碩士學位論文

統合的 思考를 위한 열린 數學敎科書 硏究

指導敎授　　鄭 承 達

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

梁　永　銀

2003年　8月

統合的 思考를 위한 열린 數學敎科書 研究

指導敎授 鄭 承 達

이 論文을 敎育學 碩士學位請求論文으로 提出함.

2003年 5月 日

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者 梁 永 銀

梁永銀의 敎育學 碩士學位 論文으로 認准함.

2003年 7月 日

審査委員長 印

審査委員 印

審査委員 印

<抄錄>

統合的 思考를 위한 열린 數學敎科書 硏究

梁 永 銀

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授　鄭 承 達

수학교육의 목적은 단순히 수학적 지식을 획득하는 것에 있는 것이 아니라 수학적 사고를 신장시켜 삶에서 일어나는 다양한 문제들을 합리적이고도 과학적으로 풀어갈 수 있는 능력을 기르는데 있다. 그러나 우리나라의 수학교육은 오랜 기간 동안 입시제도의 여파 때문에 수학적 지식의 습득과 문제풀이 중심의 교육만이 이뤄져온 것이 사실이다.

수학교육이 실생활과의 관련성을 완전히 무시한 이러한 교육에 대한 반성이 그 동안 많은 연구를 통해 이뤄져 제7차 교과는 실생활과 연관된 수학의 내용을 제시하는데 많은 노력을 기울였다. 그러나 수학의 본질성을 학생들에게 깨닫게 해주고 수학적 사고로 개인의 삶을 구조적으로 분석하고 세워 가는 통합적 사고에 대한 내용은 미흡하다.

본 논문은 수학의 본질을 탐색하며 수학으로 생활 속의 여러 문제나 다른 학문적 문제, 더 깊게는 개인의 정신세계의 문제까지 해결해나가는 수학적 사고의 통합적 사고로의 발전에 관한 모색을 검토하였다.

※ 본 논문은 2003년 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임.

목 차

표 목 차

그 림 목 차

제 1 장 서 론

제 1 절 연구의 필요성 및 목적

오늘날의 수학교육은 학생들이 ‘왜 수학교육을 받아야 하는가?’에 대한 충분한 고찰과 성찰을 하도록 해주고 있지 못하다. 교육 가치적 위상이 단순한 입시 주요과목으로 전락하여 학생들로 하여금 진지한 탐구심을 일으키도록 하기는커녕 대학을 가기 위해 어쩔 수 없이 하는 것 정도의 생각밖에 불러일으키지 못하고 있다. 대다수의 학생들이 수학교육을 받아야하는 이유와 목적에 대해서 단순히 사고력 신장을 위해서라는 정도의 대답을 하고 있으나 그 대답 역시 주입식으로 습득되어 하는 말이고 실제 사고력 증진을 위해 수학교육이 얼마만큼 중요한지를 느끼고 있지는 못하며, 또한 사고력 증진 자체가 자신의 삶에 있어서 얼마나 중요한 가치인지 조차 깨닫지 못한 체 학습에 임하고 있다.

수학교육의 가장 중요한 목표는 단지 수학적 지식을 획득하는 것이 아니라 수학적으로 사고하는 능력을 계발하는 것이라고 할 수 있다. 우리나라의 제7차 수학과 교육과정을 보면 수학교육의 목표로서 ‘수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고 수학적으로 사고하는 능력을 길러 여러 가지 문제를 합리적 · 창의적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기른다.’ 라고 하여 수학적 사고력의 신장을 강조하고 있다. 그러나 실제 수학을 배우는 학생들은 수학이란 실제 생활을 하는데 있어서 단순 계산을 위해서만 쓰이지 실생활과는 동떨어진 학문이라 생각한다.

수학에서 길러지는 사고력은 수학 문제 자체를 푸는 데에만 쓰인다고 생각하며 실제 자신의 삶에서 부딪히게되는 여러 가지 문제를 수학적인 사고능력으로 합리적이고 창의적으로 해결할 수 있는지에 대해서는 무지한 상태에 있다.

이렇게 우리나라의 실제 교육은 정작 교육의 목표를 달성하지 못하고 있는데 이러한 모순점이 발생하는 가장 큰 원인은 교육의 목표는 수학적 사고로 여러 가지 삶의

문제를 합리적으로 해결하는데 있으면서도 실제 교육은 수학적 지식과 계산 능력만을 가르치며 수학적 사고로 다른 문제들을 풀어 가는 것들에 대한 교육은 거의 이뤄지고 있지 않은 데에 있다. 수학적 사고로 다른 문제까지 해결하는 능력을 기르기 위해서는 수학적인 사고를 다른 차원의 사고와 연결시켜 줄 수 있는 통합적 사고가 요구된다. 그리고 이러한 통합적 사고를 기르기 위한 모색 중 하나는 수학사를 수학교육에 도입하는 것이다.

이러한 수학사 교육에 대한 중요성은 많은 연구와 논문을 통해 강조되어 왔는데 수학사의 교육을 통해 단순한 수학적 지식과 계산능력만을 기르는 교육이 지양되고 하나의 수학적 원리가 탄생하기까지 역사 속의 수많은 인간 활동을 탐구해봄으로써 인간의 삶 속에서 수학이 얼마나 중요한 역할을 하는지를 느끼게 하며 또한 수학의 영향으로 문화와 역사가 어떻게 달라지는가를 배워 실제 개인의 삶도 수학적 사고를 통해 발전적으로 바꿔나갈 수 있음을 인지시킬 수 있다는 것이다.

그러나 단순히 수학사를 수학 교육에 삽입한다 해도 수학 공식을 단순히 습득하듯이 수학사 또한 단순 지식 습득으로 교육이 흘러간다면 그것은 또 하나의 문제를 발생시킬 수밖에 없을 것이다. 그러므로 수학사의 교육과 함께 원론적인 철학적 문제부터 실생활의 문제에 이르기까지의 제반 사항들을 수학적 사고로 해결할 수 있는 지도까지 병행하는 열린교육이 실행되어져야 한다. 이를 위해서는 교과서가 그러한 교육 방침이 잘 실행되도록 길잡이 역할을 해주어야 하는데 현재 7차 교육과정으로 새로이 편성된 수학교과서는 단원마다 수학사나 그밖에 수학에 관한 여러 에피소드를 편성하여 놓는 등 여러 면으로 노력한 흔적이 보이나 그 내용이 단편적이여서 실제 수업에서 중요한 과제로 실행되는 지에는 의문의 여지가 많다.

이 논문은 수학적 사고를 통해 삶의 문제를 합리적이고 과학적으로 해결할 수 있도록 하는 수학적 사고의 통합적 사고로의 발전을 위한 교육적 모색을 위해 쓰여졌다. 또한 수학교육이 단순히 수학적 지식을 가르치는데서 벗어나서 앞서 언급한 수학적 사고의 활용을 가능케 하는 통합적 사고 능력을 양성하는 쪽으로 나아가기 위해서는 무엇보다도 교육의 지침이 되는 교과서가 이러한 목표에 맞게 편성되어야하므로 이에 부합되는 교과서의 편성에 대한 검토도 하였다.

제 2 절 연구의 내용 및 구성

연구의 진행을 위한 본 논문의 내용은 다음과 같다.

제2장은 수학교육의 목표와 수학적 사고에 대한 이해를 위한 장이다. 이것들에 대한 심도 있는 고찰을 위해서는 수학의 본질에 대한 이해가 선행되어야 하는데 수학의 본질은 단순하게 정의할 수 있는 것이 아니고 수학의 역사 속에서 규명되어져야 하므로 첫 절에선 수학의 역사에 대한 고찰을 다루었으며 두 번째 절에서 수학의 본질에 대한 고찰과 논의를 기술하였다. 세 번째 절에서는 수학교육의 목표에 대한 사항을 기술하였는데 앞서 논의한 수학의 역사 속에서 변천되어온 수학교육관의 흐름을 고찰하고 오늘날의 수학교육의 목표는 무엇인지 기술하였다. 또한 수학적 사고에 대한 여러 가지 이론적 고찰 및 논의를 기술하였는데 이 절에서는 수학적 사고의 흐름과 과정에 대한 내용을 자세히 다루었으며 아울러 이러한 수학적 사고를 다른 분야에 적용할 수 있는 통합적 사고에 대한 언급을 하였다.

제3장은 수학사에 대한 내용을 다루었는데 첫 절에서는 수학사를 가르침으로써 얻는 교육적 유용성과 가치에 대한 언급을 하였고, 두 번째 절에서는 수학사를 통해 얻게되는 통합적 사고의 두 가지 측면에 대한 내용을 다루었다. 세 번째 절에서는 제2장에서 언급한 수학적 사고에 대한 이론 고찰을 토대로 본 논문의 취지에 맞는 수학적 사고의 구조를 다시 세우고 이를 통합적으로 활용할 수 있는 사고와 마인드에 대해서 기술하였다.

제4장에서는 지금까지 논의해온 사항들을 효과적으로 포괄하는 교과서에 대한 논의를 하였는데 7차 교과서의 내용을 분석하고 수학적 사고를 통합적 사고로 발전시키기 위해서 어떠한 내용이 교과에 더 첨가 되어야하는지를 기술했다.

제5장은 결론으로 열린 사고를 지향하는 교과 방향에 대한 본 논문의 논지를 요약하고 이후 연구되어야할 사항들을 제언하였다.

제 2 장 수학교육의 목표과 수학적 사고

수학교육에 대한 논의를 하기 위해서는 '수학이란 무엇인가?'에 대한 명확한 인식이 필요하다. 왜냐하면 수학이 무엇이냐에 따라 수학에서 무엇을 배워야하며, 무엇을 가르쳐야 하는지가 결정되기 때문이다. 그러나 '수학이 무엇인가?'란 질문은 수학이란 학문이 생겨난 이래 끊임없이 제기되고 있는 질문의 하나이고 많은 수학자, 철학자들이 수학자체의 발전에 따라 여러 가지 변화된 답을 하고 있으나 그러한 답은 대개 일방적인 경우가 많다. 이것은 수학이란 학문의 본질을 파악하기가 그 만큼 쉽지 않다는 것을 의미한다.[1] 이렇게 수학이라는 학문의 본질을 정확히 규명할 수 없는 이유는 수학이라는 학문의 다양한 성격 때문일 것이다. 수학은 단순히 실생활에서의 측정이나 계산을 다루기도 하며 과학적 사고의 근간을 이루는 논리의 체계를 세워 여타 다른 과학분야 뿐만 아니라 철학적 사유에도 주요한 사고의 구심점이 되기도 한다. 수학의 이러한 점을 고려하여 수학의 본질을 논하기 위해서는 무엇보다도 먼저 수학의 역사적 고찰이 있어야 한다. 수학은 다른 학문보다도 더 역사적 고찰을 필요로 하는데 그 이유는 역사적 고찰이 있어야만 왜 이러 이러한 문제를 수학에서 취급하는지를 제대로 알 수 있어 수학의 본질을 규명하는데 선명성을 갖게되며 또한 역사 속에서 수학의 발전 양상이나 또한 다른 학문에 영향을 준 모습들을 고찰하면서 좀 더 수학의 성격을 실증적으로 바라볼 수 있기 때문이다.

이렇게 수학의 역사는 수학의 본질을 규명해 줄 뿐 아니라, 앞서 언급한 대로 수학의 본질적 정의에 따라 수학교육의 목표가 정하여지므로 변천되어온 수학의 본질에 따라 변화 되어온 수학 교육관의 흐름도 알게되어 오늘날의 수학교육이 무엇을 목표로 하는지 알 수 있게 한다.

본 장에서는 수학의 역사와 본질 그리고 그에 따라 파생되는 수학 교육의 목표에 대한 논의를 기술하고 아울러 수학교육의 가장 실질적인 목표인 사고력 증진에 대한 논의를 하고자 한다. 먼저 이 모든 논의의 배경이 되는 수학의 역사에 대해 살펴본다.

1) 신영미, 수학사와 수학교육, 서울 대학교 서울 대학원 수학교육과 p1에서 재인용

제 1 절 수학의 역사

1. 이집트, 바빌로니아, 동양수학

수학사를 살펴볼 때 인류의 수 활동은 수세기로부터 시작되었다고 전해진다. 양치기 목동이 양을 세기 위한 방법으로 조약돌을 이용해서 양의 수를 직관적으로 파악하다가 양의 수가 점차 많아져서 직관적 파악이 힘들어지자 양 손가락의 수 만큼에 해당하는 조약돌의 양을 큰 조약돌 하나로 대신하게 되었다. 이는 자리의 값 1, 10, 100, 1000… 과 자리수의 발전이라 볼 수 있다.

기원전 3000년경부터 인류는 측량이나 수의 계산 등 수학적 활동을 하였던 기록들이 남아 있다. 대표적인 곳이 고대 문명의 발상지인 이집트, 바빌로니아, 인도, 그리고 중국이다. 이때의 수학은 농지면적계산, 주기적으로 범람하는 홍수의 시기와 같은 측정과 실생활에서의 계산문제를 해결하기 위한 것들이 주종을 이뤘다.

이 시대에서 특별히 수학적 발전에 중요한 기여를 한 점을 뽑는다면 그것은 기수법의 발달이였다. 여러 나라의 기수법 중 특히 메서포타미아의 60진법은 오늘날의 기수법처럼 자리의 개념을 사용하여 기수법의 근간이 되었고 또한 이 기수법은 인류에게 영원한 흔적을 남겼는데 오늘날 1시간을 60분으로, 1분을 60초로 나누는 것들이 그 흔적이다.

2. 그리스의 수학

그리스 시대로 들어오면서 수학은 그 때까지 발전되어 온 양상과 다른 기법으로 발전되기 시작했다. 그리스 사람들은 그 때까지 발전되어 온 수학의 내용을 바탕으로 수학의 내용을 많이 첨가시켰지만 더욱 주목해야할 사실은 그들의 수학을 연구하는 방법 또는 성격을 완전하게 바꾸었다는 사실이다.

그리스인들은 논리와 비판적 사고를 도입하여 수학을 활발히 연구하여 어떤 수학적 지식을 자연현상에 단순히 응용하기보다 확고한 논리적 기초를 세워나가는 데 집중을

하였다. 이러한 집중이 '기하'라는 수학 내용에 모아졌고, 이는 그 후 수학사에 커다란 이정표가 되었다.

그리스의 수학자들은 실용적인 응용을 목적으로 하는 연구는 천한 것으로 보고 이것을 기피하였으며, 이론적 연구에만 진정한 학문의 가치가 있다고 인정하였다. 이러한 그리스 수학자중 제일 먼저 이야기되는 수학자는 탈레스인데 그는 그때까지 경험을 통해서 얻었던 기하학의 지식을 그가 사상 처음으로 '증명'하였다고 전해져 내려오고 있기 때문이다. 그는 5, 6개의 정리를 증명하였다고 전해지고 있는데, 그 중의 하나는 원은 그 임의의 지름에 의하여 2등분된다는 명제의 증명이었다. 그는 또한 이 세계와 만물의 원질은 무엇인가? 라는 의문을 가지고 자연과학에 대한 철학적 질문을 하였는데 이러한 탈레스의 철학적 사유와 수학적 사고는 그리스 학문이 체계를 이루는 근간이 된 것이다.

탈레스 다음으로 전해져오는 수학자는 피타고라스인데 그는 원질문제 보다는 세계가 어떤 원리와 법칙에서 존재하느냐를 물었다. '신은 수학적으로 사고한다'라 하고 우주의 원리와 질서는 도형과 수의 조화법칙에서 밝힐 수 있다고 보았다. 그의 정신은 과학적이며 정신적 가치를 추구해서 자연을 관념적인 정신적 원리에 따라 설명하려고 하였다.

플라톤의 이데아론에서는 이데아는 존재의 바탕이 되면서 질서의 원천과 목적이 되며, 최고 인식의 내용이며 현실계를 초월한 성스러운 직관을 동반하면서, 우리 삶을 이데아의 세계로 승화시키는데 있다. 최고의 이데아는 선의 이데아라 했는데 선은 참과 진리를 포함하고 있어서 항상 진리인 수학의 소양이 매우 중요시되었다.

이러한 철학적 사유와 함께 발달한 수학의 연구방법의 특징은 추상을 사용했다는 사실이다. 그리스 이전 사람들은 점을 나뭇가지의 뾰족한 끝으로 선을 건물의 모서리나 물건의 가장자리 등으로 생각했는데, 그리스시대에서는 점을 크기가 없는 위치를 나타내는 수단으로 추상화했고, 선을 폭이나 두께가 없이 두 방향으로 무한히 진행하는 빛과 같은 것으로 추상화하였다. 그리스인들의 추상화의 강조 및 논리적 추론 방법의 강조는 새롭게 수학의 조직을 발전시켜 '학문으로서의 수학의 확립'을 이룩하였고 이것은 유클리드 기하학의 원본에 의해 대표된다.

유클리드 기하학은 서양의 과학 발전을 위한 사고의 축을 제공하였다. 그리스 이전까지 주로 경험을 통하여 알고 있던 수학(주로 기하학)의 지식이 그리스에 와서 '증명'을 통하여 학적체계를 갖추게 된 것이다. 즉 몇 개의 자명하다고 본 명제를 출발에서 옳다고 인정하고(이것이 공리임), 이것에서 누구도 이의를 제기할 수 없는 확실한 방법으로 (즉 논리적으로) 새로운 명제(정리)들을 유도해 내는 체계(연역법)를 그들은 확립하였으며 이것은 유클리드의 기하학 원본에 가장 훌륭하게 집대성되어 그 후 이 책은 서양에서 성서 다음으로 많이 읽히운 책이 되었다.

뉴우튼의 역학의 출현은 서양의 자연과학의 기초를 확립시켰는데, 이것은 결국 그리스에서 확립된 수학에서의 연역법의 정신의 소산이었다. 천태만상의 복잡한 것이 자연현상이지만 이 속에도 기하학에서의 유클리드의 공리들에 해당할 자연현상의 원리가 있지 않을까 하는 끈질긴 탐구가 갈릴레오・뉴우튼으로 하여금 운동의 3대법칙과 만유인력의 법칙을 찾아서 천체의 운동은 물론 지상에서의 포탄의 궤도까지 완전히 설명하게 만들었다. 그리하여 이제 인간 앞에 있는 자연은 신비와 공포에 찬 존재가 아니라 그것의 비밀을 알아내어 이용할 수 있는 것으로 되어, 여기에 인류에게 기술발전의 길이 열렸다.

그리스 수학의 발전에 또 하나의 큰 업적으로 남긴 수학자는 아르키메데스인데 그는 구, 원기둥, 원뿔, 회전타원체, 회전 쌍곡선 및 회전포물선면의 표면적과 체적의 계산 등 복잡한 도형에 대한 연구를 하였으며 그의 가장 독창적인 업적은 응용수학에 있다. '아르키메데스'의 원리라고 불리 우는 액체속의 물체의 중량의 감소에 관한 법칙은 유체정역학을 창설했으며, 지레에 관한 그의 이론은 정역학에의 길을 열었다.

3. 서양근대수학

'자연을 수학적으로 설명할 수 있다'는 수학관을 가지고 자연의 움직임의 변화를 묘사하여 설명하고 분석하는 근대 서양수학은 데카르트의 방법서설의 부록인 <기하학> 으로부터 시작되었다. 그는 확실하고 그 자체가 명백한 지식을 찾아야하며, 더 의심이 없는 지식을 진리로 받아들여야 한다고 확신하며 철학의 방법론적 근거는 수학에 있

으며 수학의 방법론적 핵심은 연역성이라고 보았다. 이성 즉 바르게 판단하거나 혹 참과 거짓을 구별할 수 있는 능력은 태어나면서 모든 인간이 고루 갖추고 있다고 하면서 진리를 탐구하기 위해서 해석 기하학을 창안했다. 해석 기하학의 출발점은 변수를 정해서 도형을 수치화 했다. 기하학적인 도형을 간단히 대수식으로 나타내어 기하학과 대수학을 하나로 묶어 종합과 분석의 방법을 가지고 연구했다. 여기에서 좌표라는 새로운 수학적 도구를 사용하여 그리스의 정적인 수학에서 운동과 변화를 다루는 근대수학이 나타날 수 있게 되었다. 좌표를 도입한 수학을 이용하여 뉴우튼과 라이프니츠는 미적분학을 창안하였다. 미적분학은 자연의 연속적 현상을 분석하고 종합하는 방법으로 자연을 탐구하는 최고의 도구가 되었다. 미분은 연속적인 변화를 무한히 쪼개어 순간적인 변화를 알아보는 분석적 방법이지만 적분은 쪼개진 무한히 작은 것들을 모아서 유한의 상태로 만들어 조사하는 종합적 방법이다. 미적분학의 출현은 근대수학을 획기적으로 발전할 수 있도록 했으며 자연을 설명하는 근대과학의 중추적 역할을 하게되었다. 근대과학의 핵심인 우주를 물체의 운동과 그 원천인 힘을 생각하는 역학적 세계관이 탄생되었다.[2)]

19세기의 수학은 반대되는 두 개의 방향으로 급속히 발전하기 시작했다. 하나는 수리물리학의 중요한 정리들을 가능하게 했던 엄격한 해석의 조직속으로 미적분을 정교화 함으로써, 이 정리들은 궁극적으로 양자역학, 상대성원리 등으로 연결되었음은 물론이고, 공간과 사물의 본질을 깊게 이해하는데 기여하였다. 다른 하나는 미적분과 기하의 논리를 탐구함으로써 무한집합과 비유클리드 기하에 관련된 정리들에서 새로운 수학의 세계를 활짝 열었다.

이러한 두 가지 경향은 어떤 공통된 뿌리로부터 자라왔다는 것에 주목할만한데 그러한 뿌리 중 하나가 퓨리에의 통찰이다. 퓨리에의 통찰은 모든 수학적 함수는 어떤 단순하고 기본적인 함수들의 합으로 표현된다는 것 이였으며, 이 기본적인 것들은 음악의 순수음이나 빛의 순수색을 형성하는 주기적인 진동을 나타낸다는 것 이였다. 불규칙하게 뜨거워진 물체에서 열이 배분되는 과정을 분석함으로써 퓨리에의 이러한 제

2) 김종명, 수학사에서 수학의 패러다임 형성과 수학 교육관, 관동대학교 수학 교육과 Historia Mathematica vol.10. No.2, 1997, p 56-57

안은 상상력이 풍부하고 가장 의미심장한 수학사의 아이디어로 남게되었다. 이러한 퓨리에의 통찰에 대한 탐구과정이 19세기 전반에 걸쳐 이루어졌는데 이 작업에 포함된 수학자로 디리클레, 리만, 바이어슈트라스, 칸토어 등을 들 수 있다. 이들 작업의 결과에 따라 이론 물리학자들은 고전 물리학에 새로운 도구를 접목시켰고, 수학자들은 광대한 무한집합의 세계를 발견하기 시작하였다.[3)]

19세기 수학의 또 하나의 위대한 성취는 비유클리드 학문의 성취였는데 당시 학문의 기초역할을 하던 유클리드 기하만이 유일한 기하가 아니라는 사실을 발견하였다. 이 '비유클리드' 학문의 핵심은 유클리드의 제5공준(일명, 평행공준)은 모든 기하에 꼭 참일 필요는 없다는 발견에 있다. 이 제 5공리는 즉 평행선 공리는 나머지 4개의 공리에서 유도되지 않으니, 이 4개의 공리에 제5공리를 부정하는 명제를 공리로 첨부하여 얻은 수학체계를 세우면서 비유클리드 기하학이 시작되었는데, 이것에서 어떤 명제와 그것의 부정 둘 다가 성립한다고 증명하는 '무모순성'에 대한 증명이 이뤄지면서 체계를 지니게되었다. 무모순성에 대한 해답을 처음으로 얻은 수학자는 이태리의 Beltrami였는데 그는 1868년 유클리드 기하학에 모순이 없다면 비유클리드 기하학에도 모순이 없다는 사실을 증명하였다. 다시 말해서 비유클리드 기하학에 모순이 있으면 유클리드 기하학에도 모순이 있다는 것을 증명한 것이다.[4)] 이와 같이 하여 수학의 본질에 대한 견해에 근본적인 변화가 생기기 시작하였다. 그때까지 유클리드 기하학은 우리가 살고있는 객관세계의 기하학적 진리를 기술하는 학문이라고 생각해오던 견해에 근본적인 변화가 생겨났으며, 이것은 수학의 본질에 대한 견해에 있어서 혁명이며 코페르니쿠스적 변환이었다.

지금까지의 이야기를 종합하여 보면 19세기 수학의 주성취는 순수와 응용수학의 공생관계를 설명해주고 있다. 열문제에 대한 퓨리에의 해석은 궁극적으로 칸토어의 무한집합에 대한 추상적인 정리를 인도한 반면, 비유클리드 기하에 대한 순수 추상적인 생각은 이후 상대성이론을 인도한다.

---

3) 신현성, 수학교육론, 경문사 1999 p12
4) 한병호, 수학이란 무엇인가: 수학의 본질과 20세기 수학의 핵심, 진리세계사, 1989 P55

4. 20세기의 수학

비유클리드 기하학의 창설에 의해 수학은 물질세계에 대한 어떤 진리를 말하는 것이 아니라, 한 개의 공리계를 설정해 놓고 이 공리계에서 증명되어 나올 수 있는 명제들을 찾는 과학임이 밝혀졌다. 이에 1899년 Hilbert는 '수학은 가설이다'라는 신념으로 공리를 설정하여 가장 완벽한 수학을 건설하려는 취지에서 <기하학 기초론>을 발표하였다. 이 책에서 공리를 자명한 사실(진리)로 생각했던 그리스 수학과는 달리, 단지 '이론에 대한 가정'으로 공리의 개념을 인식하고 형식적인 공리를 토대로 하여 연역적인 방법으로 이론을 전개하고 구성하여 수학을 만들 수 있음을 보여주었다. 유클리드 기하학의 미비점을 보완하여 완전한(무모순)한 기하학의 새로운 체계를 세우려고 노력하였는데 공리를 새롭게 정함으로써 많은 기하학을 만들어서 유클리드 기하학뿐만 아니라 기하학이 무수히 많이 있음을 보여주었다.

이때까지는 자연과 우주 속에서 법칙과 모델을 발견하여 수학을 만들었으나, Hilbert 이후 수학은 자연의 원리에 의해 발견되고 만들어질 뿐만 아니라 인간의 자유로운 상상속에서 만들어내는 수학이 되었다. 따라서 수학이 자연세계와 함께 사회와 정신세계까지도 수학의 대상으로 수학적 모델을 만들어 연구를 할 수 있는 보다 큰 사고의 체계가 되었다. 이러한 형식적인 공리를 토대로 수학을 창조해 가는 것을 구성적 공리주의라 한다.

20세기 수학의 특징은 구성적이고 정적이라고 한다. 정적인 수학은 칸토르의 집합의 개념을 도입하여 수학을 연구할 때 나타난다. 무한집합은 한없이 셀 수 없는 것이지만 무한집합 전체를 하나로 보면 유한적인 대상으로 다룰 수 있다. 즉 폐쇄적이고 정적인 무한집합을 생각하고 집합들 사이의 관계와 성질들을 조사하여 이론들을 구성해 가는 수학이 되었다.

이러한 수학은 많은 분야에서 응용되고 다양한 양상 가운데 가장 핵심적인 개념만을 대상으로 하기 때문에 수학이 추상화되고 여러 개념들 사이의 관계와 구조를 연구하는 수학으로 발전하게 되었다. 따라서 수학적인 구조는 개념으로 이루어진 구조물로 완전히 인간의 정신으로부터 나온 아름다운 창조물이다.

5. 현대수학

1910년 Russel은 명제논리(논리학)의 완전성을 증명하였는데 그것은 다음과 같다.

'술어논리에서 논리식이 증명에 의해서 얻어진 정리면 그것은 항상 항진식이다. 또한 술어 논리의 항진식은 항상 공리계로부터 증명된다.' 라는 두 명제는 긍정적으로 증명될 때 술어논리의 공리계가 '완전하다'라 하고 이것을 '완전성 정리'라 한다.

또한 술어논리학 (수학적 논리학) 체계의 완전성 증명은 1930년 괴델이 하였다. 즉, '모든 올바른 논리의 규칙은 모두 현재의 논리의 기본적인 규칙을 조합하면 얻어진다. 즉 완전하다 (완전성 정리)'라는 것을 증명하였다. 그는 1년 후 집합론의 공리는 현재 알려진 것이 모두인가? 즉 현재의 집합론의 공리계는 완성된 것인가? 에 대한 질문에 대하여

'현재의 산술 공리계를 포함하는 무모순 공리계(예로 집합론의 공리계)는 불완전하다. 즉 그 공리계의 산술적인 명제 중에는 그 공리계 안에서는 긍정도 부정도 할 수 없는 것이 존재한다(불완전 정리)' 라는 불완전성 정리를 증명하였다. 또 다른 문제는 일반 연속체가설, 구성가능성공리, 선택 공리 등 긍정이나 부정 어느 쪽도 증명할 수 없는 공리를 집합론에 가감할 수 있나? 였다. 이 문제에 대하여 괴델은 1938년, '만일 Z-F집합론이 무모순이면 Z-F 집합론에 일반 연속체 가설이나 선택공리를 첨가하여도 무모순하다'는 결과를 얻었다. 또한 1963년 스텐포드대학의 코헨은 위 공리중 하나를 부정하여 Z-F 집합론의 공리에 첨가하여도 Z-F 집합론이 무모순하면 새로이 모순이 생기지 않는다고 증명하였다. 그러므로 일반 연속체가설, 선택공리, 구성가능성공리는 Z-F집합론의 공리계에 독립적이라는 것을 증명하였다.

현대수학에서 컴퓨터의 출현은 수치해석학의 연구를 강화하고, 50년 동안 연구가 침체되었던 행렬이론을 활발하게 연구할 수 있도록 하였고, 논리학의 중요성과 이산적인 추상구조 이론의 중요성을 환기시켰으며, 선형계획법과 계산의 복잡도 이론 및 오토매이터이론과 같은 새로운 분야의 창조를 유도했다. 컴퓨터는 고전적인 미해결 문제를 해결하는 데 많은 도움을 주었다.

또한 현대수학의 새로운 분야가 다양하게 나타나고 있는데 집합론에서 다룰 수 없

던 애매한 집합인 퍼지집합을 창안한 자데(Zadeh, 1965)의 퍼지 수학이 있다. 만델브로는 <프랙탈>이라는 책을 내놓아 무질서한 자연현상에서 어떻게 프랙탈을 만들어 내는지를 밝혔다. 그는 컴퓨터를 이용하여 흥미있고 매력적인 도형을 많이 만들어냈는데 불연속적인 현상인 급격한 변화를 수학적 모델화한 카타스트로피 이론 등 다양하고 전혀 새로운 수학을 도입함으로서, 파악하고 분석에 의해서 지배되는 오늘의 세계에서 수학과 컴퓨터의 결합을 더욱 필요로 하게 되었다.

6. 미래의 수학

20세기 초의 수학은 산술, 기하학, 미적분학 등 12가지 분야정도로 분류할 수 있었고 수학의 전체 내용도 약 80권의 책이면 충분하였다. 그러나 현재까지 연구되고 만들어진 모든 수학의 내용을 기록하기 위해서는 약 10만권의 책이 필요하고 수학의 분야도 크게 분류해서 약 70개 분야가 될 정도로 수학은 방대하고 복잡 다양한 모습으로 발전하고 있다.

수학의 양적 팽창과 발전으로 수학의 정의도 변하고 있다. 수학은 수, 형태, 운동, 변화, 공간에 대한 연구라는 정의로부터 수학은 대상의 본질적인 성질과 구조를 파악하는 과학이라는 정의가 나왔다. 즉 수학자가 연구하는 것은 본질적인 성질과 구조를 파악하고 포착하는 양식(pattern)의 과학이라는 것이다.[5] 따라서 양식의 과학인 수학은 우리가 살고 있는 물리적이고 생물학적이며 사회학적인 세계와 우리의 정신적인 세계 모두를 관찰하여 원리를 찾아내고 새로운 세계를 만들어 가는 학문이다.

수학의 세계는 완전히 인간의 창조물로서 수학의 연구는 궁극적으로 인간 자체에 대한 연구이며, 우주와 자연 그리고 인간을 포함하는 광범위한 영역을 연구하고 있다.

5) Devlin, 수학: 양식의 과학, 허민 오혜영 역, 경문사,1995 p20

제 2 절 수학의 본질

1. 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학의 고찰

앞서 기술한 수학의 역사를 통해 수학의 본질을 구성하는 가장 커다란 축은 유클리드기하학이며 본질의 변환적 발전을 일으킨 것은 비유클리드 기하학임을 알 수 있다. 그러므로 수학의 본질을 논하기 위해서는 이 두 가지 수학의 큰 축을 좀더 자세히 고찰할 필요가 있다.

먼저 유클리드 기하학을 살펴보면 유클리드 기하학은 연역적 추리로 수학적 진리를 밝혀간 과학적 사고의 수학으로 유클리드 기하학의 학문적 핵심가치는 바로 이 연역법에 있다. 유클리드의 연역법은 어떤 명제를 증명하는데 있어서 모든 명제를 증명할 수는 없으니, 출발에서 몇 개의 명제(공리)를 옳다고 가정하고 나머지 명제(정리)들을 공리와 앞에서 증명한 정리들을 써서 증명해나가는 체제를 취하고 있다. 이러한 유클리드 기하학의 연역법에서 주목하여 볼 점은 바로 공리가 과연 참이라고 말할 수 있는가? 라는 점인데 당시 그리스 수학자들의 수학관을 살펴보면 '신은 수학적으로 사고한다. 그리고, 수학의 명제는 변할 수 없는 진리이다' 라는 절대주의의 사고를 지니고 있었으므로 수학은 외적이고 한계가 있으며 수학의 이론은 고정된 불변의 진리라고 생각했다. 이러한 절대주의적 관념은 후에 비유클리드 학문이 출현하기까지 계속되어 유클리드 기하학을 객관세계에 대한 기하학적 진리라 믿었다.

유클리드 기하학 책의 체계를 살펴보면 전 13권으로 되어있는데, 제1권은, 이 책의 첫 부분에 쓰일 개념의 정의부터 시작되고 있다. 몇 개만 살펴보면

1. 점이란 부분을 갖지 않는 것이다.
2. 선이란 폭이 없는 길이이다.
3. 선의 끝은 점이다

와 같은데 이런 처음의 몇 개의 정의는 오늘날의 관점에서 보면 이론적으로 무의미하다. 즉 정의되지 않은 개념을 이 정의에 쓰고 있기 때문이다. 수학체계의 정의 중에는 몇 개의 '무정의' 술어가 있어야 한다는 것이 19세기에 와서야 밝혀졌기에 무정의

개념을 아무런 조건 없이 사용하였다. 몰론 당시에도 현대의 수학자와 같은 개념을 가진 수학자도 있었는데 아리스토텔레스는 공리는 옳다고 밝혀져야 할 필요는 없고 다만 그것에서 유도된 결과들이 사실(객관세계)과 맞으면 그 공리들은 옳은 것이라고 봐야했으며, Proclus는 심지어 모든 수학은 가정적이다. 즉 수학은 단지 가정된 사실들에서 추론되는 결과를 얻어낼 뿐이지, 그 가정의 진부는 문제가 안된다고 했다. 그러나 유클리드는 이러한 점을 원본에서 언급하지 않았기에, 비유클리드 학문의 출현 전까지, 이 공리와 공통개념은 의문의 여지가 없는 진리로 받아들여졌다.

책의 공리는 다음과 같다.

1. 임의의 점에서 임의의 점까지 직선을 긋는 일(이 가능하다)
2. 유한한 직선을 연속적으로 직선으로 연장하는 일(이 가능하다)
3. 임의의 중심과 거리(반지름)를 가진 원을 그리는 일(이 가능하다.)
4. 모든 직각은 서로 같다.
5. 두 직선과 만나는 한 개의 직선이 그 합이 2직각보다 작은 같은 쪽의 내각을 만들면, 이 두 직선은 무한히 연장되면, 내각의 합이 2직각보다 작은 쪽에서 만난다.

제5공리가 바로 그 유명한 '평행선의 공리'라고도 불리 우는데 그 이유는, 이것이 다음 명제와 동치이기 때문이다.

한 직선 상에 있지 않는 한 점을 지나며 이 직선에 평행인(무한히 연장해도 이 직선과 만나지 않는) 직선이 있으며 하나만 있다.

다른 4개의 공리가 옳은 것은 너무도 자명한 사실이지만 제5공리는 모순점을 지니고 있었고 이 모순점을 해결하는 것이 수많은 수학자들의 과제였고 19세기에 와서 비유클리드 기하학을 탄생시킴으로써 수학에 신기원을 열게 하였다.

이렇게 유클리드 기하학은 모순점을 지니고 있다해도 이것에 의해 과학으로서의 수학의 양상이 확립되었으며, 이 확립된 수학의 존재양식은 오늘날까지도 면면히 이어져 불변이다. 즉 정의, 공리에서 출발하여, 이것에서 논리적으로 증명되어 나오는 명제(정리)들을 얻어내는 것이 개개의 수학체계의 지식의 전개형식임이 유클리드에 의하여 확립되었으며, 수학의 이 기본양상은 영영 불변인 것이다. 따라서 유클리드 기하학의 체계는 수학의 본질을 나타내는 가장 근본적 바탕이 된다.

이제, 비유클리드 기하학에 관한 것을 살펴보도록 한다.

비유클리드 기하학도 물질세계의 기하학적 성질을 기술하는데 쓰여질 수도 있으리라고 생각한 최초의 사람은 가우스였으나 그는 생전에 그의 연구결과를 발표하지 않았기에 러시아의 Lobatchesky (1793-1856)와 헝가리의 Bolyai에 의해 비유클리드 기하학의 창설되었다. 어쨌든 Gauss, Lobatchesky, Bolyai는 유클리드의 평행선의 공리는 나머지 4개 공리(일반 공리도 넣으면 9개의 공리)에서부터 증명될 수 없다는 것을 깨닫고 있었다. 이 사실을 평행선의 공리는 나머지 4개의 공리들과 독립적(independent)이라고 한다. 따라서 평행선의 공리와 반대되는 명제와 유클리드의 첫 4개의 공리를 합쳐서 공리군으로 취하여도 모순이 유도되지는 않을 것이니, 이 공리군에서 출발하여 논리적으로 유도되는 명제들을 찾는 일을 해 볼 수 있다. 이것이 바로 비유클리드 기하학이 탄생할 수 있었던 이론적 근거이다.

이렇게 4개의 공리에 제5공리를 부정하는 명제를 공리로 첨부하는 과정에서 모순이 성립될 가능성이 있었는데, 즉 지금은 이것에서 어떤 명제와 그것의 부정 둘 다가 성립한다고 증명되지는 않더라도, 이 속에서 모순이 유도되지는 않는다는 증명이 없었다. 이러한 무모순성에 대해 처음으로 부분적으로나마 답을 얻은 것은 이태리의 Beltrami(1835-1900)였는데 그는 유클리드 기하학에 모순이 없다면 비유클리드 기하학에도 모순이 없다는 것을 증명하였다. 다시 말하면 비유클리드 기하학에 모순이 있으면 유클리드 기하학에도 모순이 있다는 것을 증명한 것이다.

이렇게 비유클리드 기하학이 출현하면서 유클리드 기하학 원본의 결함들이 알려지기 시작하였는데 그 중 중요하게 지적되는 것이 앞서 기술한 바 있는 '무정의 요소'이다. 유클리드 기하학의 점, 직선 등의 정의는 실은 정의로서 역할을 할 수 없는데 그 이유는 점을 "부분을 갖지 않는 것"이라고 한 정의는 무의미하다는 것이다. 왜냐하면 이것이 정의로서의 의의를 가지려면 '부분'이란 무엇인가가 정의되어 있어야 하기 때문이다. 이런 모순점을 해결하기 위해서는 '무정의 개념'의 필요성이 대두된다. 즉, 모든 것을 정의한다는 것은, 정의의 끝없는 소급을 뜻 하든가, 아니면 수학에서의 정의에 물질적 개념의 도입을 필요로 하기 때문에 몇 개의 무정의 개념이 설정되면 나머지 개념은 이것으로 정의되는 것이다. 기하학에서는 점, 직선, 평면의 무정의 요소

로 채용될 수 있다. 그러나 이것의 선택은 일정한 것은 아니다.

이러한 무정의 개념은 문자 그대로 전혀 정의가 되지 않는 아무 뜻이 없는 것이 아니라 공리들에 의해 '음적'으로 정의되는 것이다. 즉 그들은 공리 속에 나오며 이 공리들에 의해 그의 성질들이 규정된다. 또한 추론 시 중요한 것은 이 공리들에서 얻은 사실 이외에는 그들에 대하여 아무것도 가정해서는 안된다는 사실이다.

공리의 어떤 것은 경험을 통해서 설정되고 그러나 일단 공리들이 설정되고 나서는 그 이상 거기에 나오는 개념에 대한 경험이나 물질적 뜻에 의존하는 일이 없이 순전히 논리적인 추론에 의하여 이런 개념들에 대한 명제들이 유도되어야 한다. 공리란 자명한 진리가 아니라 어떤 기하학체계를 만들기 위한 가정이라 할 수 있다. 비유클리드 기하학 역시 수학의 연역성이 그 본질임을 변화시키지 않았음을 알 수 있다.

2. 무한 속의 수학

수학의 본질을 논하기 위해 또 하나 반드시 짚고 넘어가야 하는 점은 무한의 개념이다. 수학의 <집합론>은 한마디로 얘기해서 무한의 수학이라 할 수 있는데 이 무한의 개념 역시 모든 것을 규정짓는 유클리드 기하학의 모순점이 드러나면서 비유클리드 기하학의 출현과 함께 생성된 개념이다.

네델란드의 Brouwer(1881-1966)는 1908년 '논리의 원칙의 믿을 수 없는 점'이라는 논문을 발표하여, 아리스토텔레스에 의하여 창설되어 그때까지 거의 수정 없이 쓰여지고 있던 논리학의 법칙이, 경우에 따라서는 적용될 수 없다고 주장하고 나섰으며, 논리법칙의 이런 무분별한 적용 때문에 집합론의 패러독스와 같은 문제가 생긴다고 주장하였다.

그의 주장의 가장 중요한 것의 하나는 배중률 즉 P가 어떤 명제이면 항상 P든가 P가 아니든가 둘 중 하나 또한 하나만이 참이라는 논리법칙이, 항상 성립하지 않는다는 것이다, 그는 아리스토텔레스에서부터 전해 내려오는 논리학은 유한집합에서 성립하는 논리법칙을 모아 얻은 것인데, 후세에 와서 이 기원을 잊고, 이 논리학을 무한집합에도 무비판적으로 적용하는 잘못을 저질렀다고 주장하였다.

어떤 유한 집합 D에 대해서는, 그것의 모든 원소가 어떤 성질 T를 가졌느냐 안 가졌느냐 하는 사실은, 그 조사가 유한 번에 끝나니, D에 원소가 아무리 많더라도 그것이 유한개인 한, 또한 그 성질 T를 갖는지 여부의 조사가 복잡한 과정을 요하더라도, 그 조사는 항상 끝이 날 가능성을 갖고 있으므로 이런 경우에는 'D의 모든 원소가 성질 T를 갖는다'는 명제는 반드시 옳든가 옳지 않든가이다 라고 단정할 수 있다. 그러나 어떤 무한집합 E의 경우에는 그것의 모든 원소에 관하여 어떤 성질 T의 소유여부를 조사하는데는, 원칙적으로 무한 번의 조사가 필요하니, 이것은 끝낼 수 있는 일이 아니니, 이와 같이 일일이 조사하지 않고 그 성질 T의 소유여부를 이 무한집합의 모든 원소에 대하여 아는 어떤 구체적인 방법이 알려지지 않는 한, 무수히 많은 모든 원소가 성질 T를 갖든가 그렇지 않든가가 항상 옳다는 것을 알 수 있다고, 즉 이 경우에도 배중률이 성립한다고 주장할 수는 없다는 것이다.

이러한 Brouwer학파의 주장을 요약해보면 다음과 같다.

"수학은 우리의 사유의 정확한 부분과 일치한다. 어떤 과학도, 특히 어떤 철학도 논리학도 수학에의 전제가 될 수 없다. 증명의 방법으로서 어떤 철학적이나 논리학적 원리를 적용하는 것은 순환논법이 될 것이다. 왜냐하면 이런 원리들은 수학의 개념을 전제로 하여 만들어 졌기 때문이다. 수학의 방법으로서 직관만이 존재하며, 직관은 수학의 개념과 추리를 우리 눈앞에 직접 명확하게 제시한다."

이러한 학파의 주장을 직관주의라고 부르는데 이 직관주의 수학에서는 어떤 논리학속에 모여 놓을 수 있는 고정된 규범들에 따라서 추리가 수행되는 것이 아니고, 개개의 추리는 그것의 정당성 여부가 일일에 검토된다. 그러나 수학의 정리에서 새로운 정리들이 직관적으로 명확한 방법으로 얻어지는 일반적인 법칙이 있으며, 이것들은 '수리 논리학'에서 취급될 수 있는데 이것은 수학의 일분야이며 수학 이외에는 일반적으로 적용되지 않는다.

Brouwer 학파 이전의 수학을 고전수학으로 구분하는데 고전수학에서는 무한을 '완성된 것', 즉 '존재하는 것'으로 취급하는데 반하여, 직관주의 수학에서는, 무한을 '완성되지 않는 것', 즉 '만들어져 가는 것'으로 취급한다.

직관주의적 입장에서는 고전수학의 많은 부분을 포기해야 되는데 이러한 고전수학

의 파괴적 공격에 대하여 고전수학을 옹호하는 이론이 Hibert에 의해 제시되었는데 고전수학의 각 분과에 모순이 없음만 증명하면 된다는 것이다.

즉, 비유클리드 기하학의 창설에 의하여 확실해진 바와 같이, 수학은 물질 세계에 관한 어떤 진리를 말하는 것이 아니라, 한 개의 공리계를 설정해 놓고 이 공리계에서 증명돼 나올 수 있는 명제들을 찾는 과학이라 할 수 있으니, 그 공리계의 모순이 유도되지 않으면 그 공리계에 비난할 이유가 없으니, 요는 그 공리계의 무모순성만 보장되면 된다는 견해다.

Hibert가 개개의 수학계의 무모순성을 증명하기 위해선 수학계를 규정짓는 그의 공리계와 논리가 명확하고 간결하게 제시되어야 했다. 이것을 위한 가장 좋은 방법은 그것들을 기호로 표시하는 것 이였다. Hilbert는 애매성을 없애고 그의 연구목적에 적합하게 만들기 위하여 수학계의 기호화를 철저히 수행하였다. 이 기호논리를 써서 수학계의 공리와 논리를 기호로 정확히 표기함으로써, 각 수학이론을 일목요연한 연구의 대상물로 만들 수 있었다. 이렇게 하여, 형식화된 각 수학이론을 형식계 혹은 형식이론이라 부르며, 이 형식계 자체를 하나의 수학적 연구의 대상물로 삼는 이론을 증명론 또는 수학론이라고도 부른다. 특정한 한 개의 형식계를 연구의 대상으로 할 때 이것을 대상계라 하고, 이것을 다루는 수학론을 대상계론 이라고 부른다. 그리고 이러한 학파의 수학기초론을 형식주의라한다.

수학론에서의 논리전개에 있어서는 무한집합을 한 개의 완성된 전체로 취급해서는 안되며, 또한 배중률의 무제한 한 적용이 허용되지 않으며, 어떤 대상물의 존재를 주장하자면 최소한도 그것을 만들 수 있는 구체적인 방법을 제시해야한다. 이것을 형식주의자들의 '유한적 태도'라 부른다.

3. 요약해보는 수학의 본질

1) 공리론적 방법

앞선 내용을 통해 유클리드 기하학의 연역적 추리는 수학의 가장 핵심적인 본질적 요소가 됨을 알 수 있으며 비유클리드 기하학을 통하여 밝혀진 바 이 연역적 추리에

서 문제가 되는 것은 연역적 사고의 처음 시작이 되는 가설이 참이라는 진술을 어떻게 해서 만들어 가는가의 문제이다.

지금까지의 수학사를 통합적으로 고찰하여 보면 처음의 진술은 부분적인 공리계 안에서 설정될 수 있는데 이 계의 밖의 관점에서 바라보면 거짓이 된다 할지라도 계의 안에서는 참으로 설정되는 것이며 이를 뒷받침하기 위해 계는 각각 계안의 진리표준을 지닌다.

진리표준을 좀더 자세히 설명하면, 예를 들어

$$6 + 7 = 1$$

이란 식에 대해 일반적으로는 거짓이라 말하나 이것은 십진기수법이라는 진리표준에 비춰봤을 때 거짓인 것이다. 이것을 시계산수의 진리표준으로 바라보면 이 식은 참이 되는 것이다. 일상에서도 그 예를 찾을 수 있는데 기독교에선 진리표준을 성서로써 정해놓고 어떤 진술이 참인가 또는 거짓인가를 판단하지만 이슬람교를 믿는 지역에선 성서가 진리표준이 될 수 없다. 그 지역에서는 코란이라는 경전을 진리표준으로 선정하여 진술의 참과 거짓을 판정한다.

수학에서 임의로 참이라 정해 놓은 초기 진술은 자연과학의 여러 학문들의 초기진술을 만드는 과정과 크게 다르다. 수학자들은 초기진술들이 자연과학자들이 사용한 외부 자연현상과 일치하느냐 또는 일치하지 않느냐를 결코 점검하지 않는다. 일단, 수학에 관심있는 사람들이 이 진리 표준을 받아들이면 이것을 이용하여 연역적으로 다른 가설을 증명하게된다.

이렇게 해서 참이라고 받아들여진 진술 또는 증명된 진술들은 다른 가설을 증명하기 위해 다시 진리표준을 만드는데 사용된다. 이러한 일련의 과정을 논리적 체계라 하며 논리적 체계 속에 있는 초기 진술을 공리라 한다.

2) 수학과 언어

진리표준을 정한 후 문제가 되는 것은 그 속에 있는 초기 진술들을 어떤 형태로 쓰였는가 문제다. 즉 알맞은 단어나 수학적인 기호가 있어 수학적인 아이디어를 효과적으로 표현해야한다. 주어진 문장이 있을 때, 쓰여진 용어의 정확한 정의를 내리지 않

고 쓰면 혼란을 일으키게 된다. 그러나 공리를 만들 때 쓰인 용어들을 처음부터 명확하게 모두 정의할 수 있는가 라는 문제에 부딪힌다. 만일 공리에 있는 모든 용어를 모두 정의하려 하면 다시 원점으로 돌아와 모든 용어를 명확하게 정의한다는 것은 무리라는 사실을 알게 된다.

이에 대해 앞 절에서 기술한 바 있는 '무정의 용어'의 개념이 도입된다. 이 무정의 용어에 대해 좀더 자세히 기술하면 논리적 체계에서 어떤 특정한 용어는 정의하지 않기로 약속하는 것인데 이 정의되지 않은 용어를 무정의 용어라 하며 이러한 무정의 용어로서 점, 선, 집합, 후자 등이 있음을 잘 알고 있다.

이러한 제한에도 불구하고 우리는 논리적 체계에서 용어의 의미를 겉으로 표현할 수 있든 없든 이해를 해야 한다. 무정의 용어는 비록 문장으로 명료하게 정의를 내리지는 않지만, 그 뜻을 이해하지 않고 넘어가는 것은 아니다. 전체 문장 속에서 그 뜻을 비공식적으로 알게된다.

이 과정은 우리가 나무의 뜻을 아는 것과 비슷하나, 나무의 뜻을 알기 위해서는 문장으로 정확히 정의를 하라고 요구하지는 않는다. 매일 살아가면서 나무라는 물체를 만져보고 냄새로 맛보고 그 형태를 관찰하면서 감각적으로 나무라는 뜻을 알게 된다. 이와 같이 용어의 뜻을 명확히 문장으로 기술하지 않아도 그 뜻을 아는 방법을 내재적인 정의라 한다.

이와 같은 과정을 거쳐 무정의 용어 및 공리가 기록되면 논리적 체계는 새로운 용어 정의와 증명이 더해진다. 따라서 좋은 정의는 논리적 체계에 잘 맞아야 하므로 몇 가지 기본적인 성격을 가지게 되며 이를 요약하면 아래와 같다.

① 정의는 완전한 문장으로 기술되어야 한다.

② 정의의 일부분의 문장은 정의하려 하는 용어를 두어야 하고 이미 알려진 범주와 같이 놓는다.

③ 나머지 문장에서는 ②에서 언급한 알려진 범주, 정의하려는 용어 등의 구분되는 성질들을 진술해야한다.

④ 정의는 여분의 용어가 들어있지 않아야 한다.

⑤ 정의되는 용어 이외의 용어는 정의된 것이거나, 무정의 용어만 이용해야 한다.

⑥ 정의는 공리와 모순이 없어야 한다.

⑦ 정의는 가역적[6]이어야 한다.

3) 공리론적 방법의 형식 패턴

지금까지 논리적 체계는 초기 공리들을 이용하고 정리를 더하며 가설을 증명하는 방법으로 확장된다는 것을 알았다. 그와 같은 증명과정을 만든다는 것은 대단히 복잡한 정신활동이다. 때문에 그리스인들은 조직적인 절차를 연구했는데 이 조직적인 절차 속에는 논법을 분석하고 재생하기 위하여 사용되는 어떤 규칙들이 모여 하나의 체계를 만들게 되었고 이것을 논리적 체계라 말한다.

수학에서는 아리스토텔레스가 집대성한 논리를 이용하여 가정을 증명하고, 증명된 정리는 논리적 체계에 들어오게 됨으로써 연역적 구조를 만들게 된다. 이 연역적 구조 속에는 무정의 용어, 정의, 공리, 논리, 증명 등이 있다.

이러한 논리적 체계를 공리론적인 형식 패턴이라고 하는데 그 절차는 다음과 같다.

① 처음 무정의 용어를 가진다.

② 다른 용어는 무정의 용어를 이용하여 정의한다.

③ 증명은 하지 않고 참으로 여기는 공리들을 가진다.

④ 이 속에 있는 다른 진술들은 논리라 하는 절차를 이용하여 공리로부터 유도된다.

⑤ 이렇게 해서 얻은 새 진술을 정리라 한다.

이러한 논리적 체계는 공리군의 일관성과 독립성을 요구하는데 이에 대해 살펴보면 먼저 일관성이란 수학의 필수적인 성질로 공리군들이 서로 모순을 일으키지 않아야 함(무모순성)을 의미한다. 예를 들어보면 어느 한 공리 군에 '원은 둥글다'라는 공리와 '원은 네모 모양이다'라는 또 다른 공리가 존재할 수 없다는 것이다. 어떤 공리군이

6) '교차하는 두 직선이 수직이면, 그들은 직각을 결정한다'라는 합성 문장을 '만일 두 개의 교차하는 직선이 직각을 결정하면, 두 직선을 수직이다'라는 합성 문장으로 바꾸어도 참이다. 이와 같이 합성문장에서 단어 만일(if)을 서로 바꾸어 놓아도 여전히 그 합성 문장이 참이 될 때, 그것을 가역적이라 말한다. 일반적으로 공리, 정리들은 가역적이 될 수 없고 정의만이 가역적이 될 수 있다.

독립이라는 것은 그 공리군에 있는 어떤 공리가 다른 공리로부터 유도되지 않음을 의미한다. 이 독립성은 공리군의 바람직한 성질로 필수적일 필요는 없다. 지금까지 수학의 본질적 요소에 대한 것을 언급하였다.

제 3 절 수학교육의 목표

1. 수학사의 변천 속에서 변화되어온 수학교육관

수학의 본질에 대한 관점이 수학사의 변천과 함께 변화하여 온 것처럼 수학교육관 역시 변화하여 왔다. 본 절에서는 앞 절에서 기술한 바 있는 수학사의 흐름에 따라 변화하여온 수학교육관을 먼저 고찰하여 오늘날 수학교육의 목표는 무엇인지 심도 있게 살펴본다.

1) 이집트 , 바빌로니아, 동양수학

수학을 실생활에 적용되는 객관적이고 고정된 지식의 집합체라 보았으므로 교육목표 역시 실생활의 문제를 체계적으로 풀어 가는 것을 숙달시키는데 있었다. 수학 교실에서 논리적 설득과 증명정신은 없고 다만 지식을 전달하고 학생들은 그 지식을 주입식으로 전달받는 기능중심의 교육이 이뤄졌다.

2) 그리스의 절대적 학문주의 수학교육관

수학의 이론은 고정된 불변의 진리라는 인식 속에서 수학의 본질은 논리성에 있다는 관념을 지녔으므로 절대적 진리를 파악한다는 목표를 위해 수학의 논리를 체계적으로 교육하였다.

수학은 타 교과와 관계가 있고 실제생활에 활용할 수 있다는 유용성과 인간 삶의 광범위한 분야로 활용할 수 있다는 언급이 없어 딱딱하고 지루한 교과적인 모습이 있었으나 절대적인 목표속에 심도있게 논리를 추구하는 진지함이 깊게 서려있었다.

3) 서양 근대 수학의 진보적 학문주의 수학교육관

자연현상 속에서 새롭고 다양한 문제를 발견하고 탐구하여 새로운 수학적 도구와

수학적 이론을 만들고 구성할 수 있으며 수학은 어떤 문제든 해결할 수 있는 지식체계로써 진보적으로 발전할 수 있다고 본다. 수학을 객관적이고 절대적이라는 관점에서 절대적 학문주의 교육관과 기본적으로 같으나 수학의 창조성을 인정한다. 수학은 고정된 지식의 집합체가 아닌 인간의 창조적 활동에 의해 형성된 지식체계로서 위대한 문화적 성취로 본다. 이 교육관은 모든 사람에게 문제를 해결할 수 있는 능력이 있으므로 각 개인의 능력을 찾아내어 계발할 수 있다고 본다.

4) 19, 20세기 이후 구성주의 수학교육관

'수학은 가설'이라는 수학의 정의는 인간의 정신에 의해서 수학의 이론들을 창조하여 자연의 비밀과 사회와 정신세계의 구조를 파악하는데 활용할 수 있는 지식으로 바뀌게 되었다. 수학은 만들어진 수학적 개념들의 관계와 구조를 연구하며 응용하는 과학으로 모든 사람들에게 문제해결 등 현대 생활에서 꼭 필요한 지식이 되었다. 수학은 항상 절대적인 진리가 아니고 어떤 가정과 조건에서 진리인 지식의 체계다. 또한 얼마든지 수학의 개념들을 창안하고 구성할 수 있다고 본다. 이러한 수학관은 학생들 개인의 개성을 존중하는 교육관으로 학생들이 스스로 학습내용과 목표를 인식하고 설정하여 수업에 직접 참여하여 이끌어 가는 능동적 활동과 구성을 통하여 수학적 지식을 배울 수 있다는 수학교육관이다. 수학적 지식은 수동적으로 받아들여지는 것이 아니고 학습자의 능동적이고 의지적으로 추상화하고 창안하여 적용하는 활동으로 얻어진다. 따라서 학습자 스스로 자신의 경험을 조직화해 가는 적응과정을 통해 학습자 스스로가 지식을 구성하고 지식을 발견하여 알게된다는 교육관이다.

5) 현대의 재건주의 수학교육관

'수학은 완전하면서도 불안하다'라는 수학관을 가지고 과거의 수학을 바라보는 교육관으로 수학은 하나의 건축물처럼 이론적 구조물로 창조되며, 이론적 모순이 있을 때 다시 재구성하여서 완전하게 만들 수 있으나 전체적으로 완전한 이론은 없다는 교육관이다. 재건주의 수학교육관은 지금까지 발전되어 온 모든 수학교육관의 장점을 취하고 단점을 보완하는 교육관이다. 수학은 형식화된 명제의 체계라기보다는 형식화를 행하는 인간의 활동 그 자체라고 하는 견해가 많다. 이런 관점에서 오늘날에도 전통

적 실제주의, 절대적 학문주의, 진보적 학문주의, 구설주의 수학교육관의 장점들이 필요하다.

교사는 단순히 지식의 전달자가 아니고 학습의 안내자로써 학생들이 스스로 학습목표를 설정할 수 있도록 하여 능동적이고 자발적인 협동으로 수학적 활동 즉 추측하고 논리적으로 추론하여 자신의 생각으로 설명하고 정당화하며 비판적으로 검토하는 과정을 통하여 개념의 구조와 관계 등을 파악하며, 학생들의 인지적 구조변화를 유도하도록 한다.

6) 미래의 인간중심주의 수학교육관

세계화와 정보화 시대는 과거의 산업사회와는 달리 지식의 양이 폭발적으로 증가하며 사회의 변화가 다양하게 되어서 여기에 적응하여 살아갈 자율적이고 창의적인 인간을 기르기 위해 수학 교육의 필요성이 절실하다. 미래교육은 구성주의적 교육관을 바탕으로 하고있되 고도의 수학적 지식이 요구되는 첨단 분야가 많은 오늘날의 현실을 고려하여 좀더 전문성을 띄는 경향이 있다.

2. 수학교육에 대한 종합적 고찰

수학의 역사 속에서 변천되어온 수학교육관을 요약해보면 초기에는 실용적 목적을 위해, 그리스 시대에 와서는 절대적 진리추구의 목적을 위해 교육되었고, 근대에 와서는 절대적 진리 추구의 체제속에서 개개인의 수학적 창조성을 살리는 교육이 이뤄졌다. 그러다 수학이 절대적 진리라는 인식이 무너진 19세기 이후의 수학은 인간의 사고 속에서 창출되어 사회와 자연을 구조적으로 파악하고, 실생활의 모든 분야에서 활용할 수 있는 사고의 방법으로 좀더 자유로우면서도 광범위한 목적을 지니고 교육되게 되었다.

지금까지의 수학교육관을 종합적으로 살펴볼 때 수학교육은 인간이 사고하는 방법(예를 들어 귀납, 연역, 유추 등) 서로 수학적인 언어로 대화하는 방법, 수학을 학습하는 방법 등을 다룬다고 볼 수 있다. 따라서 수학에서 이뤄지는 사고는 원래 인간이 가지고 있는 사고활동과 크게 차이나는 것이 아니 여서, 인지 심리학자들은 인간의

사고과정을 수학적 사고의 모델로 하여 탐구하는데 주저하지 않는다. 즉 수학교육을 연구하기 위해 수학, 인지심리학, 철학 등과 연결을 맺는 것을 자연스러운 일로 받아들여진다.

이런 측면에서 오늘날의 수학교육의 가장 중요한 목표는 단지 수학적 지식을 획득하는 것이 아니라 수학적으로 사고하는 능력을 계발하는 것이라고 할 수 있으며 이러한 수학적 사고는 다른 분야로 다양하게 응용된다.

제 4 절 수학적 사고에 대한 이론 고찰

1. 수학적 사고[7)]

수학적 사고는 수학에서 지도되는 수학 내용 그 자체에만 관련된 것이 아니라 이들 수학 내용을 이해하고, 지식으로 획득하는 과정에서 행하여지는 수학적인 활동과 깊은 관련이 있다고 하겠다. 지금까지 수학적 사고에 대한 연구는 많으나 이를 명쾌하게 정의한 것은 찾기가 힘들다. 이는 수학적 사고란 매우 복합적이고 포괄적인 것으로서 그 실체를 확인하기 어렵기 때문이다.

박한식(1982)은 수학적 사고를 수학 내용 그 자체에서의 사고와 수학 내용을 매체로 하여 개별적인 내용에 구애되지 않는 사고의 두 가지로 나누고 있다. 수학의 내용적 측면에서 본 수학적 사고란 '수학에 관한 사고'로써 사고작용의 측면이라기보다는 수학적 대상에 관한 것으로 초등학교의 경우 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 문자와 식, 규칙성과 함수의 6개 영역으로 구성되어 있다. 그러나 수학에 관한 사고는 그 내용에 대한 사고만으로는 수학을 창조해 나가는 원동력으로서 부족하므로 수학 내용을 매체로 하여 사고 작용적 측면에서 본 수학적 사고는 체계·논리적 사고, 추상화의 생각, 일반화의 생각, 연역적 사고와 귀납적 사고, 유추적 사고 등 7가지로 나

7) 남승인, 수학적 사고력 신장을 위한 규칙성 영역의 학습자료 개발, 대구교육 대학의 과학 수학 교육 연구 제 23집에서 발췌한 내용임

누고 있다.

한편 수학적 사고란 '유클리드 "원론"처럼 공리로부터 체계적이고 논리적으로 모순이 없는 일련의 전제를 도출해 내기 위해 어떤 수학자가 수학적 대상에 대해 악전고투하고 있을 때에 일어나는 심리적인 현상 내지는 수학활동'을 수학적 사고로 보고 있다. 이렇게 볼 때 수학적인 사고 방법은 수학자 수만큼 있다고 말할 수도 있으나, 이들이 공통적인 사고 방식을 다음의 6가지 -・혼돈한 상황을 정리해서 공식화하기, ・내관하기(전체로서 보기, 직관과 언어로 표현할 수 없는 것을 포함), ・단순화하기, ・기호화(수량화, 표현화 포함)하기, ・유추, 귀납, 연역, 일반화하기, ・논리적 분석과 체계화하기 - 로 나누고, 수학적 사고는 활동적・실천적인 것으로써 종합적・체계적으로밖에 파악할 수 없는 것이므로 수학적 사고력을 기르기 위해서는 학생들이 수학자의 입장에서 기존의 지식과 경험을 총체적으로 활용하여 해결해 볼 수 있는 문제를 제공할 것을 권고하고 있다. 또 강시중(1981)은 수학적 사고란 '대상을 수학적으로 보고 생각하며, 수학을 만들고 다듬어 가는데 근원이 되는 생각'이라고 보고 수학적 사고를 다음의 3가지 관점으로 나누고 있다. ① 수학교육의 목표면 에서 생각되는 수학적 사고로써 ・자주적으로 수리화 하는 일,・수리화를 통한 수학의 기초적인 개념・원리・법칙을 이해하는 일,・대상을 간결・명확・통합적으로 처리하는 일, ・논리적으로 사고하는 기능과 태도를 기르는 일, ・대상을 합리적으로 처리하는 기능을 기르는 일. ② 수학의 특성 면에서 ・추상화,・형식화,・일반화,・특수화,・계통화,・직관선,・논리성을 들고 있으며, 수학적 방법면에서 ・귀납적 사고,・연역적 사고,・유추적 사고,・공리론적 방법,・구조화의 방법,・확장적 사고 등을 들고 있다. 또 ③ 수학의 내용면에서 생각하는 수학적 사고로는 초등학교의 경우 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 문자와 식, 규칙성과 함수 등 6개 영역에서 본 사고를 내용면에서의 사고로 생각하고 있다.

이렇게 수학적 사고는 '수학을 만들고 다듬어 가는데 근본이 되는 생각'임을 알 수 있으나 학자들의 분류 관점에 따라 다양하게 분류하고 있다. 그렇다면 이러한 수학적 사고의 구조를 앞절의 수학의 본질을 토대로 좀더 자세히 살펴보도록 한다.

2. 수학적 사고 구조

수학적 사고구조는 수학이라는 학문의 특성에 맞게 즉 순수하게 수학이라는 학문의 형성과 발전에 밑바탕이 되는 학문적 체계의 사고 구조(내용적 특성으로 분류한 사고 구조)가 있으며, 위에서 언급한대로 인간의 사고구조가 수학적 사고구조와 별 다를 것이 없는 점을 - 수학적 사고구조 역시 인간의 보편적 사고의 구조 속에서 창출된 것이므로- 감안할 때 인간의 사고구조 중 논리적이고 합리적인 구조의 발달의 총체가 다름 아닌 수학적 사고의 구조라 보는 수학의 통합적 사고구조(방법적 특성으로 나눈 사고구조)가 있다.

1) 수학적 사고구조의 형성

앞 절에서 그리스의 수학에서는 추상이라는 도구를 이용하여 수학의 개념들을 만들어 냈다고 언급한 바 있다. 여기에서 보면 불필요한 성질들은 모두 제거되는 과정을 밟고, 논리적으로 또한 의미적으로 가치가 있는 것만을 언어로 규정하는데 이것을 추상화라 하며 추상화 작업은 현대 수학을 만드는 중요한 성격이다.

다음은 구조(structure)에 대해 논하여 본다. 앞에서 예를 든 것을 이해를 위해 다시 언급하면, 예를 들어 6+7=1 또는 6+7=13은 어떤 진리표준을 택하느냐에 따라 참이다. 따라서 두 산술의 차이가 무엇인가가 중요한 관점이다. 시계산술에서는 유한집합에서 이뤄지고, 일반산술에서는 무한집합에서 이뤄진다는 것이 큰 차이점이다. 여기서 우리는 가 조직에서 중요한 한가지 법칙(rule)을 발견할 수 있다.

즉, $a + b = b + a$

이와 같이, 두 조직에서 여러 추상적인 법칙을 발견해 갈 수 있고, 이러한 법칙들이 모여서 그 조직 전체를 완전히 성격화했을 때, 이들 법칙들의 모임을 추상적인 구조라 한다. 예를 들어, 해석학에서 읽을 수 있는 실수에 관한 성질을 모은 완비순서체는 수학의 구조를 설명하는 예이다.

수학자들이 수학을 만들어 갔던 과정에서 사용했던 사고의 흐름을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

수학적 사고 구조

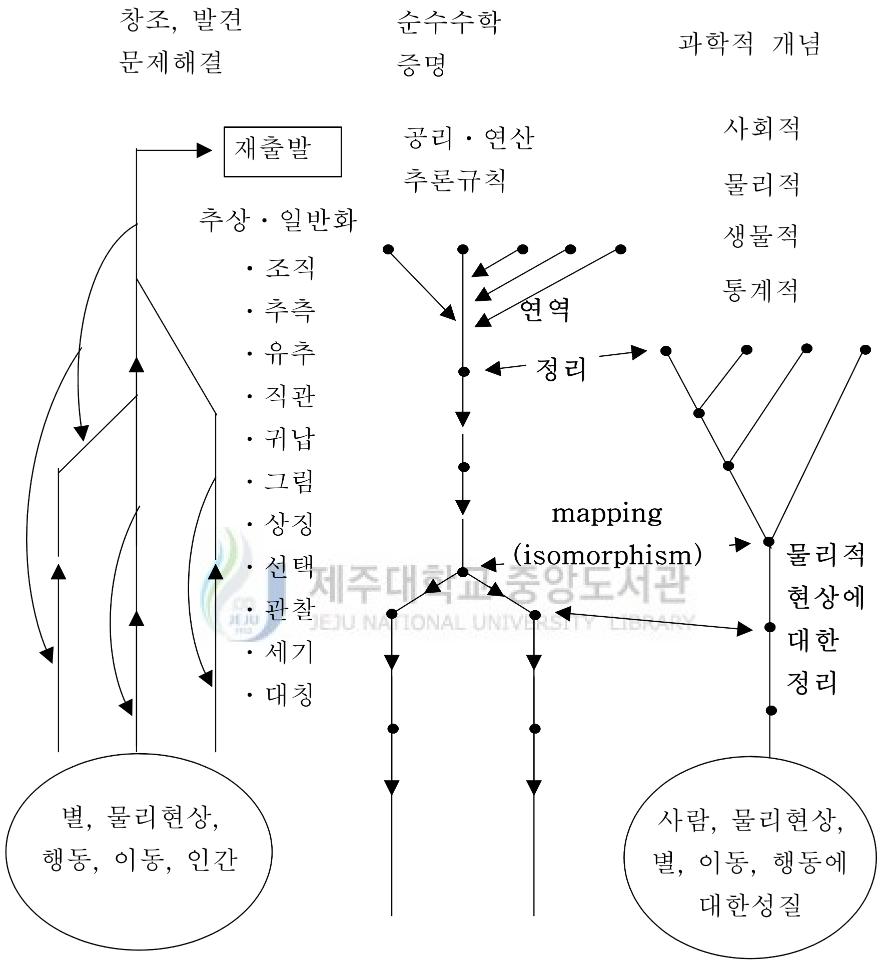


그림 1 수학적 사고 구조

이 그림에서 두 가지 관점이 제시되는데, 하나는 만들어지는 수학(수학화)에서는 실험적이면서 귀납적이라는 것이고 아직 규칙(정리)을 모르는 상태가 지속된다는 것이다. 다른 하나는 엄격한 증명구조를 도입하여 만들어진 수학은 연역적이고, 추상적이고, 구조적이라는 사실이다.

이러한 수학적 사고는 수학의 내용적 특성(예, 평균값 정리, 적분에 관한 기본정리 등)과 방법적 특성(예, 발견적 지도 등)에서 찾으려하는데 수학교육에서는 후자가 더 강조된다. 그 이유는 수학의 내용적 특성에서 수학적 사고를 찾는 노력은 수학 그 자체의 학문의 발달을 위한 사고나 기타 다른 학문에서 학문적 응용 -예를 들면 미적분의 활용으로 인한 기술의 발달 등-을 하기 위한 것이나 방법적 특성에서는 인간의 생활에서 접하는 문제를 이해하고 해결하려는 데 가장 적절한 수단으로 활용될 수 있는 사고의 구조가 담겨있기 때문이다.

2) 수학적 사고의 구성 요소

이제, 내용적 특성과 방법적 특성에 대한 분류를 좀더 자세히 살펴보도록 한다. 내용적 특성에 대해서는 Haecker과 Ziehen(1976)의 분류와 방법적 특성에 대해서는 Charles(1985) 및 한국교육개발원(1989)의 분류에 대해 살펴본다. Charlse는 수학적 사고는 사고과정, 지식, 신념, 태도 등 4가지로 구성되었다고 보고 있으며, 한국교육개발원에서는 차알스와 버어튼의 연구결과를 참고하여 수학적 사고구성요소를 수학적 지식, 발견적 전략, 조정, 수학적 성향 등 4가지로 분류하고 있다.

표 1 내용적 특성을 고려한 수학적 사고의 구성성분

공간적 성분		논리적 성분
도형 및 그들의 복합체에 대한 이해 공간적 개념의 이해 (공간적 표상) 공간적 개념을 추상화하기 공간적 대상 사이의 관련성에 대한 이해와 발견하기		개념의 구성과 개념적 추상화 개념 사이의 관련성을 이해, 기억, 발견하기 형식적 논리 규칙에 따른 증명에 대한 이해, 기억하고 독자적으로 증명하기

수적 성분		기호적 성분
수 개념 형성 수와 계산 방법의 기억		기호의 이해와 기억 기호조각(연산하기)

표2 방법적 특성을 고려한 수학적 사고 구성성분(차알스의 분류)

지 식

수학적 지식 및 문제해결에 영향을 끼치는 기존의 지식 예) 수학적 내용, 문제해결 전략,

↓

태 도 →

예)
기꺼이 하려는 태도
동기유발
자아개념

사 고 과 정

생산적 과정 : 개념, 규칙, 보기등과 같은 정보를 표상하고 작용하는 심적 절차 예) 귀납적, 연역적 사고의 이용, 가설 설정(확산적 사고), 상황의 심리적 표상화

자아조절 과정: 생산과정의 선택과 이용을 조절, 평가, 지시하는데 이용되는 심적 절차 예) 계획의 유용성 평가, 개연적 접근방법 확인 비판적으로 대안 비교

← **신 념**

예)
수학에 대한 신념
자기능력에 대한 신념
교사의 기대감에 대한 신념

표3 방법적 특성을 고려한 수학적 사고 구성성분(한국교육개발원분류)[8)]

지 식

수학적 지식 및 문제해결에 영향을 끼치는 기존지식 예) 수학적 내용(알고리즘 포함) 수학적 상황에 영향을 미치는 지식, 문제해결 전략,수학적 용어나 기호

↓

조 정 →

문제 해결의 전반적인 과정을 점검하고 조감하는 것과 올바른 접근 방법을 선택하는것

발 견 적 전 략

특수전략 : 문제해결에 도움을 주는 기술로써 경험에서 나오는 규칙
예) 유추, 일반화, 특수화, 보조문제이용, 거꾸로 풀기 등

일반전략 : Polya의 문제해결의 일반적인 전략
예) 문제의 이해, 해결계획 수립, 계획의 실행 - 반성

← **수학적 성향**

개인의 태도 및 행위를 좌우하는 일반적인 작용으로 특별히 어떤 방식으로 행동하려는 습관적 경향 예)창의적 논리적 성향

---

8) 강옥기, 수학적 사고력 신장 프로그램 개발을 위한 방안 탐색, 한국교육개발원, 연구자료 RM 89-11,1989

방법적 특성에 대한 charles의 분류와 한국교육개발원의 분류의 차이점을 살펴보면, 한국교육개발원에서는 차알스가 분류한 태도, 신념을 묶어서 정의적 영역인 수학적 성향에 통합하였고, 문제 해결과정에서 이뤄지는 심적 절차인 메타인지적 사고와 자아조절과정 등을 통합하여 '조정'이라는 요소로 취급하였으며, 차알스가 분류한 요소인 광의의 사고 과정을 문제해결 전략에 초점을 둔 '발견적 전략'으로 국한하여 다루고 있다.

한편, 초・중학생들 대상으로 수학적 사고 방법에 관한 연구를 통해서 수학적 사고 방법의 특징을 수학적 사고를 갖게 하는 배경이 되는 사고방법과 수학의 흐름을 형성하는 사고 방법으로 나눈 예도 있다.

* 수학적 사고를 갖게 하는 배경이 되는 사고 방법

① 자주적으로 행동하게 한다 :・대상에 대해 의문을 가지고 보게 한다.・문제 의식을 갖게 한다.・일상생활에서 수학을 사용하게 한다.

② 합리적으로 행동하게 한다 :・행동의 목적을 분명히 한다.・부분이 아닌 전체적인 관점에서 행동한다.・정확하게 판단한다.・사용되는 재료가 무엇인지 파악한다.

③ 내용을 명확・간결하게 표현하도록 한다 :・내용을 명확・간결하게 기록・전달한다.・다른 내용과의 관계를 파악한다.・내용을 조리있게 분류・정리한다.

④ 사고와 노력을 절약하게 한다 :・사고를 대상적(구체적) 사고에서부터 조작적(정신적)사고로 전환시킨다.・자기의 사고와 다른 사람의 사고 및 그 결과를 비교・분석하여 자기의 사고를 보다 세련되게 한다.

* 수학의 흐름을 형성하는 사고 방법

①수학적 목적에 따른 사고 방법: ・귀납적 사고.・유추적 사고,・축차근사적 사고,・연역적 사고,・통합적 사고,・확장적 사고, ・공리적 사고.

②수학적 대상에 대한 사고 방법:・추상화, ・수량화와 도형화,・기호화,・이상화,・단순화,・일반화,・특수화,・형식화.

③수학내용에 따른 사고:・수와 연산에 대한 사고,・도형에 대한 사고,・문자와 식에 대한 사고,・규칙성과 함수에 대한 사고,・측정에 대한 사고,・확률과 통계에 대한 사고로 나누고 있다.

3. 통합적 사고로 연장되는 수학적 사고

현대 수학에서 수학이 모든 학문에 적용이 가능하다는 것은 앞서 기술한바 이미 밝혀져 있으며 이것은 위의 수학적 사고가 모든 인간의 논리적이고 과학적인 사고활동의 근본원리가 되기 때문이다. 그러나 수학을 익히는 학습자들은 수학을 다른 제반 사항의 문제를 푸는데 이러한 수학적 사고의 원리를 제대로 적용시키지 못하고 있다. 특히 현재 우리나라의 학교교육의 현실은 수학적 지식의 전달에만 너무 치중하여 이러한 수학의 다양성과 수학적 사고로 여러 가지 생활이나 학문적인 문제들을 해결해가는 응용력을 기르지 못하고 있다. 더욱이 입시를 목표로 하는 수학교육으로 인해 학생들의 사고는 한쪽으로 너무 치중되어 시야가 넓고 다양하지 못하다.

본고에서 말하는 통합적 사고란 수학을 수적 계산의 학문으로 인식하는 편협한 사고를 지양하고 수학적 사고를 보다 넓은 분야로 연결 할 수 있는 다양한 응용적 사고를 의미한다.

제 3 장 수학사를 도입한 수학교육

앞장에서는 수학역사의 고찰을 통해 수학의 본질을 규명해보고 이에 따른 수학교육의 목적을 고찰하여 그 목적의 가장 중요한 사항이 바로 수학적 사고능력을 신장시켜 합리적인 인간을 양성하는데 있음을 알았다. 이를 위해 수학적 사고를 통합적 사고로 발전시키는 방안이 필요한데 그중 하나는 바로 수학사에 대한 교육을 활성화시키는 것이다. 본 장에서는 이러한 수학사 교육의 유용성을 알아보고 특별히 수학사의 어떤 부분이 통합적 사고를 양성하는데 유용한지 고찰해 본다.

제 1 절 수학사 교육의 유용성

1. 동기 유발

수학의 역사적 발달과정을 되돌아봄으로써 수학적 사고의 인간적인 모습과 수학의 진정한 모습을 접해 보게 하여, 학습동기를 유발하고 수학학습에 생기를 불어넣을 방안을 찾을 수 있다. 그리고 수업에서 학생들의 주의를 집중시키고 수업에 변화를 주는 방법으로 사용 될 수 있다.

수학의 역사를 살펴보면 수학자들에게 수학은 우연히 알려진 사실들의 완벽한 체계가 아니고 날마다 새로워지는 가설적인 이론이며 완벽으로 가는 도중에 있는 이론이기에 바로 지금의 수학 수업에서 새로워질 수도 있음을 인식시켜 수학의 발전성에 참여할 수 있는 기회를 줄 수 있다. 앞장의 수학의 역사를 고찰함으로써 이러한 점을 확인할 수 있었다. 또한 그 속에서 수학이 갖고 있는 인간적인 측면, 즉 수학이란 학문이 오랜 세월을 거쳐 수많은 시행착오를 통해 오늘날의 수학이 이뤄졌고 그 발전의 내면에는 많은 수학자들의 노력과 고뇌가 점철되어 있음을 인식할 수 있었다. 수학사의 교육은 학생들에게 이러한 수학의 진정한 모습을 이해시켜 학문적 가치를 느끼게 하고 나아가 이러한 가치 속에서 수학에 대한 매력을 고취시킬 수 있는 것이다.

2. 수학의 형성과정에 대한 이해

수학사는 학생들로 하여금 하나의 수학적 원리들이 어떻게 형성되게 되었는지 알게 함으로써 즉 개념 발생의 동기를 알려주어 수학에 대한 깊은 이해를 증진시킨다. 예를 들어 무리수의 개념을 설명할 때 피타고라스 학파가 어떻게 무리수를 발견하게 되었는지 알려주면서 그 개념을 인식시키면 훨씬 이해를 도울 수 있다. 사실 무리수의 개념이 확립되기까지는 피타고라스의 문제발견에서 데데킨트까지 무려 23세기가 넘는 기나긴 세월이 흘렀다는 엄연한 역사의 사실을 감안하더라도 피타고라스 정리를 언급한 후에, 선분의 길이 중에는 자연수나 분수로 표현되지 않는 것이 있다는 사실을 보여주고 나서 이것도 수로 취급할 필요가 있다는 것을 인식시키면서 무리수라는 개념을 도입한다면 학생들이 무리수라는 개념 속에 담겨있는 깊은 수학적 의미까지 파악하게 될 것이다.

원래 수학은 인간이 자연을 이해하려는 노력에서 싹튼 것이니 수학에서 어떤 개념을 새로 도입할 때는 학생들에게 그것의 필요성을 느끼게 하는 적절한 동기를 주는 예를 들어줌으로써 내용의 이해를 도울 뿐 아니라 수학의 역할과 중요성을 인식할 수 있다. 이러한 점에 있어 수학사의 교육은 많은 유용성을 지니고 있다 하겠다.

3. 실생활과의 관계에 대한 이해

수학사는 수학과 실세계와의 관계에 대한 이해를 돕는다. 수학의 역사에서 발견되는 여러 가지 사실들은 실세계에 존재하는 여러 가지 원리들이 수학과 어떤 관련이 있는가를 이해하는데 도움을 준다. 따라서 수학이 어떤 편협한 과목이라기 보다는 일반적인 성격이 강하며 그 적용범위가 매우 광범위한 기초과학 과목이라는 폭넓은 이해를 갖는데 도움이 된다.

예를 들어 아리스토텔레스의 이론이 응용수학으로 발달하면서 여러 공학 분야에 영향을 준 사실이나 실질적인 필요에 의해 생긴 여러 가지 진법이 라이프니츠의 지적호기심에 의해 2진법을 생각해내고 이것이 오늘날 컴퓨터 발전에 직접적인 근거가 되었고 정보이론과 데이터 프로세싱 등에 훌륭한 배경을 만들어 준 것 등이 그 예이다.

또한 순수이론으로서의 수학은 다른 사람의 손에서 열려지지 않은 물리적 현상, 사회적인 현상, 경제적인 현상 등을 발견하는데 꼭 필요한 학문이 되고 있음을 인식할 수 있게 된다.

4. 논리적인 통찰력과 오류에 대한 대처 방법 제공

수학사는 수학의 구조, 공리론적 체계, 증명 등의 이해를 도와준다. 우리는 앞장에서의 수학역사의 고찰을 통해 이러한 점을 인식할 수 있었다. 수학의 구조의 성립과정, 공리론적 체계의 형성과정, 여러 수학자들의 증명으로의 수학적 문제 해결 과정을 보면서 사고의 흐름을 배울 수 있게 된다.

하나의 수학적 명제가 성립되기까지의 수많은 수학자들의 주도면밀한 논리적 증명의 노력들을 보면서 그 치밀성과 통찰력을 배우게 되는 것이다. 또한 여기서 오류에 대한 대처 방법도 배우게 되는데 학생들이 수학수업에서 오류를 범하거나 이해하는데 곤란을 겪은 것에 대해 민감하고 적절하게 대처할 수 있는 방법을 수학사에서 수학자들이 기존의 수학적 명제의 오류를 밝혀 타개해 가는 모습에서 그 사고의 실마리와 정신을 배울 수 있다. 역사적 흐름을 통하여 이 수학적 주제를 막았던 지적 장애물들이 오늘날의 학생의 이해도 가로막을 수 있기에 수학사의 교육은 학생들의 오류적 사고를 풀어서 깨닫게 해 준다.[9]

제 2 절 통합적 사고를 열어주는 수학사 교육

앞 절의 내용만 살펴보더라도 수학사의 교육이 학생들의 통합적 사고력을 기르는데 많은 유용성을 지니고 있음을 인식할 수 있을 것이다. 그러나 서두에서 언급했듯이 수학사의 교육이 단지 또 하나의 지식 습득의 교육으로 끝나버린다면 그것은 오히려 학생들에게 부담만을 안겨줄 뿐이다. 수학사 속에 내재되어 있는 여러 가지 다양한 배움의 가치들을 인식시켜주어야 되는데 그러기 위해서는 수학사 속에서 발견되는 여

9) 정귀연, 수학사를 도입한 수학 학습지도, 인제대학교 교육 대학원 석사학위 논문, 2002, P11

러 가지 학문적 양상들을 학생들이 이해하기 쉽고 또한 깊게 사고해 볼 수 있도록 해주어야 한다. 이러한 것들을 해결하기 위해서는 수학사 교육의 방향 역시 지식중심의 교육이 아니고 사고 중심의 교육이 되어야 한다. 즉 수학사를 통해 더욱 깊고 다양하게 사고할 수 있는 통합적 사고의 맥락을 잡아주어야 한다.

이러한 취지에서 수학사를 통해 교육할 수 있는 통합적 사고의 양상을 고찰해보고자 하는데 수학의 역사를 통해 드러나는 인간의 사고는 크게 존재론적인 근원적 사고와 창조적인 응용적 사고로 나눌 수 있다. 존재론적 사고는 그리스 시대의 수학은 우주를 설명하는 절대적 진리라는 생각에서 출발한 철학적 사고에서 그 원류를 찾아볼 수 있으며 응용적 사고는 아르키메데스의 수학적 원리로부터 구현한 여러 발명품들에서 그 원류를 찾아볼 수 있다. 이제 이러한 점들에 대해 좀더 자세히 알아본다.

1. 수학사 속의 존재론적 근원사고

수학 속에 담겨있는 존재론적 사고는 수학과 함께 발달해온 철학의 역사를 통해 알 수 있다. 수학사를 통해 수학의 발달과정을 살펴보면 수학과 철학이 서로 긴밀한 영향을 주고받으며 발달해 온 것을 알 수 있게 된다. 예를 들어 수학이 절대 진리라는 생각을 가지고 수학적 사고를 중심으로 만물의 근본 법칙을 알아내려고 한 것이라든지 뉴우튼과 라이프니쯔의 미분에서 무한소 문제에 관한 형이상학적 고찰, 또 각종 수리철학의 발달 등은 모두 수학과 철학이 서로 영향을 주고받으며 형성됨을 말하고 있는 것이다.

수학이 이렇게 철학과 긴밀한 관계를 가지며 발달할 수 있었던 것은 하나의 새로운 수학이 탄생하는 과정에서 새로운 개념을 설정하기 위한 고도의 사색이 필요한데 이때 철학적 사유의 과정을 거치게 되기 때문이며 또한 새로이 성립된 수학에 의해 철학 역시 많은 변화를 겪는다.

이러한 양상들을 자세히 알아보기 위해 우선 플라톤의 철학적 사유의 방식을 살펴본다. 플라톤의 철학은 이데아의 회상론과 동굴의 우화로 표현될 수 있는데 그는 물질적 세계는 변하는 것이고, 반면에 그리스시대의 기하학은 수학적 대상의 영원하고

불변함으로부터 일어나기 때문에 존재추구의 절대적 기준이 된다. 그는 자신의 영혼을 변하는 것으로부터 실재로 끌어올리기 위해 수학을 연구해야 했다. 수학의 예를 들어 불변의 실재의 존재를 주장한 플라톤의 철학은 그 후 유태교, 기독교, 이슬람교의 고도로 수학화된 우주관으로, 그리고 18-19세기의 생물학에서의 종의 불변성에 대한 논쟁으로 이어진다.[10]

수학과 철학의 긴밀한 관계를 보여주는 또 하나의 예로써 고찰해 볼만한 것은 집합론에서 대두된 무한의 개념이다. 한마디로 말해 집합론은 무한의 수학이라 명명할 수 있는데 그것은 집합론에서 대두된 무한이라는 개념의 파장 결과가 그만큼 큰 것이었기에 그러한 것이다. 희랍이래 「無限」은 神의 영역으로 여겨져 왔다. 그러나 이 신의 영역은 인간에게 그 존재만이 알려져 왔다. 수학이 대상으로 하는 가장 단순한 수의 모임인 자연수 1, 2, 3…은 무한집합이고 음의 방향으로 뻗는 수도 무한인데, 이렇게 항상 부딪히는 대상의 본질의 하나인 무한을 인간은 수학을 통해 교묘하게 파헤쳐 왔다.[11]

천재 수학자 가우스는 무한의 개념을 인식으로 비롯한 비유클리드 기하학의 발견을 끝내 발표하지 않았는데 그것은 유한의 세계의 질서에 익숙한 사람들이 무한의 새로운 개념을 받아들일 때 일어나는 혼란을 걱정하였기 때문으로 알려져 있다. 이처럼 무한의 파장은 큰 것이었다. 가우스의 이러한 우려 속에서도 무한의 개념은 대표적인 수학적 논쟁으로 일어나 궁극적으로 무한대 무한소 등의 문제로 발전하였다.

철학자인 니체는 짜라투스트라의 입을 통하여 '만일 신이 존재하는 것이라면 인간은 기어이 신이 되고 말 것이다. 그러므로 신은 있을 수 없다'라고 말하며 신의 죽음을 말하였는데 이러한 니체의 사상은 다름 아닌 수학에서의 무한의 대두로 인하여 역설된 것이다.

이렇게 무한의 수학을 철학으로 발전시킨 동서의 철학자들을 살펴보면 조금씩 다른 양상을 보인다.

「零」을 발견하고 무한의 철학을 즐긴 인도 민족은 바스카라라는 천재적인 수학자

10) 신영미, 수학사와 수학교육, 서울대학교 수학교육과 석사학위 논문p19-20
11) 김운용, 수학의 철학적 사유, 대한 수학회 연차대회에서 발표한 논문 1983 pp25

를 낳았다. 그는 '분모가 영인 수 A/0, 즉 무한은 어떠한 수의 삭감에 의해서도 그 값은 변하지 않는다. 마찬가지로 수많은 세계가 나타나고 사라져가도 또 생물이 죽고, 새로이 탄생하여도 절대적이고 불변인 神, 그 자체에는 변화가 없다'고 말하여 수학사상 처음으로 무한을 인식하는 것이 신에게 도전하는 것이라는 인식을 바꾸고 무한을 인식함으로써 오히려 신의 불변성을 깊이 알 수 있다는 무한에 대한 긍정적 관념을 나타내었다.

한편, 기독교 철학자였던 파스칼은 경건한 태도로 무한과 신의 관계를 생각했다. '수는 무한히 존재한다. 어떤 큰 수에 대해서도 그보다도 더 큰 수가 존재한다. 궁극적으로 무한수의 존재는 생각할 수 있되 그 본질은 알 수 없다' 라는 것이 그의 생각이었다. 그도 또한 무한을 신의 존재의 문제에 연결하여 생각한 것이다.

이러한 무한에 대한 관념은 고대와 근대 수학의 성격의 차이를 일으키는 가장 근본적 요소가 되었는데 고대의 수학은 세계가 유한의 부분적인 연장, 또는 그들의 결합이라 생각하였기 때문에 모든 것을 한계를 전제로 이해하는 유한의 존재론으로 인식하였고 근대에 와서는 존재를 모두 무한의 입장에서 이해한다는 무한의 존재론에 입각하여 모든 것을 인식하니 고대와 근대 수학의 성격은 많은 차이를 나타내고 이러한 수학관은 단순한 수학적 기교의 문제가 아니라 개인의 존재론적 문제로부터 인생관, 세계관까지 영향을 미치지 않을 수 없는 것이다.

고대의 세계관이 유한이므로 그것에는 중심이 있고 상하의 계층을 생각할 수 있었다. 그러나 무한을 전제로 할 때 그러한 것은 일체 무의미해진다. 무한에서의 어떠한 존재는 무한의 구성요소의 관계 속에서만 인식될 뿐이다. 예를 들어 점의 정의를 유클리드 기하학에서는 '점은 크기다 없다' 라고 규정하였으나 근대에 와서는 무한소의 개념이 발생하여 점의 크기는 한없이 작아질 수 있으니 점에 대한 정의를 크기로써 규정하는 것은 너무나 모순된 것이다. 그러므로 근대에 와서는 '점은 공간에서 자신의 위치를 갖는 것' 으로 정의한다.

지금까지 수학 속에 내재되어 있는 존재론적 사고에 대한 고찰을 하였다. 다음은 수학사 속에서 찾을 수 있는 창조적인 응용적 사고에 대해 살펴본다.

2. 수학사 속의 창조적인 응용사고

수학사 속에 담겨있는 창조적인 응용사고는 수학과 함께 발달한 자연과학의 발달의 역사를 통해 살펴볼 수 있다. 수학을 통한 자연과학의 발달의 원류는 아르키메데스의 응용수학으로부터 찾아볼 수 있는데 '아르키메데스의 원리'라 불리 우는 액체 속의 물의 중량감소에 관한 법칙은 유체정역학을 창설했으며, 지레에 관한 그의 이론은 정역학에의 길을 연 것은 앞장에서도 기술한 바가 있다. 그는 이러한 수학을 통한 응용적 사고로 투석기, 적의 군함을 걸어 올려서 파괴하는 갈고리 등의 교묘한 기계들을 개발하였고, 그리스 수학정신에 충실하여 기계의 발명에 가치를 두기보다는 지레 등을 취급할 때도 실제의 응용보다는 그것의 일반원리의 연구에 훨씬 더 관심을 가졌다. 아르키메데스의 이러한 수학의 응용은 뉴우튼의 역학으로 이어졌으며 그 후에도 수학을 이용한 각종 과학의 발달은 활발하게 이뤄졌다. 수학이 응용된 과학이나 발명의 예를 좀더 들어보면서 수학의 원리가 응용된 사고의 흔적들을 살펴보면 다음과 같다.

< 매듭의 연구를 통한 물리 화학적 성과>[12]

1880년, 물리학자들은 공간을 꽉 채우고 있는 에테르라는 물질이 빛을 전달한다고 믿었다. 원자는 단순히 에테르로 만들어진 꼬여진 매듭이라고 추측했으며, 다른 매듭에는 다른 원소가 대응된다고 생각했다. 매듭에 관한 수학자의 관점을 설명하자면 다음과 같다. 노끈을 꼬아서 양끝이 만나도록 붙여서 매듭을 만들어보면 다음과 같은 네 가지 형태가 나온다.

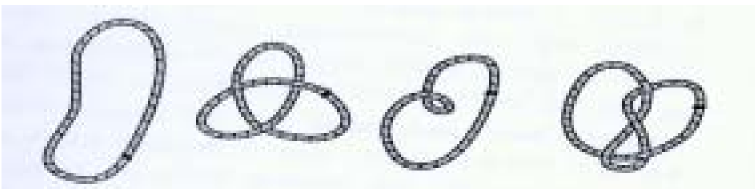


그림 2 매듭의 종류

12) Shermark.stein, 생활속의 수학 , 교우사 ,2000, p72-74

전혀 꼬이지 않은 왼쪽의 매듭은 “풀린 매듭”이라고 한다. 두 번째 매듭은 그 끈을 아무리 어떻게 해 보아도 풀리지 않는다. 실제로 이것은 풀린 매듭과는 다르다.

얼핏보면, 세 번째 매듭은 꼬인 것처럼 보이지만 약간만 당기면 풀려서, 꼬인 듯이 보이는 풀린 매듭이라는 것을 알 수 있다. 네 번째 그림은 풀 수 없는 또 다른 매듭을 보여준다. 이것은 두 번째와는 완전히 다른 매듭이라는 것을 알 수 있다.

아인슈타인이 에테르에 대한 연구가 필요 없다는 것을 보여준 후에도 수학자들은 연구를 계속했다. 그들이 품었던 기본적인 의문은 ‘두개의 매듭그림이 있을 때, 그 두 매듭이 정말로 같은 매듭인지 어떻게 알 수 있을까?’ 였는데 1세기에 걸친 복잡한 대수적인 방법으로 몇 가지 확실한 경우의 의문은 풀렸지만 이를 알 수 있는 일반적인 과정은 아직 모른다.

매듭이론은 실제로 사용될 것과는 거리가 먼 이론이었다. 그런데 1980년대에 이르러서야 이 이론이 DNA분자의 화학적 성질을 알아내는데 도움이 되는 것으로 밝혀졌다. 우리가 보통 나선계단이나 소용돌이 모양이라고 생각하는 이런 분자는 종종 꼬인 매듭의 모양으로 뒤틀려 있다. 매듭이론은 이런 형태의 DNA의 성질을 분석하는데 도움을 주었으며 최근에 통계역학에도 응용되고 있다.

위의 매듭의 예외에도 19세기 수학의 한 분야로 받아들여진 복소수는 교류를 분석하는 완벽한 도구로 사용되고 있고, 19세기에 소개되었던 기하학의 한 형태는 20세기 초반 아인슈타인이 그의 상대성 이론을 표현하는데 사용되었다. 이렇게 수학자체를 다른 학문의 도구로 사용하는 것도 수학의 응용성을 나타내는 것이지만 비유클리드 기하학이후 수학을 어떠한 대상을 이해하고 분석하여 기술하는 논리적 체계의 과학이라고 인식하는 것도 응용적 사고에 해당된다 말할 수 있다.

지금까지 수학사를 통해 살펴볼 수 있는 통합적 사고에 대해 살펴보았다. 이 고찰을 통해 존재론적 근원 사고나 창조적인 응용사고, 이 모두는 단편적인 수학적 지식으로 얻어지지 않음을 느낄 수 있다. 이러한 사고는 수학사를 진지한 탐구적 자세로 접하여 익히게 될 때 알게 되는 것이다.

제 3 절 수학적 사고의 통합적 사고로의 발전적 적용

수학적 사고의 정의와 분류에 대해 학자마다 관점이 조금씩 다르나 그 기본적 틀은 크게 다르지 않다. 제2장에서 제시한 수학적 사고에 대한 학자들의 견해를 요약한 표는 아래와 같다.

표 4 수학적 사고에 대한 정의 분류

박한식 (1982)의 수학적 사고 정의 및 분류	
① 수학내용 자체에 대한 사고 수와 연산, 도형, 측정, 확률과통계, 문자와 식, 규칙성과 함수	② 수학의 내용을 매개로 하되 개별적 내용에 구애받지 않는사고 체계・논리적 사고, 추상화의 생각, 일반화, 연역적, 귀납적, 유추적 사고
1988	
-공리로부터 수학적 체계를 도출할 때의 수학자들의 심리적 현상 및 수학 활동 혼돈한 상황의 정리 공식화, 내관하기, 단순화하기, 기호화하기, 유추, 귀납, 연역, 일반화하기, 논리적 분석과 체계화하기	

강시중 (1981)		
① 수학교육의 목표면의 사고 자주적 수리화, 수리화를 통한 수학의 기초개념이해, 대상을 간결・명확・통합적 처리, 논리적으로 사고하는 기능과 태도, 대상을 합리적으로 처리	② 수학의 특성 추상화, 형식화, 일반화, 특수화, 계통화, 직관성, 논리성, 수학의 방법면 귀납적, 연역적, 유추적, 공리론적, 구조화의 방법, 확장적 사고	③ 수학의 내용면 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 문자와 식, 규칙성과 함수

본고에서는 수학적 사고에 대한 명확한 규정을 내리는 것이 목적이 아니고 수학적 사고를 수학교육의 취지대로 보다 넓게 응용시키는 방안 쪽에 초점을 맞추었으므로 앞서 언급한 수학적 사고의 분류들에서 대표적인 것만을 끌어내어 수학적 사고를 아래와 같이 규정하였다.

- 본 논문에서 사용하는 수학적 사고의 정의 및 분류 -

① 수학적 사고란? 인간의 내면 속에 잠재되어 있는 논리적이고 합리적인 다양한 사고의 총체들이 수학적 문제를 해결하면서 체계를 이루며 발현된 정신적 체제이며 수학적 사고를 통해 수학문제 뿐 아니라 실생활에 있는 복잡하고 다양한 문제들을 합리적으로 해결할 수 있게 해준다.

② 수학적 사고의 구성 요소 및 정신의 흐름

본고에서는 그림1에서의 수학사고의 구조를 기본 틀로 하고 그 밖의 학자의 견해를 종합하여 수학적 사고의 구성 요소와 그에 따른 정신의 흐름을 기술하여 본다. 먼저 그림1의 수학적 사고구조에 대한 부연 설명을 하면 이 그림은 앞서 언급한 대로 수학자들이 수학을 만들어 가는 과정에서 사용했던 사고의 흐름이기에 가장 기초적인 수학적 사고 구조라 할 수 있다. 이 기초적인 사고 구조는 수학을 만드는 데만 적용되는 것이 아니라 다른 인간과 자연의 제반 현상에서 일어나는 문제를 해결하는데도 적용될 수 있다.

즉, 하나의 가설을 만들기 위해 여러 가지 물리적, 사회적 현상을 추상화하고 일반화하여 귀납적 결론을 도출해 내고 이것을 논리로 연역적으로 증명하는 과정은 수학뿐 아니라 다른 학문이나 일상사에서도 사용되는 사고라는 것이다. 다만 좀 다른 것은 수학은 좀더 순수하게 논리만을 사용한다는 점이다. 수학은 일단 연역적 가설이 세워지면 순수하게 논리만을 도구로 증명을 행해야하는데 물리나 화학 같은 과학에서는 가설이 세워지면 수학과 같이 공리를 세워 논리의 구조 속에서 이를 증명하는 것만이 이뤄지는 것이 아니고 반드시 실험이라는 귀납적 절차를 다시 거치게된다. 이런 차이점을 비교해 보았을 때 수학이라는 학문은 가장 근본적으로 인간의 사고능력을 끌어내는 학문이라 하겠다.

그림1에서의 수학적 사고구조를 '자연현상이나 인간활동에서 참[13]된 명제를 끌어내는 사고 방법'으로 다시 명명하고 이를 좀더 자세히 풀어서 나타내보면 아래와 같다.

13) 여기서 참이란 진리표준에 입각한 참을 말하는 것이다. 이것에 관하여는 제2장에 기술하였다.

표 5 본문에서 재정립한 수학적 사고의 일반화

자연현상이나 인간활동의 관찰 ↓ 대상에 관한 문제의식을 느낌 (자주적 정신) 참된 명제 도출에 대한 필요성을 느낌 (합리적인 진리추구 정신) ↓ 명제 도출을 위한 문제 분석 (문제의 수학적 분석) (문제해결을 위한 수학작용) 문제를 수학적으로 모델링 모델링 과정에서 여러 가지 수학적 변환 작업을 거침 수학적 의사소통 작업 (단순화, 기호화, 논리적 분석,체계화등)을 거침 수학적 연결작업(실세계의 문제상황과 수학적 표상사이 모델링 연결)을 거침 ↓ 문제를 추상화하고 일반화하여 가설을 도출시킴 공리 연산 추론 규칙등을 사용하여 연역적 증명 다시 증명된 명제가 실세계의 현상과 부합되는지 검토 참된 명제 도출

수학적 사고로 사고하는 사람은 자연현상이나 인간활동을 하며 문제의식을 느끼는 것은 모든 것을 그저 당연하게 받아들이며 수동적으로 수긍하며 사는 자가 아니라 보다 능동적으로 판단하고 합리적으로 타당성을 검토해보는 자주적 정신을 갖게 한다. 이러한 수학적 사고의 정신적 측면에 대해서는 제2장, 제4절의 ‘수학적 사고에 대한 이론 고찰’에서 자세히 기술하였다. 이를 표5의 과정과 적용시켜보면 문제의식을 느끼고 문제를 분석하는 과정에서 자주적이고 합리적으로 행동하게되며 문제를 수학적으로 모델링하는 과정에서 내용을 명확하고 간결하게 표현하게되며, 사고와 노력을 절약하게 된다.

다음 수학적 연결 작업에 대해 설명하면 수학적 연결은 두 가지 일반적인 형태의 연결이 중요하다. 첫째는 실세계 또는 수학이외의 학문에서 제기되는 문제 상황과 그것의 수학적 표상 사이의 연결이고, 둘째는 두 동치 표상 사이와 각각에서의 과정들 사이의 수학적 연결이다.

수학적 개념간의 연결성에 대한 이해는 다양한 내용사이에서 가설을 제기하며 연역적으로 증명하는 능력을 촉진시킨다. 새로 발달된 수학적 개념과 과정은 수학 또는

다른 교과로부터 제기되는 많은 문제를 푸는데 적용할 수 있다. 수학과 다른 교과와의 연결을 예로 들면 다음과 같다.

* 미술- 작품 창작을 위해 대칭, 원근, 공간표상, 규칙성을 사용하는 것.
* 생물- 다양한 유기체의 성장을 제한하는 요소를 확인하기 위해 축적 을 사용하는 것
* 경영- 정보통신망의 활용
* 산업미술- 집과 같은 3차원 물체의 모델이나 축도를 그릴 때 수학에 기초한 컴퓨터 디자인을 사용하는 것
* 의학- 전염병을 막기 위한 접종계획을 모델링하는 것
* 물리학- 힘과 관련된 문제를 해결하기 위해 벡터를 사용하는 것
* 사회과학- 선거결과를 예상하고, 분석하는데 통계적 기법을 사용하는 것

이러한 예들은 함수, 통계 벡터와 같은 수학의 내용적 요소가 다른 전문 분야에 직접 응용된 것들을 주로 다루었는데 꼭 전문적인 학문분야가 아니고 일상에서 해결해야될 복잡한 문제들도 수학과 연결시켜 사고할 수 있다.

이와 같은 수학적 모델링의 작업이 모두 끝나면 귀납적으로 가설을 도출해내고 이 가설을 연역적으로 증명하여 참인 명제를 도출해낸다. 이러한 수학적 사고로 문제를 해결해나가는 것은 사실 그리 쉬운 것은 아니다. 그것은 상당한 인내심과 격려와 긍정적인 자세를 요구한다.

제 4 장 통합적 사고를 길러주는 열린 교과서

이 장에서는 지금까지 고찰해본 이론을 토대로 통합적 사고를 양성하기 위한 교과의 편성에 대한 논의를 하고자 한다.

이를 위해 먼저 제7차 교육과정의 수학교과에 대한 분석과 검토를 한 뒤 통합적 사고를 양성하기 위해서는 7차 교과에 어떠한 내용이 좀더 편성되어야 하는가에 대한 논의를 하였다. 이러한 교과 내용의 논의는 현행 7차 교과서 중 A출판사의 고등학교 수학 10-나를 중심표본으로 살펴보고 B출판사의 고등학교 수학 10-나의 편성 내용을 보충적으로 검토하면서 현행 교과에 더 보충할만한 점을 비판 검토하였다.

제 1 절 현행 7차 교육과정의 수학 교과서 분석

현행 7차 교과서의 편성을 살펴보면 종전의 교과처럼 수학적 이론설명에만 치중하지 않고 도입부에 수학사를 편성하고, 실생활에서 흔히 볼 수 있는 현상을 예제로 제시하여 수학이 실생활과 관련이 깊음을 인식시키고 흥미로운 이야기 거리를 실어 수학에 흥미를 갖도록 노력한 흔적이 많이 나타난다. 그러나 그 내용이 단편적인 것이 많아 아쉬움이 많다.

본 절에서는 표본으로 선정한 A출판사의 수학 10-나의 특성을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 수학사에 대한 내용을 간략하게 다루었다.

앞장의 논의들을 살펴보면 수학적 사고의 발전적 적용을 위해서 수학사를 교육하는 것은 절대적이라 하겠다. 앞장에서 기술한 대로 수학사의 교육은 학습동기를 부추겨주고 수학의 형성 과정에 대한이해를 증진시켜주는 등 많은 교육적 유용성을 지니고 있으며 통합적 사고의 증진에도 중요한 역할을 하는 것은 이미 기술한 바 있다.

그 동안 수학사의 교육에 대한 중요성이 계속 부각되어온 결과 7차 교과서에서는

수학사에 대한 내용을 다루고 있는데, 7차 교과서의 수학사 편성을 보면 단원이 시작할 때 잠시 언급하는 이야기 거리 정도로 실어 놓고 있다. 아래는 A출판사 수학 10-나에 실린 도형의 방정식 단원의 도입부의 수학사 편성 내용이다.

표 6 A출판사 수학 10-나 수학사 편성 예

<도형>단원의 수학사

[꿈속에서 만든 좌표]

중학교에서 학습한 도형의 성질은 기원 전 3세기 유클리드(Euclid; 330?~275? B.C.)의 기하학원론에서 다루어지고 있는 것들이다. 이를 좌표를 이용하여 다룬 것은 그 후 1800년 뒤의 일이다. 일반적으로 유클리드의 기하학을 논증기하학이라 하고, 좌표를 이용하여 도형을 대수적으로 다루는 기하학을 해석기하학이라 한다. 즉, 이 단원에서 다루는 해석기하학은 17세기 데카르트(Descartes, R.; 1596~1650)에 의해 크게 발전하였다. 그는 기하학과 대수학을 융합하여 도형을 수식으로 나타내고, 그 수식을 계산함으로써 도형의 성질을 연구하고자 노력하였다.

데카르트(Descartes, R.; 1596~1650)

17세기 프랑스 수학자로 좌표를 이용하여 도형의 성질을 연구하였다.

<측정>단원의 수학사

[본능과 수학]

일정한 상황 속에서 가능한 여러 가지 경우 중 가장 적당한 것을 찾는 것은 인간의 본능이다. 이러한 인간의 본능을 수학과 접목시킨 것이 바로 최적화 이론으로 그에 대한 중요성의 인식이나 일반적인 해법은 지금으로부터 약 30년 전에 발견되었다. OR(Operation Research, 작전연구)는 제2차 세계대전 중에 탄생하였는데 OR에는 방정식과 부등식의 원리가 도입되었다. 처음에는 군사적 목적에서 발전하였으나 그 후 여러 방면에서 널리 이용되었다. 예를 들면, 햄, 소시지나 화학비료 등을 만드는 데 최소의 비용으로 최대의 이익을 얻는 방법으로 이용되어 왔다. 이와 같이 일상적인 필요에서 나타난 방정식은 19세기 프랑스의 수학자 갈루아(Galois, E.; 1811~1832)와 노르웨이 수학자 아벨(Abel, N. H.; 1800~1829)에 의해 오늘의 고도의 방정식 이론으로 발전할 수 있게 되었다.

이 단원에서 조건부 최대, 최소의 문제는 최적화 이론의 기본이 되고 있다.

갈루아(Galois, E. : 1811~1832)

19세기 프랑스 수학자로 군(Group)이라는 말을 수학에서 처음으로 사용하였다.

<함수>단원의 수학사

[가장 기초적인 수학 개념]

함수를 수학의 용어로 처음 사용한 것은 라이프니츠(Leibniz, G. W.; 1646~1716)라고 알려져 있다. 라이프니츠는 곡선 위의 한 점에서 접선을 긋고 접선의 길이, 법선의 길이 등을 구하는 것을 함수로 정의함으로써 함수에 관한 수학인 해석학이 급속하게 발전하는 계기를 만들었다. 특히 19세기에 와서 디리클레(Dirichlet, P.; 1805~1859)는 오늘날의 함수의 개념에 가깝게 정의하였고 그 후 데데킨트(Dedekind, J. W. R.; 1831~1916)에 의하여 집합에서 집합으로의 함수의 개념이 도입됨으로써 함수는 수학에서 가장 기초적인 개념으로 자리잡게 되었다.

데데킨트(Dedekind, J. W. R.; 1831~1916)

19세기 독일의 수학자로 집합에서 집합으로의 함수의 개념을 도입하였다.

<삼각함수> 단원의 수학사

[좌표와 삼각함수]

삼각함수의 역사는 고대 바빌로니아와 이집트 등에서 토지의 측량이나 천체의 관측과 같은 실용적인 필요에 의하여 시작되었다. 알려진 바로는 이미 기원 후 2세기에 프톨레마이오스(Ptolemaeos; 85?~165?)는 그의 저서 '알마게스트'에 사인(sine)표와 같은 수표를 작성하였다고 한다. 그 후 15세기경 뮐러(Muller; 1436~1476)에 의해 삼각함수는 수학의 한 분야로 발전하였고 퓨리에(Fourier, J.; 1768~1830)등에 의해 좌표와 관련하여 삼각함수의 개념이 일반화됨으로써 오늘날 과학, 기술의 발전에 크게 기여하였다.

퓨리에(Fourier, J.; 1768~1830)

18세기 프랑스 수학자로 좌표를 사용하여 삼각함수의 개념을 일반화하였다.

이상 내용이나 형식을 살펴보면 간략하게 관련 단원의 수학사를 잠시 언급하는 소개 형식을 취하고 있고 그 내용이 단편적이여서 하나의 지식습득으로 흘러갈 우려가 크다. 이런 식으로 수학사를 실어서는 제3장에서 살펴본 수학사 교육의 유용성을 획득할 수 없음은 쉽게 인식된다. 학습동기를 일으켜준다거나 수학형성의 과정을 이해한다거나 논리적 통찰력을 양성시키는 교육적 효과를 바라기에는 그 내용이 너무도 빈약하다.

둘째, 실생활과의 응용성을 다룬 교과 내용을 많이 다루었다.

제7차 교과서에서 실생활과의 응용성을 다룬 부분에 있어서는 상당히 진일보한 면을 볼 수 있다. A출판사의 고등수학 편성 내용을 구체적으로 살펴보면 도입부에 대단원과 관련된 수학사를 잠시 소개하였고 중 단원 별로 「탐구 학습」을 실었는데 탐구학습의 내용을 실생활 주변의 소재를 가지고 편성함으로써 주요개념과 원리를 스스로 깨달을 수 있도록 하였다. 또한 소단원 별로 실은「생각열기」라는 문제 역시 실생활을 소재로 엮었다. 다음은 함수단원의 탐구학습과 생각열기의 예시이다.

표 7 A출판사 수학 10-나의 실생활과 연관된 교과 내용 예시

「탐구 학습」

[자동판매기와 함수 관계]

오른쪽 사진은 거리에서 쉽게 볼 수 있는 자동판매기이다.
돈을 넣고, 원하는 상품의 버튼을 누르면 제품을 얻을 수 있는데, 이 기계는 버튼과 제품명으로 일대일로 짝지어진 것이라고 볼 수 있다.

<탐구1> 나와 관련된 숫자나 사실에 대해 생각할 수 있는 함수를 찾고, 짝지어진 관계의 규칙에 대해 정리해 보자.

<탐구2> 우리 주변에서 볼 수 있는 기계 중 짝지어진 관계의 규칙을 가지고 있는 것을 찾아보고, 그 원리에 대해 조사해 보자.

「생각열기」

오른쪽은 현재 우리나라에서 쓰이고 있는 시외전화 지역번호이다.

<생각1> 내가 지금 살고 있는 지역의 지역번호를 말해 보자.

<생각2> 지도를 보고 다음에 주어진 지명과 지역번호를 알맞게 연결시켜 보자.

· 지역　　서울　인천　청주　강릉　광주　부산

· 지역번호 02　043　032　051　062　033

위의 예시에 대해 논의해보면 학생들은 실생활에서의 규칙성과 대응관계를 먼저 인식하고 함수 단원을 접하게 됨으로써 함수의 개념을 낯설지 않게 인식하게 된다. 그러면서 수학에서는 이 규칙성의 대응을 어떻게 구체화키고 기호화시키는지를 하나하

나 익힘으로써 수학적 원리를 인식하게 되는 것이다.

A출판사 수학 교과서의 구성을 좀더 살펴보면 실생활과 관련된 수학을 인식시키는데 중점을 많이 두어 단원의 도입부에서는 앞서 언급한 대로 실생활의 접목으로 단원에서 다루는 수학의 중심 개념을 이해하도록 하였고, 또한 단원의 끝 부분에는 심화과정을 실었는데 이것 역시 단원에서 학습한 개념과 원리를 활용하여 해결할 수 있는 실생활의 문제를 다루어 수학과 생활의 연관성에 대한 좀더 깊이 있는 학습을 할 수 있도록 하였다.

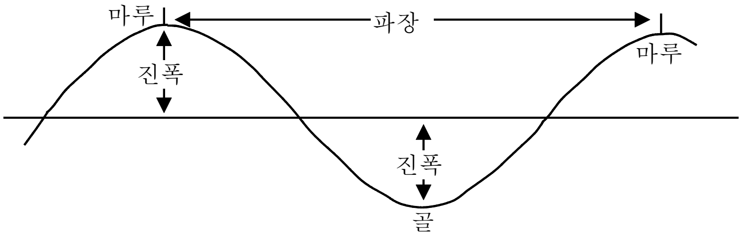
또한 단원마다 읽을 거리를 두어 수학이 여러 형태로 실생활 속에 들어 있음을 알려주고, 수학과 관련된 에피소드나 역사를 실어 수학과 친숙해 지도록 하였으며 수학 산책이라는 코너에서는 수학의 기호나 개념의 유래 등을 수록하였다. 단원의 끝 부분에는 수행평가 물음을 두어 모둠별로 의견을 교환하여 문제를 해결하고 그 과정을 논리적으로 정리해볼 수 있도록 하였다. 아래는 지금까지 설명한 것들에 관한 예시이다

표 8 A출판사 수학 10-나의 실생활과 연관된 교과 내용 예시

<심화과정>

[파동에서 볼 수 있는 삼각함수의 그래프]

수면에 돌을 던지거나 용수철을 흔들어 주면 파동이 생기는 것을 볼 수 있다. 일반적으로 파동은 다음과 같이 이루어져 있으며 그 모양은 삼각함수의 그래프와 동일하다.



실제로 우리가 서로 얘기할 수 있는 것도 우리의 말이 공기 중의 입자를 매질로 파동을 일으키기 때문이다. 파동에 관련된 문제를 직접 풀어 보고, 그로부터 그래프의 성질을 알아보자.

<읽을거리>

[우리 곁에 살아있는 수학]

수학을 배워 무엇에 쓸까?

안타깝게도 대부분의 사람들이 이런 의문을 가지는 것이 사실이다.
이는 우리의 생활이 수학과 아주 밀접한 관계에 있다는 사실을 아직 깨닫지 못했기 때문에 오는 의문이다. 먼저, 년, 월, 일 시간의 개념을 살펴보더라도 그것은 태양과 달과 지구의 움직임에 근거를 두고, 수학적인 계산에 의해 얻어졌다.
예를 들어, 오늘이 몇 월 몇 일이고, 지금이 몇 시 몇 분이라는 것 등등을 알게 된 것은 결국 수학의 정확한 계산이 있었기에 가능한 것이다. 이런 추상적인 부분이 아니더라도 길을 나가면 도로와 많은 신호등을 접할 수 있는데, 길을 건널 때 건너는 시간이 잘못 계산되어 도중에 신호등이 불이 바뀐다면 어떨까? 물건을 만들 때, 이익을 계산하지 않고 무턱대고 만든다면 얼마나 비효율적인가 생각해 보자. 사실 수 천 년 전만 해도 사람들은 이렇게 계산했다고 한다. 수학은 보다 편리하고 합리적인 생활의 과정을 구체화시키면서 인간의 욕구도 충분히 충족시키는 학문으로 발전되어 온 것이 사실이다. 물론 최적화 이론의 발견도 인간의 기본 욕망이 수학과 접목되어 얻어진 산물임이 분명하다. 수학(mathematics)의 어원을 살펴봐도 그리스어의 mathemata 즉, '배우는 모든 것'을 뜻하고 있다. 즉, 수학은 수 천 년 동안 인류를 있게 한 기본이며, 또, 수 천 년 동안 인류전체가 공동으로 참여하여 이룩한 인류의 한 장대한 문화로 지금도 우리 곁에 살아 있는 것이다.

<수학산책>

[삼각법]

초기 바빌로니아에서 데카르트 시대에 이르기까지 삼각법, 즉 삼각함수의 연구는 측량, 천문, 항해 등 실제적인 면에서 유용하게 활용되었다.
천체를 관측하는 천문학자나 바다를 항해하는 선원들은 잴 수 없는 거리를 어떻게 해서든 산출해 낼 필요가 있었다. 이런 경우에 변과 각과의 관계에 관한 기초적인 법칙이 큰 도움이 되었다. 삼각법과 비슷한 계산은 원의 호를 분석한 그리스인에 의해 이미 행해지고 있었지만, 삼각법을 확립한 사람은 히파르코스(Hipparchos; 190?~125? B.C.)였다고 한다. 그는 기원전 140년경에 천문학에 삼각법을 응용하여, 하늘을 가로지르는 직선거리를 산출하였다. 현재 삼각법에 가장 널리 이용되고 있는 것은 직각삼각형에서 변의 길이 사이의 비를 나타내는 사인(sine), 코사인(cosine), 탄젠트(tangent)이다. 사인, 코사인, 탄젠트의 값은 각의 크기가 변함에 따라 변한다. 그리스인은 이 값을 계산해서 삼각비의 표를 만들었고, 후대의 수학자들이 이것을 더욱 개량하고 확대하였다.

위의 예시를 살펴보면 학생들은 심화 과정을 통해 배운 교과에 대한 응용적 사고를

더욱 깊게 발전시킬 수 있게되며 읽을 거리나 수학산책을 보면서 수학적 호기심이나 학습에의 흥미를 일으킬 수 있게 될 것임을 짐작할 수 있다.

이와 같은 방식의 7차 교육의 수학교과 편성은 학생들의 통합적 사고 양성을 기르기에 매우 적합한 것으로 앞으로 더욱 소재개발에 노력을 기울여야한다.

제 2 절 통합적 사고 양성을 위해 첨가해야 할 교과 내용

지금까지 살펴본 교과의 내용을 살펴보면 제7차 수학 교과의 편성의 특징은 간략하나마 수학사에 대한 내용을 실었고, 실생활 속에 응용되는 수학에 대한 내용은 많은 비중을 두어 편성하였는데, 이는 과거의 교과에 비하여 수학에 의한 통합적 사고력을 신장시키는데 있어 상당히 진일보한 면을 보이고 있다.

특히 실생활과의 응용성을 다룬 부분은 소재도 다양하고 내용도 이해하기 쉽도록 편성되어 학생들의 창조적 사고를 고취시키는데 많은 도움이 되도록 구성되어 있어 커다란 교육 효과가 기대된다. 그러나 본고에서 고찰한 수학의 본질과 수학사의 유용성에 비추어 7차 교과서의 편성을 살펴보면 존재 추구를 위한 근원적 사고를 위한 내용은 편성되지 못한 것을 알 수 있다. B출판사의 수학교과 10-나의 읽을 거리의 편성 내용을 보면 다음과 같다.

표 9 B출판사 수학 10-나의 읽을거리

베지어 곡선	좌표평면 위의 점으로부터 동일한 비의 내분점을 반복하여 입체를 그림, 컴퓨터 그래픽에 응용
평행이동	미술가 에셔가 사방 연속 무늬를 만들어 명작을 남기는데 응용됨
아폴로니우스	아폴로니우스의 원의 실생활 응용을 다룸
프랙탈 도형	코흐의 곡선을 그리는데 응용된 도형 비와 무한 등비급수
그래픽계산기	그래픽 계산기로 함수 그래프 그리는 방법
통신 주파수	삼각함수가 통신에 활용되는 원리

표9를 살펴보면 공학, 미술 등 수학의 응용적 측면은 다루고 있으나 수학이 인간의 내면을 다룬 측면을 전혀 다루고 있지 않은 것을 볼 수 있다. 앞장에서 기술한 대로

수학이 학문적 가치를 지니기 시작한 것은 그리스 시대 이후로 당시 수학은 만물의 근원을 탐구하고 인간의 영혼을 참되게 이끌어 가려는 절대의 진리 추구를 위해 발전되었고 그 이후로 수많은 수학관의 변화를 통해 세계관이 변화하였는데 이것은 제3장에서 기술한 존재론적 근원사고를 향하는 수학의 진면목이라 할 수 있다.

사람은 성장할수록 실생활보다는 자기 자신의 내면 성찰에 더 관심을 갖는다. '왜 사는가?', '나는 누구인가?' 등의 철학적 질문에 누구나 접하게 된다. 학생들이 수학을 싫어하는 이유 중 하나는 수학이 실생활에서 필요 없다는 인식을 갖기 때문이고 , 또 하나는 인간이 본능적으로 행하는 사고인 내면을 성숙시켜 존재의 추구와 발전을 일으키는데 수학은 전혀 쓰이지 않는다고 생각하기 때문이다. 제7차 교과서는 전자의 인식은 바꿔줄 수 있으나 후자의 인식을 바꾸기엔 너무나도 미흡하다.

그러므로 7차 교과서의 내용에 통합적 사고의 존재론적 측면을 다룬 내용이 첨가되어야 한다. 다음은 위에서 검토한 교과 내용에 대한 종합적인 비판과 교과에 첨가시켜야 할 내용들에 대한 논의이다.

1. 수학사 편성에 대한 논의

앞 절에서 기술한 대로 표본 교과의 수학사에 대한 내용은 지면적 분량이 길어짐을 의식한 듯 너무도 간략하게 수학사에 대한 소개정도의 내용으로 편성되어 있다.

제7차 교과서에서 수학사 내용에 대한 지면 할애를 길게 하지 않은 것이 과다한 학습량으로 지쳐있는 학생들에게 수학사의 교육이 또 하나의 짐이 될 것을 우려하여 그렇게 편성하였다고 하나 수학사의 교육을 함으로써 앞장에서 살펴본 수학사의 교육을 통해 얻는 교육적 가치를 얻지 못한다면 그것은 있으나 마나한 결과를 낳을 것이다. 교과의 내용은 풍부해도 상관이 없다. 이미 우리나라의 교육 현실은 많은 학생들이 다른 참고서에 비해 쉬운 교과서를 무시하고 보지 않는 경향이 크다. 즉 교과서만으로는 입시를 준비할 수 없기에 다른 참고서로 학생들의 관심이 옮겨져 있다. 이러한 현실을 감안할 때 교과서는 내용도 풍부하고 다양한 수준의 문제를 실어 두껍게 구성하여도 그것이 학생들에게 스트레스를 주는 일은 아닐 것이다. 그러므로 다소 교과의

부피가 두꺼워지더라도 수학사는 다소 깊이가 있게 실어야할 것이다. 좀더 구체화시키고 수학사를 통해 깊게 생각할 수 있는 점들 제시하고 학생들의 사고를 끌어내는 질문도 실어야 하고 무엇보다도 앞에서 언급한대로 통합적 사고의 양성을 위한 수학사 교육의 유용한 측면인 존재론적 근원 사고 고취를 위한 내용을 다뤄야 할 것이다. 존재론적 근원사고의 고취를 위해서는 교과의 시작 부분을 수학의 본질적 사고를 구성하는 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학의 간략한 내용을 설명하면서 수학사속에서 변천된 수학의 인식관을 설명하여 학생들에게 수학을 통해 사람들은 어떠한 근원 사고와 응용사고를 하였는지를 인식시키고 나아가서 역사 속에서 수학이 어떻게 변화하였으며 인류의 역사와 문화속에서 어떠한 위상을 지니는지를 알 수 있도록 해주어야한다.

수학교과 10-가의 편성을 보면 제일 앞 단원은 집합으로 본고 표본 교과서의 경우 제일 앞에 실린 수학사는 집합론의 수학자 칸토르에 대한 소개가 간략하게 나와 있다. 수학사의 흐름으로 볼 때 칸토르는 후반에 속하는 수학자인데 교과의 순서상 먼저 나온 것이다. 이와 같은 편성은 수학사의 교육측면에서는 바람직하지 못한 것으로 제일 첫 단원은 집합이 아니라 수학의 본질과 교육 목적을 다루는 수학에 대한 학문적 소개의 내용이 실리는 것이 마땅한데 이것을 설명하는데 있어 공리나 정의와 같은 수학의 원론적인 요소를 기술하여 설명하기보다는 앞서 언급한 대로 유클리드 기히학에서 비유클리드 기하학으로의 변천 수학사를 간략하게 소개하면서 설명하는 것이 좋다. 공리나 정의같은 수학의 원론적인 요소를 기술하는 설명은 다소 딱딱하고 학생수준에서 이해하기 힘든 측면을 가지고 있지만 수학사를 활용한 설명은 이해하기도 쉽고 더 친숙하게 느껴져 학생들에게 수학의 가치를 좀더 쉽게 인식시켜줄 수 있다. 고등학생들은 수학적 연산에 관한 기본적 능력은 이미 형성되어있다고 보아야 한다. 이 학생들에게 필요한 것은 탐구하는 정신과 노력인데 이것을 살리는 교육을 하기 위해서는 수학에 대한 본질과 교육적 가치를 인식시킬 수 있는 수학사의 교육이 서두에 먼저 실행된 뒤 교과 내용이 들어가야 한다. 다음은 교과의 서두부분에 실릴 수 있는 수학사의 예시이다.

<수학으로 추구한 모든 것들>

각종 측정이나 수의 계산과 같은 실생활의 필요에서 발생한 수학은 그리스 시대에 와서 인간 학문과 사고 발달에 근원적 역할을 하기 시작했다. 그리스 시대의 수학자들은 수학이 우주를 형성하는 가장 근원적인 원리라 믿고 수학의 원리를 탐구하며 자신의 영혼을 추구하였다. 그리스의 대표적인 철학자인 플라톤은 그의 이데아론에서 현실은 참된 진리의 세계의 모상이라 하였고 불완전한 인간의 영혼을 완전하게 하기 위해서는 이러한 참의 세계를 깨달아 자신에게 입혀가야 한다고 주장하였다. 이때 참의 세계를 깨닫는 것은 모상의 세계에 길들여진 감각과 경험에의 의존을 통하는 것이 아니라 객관적으로 논증하여 사고하는 수학적 사고를 통하여 가능하다고 보았다. 이렇듯 그리스 시대의 수학연구는 합리적인 틀에 따라 우주 가운데에서 인간의 위치를 이해하려는 주요한 목표를 가지고 있었는데 이를 위해 혼돈에서 질서를 찾고, 생각을 논리적인 사슬로 배열하고, 기본적인 원리를 발견하는데 수학은 절대적인 위상을 지니고 있었다.

이 시대의 수학의 가장 위대한 결실인 유클리드 기하학은 오늘날의 수학 본질을 형성하는 가장 근본적인 토대가 되었는데 다름 아닌 증명을 통해 참인 명제를 끌어내는 과학적 사고의 근간이 된 것이다. 이러한 유클리드 기하학은 철학과 과학의 사고의 근본 축대를 세워주었는데 이후의 많은 학자들이 유클리드 기하학의 공리를 토대로 한 연역적 증명의 방식을 모범으로 하여 수학 외의 학문에 적용하였다.

먼저 존재의 가치를 찾는 근원적 사유의 학문인 철학에 적용된 예를 살펴보면 칸트의 순수이성비판과 스피노자의 윤리학을 들 수 있다. 이 두 철학자는 유클리드 기하학의 형이상학적 진리 도출 방식과 공리를 통한 증명사고를 자신들의 철학적 사고의 중심 방식으로 삼아 객관적인 진리를 도출하려 하였다.

또한 서양의 자연과학의 발달 역시 유클리드 기하학의 영향으로 꽃을 피웠는데 뉴우튼이나 갈릴레오의 과학적 성취가 그 예이다. 그들은 천태만상의 자연현상 속에서도 과학적 공리를 찾아내어 복잡해 보이는 자연의 원리를 몇 가지 수학적 수식을 사용하여 나타내어 서양과학발달의 커다란 원동력이 되었다. 유클리드 기하학은 과학과 철학 뿐 아니라 음악 미술과 같은 예술분야에도 응용되는 등 서양 학문발달의 근본이 되었다.

19세기에 이르러서는 이러한 학문의 절대적인 위치를 지니던 유클리드 기하학의 모순이 드러나면서 또 하나의 인류의 사고의 변혁을 가지고온 비유클리드 기하학이 출현하였다. 비유클리드 기하학을 통해 수학은 물질세계의 어떤 진리를 말하는 것이 아니라, 한 개의 공리계를 설정

해 놓고 이 공리계에서 증명되어 나올 수 있는 명제들을 찾는 과학임이 밝혀졌다.

이러한 비유클리드 기하학의 출현에 가장 많은 영향을 일으킨 관념은 바로 무한에 대한 인식이었다. 절대적인 법칙 속에 모든 것이 존재한다고 믿는 유클리드 기하학의 제한적인 사고는 무한 속에서 그 절대성을 잃었으며 무한 속의 수학이 탄생함에 따라 인간의 사고는 좀더 틀을 벗고 자유로운 날개를 달게 되었는데 그 대표적인 소산이 바로 아인슈타인의 상대성 이론이었다. 이와 같이 비유클리드 기하학 역시 많은 학문의 토대가 되었다.

비유클리드 기하학으로 인해 변화된 수학관의 체제 속에서도 유클리드 기하학의 공리를 통한 연역적 사고의 체계가 수학의 근간을 이루는 것은 변하지 않았는데 새로운 체제속에서 유클리드 기하학의 미비점을 보완하여 완전한 기하학의 체계를 세우려고 노력한 수학자는 힐베르트였다. 그는 그의 저서 <기하학 기초론>을 통해 공리를 자명한 진리로 인식하던 그리스 철학자들과 달리 단지 '이론에 대한 가정'으로 공리의 개념을 인식하고 형식적인 공리를 토대로 하여 연역적인 방법으로 이론을 전개하고 구성하여 수학을 만들 수 있음을 보여 주었다. 그는 이 과정을 통하여 공리를 새롭게 정함으로써 많은 기하학을 만들어 유클리드 기하학뿐 아니라 기하학이 무수히 많이 있음을 보여주었다.

이때까지는 자연과 우주속에서 법칙과 모델을 발견하여 수학을 만들었으나, 힐베르트 이후 수학은 자연의 원리에 의해 발견되고 만들어 질뿐만 아니라 인간의 자유로운 상상속에서 만들어내는 수학이 되었다.

이와 같이 수학은 인간의 학문 발달의 근본이 되어 철학, 과학, 음악 , 미술 등에 많은 영향을 끼쳤으며 합리적이고 과학적인 사고의 근간이 되었다. 이로 보건 데 인간의 문명은 수학의 발달과 함께 변화하여 왔다고 말해도 과언이 아니다. 사람들은 수학적 사고를 토대로 과학적인 사고를 고취시켜 새롭고도 놀라운 자연의 법칙을 발견하기도 하였고, 각종 발명을 하기도 하였으며, 철학적 사유를 하기도 하였다. 또한 수학을 통해 심미적 아름다움을 발견하기도 하여 예술의 진보를 이룩하기도 하였으며, 오늘날에는 첨단과학의 발달과 함께 방대하고 복잡 다양한 모습으로 발전하고 있다.

수학의 양적 팽창과 발전으로 수학의 정의는 또 다시 변하고 있는데 수학은 수, 형태, 운동, 변화, 공간에 대한 연구라는 정의로부터 수학은 대상의 본질적인 성질과 구조를 파악하는 과학이라는 정의가 나왔다. 즉, 수학자가 연구하는 것은 본질적인 성질과 구조를 파악하고 포착하는 양식의 과학이라는 것이다. 따라서 양식의 과학인 수학은 우리가 살고 있는 물리적이고 생물학적이며 사회학적인 세계와 우리의 정신적인 세계 모두를 관찰하여 원리를 찾아내고 새로운 세

계를 만들어 가는 학문이 되었다.

지금까지 살펴본 수학의 세계를 종합하여 보면, 수학은 궁극적으로 인간 자체에 대한 연구이며, 우주와 자연 그리고 인간을 포함하는 광범위한 영역을 연구하는 학문이라고 할 수 있다.

<학습과제>

1. 유클리드 기하학의 연역법에 대해 자세히 알아보고 이것이 서양문명 발달의 근간이 된 이유에 대해 좀더 자세히 알아보도록 한다.

2. '무한'의 관념이 수학에 준 영향과 이에 영향을 받은 학문의 변화에 대해 알아보도록 한다. 또한 자신의 유한적 사고와 무한의 사고에 대해 생각해보고 자신의 유한의 사고가 수학에서의 변화처럼 변화될 수 없는지에 대해 생각해 본다.

3. 위에서 제시된 철학자들이 수학을 철학에 어떻게 접목시켰는지 알아보고 자신의 사고 또한 수학을 이용하여 구체화시킬 수 있는지 생각해 본다.

이와 같이 수학 교과의 도입부에 수학 발전의 근간을 이룬 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학에 대한 내용과 함께 이의 영향을 받은 학문들의 변화에 대하 기술을 함으로써 학생들에게 수학의 가치를 인식시켜줄 수 있을 뿐 아니라 수학을 통해 무엇을 할 수 있는지 알게 하여 학습동기를 고취시킬 수 있게 된다. 또한 끝의 학습과제는 수학의 관념변화를 고찰하며 이를 자신의 사고에 응용하여 볼 수 있게 하고 철학자의 수학을 활용한 철학적 사유를 살펴보며 앞과 같이 자신의 사고 또한 수학을 활용하는 것에 대해 생각해보게 함으로써 존재론적 근원사고를 고양시킬 수 있다.

2. 실생활의 응용적 수학에 대한 논의

앞서 언급한대로 7차 수학교과는 수학의 실생활과의 응용적 측면은 많은 내용이 실렸으나 존재론적 측면에 대한 내용은 너무나 부실하다. 수학의 응용성은 물리적 생활 뿐 아니라 인간의 내면과 정신세계에도 미칠 수 있음을 인식시켜 주어야 한다. 다음은 그 예시이다.

< 인간의 정신세계 또는 행위 분석의 수학적 모델링의 예 >

스티븐 코비의 『성공하는 사람들의 7가지 습관』에서는 수학적 기호를 활용하여 여러 가지 인간의 정신세계나 행위 분석을 효과적으로 명시하고 있다. 이 저자는 습

관이 인간의 삶의 성공을 결정짓는 가장 중요한 요소라고 인식하며 습관에 대한 새로운 정의를 내렸는데 이 새로운 정의를 명확하게 이해하게 하기 위해 집합의 기호를 활용하였다.

효과적인 습관, (내면화된 원칙과 행동방식)

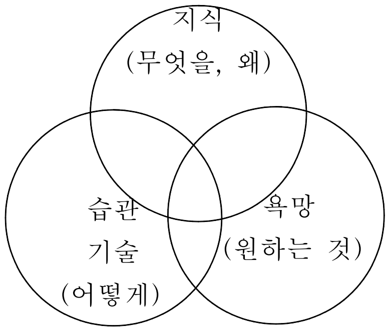


그림 3 수학적 모델링의 예시[14)]

저자는 습관을 지식, 기술, 욕망의 혼합체라 정의하였는데, 여기서 지식이란 우리가 무엇을 해야하고, 또 왜 해야하는지에 대한 이론적 패러다임이며, 기술은 어떻게 해야하는가, 즉 방법을 말하며 또한 욕망이란 하고 싶어하는 동기를 말한다. 위 그림 3의 집합의 기호를 활용한 표현은 저자가 말하는 습관의 정의를 보다 명확하게 나타내줌을 알 수 있다. 또 다른 예를 들어보면 스티븐코비는 단합하였을 때 얻는 창조적 에너지인 시너지를 창출해내기 위해서는 상호 협동을 통해 신뢰를 쌓아야한다고 언급하며 협동, 신뢰, 시너지의 관계를 함수를 활용하여 나타내었다.

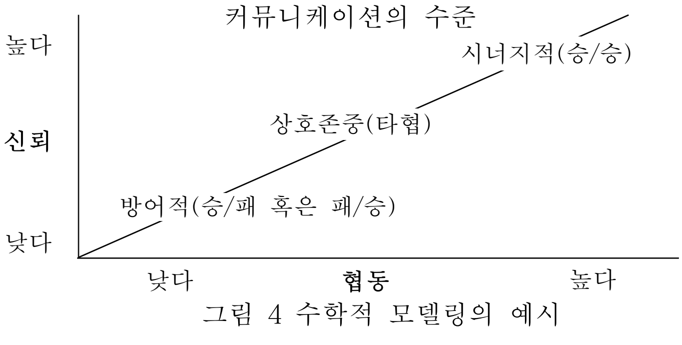


그림 4 수학적 모델링의 예시

14) 스티븐 코비, 성공하는 사람들의 7가지 습관, 김영사, 1997, p66

위의 그림4를 보면 저자가 말하고자하는 바가 좀더 명확해짐을 느낄 수 있다. 상호 협동이 높을 때 시너지가 창출되며 서로간의 높은 신뢰가 형성된다는 것과 이에 반해 협동이 낮을 때는 어떤 에너지가 창출되며 신뢰는 어떠한지를 쉽게 볼 수 있는 것이다.

이와 같은 예는 모두 인간의 행위를 수학적 모델링을 활용하여 효과적으로 나타낸 것으로 수학 교과에도 이러한 예들을 찾아서 편성한다면 학생들 각자가 자신의 행위를 좀더 구체적이고 과학적으로 분석하여 자신 스스로를 비판 검토할 수 있도록 유도할 수 있을 것이다.

지금까지 통합적 사고력을 양성시키기 위한 교과 내용에 대한 검토와 제언을 하였다. 종합하여 보면 현행 7차 교과서는 종래의 교과에 비해 통합적 사고력을 기르는데 훨씬 진일보한 면을 지니고 있으며 이에 좀더 보충되어야할 부분은 좀더 비중을 둔 수학사의 편성과 그 내용이 깊고 다양한 응용수학의 편성이다.

제 5 장 결　론

지금까지 통합적 사고력 양성을 위한 수학 교육에 대한 이론적 고찰과 방향을 제시하였다. 수학적 교육의 목적은 단순히 수학적 지식을 아는 것에 국한되는 것이 아니라 인간이 그의 삶을 살아가는데 있어서 발생하는 여러 가지 문제들을 합리적이고도 과학적으로 해결하고 또한 수학적 사고 습관을 통해 문제 해결의 정신적 능력을 길러 자신의 삶을 창조해갈 수 있도록 하는데 있다. 이를 위해서는 학생들에게 수학의 발생과 변천의 역사 속에서 생성된 인류의 문화유산을 교육하고 이를 통해 수학의 가치를 인식시키며 학생들 자신도 수학을 통하여 자신과 사회의 모습을 변화시켜줄 수 있음을 알려주어야 한다. 수학을 수학 자체 뿐 아니라 다른 여러 분야에 활용할 수 있음을 깨닫게 해주고 실제 학교 수업을 통해서도 이러한 교육이 좀더 구체화를 띤 모습으로 진행되어야하는데 그러기 위해서는 무엇보다도 교과의 편성이 이 모든 것이 실행가능 하도록 편성되어야한다.

현행 7차 교과는 실생활에서 활용되는 수학의 예시를 많이 들어 학생들이 수학을 친숙하게 여기는데 도움을 주려고 노력한 흔적을 보이나 수학의 근본적 요소의 하나인 존재론적 사고에 대한 예시는 보이지 않는다. 학생들에게 진정 수학의 가치를 인식시키고 수학이라는 학문을 익히는데 보람을 느낄 수 있도록 해주기 위해서는 수학의 정신적 세계의 측면까지 제시해 줄 수 있어야할 것이다.

이를 위해서는 수학사 교육에 대한 비중을 높이는 것이 절실히 요구되는데 수학사 교육에 대한 가치는 제3장에 기술한 바가 있다. 특히 제3장에서 언급한 수학사에 담겨있는 통합사고의 주요한 두 가지 측면인 존재론적 근원사고와 창조적 응용사고가 균형된 비중을 지니도록 교과를 편성하여야 수학사 교육에 대한 의미 있는 소득을 얻을 수 있을 것이다. 또한 수학적 사고를 활용하여 여러 가지 일상이나 학문의 문제를 분석하고 해결하는 응용적 사고인 수학적 모델링 분석을 통하여 객관적이며, 다각적이고, 포괄적인 의미를 함축하고 있음을 알 수 있었다.

이와 같이 수학적 사고로 어떠한 사물이나 정신 세계를 다각적이고도 심도있게 분

석하여 진정 참인 명제를 끌어낼 수 있다는 것을 학생들에게 인식시켜주기 위해서는 수학적 사고를 활용하여 깊은 사고를 해온 학자들의 사고의 흐름을 실제 소개해주거나 제4장에 예로 든 것과 같이 인간의 행동이나 정신을 수학적 모델링의 방법으로 효율적으로 분석한 실례를 풍부하게 제시해주는 것이 바람직하다. 실제로 수학적 사고로 어떠한 주제나 문제를 분석하고 종합하는 것을 학습과제나 수행평가로 내주어 학생들 스스로가 진지하게 수학적 사고로 탐구해보는 연습을 하게 하는 것도 좋은 교육이 될 것이다.

수학은 서양 문명의 사고의 준거를 제시하면서 문명의 변화를 주도하여왔다고 해도 과언이 아닐 것이다. 수학의 본질의 변천에 따라 인류의 사고는 커다란 변화를 겪었고 그때마다 커다란 문명의 진보를 이룩하였다. 역사는 다양한 삶의 총체라 할 수 있기에 개인의 삶 역시 하나의 짧은 역사라 할 수 있을 것이다. 수학이 인류 역사를 변화시키는데 커다란 영향을 끼친 것은 짧은 역사인 개인의 삶도 변화시킬 수 있음을 의미한다. 과학적이고도 합리적인 사고로 자신의 삶을 비판하고 다양한 수학적 모델링을 활용하여 자신의 사고와 행동의 패러다임을 만들어 감으로써 삶을 창조해 가는 것이 그것이다.

이를 위해서는 수학교육이 너무 수학적 지식 전달과 문제 풀이 중심으로 흘러서는 아니 되고 앞서 언급한 것과 같이 다양한 방향 제시가 이뤄지는 열린교육으로 향하여야 한다. 본고에서는 이를 위한 방안 모색을 위해 수학의 본질과 수학 교육관의 변화, 수학사 속의 통합사고의 양상, 또한 수학적 사고를 활용한 문제분석 등 전체적인 준거의 흐름을 살펴보았으며 이후에 다양한 수학적 모델링의 개발과 수학교과의 단원별로 수학적 사고의 통합적 적용에 대한 심층적 연구가 이뤄지길 제언하는 바이다.

참고문헌

강옥기(1989), 수학적 사고력 신장 프로그램 개발을 위한 방안 탐색, 한국교육개발원, 연구자료 RM 89-11.

김종륜(2001), 수학적 사고력과 발견술을 이용한 문제 분류, 아주대학교 석사학위논문.

김종명(1997), 수학사에서 수학의 패러다임 형성과 수학 교육관, 관동대학교 수학 교육과 Historia Mathematica vol.10. No.2.

김운용(1983), 수학의 철학적 사유, 대한 수학회 연차대회에서 발표한 논문.

나소연(2002), 수학적 사고력 신장을 위한 의사소통의 지도, 경희대학교 석사학위논문.

남승인(2000), 수학적 사고력 신장을 위한 규칙성 영역의 학습자료 개발, 대구교육 대학의 과학 수학 교육 연구 제23집.

신상철(2000), 수학적 사고력 신장을 위한 수업모형의 연구, 우석대학교 석사학위논문.

신영미(1992), 수학사와 수학교육, 서울 대학교 서울 대학원 수학교육.

신현성(1999), 수학교육론, 경문사.

이종세(1999), 수학적 사고와 문제해결 학습지도, 연세대학교 석사학위논문.

이종철(2000), 수학적 사고유형의 구체화 훈련이 문제해결력 및 태도에 미치는 영향, 전남대학교 석사학위논문.

장응철(1997), 수학적 사고력 신장을 위한 교수-학습 방법에 관한 연구, 대구대학교 석사학위논문.

정귀연(2002), 수학사를 도입한 수학 학습지도, 인제대학교 교육대학원 석사 학위논문.

정옥수(2000), 수학적 사고를 통한 듣기 지도방안, 경상대학교 석사학위논문.

한병호(1989), 수학이란 무엇인가: 수학의 본질과 20세기 수학의 핵심, 진리세계사.

Devlin(1995), 수학: 양식의 과학, 허민 오혜영 역, 경문사.

Shermark.stein(2000), 생활속의 수학 , 교우사.

스티븐 코비(1997), 성공하는 사람들의 7가지 습관, 김영사.

<Abstract>

A Study on the Mathematics education that open for Synthetic ideas

Yang, Young - Eun

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Jeju, Korea

Supervised by professor Jeong, Seung - Dal

The Goals of Mathematics Education is not to obtain the simple mathematical knowledge for the students but to develop student's ability to solve various kinds of problems in all aspects of life reasonably and scientifically by improving mathematical thought.

However, it is true that Mathematics Education of Korea has had emphasis placed on it not only toward learning simple mathematical knowledge but solving mathematical problems from a textbook. The reason for this has been the entrance examination system for high school and university for a long time. Recently it has been suggested to change the 7th education curriculum to relate mathematical content with daily life. For a long time, mathematics education has ignored the relevance to daily life. It is still not a satisfactory state that students do not realize synthesis thought is used to recognize mathematical essentials and can also analyze and build their individual lives by mathematical considerations.

This thesis is an attempt to provide students with the opportunity to think and solve many kinds of problems in their real life and also scientific problems

through the synthesis of different thought processes.

※ A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 2003.