에 대한 검증을 위해서 학습지를 개발하여 학생들로 하여금 직접 풀게끔 유도하였다. 학습지는 앞에서 설명한 실례를 바탕으로 함수 단원을 분석하여 36장으로 만들었다.

2005년 3월 4일에 2·3학년 학급을 돌면서 함수 학습지를 꼭 풀어보고 싶은 학생을 선별한 결과 2학년 94명, 3학년 85명이 신청하였고, 1학년은 신입생 반편성고사에서 수학성적이 우수한 학생을 대상으로 10명을 선정하였다.

학교 다목적실에 있는 신발장에 함수 학습지를 차례대로 놓았고, 칠판에는 학생들의 이름과 학습지 번호를 쓴 진도표를 부착하였다. 자발적으로 문제를 가져가고 문제를 푼 뒤 게시판에 붙여진 답지를 보고 확인을 한 후 진도표에 날짜를 표시하라고 하였다.

자발적으로 문제를 푸는 것이어서 결과는 좋지 않았으며, 끝까지 푼 학생은 12명이었다 (2005년 3월 31일 현재).

학습지를 15장 이상 푼 학생들의 반응을 들어보기 위하여 학습지를 풀기 전과 풀어본 후 함수에 대해서 느끼는 점을 받아보았다(3학년 12명, 2학년 15명, 1학년 10명). 응답자 중 느낌을 많이 쓴 학생을 학년별로 5명을 선정하여 느낀 점을 아래에 여과 없이 3학년부터 차례대로 적었다.

3-1. 전) 정비례는 이해가 됬지만 반비례에 대해 정확하게 개념을 알지 못하였다. 알고보면 간단한게 함수였는데 그래프와 공식에 막혀 답답함을 느꼈다. 이차함수는 또 어떻게 이해할지 난감하고 막막했다.

후) 푼만큼 도움이 된 것 같다. 함수의 개념에 대해 잘 알게 된 것 같다. 함수의 개념에 자신감이 생긴 듯 하다. 다만, 기간이 정해지지 않아서 문제를 자꾸 밀리게 되는 것 같다.

3-2. 전) 중1 때 함수를 처음 배울 때 선생님은 함수는 어려운게 아니라고 하셨다. 그런데 친구들은 함수만큼 어려운 것은 없다고 해서 왜 이런 차이가 생겼는지 알 수가 없었다. 함수를 끝내고 나서는 평행이동과 기울기 관련해서는 이해가 덜 되어 약간 어렵다고 느꼈지만 다른 부분들은 어렵게 느껴지지 않았다. 또, 2차함수가 3학년 과정에 있기도 해서 함수의 중요성은 실감했지만, 완벽하게 이해가 되지 않았다.

후) 학습지를 통해서 평행이동과 기울기 중심으로 보려고 했다. 학습지에 잘 설명되어 있어서 정확히 이해할 수 있었다. 그리고, 다른 함수 관련 부분들 중에서도 까먹었던 부분이나 좀 더 알고 싶었던 내용들도 알

수 있었다. 이 학습지를 통해서 3학년 과정을 위한 기본기를 다시 한번 다질 수 있어서 이차함수 과정을 나가는데 부담이 덜하다.

3-3. 전) 난 수학을 좋아하지 않았다. 솔직히 싫어했던 것 같다. 그 싫어하는 이유가 복잡한 계산과 함수였다. 도무지 함수라는 건 그 실생활엔 사용조차 않는게 왜 필요한 지 이해하지도 못했었다.

후) 수학의 매력은 많은 문제를 풀면서 느끼는 건가 보다. 고기는 씹어야 맛이고, 말은 해야 맛이고, 수학은 풀어야 맛인 것 같다. 수학 푸는 게 꽤 재미있어졌다.

3-4. 전) 함수! 이 말만 들으면 $y = ax + b$ 밖에 생각이 나지 않았다. 특히 나는 함수활용에 너무 약해서 2학기 수학시험을 매우 걱정하고 불안해했다. 그리고 수학 기말고사는 항상 안좋았다. 함수를 잘 할 수 있는 방법이 없는지 하고 생각하다가 문제를 많이 풀면 될 것 같아 풀어 보았지만 꼭 그렇지도 않았다. 마침 3학년이 되었는데 함수를 잘 할 수 있게 해준다 길래 신청을 하고 문제를 풀어 보았다.

후) 함수를 위한 학습지(?)는 역시 달랐다. 표현은 역시 홍경호선생님 말투다. 또 재미있게 함수를 할 수 있었고, 특히 원리가 잘 이해됐다.

3-5. 전) 학습지를 풀기 전에 함수는 마냥 어렵기만 했었던 것 같다. 그냥 함수라고 하면 얼어붙었었다는 ... 솔직히 말해서 수학에는 관심조차 없었다. 또 수학이 정말 싫었다. 그래서 수학시간 때 수업을 잘 듣지 않았고 그래서 함수의 기본적인 내용도 몰랐다. 그래도 2학년 때에는 수학성적이 많이 떨어져서 공부를 나의 입장에는 열심히 했지만 함수의 기본들을 잘 정리하지 않아서인지 함수 문제가 나오면 자주 틀리고 긴장했던 것 같다.

후) 학습지를 풀어 본 후 함수의 기본이 잘 정리된 것 같다. 꼭 함수의 문제가 나오면 모두 맞을 자신이나 실력은 없다. 하지만 함수라고 하면 무턱대고 어렵다라는 생각이 전부는 아니지만 거의 사라졌다. 이번 모의고사에서 나온 함수문제도 기본적인 것들을 알고 있고 어렵다고 긴장을 하지 않아서인지 어렵지 않게 풀 수 있었던 것 같다.

2-1. 전) 함수문제가 응용되어 나오면 못푸는 경우도 많고 짜증이 났다. 그래도 시험은 쉽게 나오니 어느 정도 풀 수 있었지만 응용 아니 아주 어렵게 함수 문제를 내면 손도 못건들 만큼 어렵고 짜증, 귀찮았다.

후) 기초가 다져지고 조금씩 어려운 문제를 풀 수 있게 되어 좋았다. 하지만 아주 어렵게 함수문제를 낸 것은 아직도 어렵다. 그래도 기초가 다져지니 아주 좋았다.

2-2. 전) 학습지를 풀 기 전에는 함수가 어려웠는데, 학습지를 풀고나니 조금 쉬

웠다.

후) 또 풀고 싶지 않다. 또 풀려면 또 다목적실까지 가서 학습지 가져오고 또 답맞추어 보려면 다목적실로 또 가야하니까 번거로웠다. 그냥 복도 모서리마다 붙여 놓았으면 좋겠다.

2-3. 전) 좌표평면에 대해서 잘 알지 못했던 부분이 있었다. 이번 기회에 좌표평면에 대해서 알아보아야겠다고 느꼈다.

후) 내가 알지 못했던 부분에 대해 잘 알 수 있었으며 학습지에 설명부분이 나의 모르는 것을 잘 설명되어 좋았다.

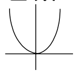
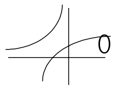
2-4. 전) 처음에는 그럭저럭 하였으나 점차 시간이 지나면서 귀찮아졌고 양이 너무 많아서 다 하지는 못했다. 그러나 동생이 함수문제를 들고와서 “형 이거 어떻게 푸는 거야”하는 순간 난 깜짝 놀랐다. 동생이 문제는 너무 쉬웠다. 동생도 나와 같은 문제를 풀었으면 좋겠다.

후) 공부에 도움이 되고 1학년 배운 것을 복습하니 기분이 매우 좋다. 다음에도 이런 기회가 있다면 나는 참가할 것이다.

2-5. 전) 함수가 좀 이해가 잘 안되기도 했다. 함수 문제를 좀 많이 풀고 싶었다.

후) 자신감이 생겼다. 재미있는 것이라고 느꼈다.(함수를) 1학년 때 배우지 못했던 것도 조금 있었다. 정말 재미 있었다. 선새임의 재미있는 설명이 쓰인 것 같아서 재미 있었다.

1-1. 전) 단순하게 좌표상에만 선을 마음대로 조절하여 그것을 식으로 나타내고 교점등을 구하는 것인 줄 알았다. 그리고 이차함수, 삼차함수 같은 곳을 어떻게 풀어야 하는가 등을 연구하는 것 같았다.

후) 굉장히 희안한 것도 많았다. 제곱수의 표는  이런 식으로 생겼고, $y=\frac{\square}{x}+b$의 그래프가  이런 식으로 되는 것이 정말로 어떤 곳은 궁금했고 어느 한편으로는 신기하기도 했다. 함수의 세계에 비하면 내가 아는 것은 우물안 개구리라는 것을 느꼈다. 그런데 2차함수 푸는 방법을 알면 좋겠는데 없어서 조금 아쉬웠다. 함수를 더 알고 싶은 호기심이 생겼다.

1-2. 전) 정말 복잡하고 짜증나고 1학기 수학 중에 가장 싫은 부분. 반비례 정비례는 쉬운데 함수값을 구하거나 그런게 정말 싫다.

후) 처음엔 정말 어렵고 짜증났는데 싹 다보니까 간단하게 나와서 좀 더 쉬워졌다.

1-3. 전) 처음 함수라는 것을 알고, 함수에 대해서 배웠을 때, 나는 함수란 어렵다고 여겼는데 학원에 다니면서 함수가 재미있는 것이라는 것을 알게

되었다. 나는 학습지 풀기 전에도 함수는 재밌었다.

후) 함습지를 풀고나니 여러 가지를 배우게 되었다. $f(x)=y$, $ax+b=y$등의 표현들만 알고 있었는데 더 많은 것을 알게 되어서 기뻤다. 모르는 문제는 하나 있었다.

1-4. 전) 배우지 않아서 어렵기만 하고 이해도 되지 않았다. 그리고 정비례, 반비례, 치역, 차역, x축, y축이란 단어가 어렵게만 느껴졌다. 그래서 함수가 싫었다.

후) 함수가 쉬워졌고 2학년 때 경시대회를 본다면 보다 좋은 성적을 거둘 수 있을 것 같고 학습지를 진작 풀어 보았으면 좋았을텐데 라는 후회가 생긴다. 그리고 보다 열심히 함수공부와 수학 공부를 해보도록 노력하겠다.

1-5. 전) 그저 x를 대입해서 y를 구하는 짜증나는 것인 것 같았다.

후) 함수에도 여러 가지 비밀이 있고, 이것을 알면 함수가 쉬워지는 것 같았다. 하지만 역시 어려웠다. 그래도 배우면 재미있을 것 같다. 나중에라도 자세히 배우고 싶다.

이상의 결과에서 볼 때 학습자들은 연구자가 개발한 학습지를 통해 함수의 개념을 쉽게 이해하고 있었고, 원리 이해에 자신감을 보였다. 또한 함수에 대한 재미와 흥미를 가지게 되었으며 스스로 학습하고자 하는 의욕을 보였다.

이러한 결과는 학습지를 구성함에 있어서 자세한 설명을 첨부하고 다양한 예시문제들을 개발한 결과라고 생각된다. 함수 단원은 짧은 시간에 배울 것도 많고 연습해야할 것도 많기 때문에 스스로 내용을 정리할 수 있는 학습지의 필요성이 절실하다고 하겠다.

Ⅶ. 결론 및 제언

7차 교육과정 속의 함수의 개념은 6차 교육과정에서 두 집합 사이의 임의의 원소의 대응관계로 인식한 현대적 개념을 뒤로 한 채 대응관계에서 그 규칙성을 찾아내어 일반화시키는 고전적인 개념으로 변했다. 이러한 개념의 변화가 추구하는 바는 학생들에게 함수를 이해하기 쉽게 하려는 노력의 하나일 것이다. 하지만 관점의 차이를 벗어나서 모두가 함수를 설명하고 있지만 각자가 완벽한 것은 없고, 어쩔 수 없이 서로를 의지해야하는 상호보완적인 관계가 될 수밖에 없다. 즉, 함수개념은 문맥에 따라 역동적인 변화현상 가운데의 종속 관계를 기술하고 해석하고 예언하기 위한 수단으로서의 변수 측면과 그 규칙성을 나타내는 식 표현과 그래프 표현 그리고 다양한 대응 관계적 측면을 포괄하는, 수학 내적 외적인 제현상을 이해하고 조직할 수 있는 수단으로 작용해야 한다. 그러므로 현장에서의 효율적인 함수지도 방법이란 관점에 관계없이 학생들의 이해를 증진시킬 수 있는 방향으로 나아가야 할 것이다.

이에 본문에서는 먼저 함수의 개념 및 역사적 변천과정을 통해 함수 개념에 관한 이론적 배경을 살펴보았는데, 7차 교육과정에서는 6차 교육과정과는 달리 함수의 고전적 개념인 종속적 관점에서 함수를 정의하고 있으며, 역동적이고 변화 현상과의 관련성을 중시하였다. 이러한 개념의 변화는 학생들에게 함수를 이해하기 쉽게 하려는 노력의 하나일 것이다

다음으로 함수 개념 지도에 관한 기존의 연구를 살펴보았다. 기존의 연구 결과를 종합한 결과 함수의 개념 지도에서 주목해야 할 점은 개념에 대한 정확한 이해를 바탕으로, 적절한 연계성을 가지도록 지도하며 방법적인 면에서는 다양한 표현과 많은 예제, 실생활과의 연관을 중요한 요소로 지적하고 있었다.

이를 바탕으로 본 연구에서는 함수 개념의 효율적인 지도방안을 위한 구체적인 지도방법을 제시하였는데, 기존의 연구 결과에 Wheatley(1991)에서 제시한 문제 중심 교수 학습 방법을 도입하였다. 그 구체적인 방법으로는 함수 개념에 대한 정확한 이해를 돕기 위한 다양한 표현과 많은 예제, 함수에 대한 새로운 명명, 실생활과 연결, 학습지를 이용한 함수 학습 내용의 재구성, 그래프 해석 능력 및 작성 능력 향상, 오류 수정을 통한 이해 능력 향상과 같은 방법을 제시하였고 이를 학습자들에게 적용하여 학생들의 반응을 살펴보았다.

연구 결과 학습자들은 연구자가 개발한 학습지를 통해 함수의 개념을 쉽게 이해하고 있었고, 원리 이해에 자신감을 보였다. 또한 함수에 대한 재미와 흥미를 가지게 되었으며 스스로 학습하고자 하는 의욕을 보였다.

위의 연구 결과를 토대로 함수의 개념을 지도하는 데 있어서 몇 가지의 제언을 하고 싶다.

첫째, 함수 개념 설명에 있어서 학생들의 마음 속으로 파고들 수 있는 적절한 용어를 선택해야 한다.
둘째, 개념을 이해하고 있는지에 대한 적절한 예시 문제를 제시해야 한다.
셋째, 학생들이 그래프를 그리고, 그래프를 해석하는 능력이 많이 뒤지므로 이에 따른 좌표지와 적절한 예제를 준비를 해야 한다.
넷째, 학생들 스스로 생각하며 문제를 풀 수 있도록 학습지를 활용해야한다. 또한 학습지를 구성할 때는 문제만 적어서 풀어보라고 할 것이 아니라 , 예제 문제를 자세히 다뤄서 문제를 풀기 전에 자신감을 갖게 하는 것이 중요하다고 본다. 이는 수업시간에 잘 듣지 못한 학생이나, 이해가 잘 되지 않았던 학생들을 위한 시각화 작업이기도 하다.

참고 문헌

칼 B외(2000), 「수학의 역사 상·하(A history of mathematics)」, 양영오·조윤동 역(2000), 경문사.

김용운·김용국(1996), 「수학사대전」, 우성.

____________(1993), 「재미있는 수학여행」, 김영사.

김인수(1997), 「해석학의 기초개념과 학습지도」,전남대학교 출판부.

우정호(2000), 「학교수학의 교육적 기초」,서울대학교출판부.

______(2000), 「수학 학습- 지도 원리와 방법」, 서울대학교 출판부.

______(2003), 「수학교육학의 지평」, 경문사.

김도상외(1990), 「수학과교재론」, 경문사.

강옥기외(2002), 「중학교 수학 7-가 교사용지도서」, 두산.

________(2002), 「중학교 수학 8-가 교사용지도서」, 두산.

________(2002), 「중학교 수학 9-가 교사용지도서」, 두산.

교육부(1999), 제 7차 중학교 교육과정 해설 (Ⅲ).

______(1999), 제 7차 고등학교 교육과정 해설.

______(1999), 수학과 교육 과정.

오병승(1986), “수학학습에서의 기호의 의미와 기능”, 「수학교육논총」, 제4집, 대한수학회.

조한숙(1991), “함수 개념 형성에 관한 연구”, 교육학석사학위논문, 서울대학교 대학원 수학교육과.

박희진(1993), “함수 개념 지도유형에 따른 학습효과에 관한 연구”, 석사학위논문, 이화여자대학교 교육대학원.

홍정아(2000), “중학교 함수단원의 연계성에서 각 개념에 대한 학습자의 이해 수준 연구”, 석사학위논문, 강원대학교 교육대학원.

김미경(2000), “함수지도에 관한 연구”, 석사학위논문, 시립인천대학교 교육대학원.

이승빈(2000), “함수 지도에 관한 연구”, 석사학위논문, 중앙대학교 교육대학원.

이현주(2001), “함수지도의 어려움”,「수학사랑」, 통권 26호.

이근정(2001), “발견학습 이론을 적용한 수학 교수·학습 지도에 관한 연구”, 석사학위논문, 경희대학교 교육대학원.

한혜진(2001), “수학7-가 함수 단원 분석과 중학생들의 함수 개념 연구”, 석사학위논문, 이화여자대학교 교육대학원.

최윤경(2001), “효율적인 함수지도 방안연구”, 석사학위논문, 충남대학교 교육대학원.

정혜일(2002), “함수의 개념과 함수 지도 방안 연구”, 석사학위논문, 연세대학교 교육대학원.
박현정(2002), “함수 단원에서의 오류유형과 지도상의 유의점에 관한 조사연구”, 석사학위논문, 국민대학교 교육대학원.
오순임(2002), “규칙성과 함수 영역의 교수·학습 방법 탐색”, 석사학위논문, 부산교육대학교 교육대학원.
민경호(2002), “중학교 수학에서의 함수의 생활속 응용에 대한 연구”, 에서 석사학위논문, 인천대학교 교육대학원.
김민정(2003), “수학7-가 함수단원 지도에서 학습자료 중심의 상호작용에 의한 효과”, 석사학위논문, 이화여자대학교 교육대학원.
http://119math.com/
http://www.edunet4u.net/
http://www.cisec.or.kr/

Abstract

Study on teaching function, mainly dealing with math lessons of middle school

Hong, Gyeong-ho

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Jeju, Korea

Supervised by Professor Hyun, Jin-oh

As the mathematical concept is not acquired from daily experiences but conveyed mainly by math teachers, math teachers play a key role in the early stage of math learning. One of the problems that most math teachers have in teaching is to explain the functional concept to their learners.

This research aims at finding effective methods of teaching function in middle school math classes, focused on the question of how learners can be led to a better understanding of the functional concept.

In the main text, the functional concept is observed and the theoretical backgrounds related to the concept of function are dealt with by observing the changes to the national curricula. The 7th national curricula defines function from the subordinate viewpoint considered classical, unlike its previous one(the 6th). The 7th curricular also emphasizes the relationship between function and dynamic, changeable phenomena. This conceptual change would be thought of as one of the efforts that make learners understand function more easily. Established researches concerning teaching of the functional concept are also observed. From the consequence of a synthetic observation of the established ones, it is

concluded that what matters in the teaching of the functional concept is to help learners have an exact understanding of the concept and teach them function in connection with each grade's contents regarding function. The established researches also emphasize a variety of expressions, a lot of examples, and a relationship with daily life in a methodical respect.

This research introduces Problem-based Teaching and Learning (Wheatley, 1991) to the established researches. It suggests concrete methods for an effective teaching of functional concept: various expressions and lots of examples, new naming of function, relationships with the real world, reconstruction of function learning through worksheets, devices that can be used in order to develop the learners' ability to interpret and draw graphs, and to comprehend the concept through error correction. These methods were applied to the learners' learning. Consequently, the research concludes that the learners were able to understand the concept and showed the confidence in understanding the principles through the methods created by the researcher. The learners showed interested in the concept of function and were willing to participate in self-directed learning.

Based on the results of the research described above, some suggestions can be made regarding teaching the functional notion.
First, teachers should select terms which can attract the learners' interest in explaining the concept to them. Secondly, teachers should provide the learners with suitable examples in order to confirm whether they understand or not. Thirdly, teachers should prepare enough coordinate papers and examples in oder to make up for the learner's poor ability to draw up and interpret graphs. Teachers can also use worksheets to make the learners think and solve problems for themselves. In addition, when teachers compose worksheets, they should keep the worksheets simple so that students obtain correct answers and therefore gain confidence. This is a visualized technique for learners who didn't focus on or understand the previous classes.

부록1

< 수학 단원에 대한 설문지 및 결과표 , 2004. 03.08. >

1. 설문지

1. 우리는 일년간 수학의 여러 분야를 배웠습니다. 단원 중 가장 어려웠던 분야부터 차례대로 3개만 적어주십시오.

   ① 집합과 자연수 ② 정수와 유리수 ③ 문자와 식 ④ 일차방정식
   ⑤ 일차함수 ⑥ 통계 ⑦ 도형
   (1. 2. 3.)

2. 결과표

번호	단원	2학년			계	3학년			계
		1	2	3		1	2	3	
1	집합과 자연수	19	22	21	62	23	20	23	66
2	정수와 유리수	23	30	43	96	9	39	28	76
3	문자와 식	33	47	58	138	12	23	44	79
4	일차방정식	48	90	56	194	22	44	53	119
5	일차함수	147	65	57	269	116	70	30	216
6	통계	20	38	31	89	17	36	49	102
7	도형	24	22	48	94	71	38	43	152
	계	314	314	314		270	270	270	

※ 2학년은 가장 어려운 단원으로 함수를 꼽은 학생이 46%였으며, 1,2,3번 합했을 때는 85%였다.

3학년은 가장 어려운 단원으로 함수를 꼽은 학생이 42%였으며, 1,2,3번 합했을 때는 80%였다.

부록 2

<1> 함수의 뜻

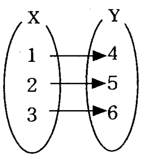
대응 : 집합 X의 원소에 집합 Y의 원소를 짝지어 주는 것

함수 : 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 한 개씩만 대응할 때

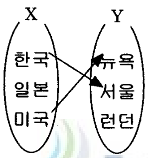
1) X의 원소가 모두 대응되어야 한다. 즉, 대응되지 않은 외톨이가 있으면 함수가 아니다.
2) Y의 원소에 한 개씩만 대응되어야 한다. 즉, 2개 이상 대응되는 원소가 있으면 함수가 아니다.

(예) 다음의 예를 보면서 대응과 함수를 알아보자.

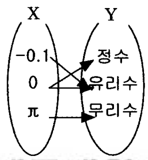
1)



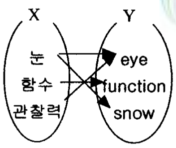
2)



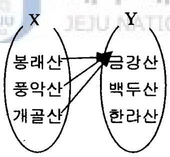
3)



4)



5)



(3)에서 유리수는 분수로 나타낼 수 있는 수,
무리수는 분수로 나타낼 수 없는 수이다.

$-0.1=\frac{-1}{10}$: 유리수, $0=\frac{0}{1}$: 유리수

π : 분수로 나타낼 수 없으므로 무리수

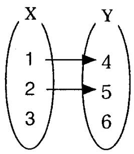
(풀이)

1) X의 원소가 모두 대응되었고, X의 한 원소에 Y의 원소 두 개가 대응되는 것이 없으므로 함수이다.
2) X의 원소 중 일본이 대응되지 않으므로 함수가 아니다.
3) 0이 정수와 유리수에 두 개에 대응되므로, 함수가 아니다.
4) 눈이 두 개에 대응되므로, 함수가 아니다.
5) 함수의 2가지 조건을 만족하므로, 함수이다.

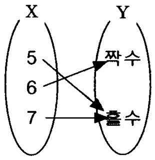
결론 : 1. 1), 2), 3), 4), 5)는 모두 대응입니다.
2. 함수인 것은 1), 5) 입니다.

(1) 다음 대응 중에서 함수인 것은?

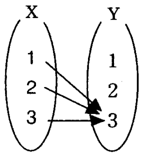
1)



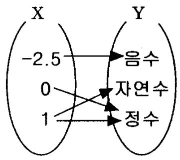
2)



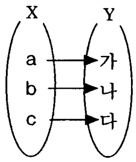
3)



4)

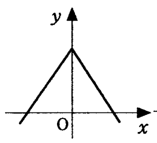


5)

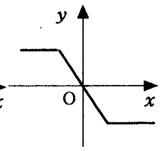


(2) 다음 중 함수의 그래프로 적당하지 않은 것을 모두 고르시오. (X의 원소는 x축에 있는 점 모두를 말하고, Y의 원소는 y축에 있는 점이다. X의 원소가 모두 대응되었는지, 오로지 한 개씩만 대응되었는지 잘 생각해보자)

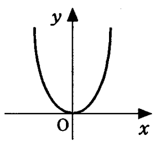
①



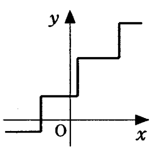
②



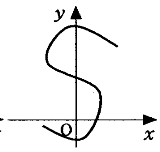
③



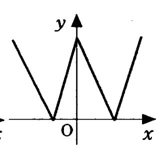
④



⑤



⑥



<2> 함수의 표현방법(1).

<함수의 표현방법>

집합 X에서 집합 Y로의 함수 f.

표현 : $f : X \rightarrow Y,\ y = f(x)$

(예) 물을 어떤 상자에 집어넣었더니 얼음이 되어 나왔습니다. 그 때 물을 얼음으로 바꾼 냉장고가 바로 함수입니다.

(function : 작용한다. 函 : 상자 함 數 : 셈수).

함수란 어떤 값을 넣으면 다른 값으로 바꿔주는 상자를 말합니다.

입력 (물) ⟶ $\boxed{\text{냉장고}}$ ⟶ 출력 (얼음)

입력시키는 값을 x, 나오는 값을 y라하고, 상자를 function(함수)의 앞글자 f라하면 ,

입력 x ⟶ $\boxed{f}$ ⟶ 출력 y

x를 집어넣어서 f라는 작용을 하여 y를 만들었다는 것이다.

냉장고에 물을 집어넣었더니 얼음이 되었다는 것을 기호로 나타내면,

1) 물 $\xrightarrow{\boxed{\text{냉장고}}}$ 얼음 2) 냉장고 : 물 ⟶ 얼음

3) 냉장고:물 ⟶ $\boxed{\text{냉장고}}$(물) 4) 얼음= $\boxed{\text{냉장고}}$(물)

(1. 물을 냉장고에 넣었더니 얼음이 되었다.
2. 냉장고는 물을 얼음으로 바꾸는 작용을한다.
4. 얼음은 냉장고에 물을 넣으면 만들어진다.)

위의 내용을 함수의 기호로 표현하면

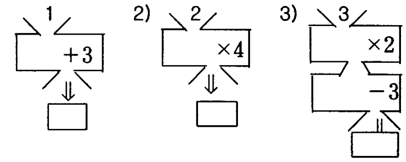
$x \xrightarrow{f} y$, $f : x \longrightarrow y$

$f : x \longrightarrow f(x)$, $y = f(x)$

이 모두가 같은 표현들이다.

(예1) 다음 초등학교 문제를 풀어보자.

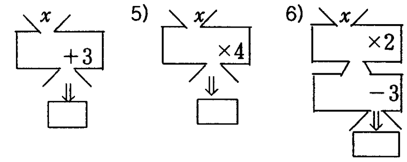
1) 2) 3)



$1 \rightarrow 1+3=4$ $2 \rightarrow 2\times4=8$ $3 \rightarrow 3\times2-3=3$

위 그림에서 x를 입력해 보자.

4) 5) 6)



$x \rightarrow x+3$ $x \rightarrow x\times4$ $x \rightarrow x\times2-3$

위 값들을 함수의 관계식으로 나타내어 보자.

상자의 이름을 f 라하고 나온 값을 y라 하면 x가 f에 들어갔다 나와서 y로 변하는 것이다.

4) 나온 값인 $x+3$은 y와 같고 $f(x)$와 같으므로

$x \xrightarrow{f} x+3$, $f : x \longrightarrow x+3$

$f(x) = x+3$, $y = x+3$

5) $f(x)=4x$, $y=4x$

6) $f(x)=2x-3$, $y=2x-3$

(예2) $f(x) = x+3$에서 $f(2)$의 값을 구해보자.

(풀이) 위의 관계식의 표현 방법을 달리 해보자.

$f(x)$는 y와 같은 것이고,

$f(2)$는 "$x=2$일 때, y의 값"이라는 뜻이다.

그러므로, 주어진 문제를 바꿔 쓰면,

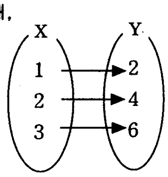
⇒ $y = x+3$에서 $f(2)$의 값은?

⇒ $y=x+3$에서 $x=2$일 때, y의 값은?

답 : $y=5$ 또는 $f(2)=5$ 입니다.

<3> 함수의 표현방법(2).

(예1) 집합 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{2,4,6\}$이 아래와 같이 대응될 때,



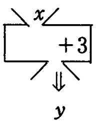
1) X 몽땅, 양다리 사절이 되어서 함수가 되므로, "집합 X 에서 집합 Y로의 함수이다" 라고 하며, 관계식은 $y=2x$입니다.

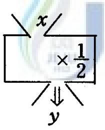
2) 기호로는 $f: X \to Y$, $y=2x$라 합니다. (또는 $f(x)=2x$)

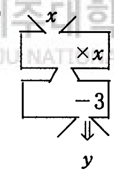
3) 집합 X의 원소를 x, 집합 Y의 원소를 y라 할 때, $x=2$일 때, y의 값은 4이고, $f(2)$의 값도 4이다.

4) $f(f(1))$은 $f(1)=2$이므로, $f(f(1))=f(2)$가 된다. 따라서, $f(f(1))=f(2)=4$ 이다.

(1) 다음을 여러 가지 함수의 표현으로 나타내어라.

1) 

2) 

3) 

(2) 함수 $y=-2x+1$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

1) $x=2$일 때, y의 값은?

2) $x=-\frac{3}{2}$ 일 때, y의 값은?

3) $f(-\frac{3}{2})=$

4) $f(0)+f(1)+f(2)=$

5) $f(0)-f(1)\times f(2)=$

(3) 함수 $f(x)=-2x+2$에서 $f(0)+f(1)$의 값은?

(4) 함수 $f: X \to Y$가 $y=2x-3$으로 정의될 때, $\frac{f(4)-f(-1)}{2}$의 값은?

(5) 함수 $f(x)=-2x+3$에서 $f(a)=11$이다. 이 때, a의 값은?

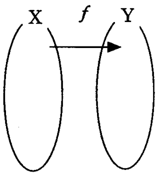
(6) 함수 $f(x)=ax+6$에서 $f(2)=2$일 때, a의 값은?

(7) $f(x)=ax-3$ 에서 $f(2)=3$ 일 때, $f(4)$ 의 값은?

(8) 이차함수 $f(x)=2x^2-3x-1$에서 $f(-1)=$

<4> 함수의 용어

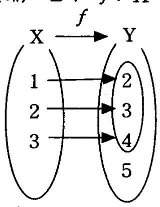
<함수의 용어> : 정의역, 공역, 함수값, 치역



함수 $f: X \to Y$가 있을 때, X를 <u>정의역</u>, Y를 <u>공역</u>, X의 각 원소에 대응되는 Y의 원소들을 <u>함수값</u>이라 하며, 함수값의 전체집합을 <u>치역</u>이라 합니다.

(치역은 공역인 Y의 부분집합이다.)

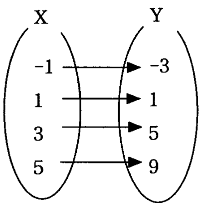
(예) 함수 $f: X \to Y$가 있을 때



1) 정의역 : X 또는 $\{1,2,3\}$
2) 공역 : Y 또는 $\{2,3,4,5\}$
4) 함수값 : 2, 3, 4
3) 치역 : $\{2,3,4\}$

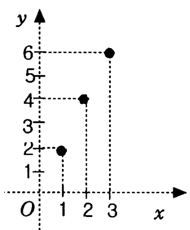
(※ 정의역은 집합이므로 1,2,3이라 하면 안됩니다. 반드시 집합기호인 { }를 써야됩니다. 공역과 치역도 마찬가지입니다.)

(1) 다음 함수문제를 풀어봅시다.



1) 정의역 :
2) 공 역 :
3) 치 역 :
4) 관계식 :
5) $2f(3)-3f(1)=$
6) $f(a)=5$일 때, $a=$

(2) 다음 함수문제를 풀어봅시다.



① 정의역 :
② 공 역 :
③ 치 역 :
④ 관계식 :
⑤ $2f(3)-3f(1)=$
⑥ $f(a)=5$일 때, $a=$

(3) 함수 $f(x)=2x$의 정의역이 $\{1, 2, 3\}$, 공역이 $\{2, 4, 6, 8\}$일 때,
1) $x=1$일 때의 함수값 $f(1)$을 구하여라.
2) $f(2)=$
3) $f(3)=$
3) 이 함수의 치역을 구하여라.

(4) 함수 $f : \{1, 2, 3, 4, 6\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$가 정의역의 원소 x에 대하여 x이하인 소수의 개수를 대응시킬 때 이 함수의 치역은?

(8) 점 $(3, 1)$을 지나는 함수 $y=ax$의 치역이 $\{0, 1, 2\}$일 때, 정의역을 구하여라.

(9) 함수 $y=\frac{1}{2}x+1$에 대하여 치역이 $\{-1,0,1,2\}$일 때, 이 함수의 정의역을 구하시오.

(10) 두 집합 $X=\{x \mid 1 \leq x \leq 10$인 정수$\}$, $Y=\{y \mid y$는 정수$\}$에 대하여 X의 원소 x에 대응하는 Y의 원소 y는 「x의 약수의 개수」라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.
1) 정의역 :
2) $f(1)=$
3) 치역 :

<5> 정비례

...... 정비례는 y를 x로 (　) 값이 항상 같다 . 즉, (　　　　)

<정비례> : 간단히 비례라고 한다

: x가 2배, 3배, 4배,...로 변화 하면, 그에 따라 y도 2배, 3배, 4배,... 로 변화할 때, x와 y는 서로 비례한다고 한다.

이때, $y=a\times x$, $\frac{y}{x}=a$라는 관계가 있다.

(a는 일정한 상수)

※ 배

1의 2배 : 2

-2의 3배 : $-2\times 3=-6$

즉, 어떤 수 a의 k배는 $a\times k$가 된다.

(예1) 아래에 x와 y의 대응관계를 표로 나타냈다.

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

대응표에서 x가 2배(1에서 2로), 3배(1에서 3으로), 4배(1에서 4로),...가 되면

그에 따라 y도 2배(2에서 4로), 3배(2에서 6으로), 4배(2에서 8로),... 로 변하므로,

비례이며, 관계식은 $y=2x$ 이다.

다시 한번 잘 살펴보면 $\frac{y}{x}$가 모두 2가 된다.

$$\frac{y}{x}=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=\frac{10}{5}=2$$

(예2) 아래에 x와 y의 대응관계를 표로 나타냈다.

x	1	2	3	4	5
y	-3	-6	-9	-12	-15

비례이며, 관계식은 $y=-3x$ 이다.

다시 한번 잘 살펴보면 $\frac{y}{x}$가 모두 -3이 된다.

$$\frac{y}{x}=\frac{-3}{1}=\frac{-6}{2}=\frac{-9}{3}=\frac{-12}{4}=\frac{-15}{5}=-3$$

(x에 -3배하면 반비례라고 생각하는 것은 착각이다)

> 결론 : 비례함수이다 ⇒ $y=ax\,(a\neq 0)$

(예3) y가 x에 정비례하고, $x=-3$일 때, $y=12$ 이다. 이때, x와 y사이의 관계식을 구하여라.

(풀이) y가 x에 정비례하므로, $y=ax\,(a\neq 0)$

이제 a값을 구하면된다.

이 식에 $x=-3$, $y=12$를 대입하면,

$12=a\times(-3)$, $a=-4$ 따라서,

구하는 식은 $y=-4x$ 이다.

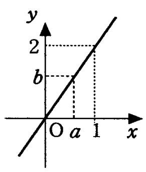
(1) y가 x에 정비례하고, $x=4$일 때, $y=16$이다. x와 y사이의 관계식을 구하여라.

(2) y가 x에 비례한다고 할 때, $x=-3$이면 $y=6$ 이다. $x=-4$일 때, y의 값을 구하여라.

(3) $y=ax$에서 $x=3$이면 $y=1$이다. 이 때, x값이 5배 증가하면 y값은 몇 배 증가하는가?

(4) 정비례함수 $y=ax$에서 x값이 1에서 5까지 변할 때 y값은 $\frac{1}{3}$에서 k까지 변한다고 한다. k는?

(5) 오른쪽 그림과 같은 정비례 함수에서 $\frac{b}{a}$의 값을 구하여라.



※ $y=2x+1$ 는 비례인가? 아닌가? 아니면 무얼까?
간단히 뒤에 +1이 붙어 있어서 $y=ax$꼴이 아니므로 비례가 아니다. 또한, 대응표에도 나와있듯이

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11

$\frac{y}{x}$ ($\frac{3}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{11}{5}$)의 값이 다르므로 비례가 아니다. 후에 나오지만 $y=2x+1$ 는 $y=2x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동 시킨 것이다.

<6> 반비례

...... 반비례는 y와 x의 ( )이 항상 같다. 즉, (   )

<반비례>

: x가 2배, 3배,... 커져가면 y는 -2배, -3배,...로 변하는 것이 아니라,

y는 2의 역수인 $\frac{1}{2}$배, 3의 역수인 $\frac{1}{3}$배,...로 변화할 때, x와 y는 서로 반비례한다고 한다.

이때, $y=\frac{a}{x}$, $xy=a$라는 관계가 있다.

(a는 일정한 상수이다.)

(예1) 아래에 x와 y의 대응관계를 표로 나타냈다.

x	1	2	4	8	16
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$

대응표에서 x가 2배(1에서 2로), 4배(1에서 4로), 8배(1에서 8로),...가 되면

그에 따라 y도 $\frac{1}{2}$배(8에서 4로), $\frac{1}{4}$배(8에서 2로), $\frac{1}{8}$배(8에서 1로),... 로 변하므로,

반비례이며, 관계식은 $y=\frac{8}{x}$ 이다.

다시 한번 잘 살펴보면 $x\times y$가 모두 8이 된다.

$x\times y=1\times 8=2\times 4=4\times 2=8\times 1=16\times\frac{1}{2}=8$

$x\times y$가 항상 8이 되므로, $x\times y=8$가 되고,

양변에 x를 나눠주면 $x\times y\times\frac{1}{x}=8\times\frac{1}{x}$

좌변에 x가 약분이 되므로, $\therefore\ y=\frac{8}{x}$

(예2) 아래에 x와 y의 대응관계를 표로 나타냈다.

x	-4	-2	-1	1	2
y	1	2	4	-4	-2

반비례이며, 관계식은 $y=-\frac{4}{x}$ 이다.

다시 한번 잘 살펴보면 xy가 모두 -4가 된다.

$xy=-4\times 1=-2\times 2=-1\times 4=1\times(-4)=2\times(-2)=-4$

($y=-4x$는 비례함수이지 반비례함수가 아니다.)

> 결론 : 반비례함수이다 $\Rightarrow$ $y=\frac{a}{x}$ $(a\neq 0)$

(예3) y가 x에 반비례하고, $x=10$일 때, $y=2$ 이다. 이때, x와 y사이의 관계식을 구하여라.

(풀이1) y가 x에 반비례하므로, $y=\frac{a}{x}$ $(a\neq 0)$

이제 a값을 구하면 된다.

이 식에 $x=10$, $y=2$를 대입하면,

$2=\frac{a}{10}$ 따라서, $a=20$

그러므로, 구하는 식은 $y=\frac{20}{x}$ 이다.

(풀이2) 반비례하므로, $y=\frac{a}{x}$

$x\times y=2\times 10=20$. $\therefore\ a=20$

따라서, 구하는 식은 $y=\frac{20}{x}$ 이다.

(1) y가 x에 반비례하고, $x=-2$일 때, $y=3$이다. x와 y사이의 관계식을 구하여라.

(2) y가 x에 반비례하고, $x=3$일 때 $y=3$라고 한다. 이 때, $x=-1$일 때, y의 값을 구하여라.

(3) y가 x에 반비례하고, $x=2$일 때, $y=4$ 이다. 이때, x와 y의 값을 순서쌍으로 나타낼 때, 이 반비례 관계를 만족하는 값은?

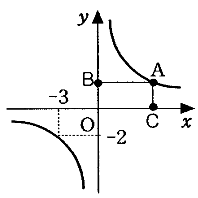
① $(-3,-3)$ ② $(-2,6)$ ③ $(1,6)$

④ $(4,3)$ ⑤ $(8,1)$

(4) $y=\frac{a}{x}$에서 $x=3$이면 $y=1$이다. 이 때, x값이 5배 증가하면 y값은 몇 배 증가하는가?

(5) 반비례함수 $y=\frac{a}{x}$에서 x값이 1에서 5까지 변할 때 y값은 $\frac{1}{3}$에서 k까지 변한다고 한다. k는?

(6) 오른쪽 그림과 같은 반비례 함수에서 점 A가 반비례함수 위에 있을 때, 직사각형 ABOC의 넓이를 구하여라.



<7> 순서쌍과 좌표평면.

1. 순서쌍

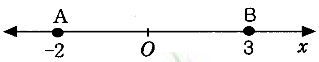
: 말 그대로 순서를 정해서 쌍으로 만든 것이다. 앞에는 x값을 ,뒤에는 y값을 쓰자고 약속하여 만들었고, 순서쌍 $(1,2)$는 $x=1$, $y=2$이라는 뜻이다. ($(1,2)\neq(2,1)$)

예) $x=2$ 일때, $y=3$을 순서쌍으로 표현하면 $(2,3)$이다.

※ 왜 순서쌍을 만들었을까?

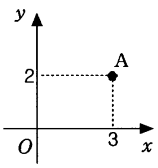
순서쌍이 있으면 우리가 상상할 수 없는 것을 표현할 수 있기 때문이 아닌가 하는 생각이 든다.

1) 철길을 따라움직이는 기차를 생각해보자. 기차는 오로지 앞, 뒤로만 움직인다. 다른 방향으로는 움직일 수 없다. 어느 곳에 기차가 위치해 있는지는 하나의 기준만 있으면 될 것이다. 이러한 차원이 1차원이며, 기준이 되는 축은 1개이다. 그래프로 나타내면 수직선이 된다.

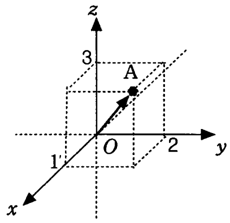


(수로 이루어진 직선이므로 수직선이라 한다.
수+직선=수직선. 수직선 상에 아무곳이나 점을 찍으면 그 점에 해당되는 수가 반드시 한 개 존재한다)
A라는 점이 -2에 있는데 이것을 가리킬 때 무엇이라 해야 할까? 기호로 $A(-2)$라 한다.
B라는 점은 $B(3)$,가운데 있는 "O"는 숫자인 0이 아니라 원점(영어로 origin) 의 앞글자인 O(오)를 말한다. 즉, $O(0)$인 점이다.
또한 이 수직선은 모든 수를 다 모은 것이며, 수를 다 모은 것이 실수이므로, **수직선 = 실수**
(실수를 나타낼 때, Real number 의 앞글자인 R로 나타낸다)

2) 2차원은 컴퓨터의 마우스처럼 앞, 뒤뿐만 아니라 상하로도 움직일 수 있기에 축이 하나 더 필요하므로, x축 외에 y축이 더 들어간다.
원점인 O는 $O(0,0)$
점 A는 $A(3,2)$이다.



3) 3차원은 우리가 살고 있는 공간이며, 위치를 표시하려면 축이 세 개가 필요하다. 그 축은 x축, y축, z축이다.
원점 O는 $O(0,0,0)$, 점 A는 $A(1,2,3)$이다.

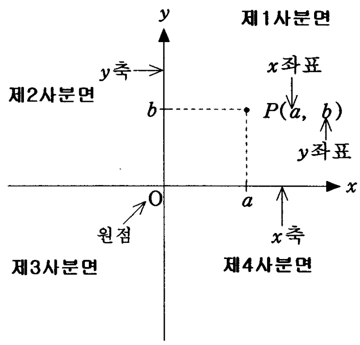


$A(1,2,3)$는 x축으로 1만큼, y축으로 2만큼, z축으로 3만큼 위치해 있는 점이며, 직육면체를 그리고 대각선(맞모금)을 그리면 된다.

4) 4차원은 어떻게 될까? 막 꼬아서 어떻게 될 것 같지만 그래프로 나타낼 수가 없다. 하지만 수학은 4차원을 연구하기 위해 축을 4개로 만들어 여러 가지의 성질을 추측해 내고 있다.
(x,y,z,w)......

2. 사분면

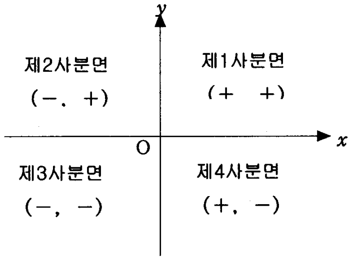
두 좌표축에 의하여 좌표평면은 네 부분으로 나뉘어 지는데, 각각의 이름을 붙였다
(사분면=4+나눌분+면)



<8> 사분면

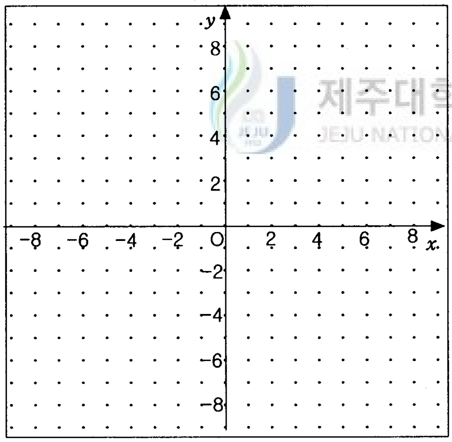
...... **사분면이란 (　　　)을 (　　　)로 (　　　　) 것이다.**

1. **사분면의 x와 y좌표의 부호**



(1) 다음 주어진 점을 좌표평면에 표시하여라.

$A(2,3)$, $B(-2,3)$, $C(4,1)$, $D(-4,2)$, $E(5,5)$, $F(-6,2)$, $G(-3,-2)$, $H(0,7)$ $I(7,0)$, $J(-8,0)$, $K(0,-5)$, $L(-\frac{5}{2},-7)$ $M(\frac{3}{2},-6)$, $N(0,3)$, $P(-4,-4)$, $Q(-3,5)$



(2) 다음 점은 각각 몇 사분면에 있는가?

1) $A(-2,8)$:　　　　2) $B(-11,-20)$:

3) $C(1,\ 0)$:　　　　4) $D(\frac{1}{5},-1)$:

5) $E(100,\ 325)$:　　　　6) $F(0,-23)$:

(예1) 좌표평면 위의 점 $(a,\ b)$가 제4사분면 위의 점일 때, 다음은 제 몇 사분면 위의 점인지 구해보자.

1) $(-a,b)$　　　2) $(-a,-b)$

3) $(a-b,ab)$　　4) $(b-a,-\frac{b}{2a})$

(풀이) 점 $(a,\ b)$가 제4사분면 위의 점이므로, $a>0$, $b<0$이다. 즉, a는 양수, b는 음수

1) $(-a,b)$에서 a는 양수이므로, $-a$는 음수이다. 즉, $(-a,b)$의 부호는 $(-,-)$
　∴ 제 3사분면

2) $(-a,-b)$에서 a는 양수이므로 $-a$는 음수, b가 음수이므로 $-b$는 양수이다.
즉, $(-a,-b)$의 부호는 $(-,+)$
　∴ 제 2사분면

3) $(a-b,ab)$에서 $a-b=a+(-b)$이므로
양수+양수=양수이다. $a-b$는 양수이다.
또는 $a>b$이므로 b를 이항하면 $a-b>0$.
또는 a가 b보다 크므로, 큰 수에서 작은 수를 빼면 당연히 0보다 크므로, $a-b>0$.
$ab=$(양수)×(음수)=(음수) 이다.
즉, $(a-b,ab)$의 부호는 $(+,-)$
　∴ 제 4사분면

4) $(b-a,-\frac{b}{2a})$에서 $b-a=b+(-a)$이므로
음수+음수=음수이다. $b-a$는 음수이다.
또는 $a>b$이므로 a를 이항하면 $0>b-a$.
또는 a가 b보다 크므로, 작은 수에서 큰 수를 빼면 당연히 0보다 작으므로, $b-a<0$.
$-\frac{b}{2a}=\frac{-b}{2a}=\frac{(양수)}{(양수)}=(양수)$ 이다.
즉, $(b-a,-\frac{b}{2a})$의 부호는 $(-,+)$
　∴ 제 2사분면

<9> 사분면과 대칭이동.

(1) 점 $P(a,b)$가 $a>0$, $b<0$일 때, 점 P는 제 몇 사분면 위의 점인가?

(2) 점 $A(a,b)$가 제 2사분면의 점일 때, 다음 중 제 3사분면에 있는 점은?
① $P(-a,b)$ ② $Q(b,a)$ ③ $R(b,-a)$
④ $S(a,-b)$ ⑤ $T(-a,-b)$

(3) 점 $P(x,\ y)$가 제 4사분면에 있을 때, 다음 보기 중 항상 옳다고 할 수 있는 것을 모두 고르면?

ㄱ. $x+y>0$	ㄴ. $x\times y<0$
ㄷ. $x-y>0$	ㄹ. $x\div y>0$

(4) 두 수 x, y가 $xy>0$, $x+y<0$일 때, 점 $P(x,-y)$는 제 몇 사분면 위의 점인가?

(5) 점 $P(m,n)$이 제 2사분면 위의 점일 때, 점 $Q(-m+n,mn)$은 몇 사분면 위의 점인가?

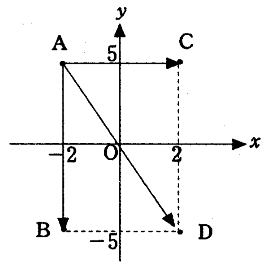
<대칭이동>

: 대칭이동은 기준(축, 원점, 직선 등)에 대하여 데칼코마니 시키는 것이다.

1) $A(-2,\ 5)$를 x축에 대칭 이동시킨 점 B
x좌표는 바뀌지 않고, y좌표의 부호가 바뀐다.
$\therefore\ B(-2,-5)$

2) $A(-2,\ 5)$를 y축에 대칭 이동시킨 점 C
y좌표는 바뀌지 않고, x좌표의 부호가 바뀐다.
$\therefore\ C(2,5)$

3) $A(-2,\ 5)$를 원점에 대칭 이동시킨 점 D
x좌표와 y좌표의 부호가 모두 바뀐다.
$\therefore\ D(2,-5)$



(1) 점 $A(1,\ -2)$에 대하여 x축에 대하여 대칭인 점 B, y축에 대하여 대칭인 점 C, 원점에 대하여 대칭인 점 D의 좌표를 구하여라.

(2) 점 $A(-3,\ -2)$에 대하여 y축에 대하여 대칭인 점이 $B(a,\ b)$이었다. 이 때 점 $P(-b,\ a)$는 어느 사분면에 있는가?

(3) 점 $A(2,-3)$의 x축에 대하여 대칭인 점을 B, y축에 대하여 대칭인 점을 C라 할 때, $\overline{BC}$의 중점 M의 좌표를 구하여라.

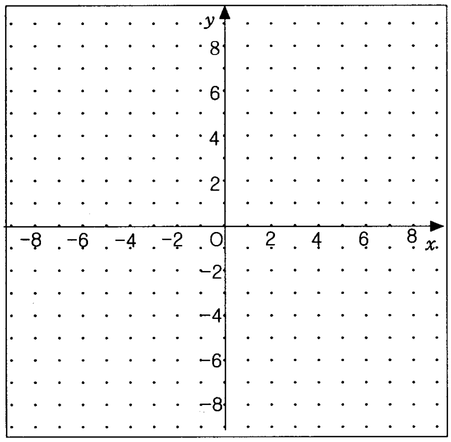
(4) 점 $A(a,\ 2)$의 y축에 대하여 대칭인 점이 $(3,\ b)$일 때, $a+b-ab$의 값을 구하시오.

(5) $y=3x+a$가 점 $P(3,2)$와 원점에 대칭인 점을 지난다고 한다. a의 값은 얼마인가?

<10> 그래프 그리기(1)

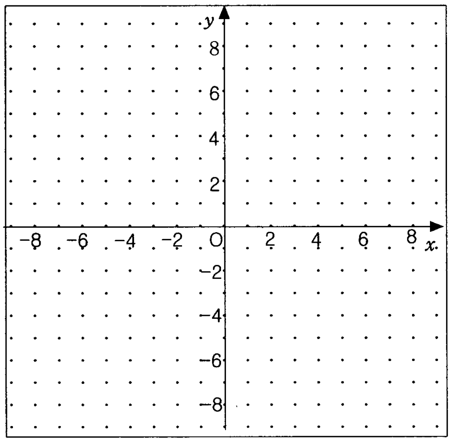
(1) $y=x$

x	···					0					···
y	···										···



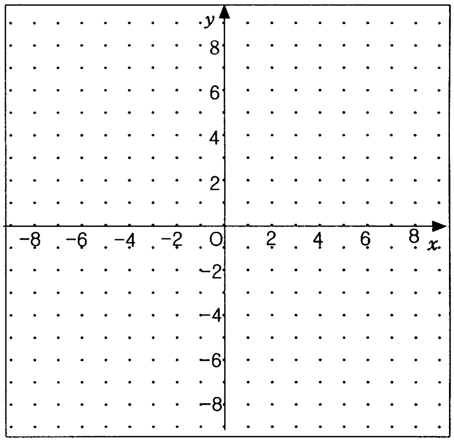
(2) $y=-x$

x	···					0					···
y	···										···



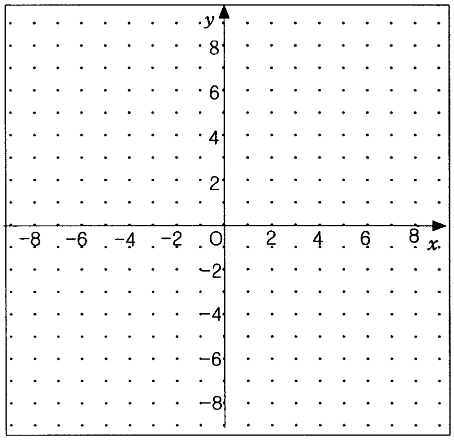
(3) $y=2x+1$

x	···					0					···
y	···										···



(4) $y=-2x+1$

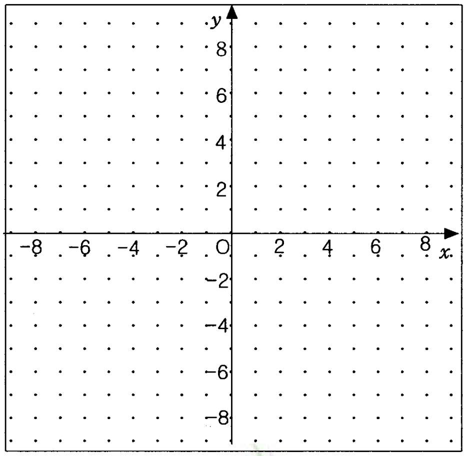
x	···					0					···
y	···										···



<11> 그래프 그리기(2)

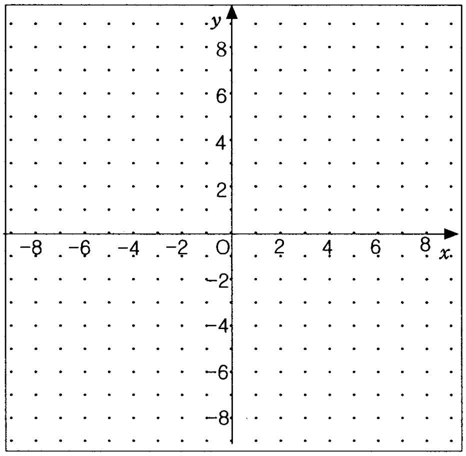
(1) $y=4x-2$

x	…					0					…
y	…										…



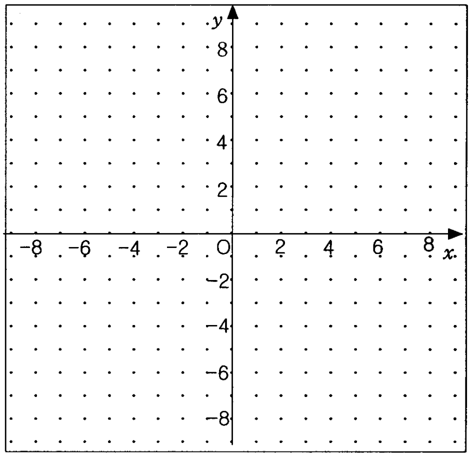
(2) $y=-4x+2$

x	…					0					…
y	…										…



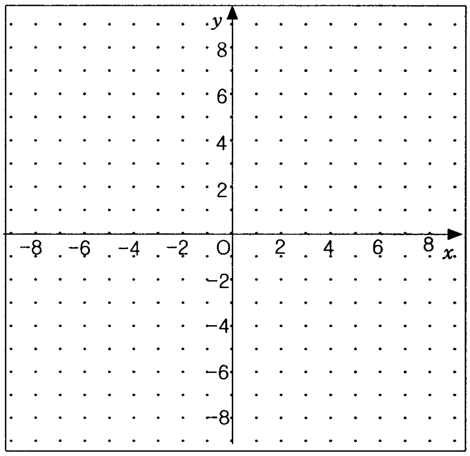
(3) $y=-\frac{1}{2}x+4$

x	…					0					…
y	…										…



(4) $y=\frac{3}{2}x-1$

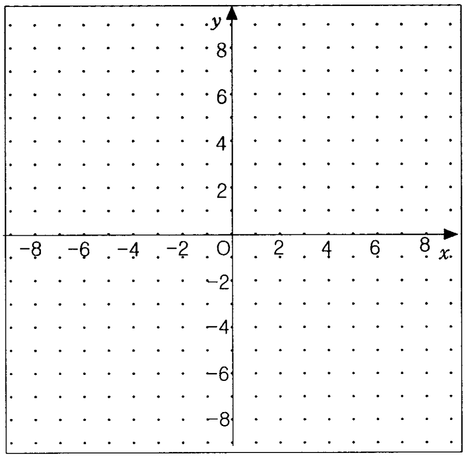
x	…					0					…
y	…										…



<12> 그래프 그리기(3)

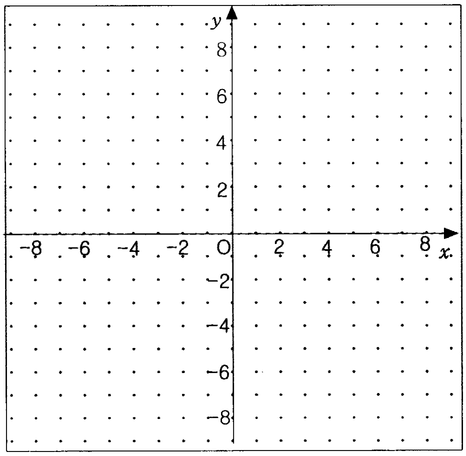
(1) $y=\frac{1}{x}$

x	…					0					…
y	…										…



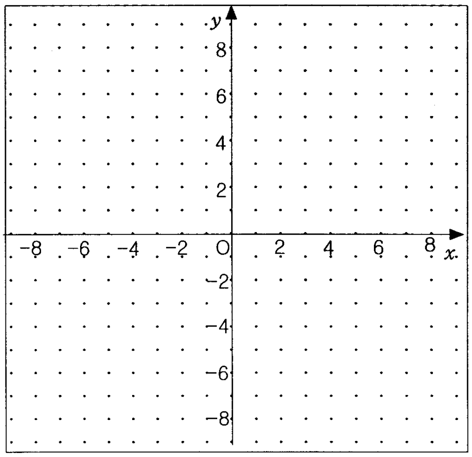
(2) $y=-\frac{1}{x}$

x	…					0					…
y	…										…



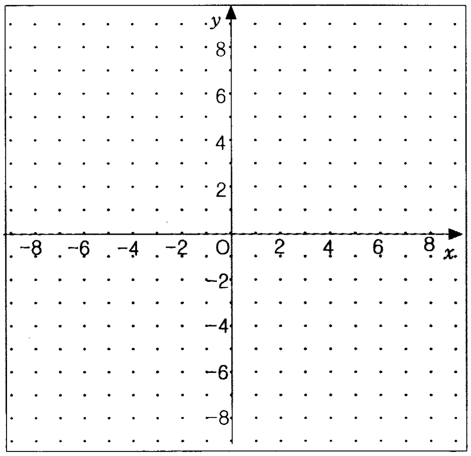
(3) $y=\frac{6}{x}$

x	…					0					…
y	…										…



(4) $y=-\frac{6}{x}$

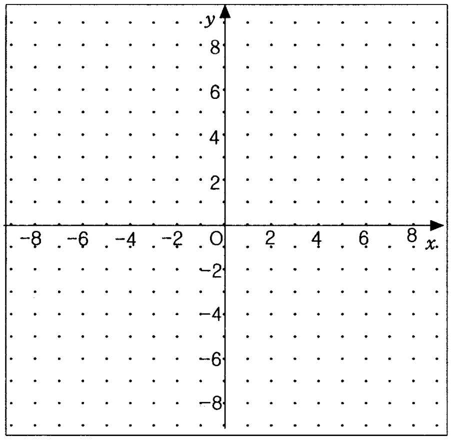
x	…					0					…
y	…										…



<13> 그래프 그리기(4)

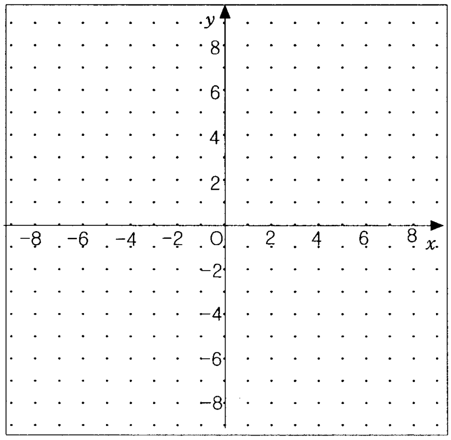
(1) $y=|x|$

x	…					0					…
y	…										…



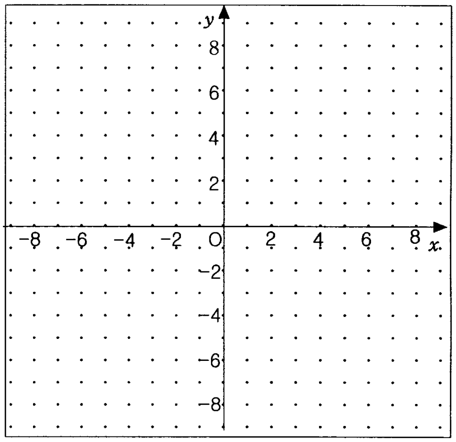
(2) $y=-|x|$

x	…					0					…
y	…										…



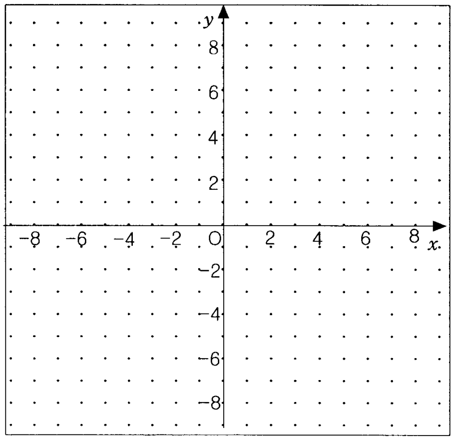
(3) $y=x^2$

x	…					0					…
y	…										…



(4) $y=-x^2$

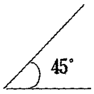
x	…					0					…
y	…										…



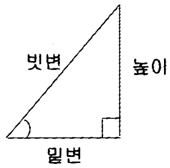
<14> 기울기(1)

< 기울기 >

: 직선이 얼마나 기울어져 있을까? 우리는 "30° 기울어져 있다. 45° 기울어져 있다." 라고 말을 하는데, 이렇게 말하지 말고 다른 방법이 없을까 하는 생각을 했고, 이 직선이 기울어져있는 정도를 직각삼각형에서

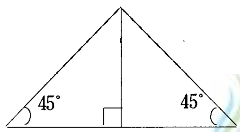


$\frac{높이}{밑변}$로 나타냈다. 이 그림을 직각삼각형으로 나타내면 아래와 같은데, 한 각이 45° 인 직각삼각형에서는 밑변과 높이가 똑같기 때문에



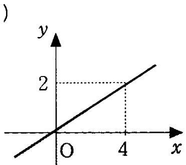
$$\frac{높이}{밑변} = \frac{1}{1} = 1$$

즉, 45° 기울어져있다는 표현을 기울기가 1이라고 한다. 하지만, 아래의 그림에서는 기울어진 부분이 두 군데가 있고 각각의 $\frac{높이}{밑변}$를 구하면 둘다 1이다. 기울어져 있는 방향이 다르기 때문에 기울기의 값을 다르게 표현할 필요성이 있다. 오르막이 있으면 내리막이 있듯이 기울기 또 한 올라가는 (증가하는) 것도 있지만 내려가는(감소하는) 것도 있으므로 음수값도 나온다.

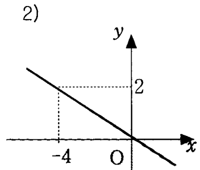


(예1) 아래의 그림에서 직선의 기울기를 구하여라.

1)



2)



(풀이1) 1) 밑변은 4, 높이는 2이므로 기울기는

$$\frac{높이}{밑변} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2) 그래프가 반대로 되어 있고, 높이는 2인데 밑변은 -4가 된다.

기울기는 $\frac{높이}{밑변} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

삼각형의 변의 길이가 음수가 나와서 이상하지요? $\frac{높이}{밑변}$를 사용하여 구하다보니 길이가 음수로 나오는 문제가 생기므로, 밑변이라는 말은 x의 증가량으로, 높이라는 말은 y의 증가량으로 바꿔 나타냅시다. 기울기 $= \frac{y의증가량}{x의증가량}$

(풀이2)

1) 직선 위에 있는 두 점 (0,0), (4,2)에서

y의 증가량(2-0=2)

(0 , 0) (4 , 2)

x의 증가량(4-0=4)

$$기울기 = \frac{y의증가량}{x의증가량} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2) 직선 위에 있는 두 점 (0,0), (−4,2)에서

y의 증가량(2-0=2)

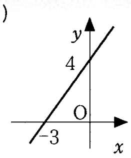
(0 , 0) (−4 , 2)

x의 증가량(-4-0=-4)

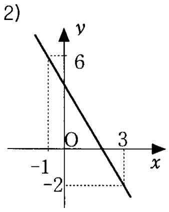
$$기울기 = \frac{y의증가량}{x의증가량} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

(예2) 아래의 그림에서 직선의 기울기를 구하여라.

1)



2)



(풀이)

1) y의 증가량(4-0=4)

(−3 , 0) (0 , 4)

x의 증가량(0-(-3)=3)

기울기 $= \frac{4}{3}$

2) y의 증가량(-2-6=-8)

(−1 , 6) (3 , −2)

x의 증가량(3-(-1)=4)

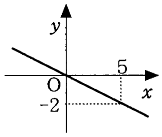
기울기 $= \frac{-8}{4} = -2$

<15> 기울기(2)

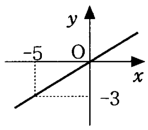
...... $y=ax+b$에서 기울기는 ( )이다.

※ 아래의 그림에서 직선의 기울기를 구하여라.

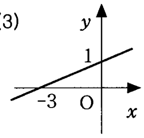
(1)



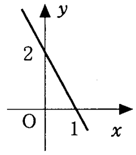
(2)



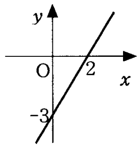
(3)



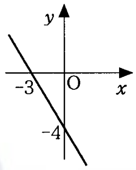
(4)



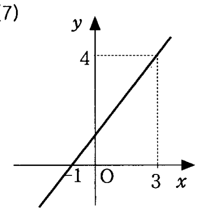
(5)



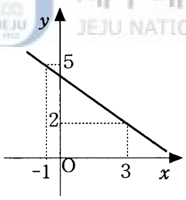
(6)



(7)



(8)



※ (1)에서 (8)까지 살펴보면 어떤 특징을 찾아볼 수 있는데, (2),(3),(5),(7)번은 올라가고(↗), **(1),(4),(6),(8)번은 내려가는(↘) 직선인 것을 알 수 있다.**

1) 올라가는 직선((2),(3),(5),(7))은 기울기가 0보다 크며, x가 증가할 때, y도 증가하므로 "증가함수"라고 한다.

2) 내려가는 직선((1),(4),(6),(8))은 기울기가 0보다 작으며, x가 증가할 때, y는 감소하므로 "감소함수" 라고 한다.

(정비례인 함수는 (1)과 (2)번 밖에 없다.)

※ 다음 두 점을 지나는 직선의 기울기를 구하여라.

(9) (0 , 0), (−3 , 1)　　(10) (3 ,−2), (−2 , 3)

(11) (−1 ,−2), (1 , 2)　　(12) (0 ,3), (3 , 3)

< $y=ax+b$ 에서 기울기는 x의 계수인 a이다.>

: $y=ax+b$에서 $x=1$이면, $y=a+b$이고,
$x=2$이면, $y=2a+b$이다.

즉, $y=ax+b$에서 두 점을 잡을 수 있다.
(1 , $a+b$), (2 , $2a+b$)

y의 증가량($(2a+b)-(a+b)$)

(1 , $a+b$)　　(2 , $2a+b$)

x의 증가량($2-1$)

$\therefore$ 기울기 $=\dfrac{y\text{의증가량}}{x\text{의증가량}}=a$

※ $y=ax+b$에서 $x=-1$, $x=2$일 때의 함수값을 직접 구해서 두 점을 찾고 기울기를 구해보세요. (말아도 좋고, 하면 더 좋고)

(예1) 일차함수 $y=2x-1$의 기울기는 2이다.

(예2) 일차함수 $y=-\frac{3}{2}x-\frac{6}{5}$ 의 기울기는 $-\frac{3}{2}$

<16> 기울기(3)

(예1) $y=2x-1$일 때, $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}$를 구하여라.

(풀이1)

$f(4)$는 $x=4$일 때, y의 값이므로 $2\times4-1=7$,

$f(1)$는 $x=1$일 때, y의 값이므로 $2\times1-1=1$.

$\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{7-1}{4-1}=\dfrac{6}{3}=2$

(풀이2)

$\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}$은 $\dfrac{y\text{의증가량}}{x\text{의증가량}}$ = 기울기 이다.

왜냐하면, $x=1$일 때, 함수값은 $f(1)$,

$x=4$일 때, 함수값은 $f(4)$이므로,

y의 증가량($f(4)-f(1)$)

$(1, f(1))$ $(4, f(4))$

x의 증가량($4-1$)

즉, $\dfrac{y\text{의증가량}}{x\text{의증가량}}=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}$ = 기울기이다.

그러므로 $y=2x-1$에서 기울기는 2이다.

(예2) $y=-\dfrac{2}{3}x-1$일 때, $\dfrac{f(5)-f(2)}{3}$를 구하여라.

(풀이) $\dfrac{f(5)-f(2)}{3}=\dfrac{f(5)-f(2)}{5-2}$ = 기울기 이다.

따라서, 답은 $-\dfrac{2}{3}$이다.

(예3) 일차함수 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$에 대하여 x의 값이 -2에서 6까지 증가할 때, 이 증가량에 대한 y의 값의 증가량의 비율을 구하여라.

(풀이1) $x=-2$일 때, $y=-\dfrac{1}{2}\times(-2)+1=2$

$x=6$일 때, $y=-\dfrac{1}{2}\times(6)+1=-2$

∴ x가 −2에서 6까지 증가(8만큼)했을 때,

y는 2에서 -2까지 증가(-4만큼) 했으므로,

x의 증가량에 대한 y의증가량은 $\dfrac{-4}{8}=-\dfrac{1}{2}$

(풀이2) 기울기를 구하는 문제이므로, 답 : $-\dfrac{1}{2}$.

(1) 다음 일차함수의 기울기를 구하여라.

1) $y=-x+3$ 기울기 :

2) $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}$ 기울기 :

3) $y=61x$ 기울기 :

4) $y=-\dfrac{x}{3}-1$ 기울기 :

(2) 일차함수 $y=-\dfrac{x}{4}+3$에서 x값의 증가량에 대한 y값의 증가량의 비율을 구하여라.

(3) 일차함수 $y=2x+3$의 그래프에서 x의 값이 3에서 5까지 증가할 때, y의 값의 증가량은?

(4) 다음의 일차함수 중 x의 값이 2만큼 증가할 때, y의 값이 -4만큼 증가하는 것은?

① $y=2x-1$ ② $y=2x-4$ ③ $y=-2x+1$

④ $y=2-4x$ ④ $y=4x-2$

(5) 두 점을 지나는 일차함수의 기울기를 구하여라.

1) $(0, 3)$, $(2, 5)$ 기울기 :

2) $(1, 4)$, $(5, 9)$ 기울기 :

3) $(-2, 2)$, $(2, -2)$ 기울기 :

4) $(3, -1)$, $(-2, -5)$ 기울기 :

(6) 일차함수 $y=ax+b$에서, $f(2)-f(1)=$

(7) $y=-\dfrac{12345}{1234567}x+\dfrac{54321}{7654321}$일 때,

$\dfrac{f(756)-f(3595)}{756-3595}$의 값을 구하여라.

(8) 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 (m, m), $(m+3, m+6)$의 두 점을 지날 때, 기울기를 구하여라

<17> x절편과 y절편

...... $y=ax+b$에서 x절편은 ( ), y절편은 ( )이다.

1. x절편

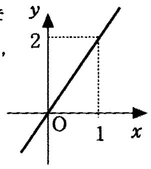
x절편이란 함수의 그래프를 x축으로 잘라냈을 때의 조각을 의미하므로, x축과 만나는 점의 x좌표를 말하는데, x축 위에 있으므로 y좌표는 0이다.

다르게 표현하면,

<u>$y=0$일 때, x의 값</u>

(예1) 일차함수의 $y=2x$의 x절편을 구하여라.

(풀이1) 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표가 0이므로, x절편은 0이다.



(풀이2) $y=2x$ 에서

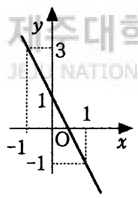
$y=0$을 대입하면,

$0=2x$, $0=x$, $x=0$

$\therefore$ x절편은 0이다.

(예2) 일차함수의 $y=-2x+1$의 x절편을 구하여라.

(풀이1) 그래프와 x축과 만나는 점의 x좌표를 잘 모르겠다. 다른 방법으로...



(풀이2) $y=-2x+1$ 에서

$y=0$을 대입하면,

$0=-2x+1$

$2x=1$, $x=\frac{1}{2}$ $\therefore$ x절편은 $\frac{1}{2}$이다.

(예3) 일차함수의 $y=ax+b$의 x절편을 구하여라.

(풀이) $y=0$을 대입하면 $0=ax+b$,

$-ax=b$, $ax=-b$ (여기서 $a\neq0$.

$\because$ a가 0라면 일차함수가 안되니까)

(양변÷ a) : $x=-\frac{b}{a}$. 즉, x절편은 $-\frac{b}{a}$

※ 일차함수의 $y=ax+b$의 x절편이 $-\frac{b}{a}$인 것은 공식으로 사용이 가능하다. $y=-2x+1$에서 $a=-2$, $b=1$이므로,

x절편 $-\frac{b}{a}=-\frac{(1)}{(-2)}=\frac{1}{2}$ 을 구하여라

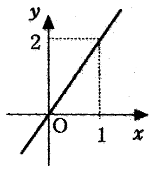
2. y절편

y절편이란 함수의 그래프를 y축으로 잘라냈을 때의 조각을 의미하므로, 일차함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표를 말하는데, y축 위에 있으므로 x좌표는 0이다. 다르게 표현하면,

<u>$x=0$일 때, y의 값</u>

(예1) 일차함수의 $y=2x$의 y절편을 구하여라.

(풀이1) 그래프와 y축이 만나는 점의 y좌표가 0이므로, y절편은 0이다.



(풀이2) $y=2x$ 에서

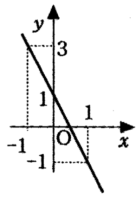
$x=0$을 대입하면,

$y=2\times(0)$, $y=0$

$\therefore$ y절편은 0이다.

(예2) 일차함수의 $y=-2x+1$의 y절편을 구하여라.

(풀이1) 그래프와 y축과 만나는 점의 y좌표가 1이므로 y절편은 1이다.



(풀이2) $y=-2x+1$ 에서

$x=0$을 대입하면,

$y=-2\times(0)+1$

$y=1$ $\therefore$ y절편은 1이다.

(예3) 일차함수의 $y=ax+b$의 y절편을 구하여라.

(풀이) $x=0$을 대입하면 $y=a\times(0)+b$,

$y=+b$, $y=b$ 즉, y절편은 b이다.

※ 일차함수의 $y=ax+b$의 y절편은 b이므로,

$y=7x-24$의 y절편은 -24.

$y=\frac{41}{51}x-\frac{12345}{4321}$ 의 y절편은 $-\frac{12345}{4321}$ 이다.

(1) 일차함수 $y=2x+4$의 기울기, x절편, y절편을 구하여라.

<18> 기울기, x절편, y절편

(1) 일차함수 $y=-x+2$ 의 기울기, x절편, y절편을 구하여라.

기울기 : $\quad$ x절편 : $\quad$ y절편 :

(2) 일차함수 $y=4x$의 기울기, x절편, y절편을 구하여라.

기울기 : $\quad$ x절편 : $\quad$ y절편 :

(3) 일차함수 $y=-\frac{x}{2}+1$ 의 기울기, x절편, y절편을 구하여라.

기울기 : $\quad$ x절편 : $\quad$ y절편 :

(4) 일차함수 $y=\frac{2}{3}x-4$의 기울기, x절편, y절편을 구하여라.

기울기 : $\quad$ x절편 : $\quad$ y절편 :

(5) 일차함수 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{4}{7}$ 의 기울기, x절편, y절편을 구하여라.

기울기 : $\quad$ x절편 : $\quad$ y절편 :

(예1) 두 점 $(4,2)$, $(2,6)$을 지나는 일차함수의 기울기를 a, y절편을 b라 할 때, ab의 값은?

(풀이) 기울기 $=\frac{6-2}{2-4}=\frac{4}{-2}=-2$

$y=ax+b$에서 $a=-2$이므로 $y=-2x+b$.
이제 b를 구하러 가자. 점 $(4,2)$가 이 함수 위에 있으므로, $x=4$, $y=2$ 를 대입하면,
$y=-2x+b$, $(2)=-2\times(4)+b$, $2=-8+b$,
$10=b$, $\therefore$ $b=10$
$\therefore$ $ab=(-2)\times(10)=-20$

(예2) $y=3x-2$와 y축에서 만나고, x절편이 3인 일차함수의 식을 구하여라.

(풀이) $y=3x-2$와 y축에서 만난다는 말은 y절편이 같다는 뜻이므로 y절편은 -2이다.
구하는 식을 $y=ax+b$라고 하면, y절편이 -2이므로, $y=ax-2$이고,
x절편이 3이라는 것은 (3,0)을 지난다는 뜻이므로, $x=3$, $y=0$을 대입한다. 그러면,
$y=ax-2$, $(0)=a\times(3)-2$, $0=3a-2$
$3a=2$, $a=\frac{2}{3}$ $\qquad$ $\therefore$ $y=\frac{2}{3}x-2$

(1) 기울기가 -3이고 y절편이 1인 일차함수의 식을 구하여라.

(2) x절편이 -2, y절편이 2인 일차함수의 식은?

(3) 일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서 y의 값의 증가량이 x의 값의 증가량의 3배이고, x절편이 1일 때, $a-b$의 값을 구하시오.

(3) 일차함수 $y=ax+b$에서 상수항이 2이고 $x=2$일 때 $y=6$인 일차함수는?

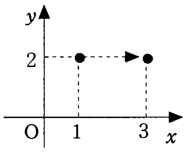
(4) $y=-2(x+1)$의 그래프에서 x절편과 y절편의 합을 구하여라.

(5) 기울기가 $\frac{2}{3}$인 직선 위에 두 점 $A(1,5)$, $B(2,b)$가 있다. b의 값을 구하여라.

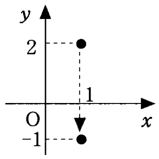
1. 점의 평행이동

(1.2) 라는 점을 x축으로 2만큼 평행이동 시키면 어떻게 변할까? 또, y축으로 -3만큼 평행이동 시키면 어떻게 변할까?

(x축으로 2만큼)



(y축으로 -3만큼)



그림에서 보듯이 (1,2)를 x축으로 2만큼 평행하게 이동시키면 (3,2)임을 알 수 있고, y좌표인 2는 가만히 있는데, x좌표인 1이 2만큼 이동하여 3이 된 것을 알 수 있다.

또,(1,2)를 y축으로 -3만큼 평행하게 이동시키면 (1,3)이 되는데, x좌표인 1은 가만히 있는데, y좌표인 2가 -3만큼 이동해서 -1이 된다.

※ 점(1,2)를 x축으로 -3만큼, y축으로 2만큼 평행이동 시키면 (-2,4)가 된다.

※ 점 (x, y)를 1) x축으로 m만큼 평행이동 :

$(x, y) \Rightarrow (x+m, y)$

2) y축으로 n만큼 평행이동 :

$(x, y) \Rightarrow (x, y+n)$

3) x축으로 m만큼, y축으로 n만큼 평행이동 :

$(x, y) \Rightarrow (x+m, y+n)$

(1) 주어진 점을 조건에 맞게 평행이동 시키시오.

1) (0,0)

x축으로 2만큼 :

y축으로 -3만큼 :

$\begin{cases} x\text{축으로 } 2\text{만큼} \\ y\text{축으로 } -3\text{만큼} \end{cases}$:

2) (-2,0)

x축으로 -1만큼 :

y축으로 1만큼 :

$\begin{cases} x\text{축으로 } -1\text{만큼} \\ y\text{축으로 } 1\text{만큼} \end{cases}$:

3) (2,0)

x축으로 10만큼 :

y축으로 -13만큼:

$\begin{cases} x\text{축으로 } 10\text{만큼} \\ y\text{축으로 } -13\text{만큼} \end{cases}$:

4) (3,3)

x축으로 -3만큼 :

y축으로 -4만큼:

$\begin{cases} x\text{축으로 } -3\text{만큼} \\ y\text{축으로 } -4\text{만큼} \end{cases}$:

5) (-2,-5)

x축으로 a만큼 :

y축으로 b만큼 :

$\begin{cases} x\text{축으로 } a\text{만큼} \\ y\text{축으로 } b\text{만큼} \end{cases}$:

6) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

x축으로 -2만큼 :

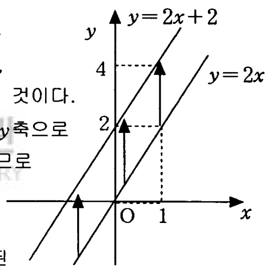
y축으로 5만큼:

$\begin{cases} x\text{축으로 } -2\text{만큼} \\ y\text{축으로 } 5\text{만큼} \end{cases}$:

2. 그래프의 평행이동

$y=2x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동해 보자.

$y=2x$에서 (0,0)은 (0,2)로 갈 것이고, (1,2)은 (1,4)로 갈 것이다. 그래프의 점들은 y축으로 2만큼 평행이동되므로 y좌표만 2만큼 커질 것이다. 따라서, 평행이동된 일차함수의 식은 $y=2x$에 2만 더하면 된다.



그러므로, 답 : $y=2x+2$

$y=ax+b$의 그래프를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시키면 $y=(ax+b)+m$와 같이 원래의 식 뒤에 m만 더해주면 평행이동시킨 함수의 식을 구할 수 있다.

(예1) $y=x+3$을 y축으로 -2만큼 평행이동시킨 함수의 식을 구하여라.

(풀이) 원래 값에서 -2만 더해주면 되므로,

$y=(x+3)+(-2)$ $\therefore\ y=x+1$

<20> 평행이동(2)

(1) 주어진 함수를 조건에 맞게 평행이동 시키시오.

1) $y=-x$를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동 시킨 함수의 식을 구하여라.

2) $y=5x+1$를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동 시킨 함수의 식을 구하여라.

3) $y=-\frac{2}{3}x+3$를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동시킨 함수의 식을 구하여라.

4) $y=\frac{2}{x}$를 y축의 방향으로 5만큼 평행이동 시킨 함수의 식을 구하여라.

5) $y=x^2+2x+1$를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 함수의 식을 구하여라.

6) $y=x^3-2$를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 함수의 식을 구하여라.

※ 고등학교 과정임.(말아도 좋고, 하면 더 좋고)

> $y=f(x)$를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동
> 1) $y=f(x)$ 의 y대신 $y-m$을 대입
> 2) $y-m=f(x)$
> 3) m을 이항시키면, $y=f(x)+m$

(예1) $y=2x+7$을 y축의 방향으로 3만큼 평행이동 시키면 $y-3=2x+7$, $y=2x+7+3$,
$\therefore\ y=2x+10$ (앞에서 배운대로)

> $y=f(x)$를 x축의 방향으로 n만큼 평행이동
> 1) $y=f(x)$ 의 x대신 $x-n$을 대입
> 2) $y=f(x-n)$

(예2) $y=2x+7$을 x축의 방향으로 3만큼 평행이동 시키면 $y=2(x-3)+7$, $y=2x-6+7$,
$\therefore\ y=2x+1$

(예3) $y=3x+2$를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동시키면 x대신에 $x-(-3)$을 대입해야 된다.
$y=3(x-(-3))+2$, $y=3(x+3)+2$,
$y=3x+9+2$ $\therefore\ y=3x+11$

※ x축의 방향으로 평행이동시킨 것을 왜 복잡하게 느껴지는가? 다시 생각해 보면 y축의 방향으로 평행이동시키는 것과 똑같다는 것을 알 수 있을 것이다. (예3)번에서 $y=3x+2$를 x에 관하여 풀면,
$3x+2=y$, $3x=y-2$, $x=\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}$ 이다.
x축의 방향으로 -3만큼 평행이동시키면 x의 값이 -3만큼 커지므로 식 뒤에 -3만 쓰면 된다.
즉, $x=\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}-3$. 이 식을 y에 관하여 풀면,
$3x=y-2-9$, $3x=y-11$, $\therefore\ y=3x+11$
☆똑같다☆

> $y=f(x)$를 x축의 방향으로 m 만큼,
> y축의 방향으로 n만큼 평행이동
> $\Rightarrow\ y-n=f(x-m)$

(예4) $y=2x-3$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동 시키시오.
(풀이) $y=2(x-2)-3+4$, $y=2x-4-3+4$
$\therefore\ y=2x-3$ (제자리로 왔군요)

(2) $y=-2x+1$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동 시켜라.

<21> 그래프 그리기(5)

1. 두 점을 찾은 후 그래프 그리기

1) 임의로 x값을 정한 뒤 그때의 y값을 구한다.
(임의로 : 아무 값이나 관계없음)

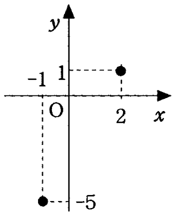
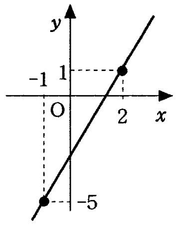
2) 구해진 두 점을 좌표평면에 찍고, 자를 이용하여 직선을 긋는다.

(예1) 일차함수 $y=2x-3$의 그래프를 그려라.

$x=-1$일 때, $y=2\times(-1)-3=-2-3=-5$

$x=2$ 일 때, $y=2\times2-3=4-3=1$

우리는 두 점 (-1,-5), (2,1)을 찾을 수 있다.

2. 기울기와 y절편을 이용하여 그리기

1) y절편을 이용하여 한점을 찍는다.

2) 기울기를 이용하여 x의 증가량과 y의 증가량을 구한 뒤 좌표평면에 나타낸다.

3) 1)과 2)에서 구해진 점을 이용해 직선을 긋는다.

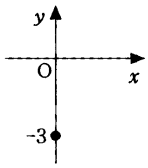
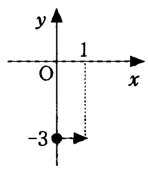
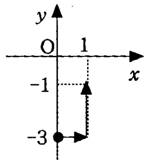
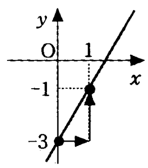
(예2) 일차함수 $y=2x-3$의 그래프를 그려라.

y절편은 -3이므로, (0,-3)을 좌표평면에 찍는다.

기울기 $=\dfrac{y\text{의 증가량}}{x\text{의 증가량}}=2=\dfrac{2}{1}$ 이므로,

x의 증가량은 1이고, y의 증가량은 2이다.

따라서, (0,-3)에서 x축으로 1만큼 간 뒤, y축으로 2만큼 올리고(즉, (1,-1)이다) 직선을 긋는다.

3. x절편과 y절편을 이용하여 그리기

1) x절편과 y절편을 구한 뒤, 좌표평면에 찍는다.

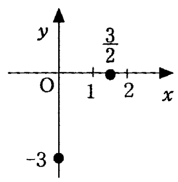
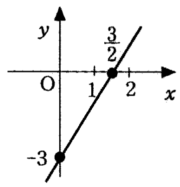
2) 구해진 두 점을 이용하여 직선을 긋는다.

(예3) 일차함수 $y=2x-3$의 그래프를 그려라.

y절편은 -3이므로, 좌표는 (0,-3)

x절편을 구하면 $0=2x-3$, $-2x=-3$,

$2x=3$, $x=\dfrac{3}{2}$. 좌표는 $(\dfrac{3}{2},0)$

4. 평행이동을 이용하여 그리기

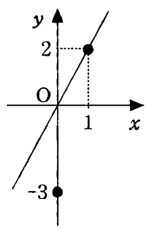
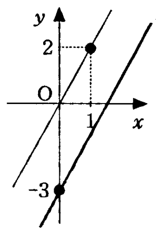
1) $y=ax$의 그래프를 그린다.

2) y축의 방향으로 얼마만큼 평행이동 했는지를 구한다. (y절편이 됨)

3) $(0, b)$에 (y절편의 좌표) 고정시키고 천천히 $y=ax$와 평행이 되게 돌린 뒤 긋는다.

(예4) 일차함수 $y=2x-3$의 그래프를 그려라.

$y=2x$를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동 시켰으므로, (0,-3)에 자를 대고 천천히 $y=2x$와 평행이 되게 돌린 뒤 긋는다.

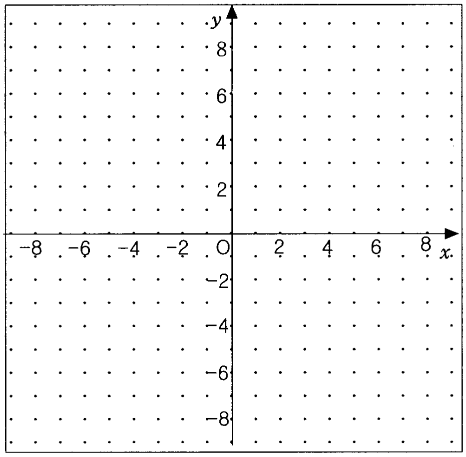
※ $y=2x-3$, $y=2(x-\dfrac{3}{2})$이므로, $y=2x$를 x축의 방향으로 $\dfrac{3}{2}$만큼 평행이동 시킨 것으로도 그래프를 그릴 수 있다.

<22> 그래프 그리기(6)

※ 두 점을 이용하여 그래프를 그리시오.

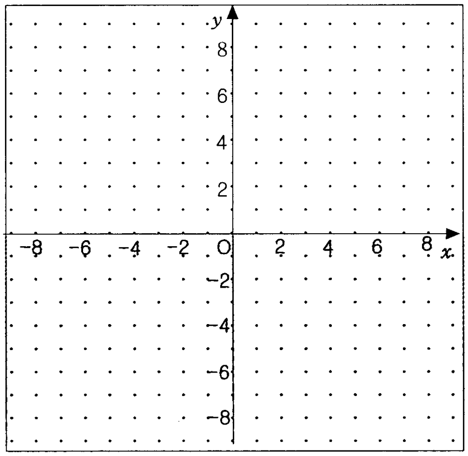
(1) $y=-x+3$

두 점 : (,) (,)



(2) $y=\frac{3}{2}x+3$

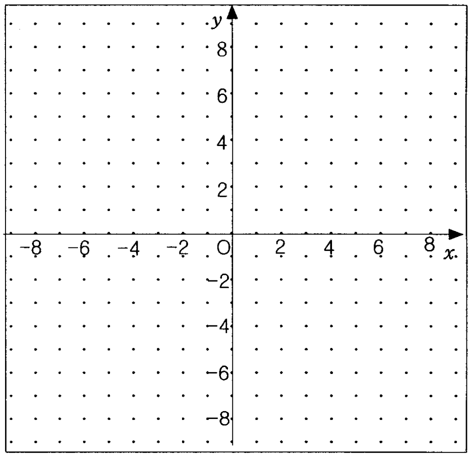
두 점 : (,) (,)



※ 기울기와 y절편을 이용하여 그래프를 그리시오.

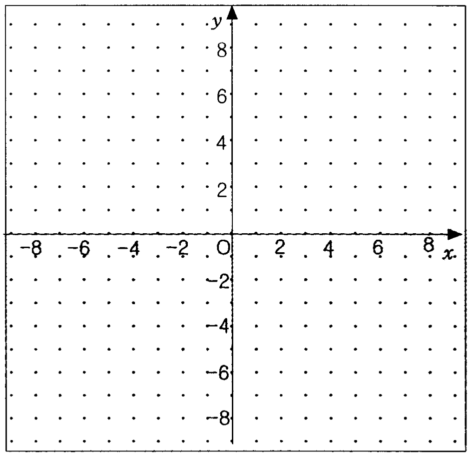
(3) $y=-\frac{1}{2}x+4$

y절편 : 기울기 = = ――



(4) $y=-\frac{3}{4}x-3$

y절편 : 기울기 = = ――

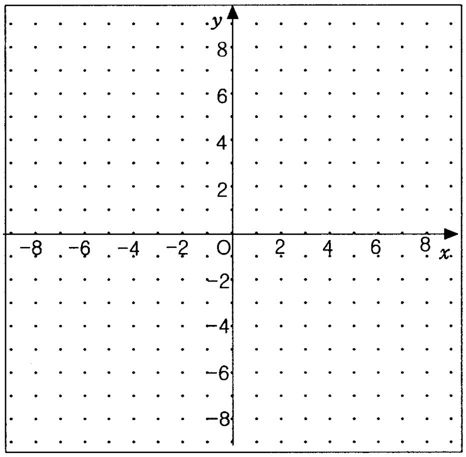


<23> 그래프 그리기(7)

※ x절편과 y절편을 이용하여 그래프를 그리시오.

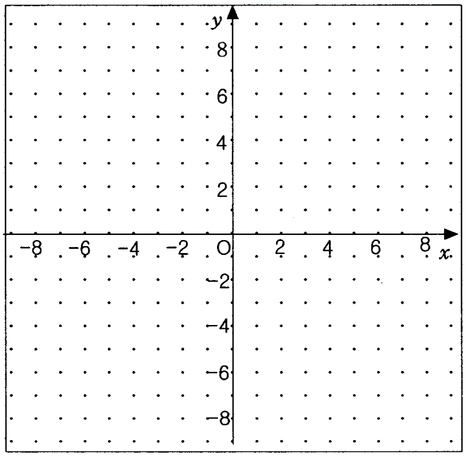
(1) $y=-2x+4$

두 점 : (,) (,)



(2) $y=-\frac{3}{4}x-3$

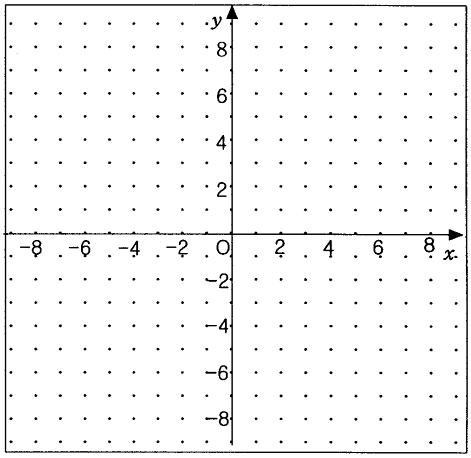
x절편: ( ) ⇒ (,) , y절편: ( ) ⇒ (,)



※ 평행이동을 이용하여 그래프를 그리시오.

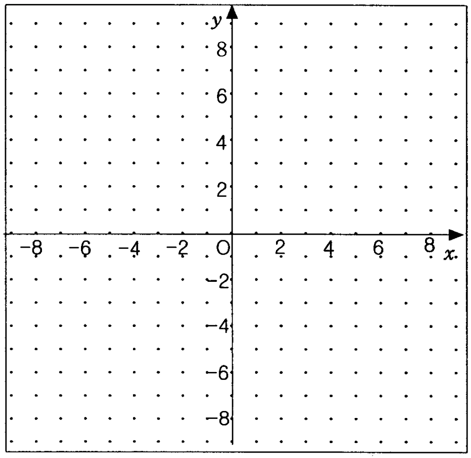
(3) $y=3x-3$

$y=3x$를 y축으로 ( ) 만큼 평행이동



(4) $y=-\frac{3}{4}x+4$

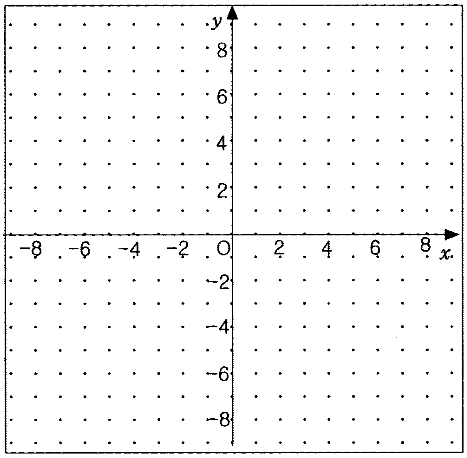
( )를 y축으로 ( ) 만큼 평행이동



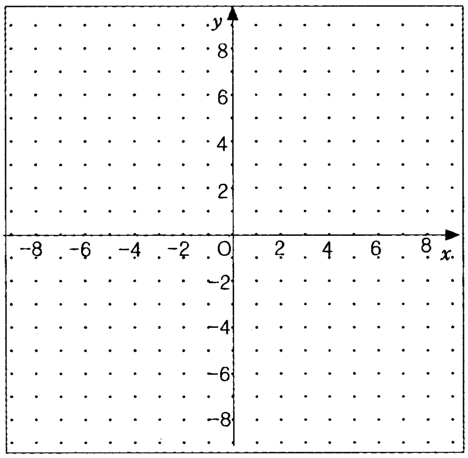
<24> 그래프 그리기(8)

※ 다음 함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=-\frac{4}{5}x-4$

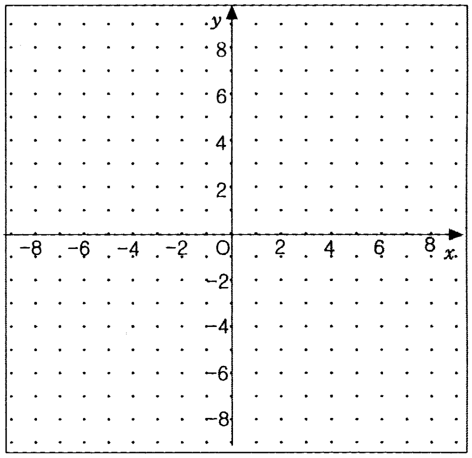


(2) $y=-\frac{5}{2}x+\frac{7}{2}$



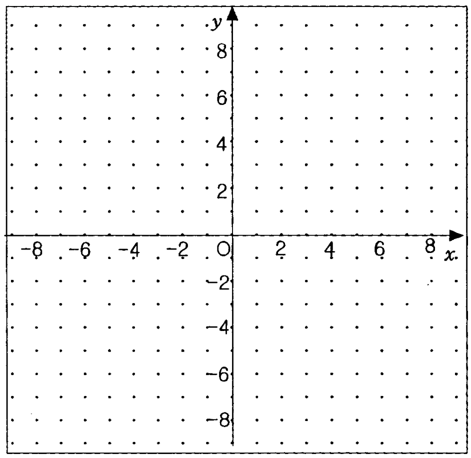
(3) $y=\frac{4}{x}+2$

$y=\frac{4}{x}$ 를 y축으로 (　　) 만큼 평행이동



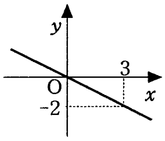
(4) $y=(x-2)^2+3$

$y=x^2$을 x축으로 2만큼, y축으로 3만큼 평행이동



<25> 그래프에서 식 구하기

(예1) 오른쪽 그림에서 일차함수의 식을 구하여라.



(풀이)

y의 증가량(-2-0=-2)

$(0,0)$　　$(3,-2)$

x의 증가량(3-0=3)　　∴ 기울기 $=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$

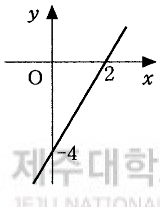
y절편(y축과 만나는 점의 y좌표)은 0이다.

$y=ax+b$에서 기울기 $=a=-\frac{2}{3}$,

y절편 $=b=0$ 이므로,

$y=-\frac{2}{3}x+0$　　∴ $y=-\frac{2}{3}x$

(예2) 오른쪽 그림에서 일차함수의 식을 구하여라.



(풀이)

y의 증가량(0-(-4)=4)

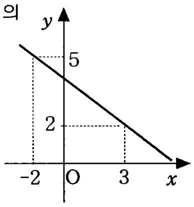
$(0,-4)$　　$(2,0)$

x의 증가량(2-0=2)

∴ 기울기 $=\frac{4}{2}=2$,　　y절편은 -4이다.

∴ $y=2x-4$

(예3) 오른쪽 그림에서 일차함수의 식을 구하여라.



(풀이) y의 증가량(2-5=-3)

$(-2,5)$　　$(3,2)$

x의 증가량(3-(-2)=5)

∴ 기울기 $=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5}$,　　y절편을 구하러 가자.

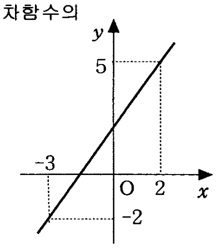
$y=-\frac{3}{5}x+b$에 $(3,2)$를 대입한다.

그러면, $2=-\frac{3}{5}\times(3)+b$, $2=-\frac{9}{5}+b$,

$10=-9+5b$, $5b=19$,　∴ $b=\frac{19}{5}$

따라서 구하는 식은 $y=-\frac{3}{5}x+\frac{19}{5}$ 이다.

(예4) 오른쪽 그림에서 일차함수의 식을 구하여라.



(풀이)

$y=ax+b$에 두 점 $(-3,-2)$, $(2,5)$를 대입하면, a와 b에 대한 연립방정식이 된다.

$(-3,-2)$: $(-2)=a\times(-3)+b$,

$-2=-3a+b$,　∴ $-3a+b=-2$ …①

$(2,5)$: $(5)=a\times(2)+b$

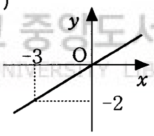
$5=2a+b$,　∴ $2a+b=5$ …②

$\begin{cases} -3a+b=-2 & \cdots① \\ 2a+b=5 & \cdots② \end{cases}$ 연립하여 풀면,

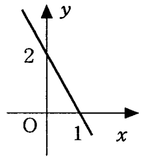
$a=\frac{7}{5}$, $b=\frac{11}{5}$　　∴ $y=\frac{7}{5}x+\frac{11}{5}$

※ 아래 그림에서 일차함수의 식을 구하여라.

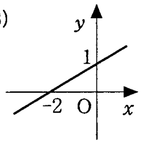
(1)



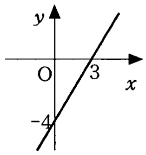
(2)



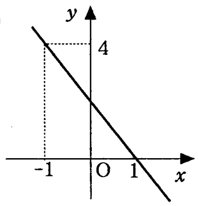
(3)



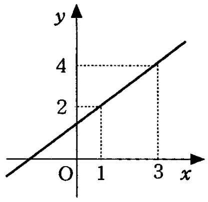
(4)



(5)



(6)



<26> 점과 직선이 만나다.

1. 점과 직선이 만나다

= 직선이 한 점을 지난다=한 점이 직선 위에 있다

(예1) 일차함수 $y=mx-2$의 그래프가 점 (-2, 4)를 지날 때, m의 값을 구하여라.

($\Rightarrow$ 점 (-2,4)가 일차함수 $y=mx-2$ 위에 있을 때, m의 값을 구하여라.)

(풀이) 점 (-2,4)를 $y=mx-2$에 대입한다.

x좌표는 -2, y좌표는 4 이므로,

$x=-2$, $y=4$를 $y=mx-2$에 대입하면,

$(4)=m\times(-2)-2$, $\quad 4=-2m-2$,

$2m=-2-4$, $\quad 2m=-6$,

$\therefore\ m=-3$

(예2) $y=ax+b$는 (1,2)와 (3,4)를 지난다. 이 때, $a+b$의 값을 구하여라.

(풀이1)

y의 증가량(4-2=2)

$(1, 2)$ $\quad$ $(3, 4)$

x의 증가량(3-1=2) $\quad \therefore$ 기울기 $=a=\frac{2}{2}=1$

$y=x+b$에 (1,2)를 대입한다.

그러면, $(2)=(1)+b$, $\quad \therefore\ b=1$

따라서, $a+b=1+1=2$

(풀이2) (1,2)와 (3,4)를 $y=ax+b$에 대입하여 연립방정식으로 푼다.

$(1,2)$: $(2)=a\times(1)+b$,

$2=a+b$, $\quad \therefore\ a+b=2$ …①

$(3,4)$: $(4)=a\times(3)+b$

$4=3a+b$, $\quad \therefore\ 3a+b=4$ …②

$\begin{cases} a+b=2 \ \cdots ① \\ 3a+b=4 \ \cdots ② \end{cases}$ 연립하여 풀면, $a=1$, $b=1$

따라서, $a+b=1+1=2$

(풀이3) (1,2)만 $y=ax+b$에 대입하면

$(2)=a\times(1)+b$, $\quad 2=a+b$

따라서, $a+b=2$

(1) 일차함수 $y=ax+3$의 그래프가 점 (1, -2)를 지날 때, a의 값을 구하여라.

(2) 일차함수 $y=-\frac{1}{3}x+2$의 그래프가 점 $(3, d)$를 지날 때, d의 값을 구하여라.

(3) $y=ax+b$가 (2,4)를 지날 때, $2a+b$의 값을 구하여라.

(4) $y=ax-b$가 (-4,-7)와 (8,-10)를 지날 때, ab의 값을 구하여라.

(5) $y=3x-2$가 $(-1, m)$과 $(n, 4)$를 지날 때, $m+n$의 값을 구하여라.

(6) 두 점 (0,3)과 (3,0)을 지나는 일차함수의 식을 구하여라.

(7) 이차함수 $y=x^2-4$의 그래프가 점 $(1, a)$를 지날 때, a의 값을 구하여라.

<27> 직선과 직선이 만나다.

(예1) 두 직선 $y=2x+4$, $y=-4x-2$가 만날 때, 만나는 점(교점)의 좌표를 구하여라.
(※직선은 점들로 이루어져 있다. 두 직선이 만난다면 x좌표와 y좌표가 똑같은 것이 있다는 뜻이다.)

(풀이1) 두 직선을 보면 $y=$, $y=$하고 같다.
그러면 뒤에 있는 $2x+4$, $-4x-2$가 같아야 한다. 즉, $2x+4=-4x-2$. 이 식을 풀면,
$2x+4x=-2-4$, $6x=-6$, $x=-1$
$x=-1$일 때, y의 값이 같아진다는 뜻이다.
반대로 x의 값이 같을 때를 구해보자.
두 직선의 식을 x에 관해서 풀면,
$y=2x+4$, $2x+4=y$, $2x=y-4$,
$\therefore\ x=\dfrac{y-4}{2}$
$y=-4x-2$, $-4x-2=y$, $-4x=y+2$
$4x=-y-2$, $\therefore\ x=\dfrac{-y-2}{4}$
즉, $\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{-y-2}{4}$. 이 식을 풀면,
$(\dfrac{y-4}{2})\times4=(\dfrac{-y-2}{4})\times4$
$2(y-4)=-y-2$, $2y-8=-y-2$,
$2y+y=-2+8$, $3y=6$, $\therefore\ y=2$
따라서, 만나는 교점은 (-1,2)이다.

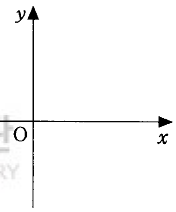
(풀이2) $2x+4=-4x-2$. 이 식을 풀면,
$2x+4x=-2-4$, $6x=-6$, $x=-1$
x좌표가 -1이므로, y좌표만 구하면 된다.
두 직선 중 아무 것에나 $x=-1$을 대입하면 y좌표가 나온다.
$y=2x+4$에서 $y=2\times(-1)+4$, $y=2$
구하는 교점의 좌표는 (-1, 2)이다.

(예2) 두 직선 $y=ax+4$, $y=-4x+b$가 (-1,2)에서 만날 때, a, b의 값을 구하여라.
(풀이) $y=ax+4$에 $x=-1$, $y=2$를 대입하면,
$(2)=a\times(-1)+4$, $2=-a+4$, $a=4-2=2$
$y=-4x+b$에 $x=-1$, $y=2$를 대입하면,
$2=-4\times(-1)+b$, $2=4+b$, $b=-2$

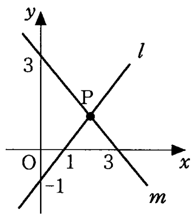
(1) 두 직선 $y=-x+2$, $y=2x-4$의 교점의 좌표를 구하여라.

(2) 두 직선 $y=ax+3$, $y=-2x+b$의 교점의 좌표가 (-1,3)일 때, $a+b$의 값은?

(3) 두 일차함수 $y=ax-2$와 $y=-\dfrac{5}{2}x+b$의 그래프가 점 (2, -3)에서 만날 때, 일차함수 $y=ax+b$의 그래프를 그려라.



(4) 다음 그림에서 두 직선 l, m의 교점을P라고 할 때, P의 좌표를 구하시오.



<28> 두 직선이 평행하다.

<두 직선이 평행하다>
= 평행이동 시켰다 = 기울기가 같다.

(예1) 두 직선 $y=2x+4$, $y=ax-1$이 평행할 때, a의 값을 구하여라.
(풀이) 두 직선이 평행하므로 기울기가 같다.
$y=2x+4$에서 기울기가 2이므로 $a=2$

(예2) $y=3x+1$의 그래프와 평행이고, 점 (0,-3)을 지나는 일차함수를 구하여라.
(풀이) $y=3x+1$의 그래프와 평행하므로, 기울기가 3이다. 그럼 문제를 다시 쓰면 "기울기가 3이고 (0,-3)을 지나는 일차함수를 구하여라"가 된다.
기울기가 3이고 y절편이 -3이므로,
답 : $y=3x-3$

(예3) 두 점 (1,1), (-2,7) 을 지나는 직선과 평행하며 x절편이 1인 직선의 방정식은?
(풀이) y의 증가량(7-1=6)
$(1,1)$ $(-2,7)$ $\therefore$ 기울기 $=\dfrac{6}{-3}=-2$
x의 증가량(-2-1=-3)
$y=ax+b$에서 기울기가 -2이므로, $y=-2x+b$.
x절편이 1이므로 좌표로 나타내면 (1,0)이므로,
$x=1, y=0$을 대입 : $(0)=-2\times(1)+b$,
$0=-2+b$, $b=2$.
답 : $y=-2x+2$

(예4) $y=-3x+2$의 그래프를 평행이동하여 점(-2,0)을 지나도록 하려고 한다. y축의 방향으로 얼마만큼 평행이동해야 하는가?
(풀이) y축의 방향으로 m만큼 이동했다고 하자.
그러면, $y=-3x+2+m$이 된다.
여기에 (-2,0)을 대입시킵니다.
$(0)=-3\times(-2)+2+m$, $0=6+2+m$,
$0=8+m$, $\therefore m=-8$
즉, y축의 방향으로 -8만큼 평행이동했다.

(예5) 일차함수 $y=-5x+2$를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동 하였더니 $y=ax-3$과 겹쳐졌다. $a+m$의 값을 구하여라.
(풀이) $y=-5x+2$를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동하면 $y=-5x+2+m$이 되는데,
이 함수가 $y=ax-3$과 같다는 것이다.
즉, 기울기 $=a=-5$, y절편 $=2+m=-3$
따라서, $a=-5$, $m=-5$
$\therefore$ $a+m=(-5)+(-5)=-10$

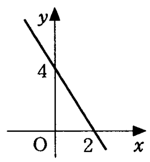
(1) $y=\frac{2}{3}x-1$의 그래프와 평행하고 y절편이 -1인 일차함수를 구하여라.

(2) 점(3,4)를 지나고 $y=-3x$에 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

(3) 일차함수 $y=3x-1$의 그래프를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동하면 점 (3,5)를 지난다. 이 때, m의 값은?

(4) 일차함수 $y=x+2$를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동 하였더니 $y=ax+7$과 겹쳐졌다. $a+m$의 값을 구하여라.

(5) 다음 그래프와 평행이고 점 $(-2,-1)$를 지나는 직선이 x축과 만나는 점의 좌표는?



<29> 일차함수와 일차방정식

1.미지수가 2개인 일차방정식 $ax+by+c=0$

예를 들어 $2x+y+5=0$을 y에 관해 풀면,
$y=-2x-5$가 되므로, 일차방정식을 일차함수로 변형시킬 수 있다.

$ax+by+c=0$을 y에 관해 풀어보자.

(이 항) : $by=-ax-c$

(양변÷ b) : $\frac{b}{b}y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ (단, $b\neq0$)

(계산) : $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

※ 여기에서 만약 $b=0$ 이면 y가 없어지므로, 함수가 되지 않으며, $b\neq0$, $a=0$ 이면, x가 없어지므로 일차함수가 되지 않는다.

예) $2x+y+5=0$: 일차방정식이고 일차함수이다.
$2x+5=0$: 일차방정식이지만 함수가 아니다.
$y+5=0$: 일차방정식이고 함수이지만, 일차함수가 아니라 상수함수이다.

(예1) 미지수가 2개인 일차방정식 $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$을 일차함수의 식으로 고쳐라.

(풀이) (양변×6) : $6\times\frac{x}{3}+6\times\frac{y}{2}=6\times1$
(계산) : $2x+3y=6$
(이항) : $3y=-2x+6$
(양변÷3) : $y=-\frac{2}{3}x+\frac{6}{3}$ $\therefore y=-\frac{2}{3}x+2$

(예2) 직선 $2x-4y-6=0$에 평행하고 x절편이 -2인 직선의 방정식을 구하여라.

(풀이) $2x-4y-6=0$를 y에 관해 풀면,
$-4y=-2x+6$, $y=\frac{-2}{-4}x+\frac{6}{-4}$,
$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$. 따라서 기울기가 $\frac{1}{2}$이다.
$y=ax+b$에서 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로, $y=\frac{1}{2}x+b$.
x절편이 2이므로 좌표로 나타내면 (-2,0)이므로,
$x=-2$, $y=0$을 대입 : $(0)=\frac{1}{2}\times(-2)+b$,
$0=-1+b$, $b=1$.

답 : $y=\frac{1}{2}x+1$

(1) 다음 방정식을 함수의 식으로 고쳐라.

1) $2x-y+5=0$ 2) $x+3y-9=0$

3) $5x-2y=4$ 4) $-\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2$

5) $2x-y+5=2x$ 6) $3-2y=1$

(2) 일차방정식 $x-y-2=0$의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르시오.

㉠ $y=x-1$의 그래프와 평행하다. ㉡ 제2사분면을 지나지 않는다 ㉢ x절편과 y절편의 합은 4이다. ㉣ x의 값이 2만큼 증가할 때, y의 값은 -2만큼 감소한다.

(3) 다음 중 좌표평면 위의 두 점 $(0,-5)$, $(3,1)$을 지나는 직선의 방정식인 것은?

① $3x+y=-5$ ② $2x-y=-5$
③ $3x-y-5=0$ ④ $2x-y-5=0$
⑤ $3x-5y+1=0$

(4) 직선 $2x+4y=3$에 평행이고, x절편이 2인 직선의 방정식을 구하시오.

(5) 두 직선 $kx-y+1=0$과 $y=5x-7$이 있을 때, 두 직선이 평행하기 위한 k의 값을 구하시오.

(6) 일차방정식 $ax+by-8=0$의 그래프와 일차함수 $y=\frac{1}{2}x-4$의 그래프가 같은 직선일 때, $a+b$의 값은?

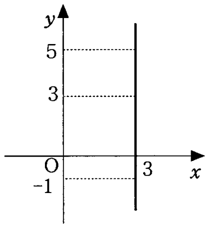
<30> $x=k$, $y=k$ (k는 상수)의 그래프

1. $x=k$의 그래프 (함수가 아니다)

미지수가 2개인 일차방정식 $ax+by+c=0$에서 $b=0$이면 $ax+c=0$인 꼴만 남는다.

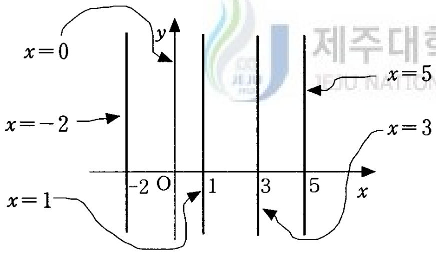
예를 들어 $x-3=0$이라면 y가 보이지 않아서 그래프를 그리지 못할 것 같지만, 이 식을 $0y+x-3=0$으로 생각하면 쉽게 좌표를 얻을 수 있다. y에 어떤 값을 집어넣어도 한결같이 x의 값은 항상 3이 된다.

즉, $y=-1, x=3$, $y=3, x=3$, $y=5, x=3$, ⋯ 그래프를 그리면 아래와 같다.



옆에 그림에서도 알 수 있듯이 y값에 상관없이 항상 $x=3$이 된다.

(예) y축은 $x=0$이라는 직선의 방정식이다.

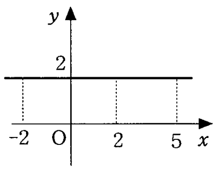


2. $y=k$의 그래프 (상수함수)

미지수가 2개인 일차방정식 $ax+by+c=0$에서 $a=0$이면 $by+c=0$인 꼴만 남는다.

예를 들어 $y-2=0$이라면 $y=2$이고, x에 어떤 값을 집어넣어도 한결같이 y의 값은 항상 2이다.

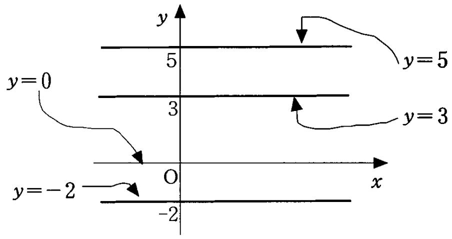
즉, $x=-2, y=2$, $x=2, y=2$, $x=5, y=2$, ⋯ 그래프를 그리면 아래와 같다.



옆에 그림에서도 알 수 있듯이 x값에 상관없이 항상 $y=2$가 된다.

이와 같이 치역이 한 개 밖에 없는 함수를 **상수함수**라고 한다.

(예) x축은 $y=0$이라는 직선의 방정식이다.



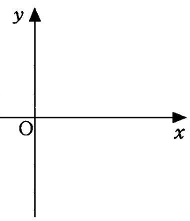
(1) 다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하고 그래프를 그려라.

1) $(0,3)$, $(4,3)$ 　　　2) $(-2,1)$, $(-2,-3)$

식 : ________ 　　　식 : ________

3) $(-2,\frac{1}{2})$, $(4,\frac{1}{2})$ 　　　4) $(-\frac{3}{2},4)$, $(-\frac{3}{2},-1)$

식 : ________ 　　　식 : ________



(2) 점 $(3,-5)$를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

(3) y축에 평행하며 점 $(-4,-6)$을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

(4) 점 $(-2,-3)$을 지나고, x축에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

(5) 점 $(4,-3)$을 지나고, y축에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

<31> 연립방정식과 일차함수의 그래프

< 연립방정식과 일차함수>

연립방정식 $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3 \end{cases}$ 을 푸는 문제를 다르게 생각해보면, $\begin{cases} y=-x+7 \\ y=x-3 \end{cases}$의 해를 구하라는 말이 되고, 이 식은 바로 두 일차함수 $y=-x+7$, $y=x-3$의 교점을 구하라는 뜻이 되기도 한다.

※ 연립방정식과 일차함수의 비교

연립방정식	일차함수
해가 한 개 있다	교점이 하나 있다
해가 무수히 많다	두 함수가 일치한다
해가 없다	평행하다 (기울기가 같고 y절편이 다르다)

(예1) 다음 연립방정식의 해가 무수히 많을 때, $a-b$의 값을 구하시오.

$$\begin{cases} ax-y=b & \cdots① \\ -2x+y=3 & \cdots② \end{cases}$$

(풀이1) 연립방정식의 해가 무수히 많다는 것은 두 일차방정식이 일치하는 것이므로, ①식에 -1을 곱해서 y의 계수를 맞춘다.

$$\begin{cases} -ax+y=-b & \cdots①\times(-1) \\ -2x+y=3 & \cdots② \end{cases}$$

$\therefore -a=-2,\ -b=3$ 즉, $a=2,\ b=-3$

$\therefore\ a+b=2-(-3)=5$

(풀이2) 일차함수로 고쳤을 때, 두 함수가 일치하는 것이므로, 주어진 식을 y에 관해 푼다.

①: $y=ax-b$, ②: $y=2x+3$

두 함수가 일치하므로, $a=2,\ b=-3$

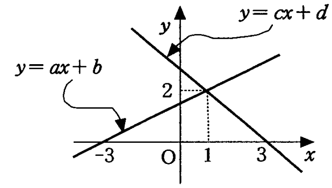
$\therefore\ a+b=2-(-3)=5$

(예2) 연립방정식 $\begin{cases} y=ax+1 \\ y=-x-2 \end{cases}$의 해가 없을 때, 상수 a의 값을 구하면?

(풀이) 일차함수로 보면 평행하므로, 기울기가 같고 y절편이 다르다.

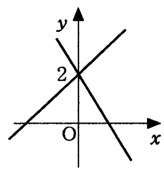
$\therefore\ a=-2$

(예3) 함수 $y=ax+b$와 $y=cx+d$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 연립방정식 $\begin{cases} -ax+y=b \\ -cx+y=d \end{cases}$의 해를 구하여라.



(풀이) 함수 $y=ax+b$와 $y=cx+d$에서 각각 두 점((3,0)와 (1,2), (−3,0)와 (1,2))이 나와 있어 a, b, c, d를 구해서 연립방정식에 대입하여 풀어도 되지만, 연립방정식을 y에 관해 풀면, 일차함수와 똑같은 식이 되므로, 연립방정식의 해는 일차함수의 교점의 좌표가 된다. 교점의 좌표가 (1,2)이므로, 구하는 연립방정식의 해는 $x=1,\ y=2$이다.

(1) 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=a \\ x+by=-4 \end{cases}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $a+b$의 값을 구하여라.



(2) 두 직선 $\begin{cases} -6x+ay=4 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$의 교점이 없을 때, a의 값을 구하시오.

(3) 일차함수 $y=\frac{a}{b}x+c$의 그래프가 일차방정식 $2x-5y-10=0$ 과 일치할 때, $\frac{a\times c}{b}$의 값을 구하여라.

<32> 일차함수의 분석

<일차함수의 분석>

이제 까지 배운 것을 토대로 문제를 풀어보자.

(1) 다음은 일차함수 $y=-x+2$에 대한 설명이다. 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 제1, 2, 4사분면을 지나는 직선이다.

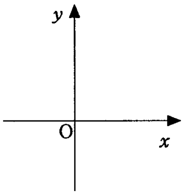
② $y=-x-1$과 평행하다.

③ 기울기는 -1이다.

④ x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

⑤ y절편은 2이다.

⑥ x의 값이 4만큼 증가하면 y의 값은 -4만큼 증가한다.



(2) 방정식 $2y-4=0$의 그래프에 대한 설명 중 잘못된 것은?

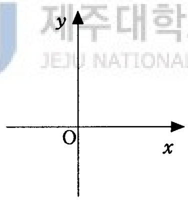
① 점(0, 2)를 지난다.

② y축에 평행하다

③ 직선 $y=0$과 평행하다

④ $y=2$와 같은 직선이다.

⑤ y절편은 2이다.



(3) 다음 중 $2x-y+5=0$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

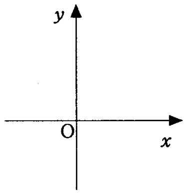
① y 절편은 5이다.

② 제 3사분면을 지난다.

③ 기울기는 2이다.

④ x절편은 $-\frac{5}{2}$이다.

⑤ x가 증가할 때, y는 감소한다.



(4) 일차함수 $y=ax+b$ $(a\neq0)$의 그래프에 대한 설명으로 틀린 것은?

① x절편은 $-\frac{b}{a}$ 이다.

② y절편은 b이다.

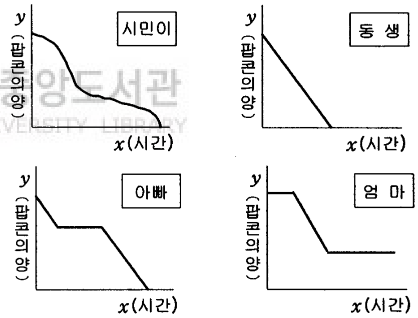
③ 점 $\left(-\frac{b}{a},\ b\right)$를 지난다.

④ $y=ax$의 그래프를 y축의 양의 방향으로 b만큼 평행이동시킨 직선이다.

⑤ 점 (1.0)를 지난다면, $a+b=0$이다.

⑥ x의 값이 3만큼 증가하면 y의 값은 $3a$만큼 증가한다.

(5) 시민이네 가족은 프로야구를 보러 야구장에 갔다. 팝콘 4개를 사서 한 개씩 나누어 가지고 응원을 하면서 팝콘을 먹기 시작했다. 아래 그래프는 시간이 지남에 따라 남은 팝콘의 양을 나타낸다.



1) 그래프의 높이는 무엇을 나타내는가?

2) 아빠의 그래프에서 x축과 평행한 부분은 무엇을 의미하는가?

3) 왜 동생의 그래프가 아빠의 그래프보다 x축과 더 빨리 만났는가?

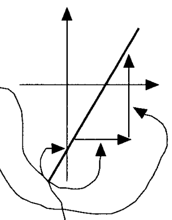
4) 그래프를 수평선으로 만들려면 어떻게 먹어야 하는가?

5) 엄마의 그래프가 x축과 만나지 않은 이유를 말하여라.

<33> 일차함수의 부호결정

<일차함수의 부호 결정>

(예1) $y=ax+b$ 그래프가 아래 그림과 같을 때 a, b의 부호를 결정하면?



(풀이) 1) $\boxed{x\text{가 증가할 때}}$

$\boxed{y\text{또한 증가하므로}}$

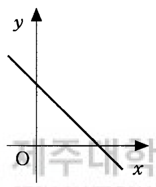
기울기 $=\dfrac{\text{양수}}{\text{양수}}=$ 양수

∴ 기울기 $=a>0$

2) $\boxed{y\text{절편이 음수이므로}}$

∴ y절편 $=b<0$

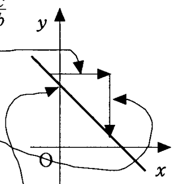
(예2) $ax+by+c=0$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, a, b의 부호를 결정하면? (단, $c>0$)



(풀이) 주어진 식을 y에 관해 풀면,

$ax+by+c=0$, $by=-ax-c$

(양변 ÷ b) : $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$



1) $\boxed{x\text{가 증가할 때}}$

$\boxed{y\text{는 감소하므로}}$

기울기 $=\dfrac{\text{음수}}{\text{양수}}=$ 음수

∴ 기울기 $=-\frac{a}{b}<0$

2) $\boxed{y\text{절편이 양수이므로}}$

∴ y절편 $=-\frac{c}{b}>0$

3) $-\frac{a}{b}<0$에서 양변× (-1) : $\frac{a}{b}>0$

즉, a와 b는 부호가 같고,

$-\frac{c}{b}>0$에서 양변× (-1) : $\frac{c}{b}<0$

즉, c와 b는 부호가 다르다.

∴ 문제에서 $c>0$이므로,

정답은 $a<0$, $b<0$, $c>0$

(예3) $ab<0$, $ac>0$ 일 때, 일차함수

$y=\frac{b}{a}x+\frac{c}{b}$ 가 지나지 않는 사분면은 제 몇 사분면인가?

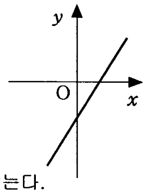
(풀이) $ab<0$은 a와 b는 부호가 다르다는 것이고,

$ac>0$은 a와 c는 부호가 같다는 것이다.

즉, a와 c는 부호가 같고 b만 다르다.

∴ 기울기 $=\frac{b}{a}<0$,

y절편 $=\frac{c}{b}<0$

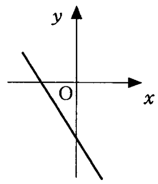


기울기가 양수이고

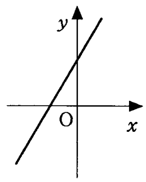
y절편이 음수이므로,

제 3사분면을 지나지 않는다.

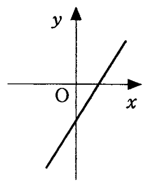
(1) 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, a, b의 부호를 정하여라.



(2) 일차함수 $y-ax+b=0$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, a, b의 부호를 정하여라.



(3) 일차함수 $ax+by+c=0$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, b, c의 부호를 정하여라. (단, $a<0$)



<34> 일차함수의 정의역과 치역

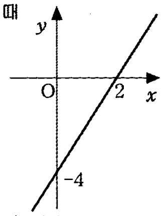
(예1) 정의역이 $\{x\mid -1\leq x<3\}$인 일차함수 $y=2x-4$ 의 치역을 구하여라.

(풀이) $y=2x-4$의 정의역에 대한 말이 없으면 수 전체의 집합(실수)가 되는데, 정의역을 줄여서 그래프 중에 일부분만을 생각하는 문제이다.]

그럼 정의역이 수 전체의 집합 일 때,

$\{x\mid -1\leq x<3\}$, $\{x\mid -1\leq x<3,\ x$는 정수$\}$ 일 때, 세 가지의 경우로 문제를 풀어보자.

1) 정의역 : 수 전체의 집합일 때 그래프에서 알 수 있듯이 치역 또한 수 전체의 집합이다.



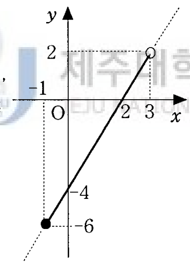
2) 정의역이 $\{x\mid -1\leq x<3\}$일 경우

$x=-1$일 때, y값은 -6이므로 : (-1, -6)

$x=3$일 때, y값은 2이므로 : (3, 2)

x의 값이 -1에서 3까지 밖에 움직일 수 없어서 그래프가 짤릴 수 밖에 없고, x의 값이 3일 때는 해당되지 않는다.

기울기에서 x의 증가량에 해당하는 -1에서 3까지는 정의역에 해당되므로 , y의 증가량에 해당하는 -6에서 2까지는 치역에 해당됩니다.



즉, y가 움직인 범위는 $-6\leq y<2$

치역도 집합이므로, 정답 : $\{y\mid -6\leq y<2\}$

3) 정의역이 $\{x\mid -1\leq x<3,\ x$는 정수$\}$일 경우

정의역 $=\{-1, 0, 1, 2\}$이므로,

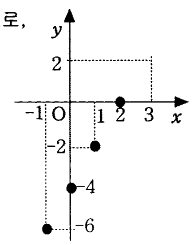
$x=-1$이면, $y=-6$

$x=0$이면, $y=-4$

$x=1$이면, $y=-2$

$x=2$이면, $y=0$

∴ 치역은 $\{-6, -4, -2, 0\}$



(예2) 정의역이 $\{x\mid -2\leq x\leq 3\}$, 치역이 $\{y\mid -1\leq y\leq 2\}$로 주어진 일차함수 $y=ax+b\ (a<0)$ 에서 $a+b$의 값은?

(풀이1) 기울기($=a$)가 0보다 작으므로, x값이 증가할 때, y값은 감소한다.

즉, x값이 -2에서 3까지 이동할 때, y값은 2에서 -1로 이동한다.

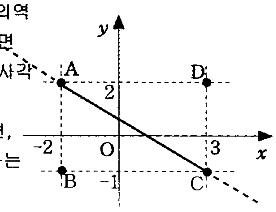
∴ 두 점 (-2,2), (3,-1)을 얻을 수 있다.

두 점을 이용하여 풀면, $a=-\frac{3}{5}$, $b=\frac{4}{5}$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{5}$

(풀이2) 그래프에 정의역과 치역을 표시하면 만나는 부분은 직사각형 ABCD가 된다.

기울기가 음수이면, 점A와 점C를 지나는 선분이므로 두 점 (-2,2), (3,-1)을 얻을 수 있다.

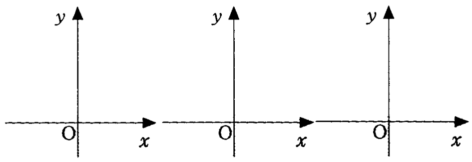


(1) 일차함수 $y=x+3$의 그래프를 다음 주어진 정의역에 맞게 그려라.

1) 정의역이 $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$일 때

2) 정의역이 $\{-2\leq x\leq 2\}$일 때,

3) 정의역이 수 전체집합일 때,



(2) 정의역이 $\{x\mid -3\leq x\leq 3\}$인 일차함수 $y=-2x+3$의 치역을 구하여라.

(3) 정의역이 $\{x\mid 1\leq x<3\}$인 일차함수 $y=ax+b$의 치역이 $\{y\mid 0\leq y<8\}$이다. $a>0$ 일 때, a와 b의 값을 구하여라.

<35> 일차함수의 식 세우기

(예1) 지면에서 10km 까지는 고도가 100m 증가함에 따라 기온이 0.6 °C씩 내려간다고 한다. 지면의 기온이 20 °c일 때 지면에서부터 고도가 xkm인 곳의 기온을 y °c라 할 때, y를 x의 식으로 나타내어보자.

(풀이1) $100m \Rightarrow -0.6$

$200m \Rightarrow -0.6\times 2$

$300m \Rightarrow -0.6\times 3$

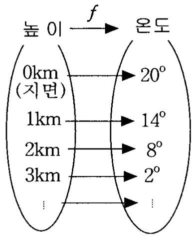
$\vdots \qquad \vdots$

$1000m \Rightarrow -0.6\times 10=-6$

즉, $1km$에 6 °C떨어지므로, xkm에서는 $6\times x$ 떨어진다. 현재 지면의 온도가 20 °C이므로,

$y=20-6x$

(풀이2)



지면일 때 온도는 y절편을 말하므로, y절편$=20$

1km씩 올라갈 때, 6° C씩 내려가므로,

기울기$=\dfrac{-6}{1}=-6$

$\therefore\ y=-6x+20$

(풀이3) $(0,20)$, $(1,14)$이므로 풀이 2번과 같다.

(예2) 길이가 20cm인 양초가 있다. 불을 붙이면 10분마다 4cm씩 짧아진다고 한다. 초의 길이가 12cm가 되는 것은 불을 붙인 몇 분 후 인가?

(풀이1) 10분 뒤 남은 양초의 길이 : 16cm

20분 뒤 남은 양초의 길이 : 12cm

답 : 20분

(풀이2) 두 점 $(0,20)$, $(10,16)$을 구할 수 있으므로, $y=ax+b$에 대입하여 푼다.

기울기$=\dfrac{16-20}{10-0}=\dfrac{-4}{10}=-0.4$

y절편$=20 \qquad \therefore\ y=-0.4x+20$

$y=12$를 대입하면, $x=20$.

(1) 경호는 요즘 부쩍 배가 나오는 것 같아 윗몸일으키기를 시작하였다. 첫날에 x 개부터 시작하여 매일 1개씩 늘려간 결과 10일 만에 배가 쏙 들어갔다. 경호가 열흘 동안 한 윗몸일으키기의 개수 y를 x를 사용하여 나타내어라.

(2) 물의 온도가 처음 30℃에서 매분마다 5℃씩 증가하면 x분 후에는 y℃가 된다고 할 때, x, y사이의 관계를 구하여라.

(3) $10l$의 석유가 들어 있는 기름통에 연결된 석유난로가 있다. 난로는 10분마다 $0.5l$씩 연소한다. 불을 붙인 후의 시간을 x분, 남은 기름의 양을 yl라 할 때, x와 y의 관계식을 구하여라.

(4) 길이가 20cm인 양초가 있다. 불을 붙이면 10분마다 4cm씩 짧아진다고 한다. 초의 길이가 12cm가 되는 것은 불을 붙인 몇 분 후인가?

(5) $300l$의 물이 들어 있는 물통에서 3분 마다 $60l$의 비율로 물이 흘러 나온다. 물을 흘려보내기 시작하여 x분 후의 물통에 남은 물의 양을 yl라 할 때, x와 y의 관계식을 구하시오.

(6) 공기 중에서 음속은 기온이 0℃일 때, 331m/초이고, 온도가 1℃ 오를때 마다 0.6m/초씩 증가한다고 한다. 기온이 x℃일 때의 음속을 ym/초라고 할 때, y를 x에 관한 식으로 나타내면?

<36> 일차함수와 넓이

(예1) 두 일차함수 $y=x+2$, $y=-x+4$와 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하여라.

(풀이) 두 직선과 x축으로 둘러쌓인 삼각형은 아래 그림에서 알 수 있듯이 △ABC가 된다.

1) 두 직선의 교점 A의 좌표 구하기

$y=x+2,\ y=-x+4$ 에서

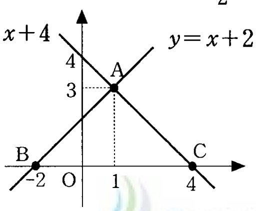
교점의 x좌표 : $x+2=-x+4$, $2x=2$, $x=1$

y좌표 : $y=1+2$, $y=3$

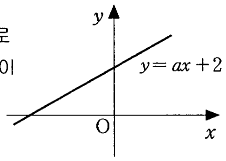
∴ 교점 : (1,3)

2) △ABC에서 밑변은 -2에서 4까지, 6이고, 높이는 3이다.

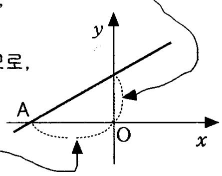
구하는 삼각형의 넓이 = $6\times3\times\frac{1}{2}=9$



(예2) 일차함수 $y=ax+2$의 그래프와 x축, y축으로 둘러 쌓인 삼각형의 넓이가 4일 때, a의 값을 구하여라.



(풀이) $\boxed{\text{높이}}$는 y절편이므로, 2이다.
삼각형의 넓이가 4이므로,
$\boxed{\text{밑변}}$은 4이다.



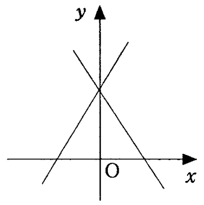
∴ A의 좌표는 (-4,0)이다.

$y=ax+2$에 (-4,0)을 대입하면,

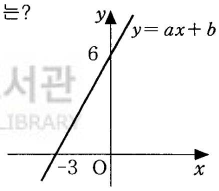
$0=a\times(-4)+2$, $\quad 0=-4a+2$

$4a=2 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{2}$

(1) 일차함수 $\begin{cases} y=2x+4 & \cdots ㉠ \\ y=-2x+4 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?



(2) 아래 그림은 일차함수 $y=ax+b$의 그래프이다. 직선 $y=bx-a$와 x축, y축으로 둘러쌓인 부분의 넓이는?



(4) 직선 $ax+2y=4$와 x축, y축의 양의 부분으로 둘러싸인 도형의 넓이가 16일 때, a의 값은?
