碩士學位論文

택시기하학에서의 택시원추곡선의 특성

指導敎授 鄭 承 達

濟州大學敎 敎育大學院

數學敎育專攻

高 善 美

2006年 8月

택시기하학에서의 택시원추곡선의 특성

指導敎授 鄭 承 達

이 論文을 敎育學碩士學位論文으로 提出함

2006年 8月

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者 高 善 美

高善美의 敎育學 碩士學位論文을 認准함

2006年 8月

審査委員長 印

審 查 委 員 印

審 查 委 員 印

< 抄 錄 >

택시기하학에서의 택시원추곡선의 특성

高 善 美

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授 鄭 承 達

본 논문에서는 택시기하의 특성을 연구한다. 특히 택시원추곡선의 분류를 택시 거리함수를 이용한 방정식을 이용하여 연구하고 유클리드기하의 이차곡선과 비교 분석한다. 또한 택시기하학의 성질들을 이용한 많은 응용문제를 제시하였다. 택시기하는 우리가 살고 있는 도시에서 택시의 움직이는 거리를 그 모델로 삼은 비유클리드기하학이기 때문에 이해하기 쉬우면서 현실적이기 때문에 매우 흥미 있다. 또한 유클리드기하학과 매우 유사하므로 중고등학생들이 큰 어려움 없이 비유클리드기하학을 경험하게 할 수 있다.

---

* 본 논문은 2006학년도 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임.

목 차

Ⅰ. 서　　론

중등학교에서의 유클리드기하학을 가르치는 주된 이유는 논리적인 사고와 증명의 본질을 가르치기 위함이다. 유클리드기하학은 우리의 직관과 전혀 갈등이 없이 우리가 살고 있는 세계를 자연스럽게 설명하는 체계로서 쉽게 이해될 수 있지만 사실은 '공리'나 '공준'등에 기초한 공리체계로 이루어져 있다. 현재 중등학교 교과서에서 다루어지는 기초적인 기하학적 개념의 상당 부분이 공리나 공준이라는 언급이 없이, 직관적인 사실로 설명을 하고 있고 어느 정도는 유클리드기하학을 이해하는데 충분한 것 같다. 그러나 부분적인 우리 주변의 기하는 유클리드기하로 충분히 설명이 될 수 있지만 우리가 살고 있는 지구전체를 볼 때는 유클리드 기하학의 성질을 이용할 수가 없다. 다시 말하면 유클리드의 평행선 5공리로부터 탄생한 비유클리드기하학을 알아야 한다. 그렇지만 이런 비유클리드기하학은 기초적인 수학적 지식을 가진 학생들이 이해하기가 매우 힘이 든다. 다시 말하면 구면기하, 더 일반적으로 타원기하학은 직관의 힘에 쉽게 이해될 수가 없다. 물론 쌍곡기하학은 더더욱 어렵다. Krause (1973)는 중등학교에 비유클리드기하학이 다루어지지 않는 이유는 유클리드 기하학과 너무나 달라서 학생들이 이해하기가 쉽지 않기 때문이라 하였다.

본 논문에서는 유클리드기하학과 매우 유사하게 접근할 수 있는 택시기하학을 도입하여 비유클리드기하학을 직관적인 사고로 이해할 수 있도록 하고 유클리드기하와의 특성들을 기초적인 성질을 이용하여 비교한다. 특히 택시기하는 우리가 살고 있는 도시에서 택시의 움직이는 거리를 그 모델로 삼은 비유클리드기하학이기 때문에 이해하기 용의하면서 유클리드기하학과 매우 유사함으로 중등학생들이 큰 어려움 없이 비유클리드기하학을 경험하게 할 수 있고 이것을 통하여 수학의 본질을 인식하게 하는데 매우 유익한 기반을 제공할 것이다.

본론 1장에서는 먼저 현재 중등학교 과정에서 나타난 거리에 관한 개념이 어떻게 다루어지고 있는가를 조사해보고 2장에서는 택시기하의 개념을 소개하고, 유클리드 기하에서의 이차곡선이 택시기하에서는 어떻게 나타나는지 살펴보고, 3

장에서는 택시기하에서 택시 이차곡선의 일반화된 방정식을 찾아보고, 각각의 그래프의 형태를 연구한다.

Ⅱ. 본　　론

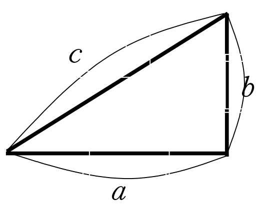
1. 현재 중등학교에서 나타난 거리의 개념

옛날 우리 인류는 건축물, 도로, 운하, 기계 등을 건설하기 위해서 길이, 면적, 체적 등을 측정해야 했다. 이를 위해서는 이 세상 물체들의 모양, 크기, 상대적 위치 등 물체의 공간적 성질(spatial properties)의 연구가 필수적이었고 이로부터 기하가 발달하여 왔다. 기원전 300여 년경 Alexandriad의 그리스 수학자 Euclid는 당시의 가장 포괄적인 기하체계를 만들어 “Element”라는 책을 저술함으로써 “유클리드기하”라고 불리어지는 기하학을 창시하였다. 그 후 유클리드의 원론에 대한 모순이 제기되면서 “비유클리드기하”가 또 하나의 기하로서 탄생하게 되는데 대표적인 것으로는 “쌍곡기하”와 “타원기하”가 있다.

최근에 미국의 미시간 대학의 수학교수로 재직중인 Eugine. F. Krause 교수는 비유클리드기하학의 어려움을 극복하면서 현실에 매우 유용한 것으로 택시기하학을 도입하였다. 그는 유클리드기하에서의 거리개념을 변형하여 실제로 도시에서 택시가 움직이는 거리개념을 도입하여 택시기하 이론을 전개하고 있다. 택시기하학의 많은 성질들을 연구하기 위하여 이장에서는 중등학교에서 다루어지는 유클리드 기하의 성질을 살펴본다.

(1) 피타고라스 정리

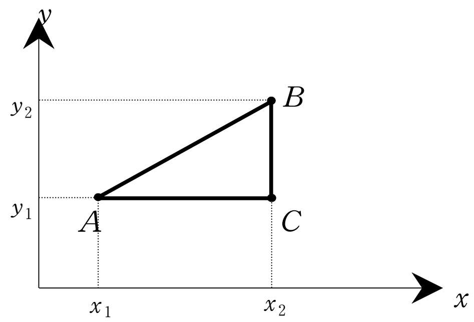
직각삼각형에서 직각을 끼고 있는 두 변의 길이를 a, b라 하고 빗변의 길이를 c라 하면 $a^2+b^2=c^2$이다.



(2) 두 점사이의 거리

좌표평면위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리를 구하여 보자. 다음 그림에서 $\triangle ABC$는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ 이 성립한다.



여기서

$\overline{AC} = |x_2 - x_1|$, $\overline{BC} = |y_2 - y_1|$

이다. 따라서

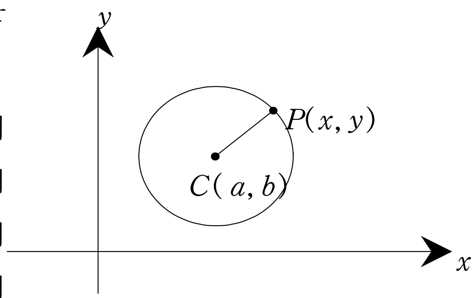
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

이고 $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 이다.

(3) 원의 방정식

점 C의 좌표를 (a, b)라고 하고 점 C를 중심으로 하는 반지름의 길이가 r인 원위의 임의의 점은 $P(x, y)$라 하면 $\overline{CP} = r$이므로

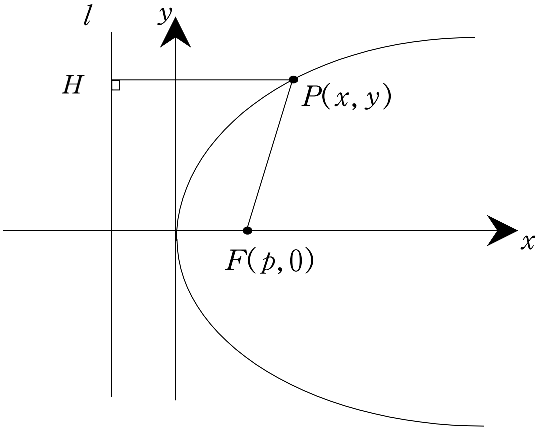
$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$ 이다. 양변을 제곱하면 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 이다.



여기에서 원을 어떤 임의의 한 점에서 같은 거리에 있는 점들의 집합으로 정의하고 있으며 좌표기하에서 원위의 임의의 점과 중심과의 거리를 피타고라스의 정리에 의해 계산함으로써 원의 방정식을 유도하고 있다.

(4) 포물선의 방정식

포물선의 축을 x축, 꼭지점을 원점, 초점을 $F(p, 0)$으로 놓으면 준선 l의 방정식은 $x=-p$ 이고포물선위의 임의의 점 $P(x, y)$에서 l에 그은 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여



$\overline{PF}=\overline{PH}$ 이다. 그런데

$\overline{PF}=\sqrt{(x-p)^2+y^2}$, $\overline{PH}=|x+p|$

이므로

$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$ 이다.

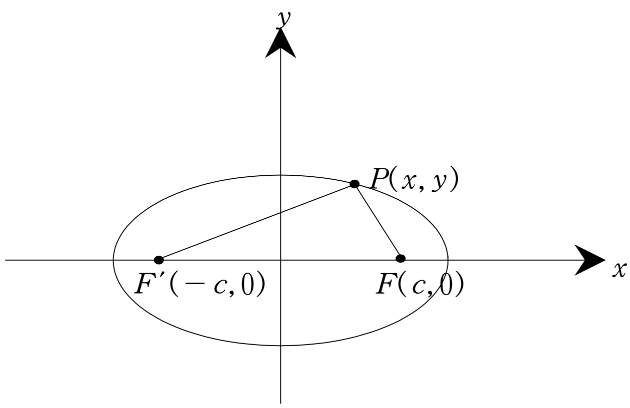
따라서 양변을 제곱하여 정리하면

$y^2=4px$ (단, $p \neq 0$) 이다.

여기에서 임의의 한 점, 곧 초점과 준선으로부터 같은 거리에 있는 점들의 집합을 포물선이라 정의하고 좌표평면에서 포물선의 임의의 점과 준선, 초점간의 거리를 피타고라스 정리에 의해 계산함으로써 포물선의 방정식을 유도하였다.

(5) 타원의 방정식

초점 F, F'의 좌표를 각각 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ 이라 하자. 타원위의 임의의 점을 $P(x, y)$라고 하면



$\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$(일정).

이다. 한편

$\overline{PF}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$,

$\overline{PF'} = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$
이므로 이를 정리하면

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{단, } b^2=a^2-c^2,\ b>0)$$

이다. 여기에서 두 정점으로부터의 거리의 합이 일정한 점 전체의 집합을 타원이라 정의하고, 타원위의 점과 두 초점 사이의 거리를 피타고라스 정리를 이용하여 계산함으로써 타원의 방정식을 유도하고 있다.

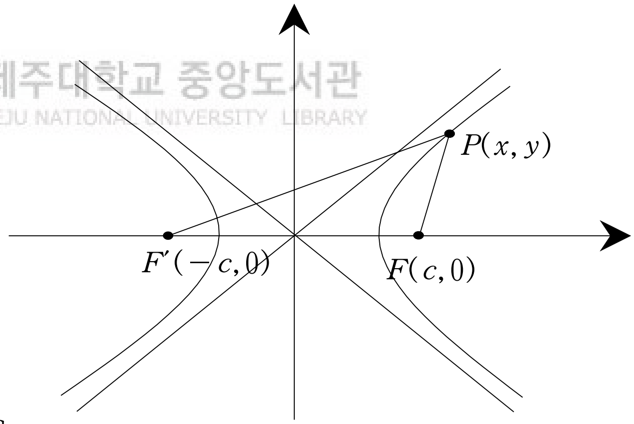
(6) 쌍곡선의 방정식

초점 F, F'의 자표를 각각 $F(c,0)$, $F'(-c,0)$ 이라하자. 쌍곡선 위의 임의의 점을 $P(x,y)$라 하면 $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2a$ (일정) 이다. 즉,

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}$
$-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$
이를 정리하면

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

(단, $b^2=c^2-a^2$, $b>0$)
이다.



여기에서 두 초점으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 쌍곡선이라 정의하고 두 초점과 쌍곡선 위의 임의의 점들 사이의 거리를 피타고라스의 정리를 이용하여 계산함으로써 쌍곡선의 방정식을 유도하고 있다.

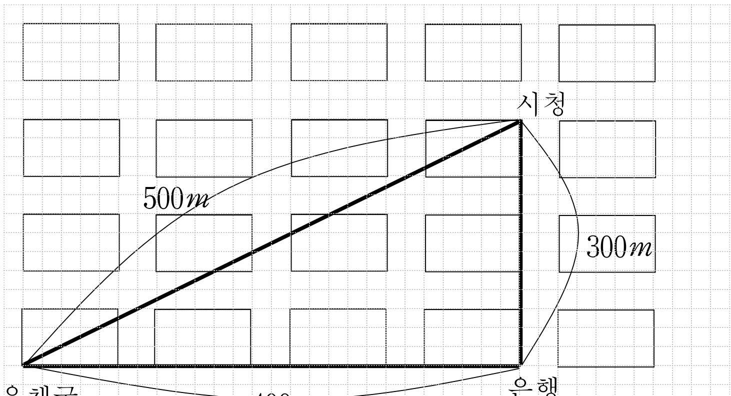
2. 택시기하에 대한 개념과 그 응용

2.1 택시기하의 개념 소개

일반적으로 평면기하학은 점, 선, 거리, 각도 등을 기본적으로 사용하고 그것들을 이용하여 많은 성질을 연구한다. 평면기하, 즉 유클리드 평면기하에 좌표를 도입하면 평면기하의 연구가 훨씬 쉬워진다. 즉, 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$에 대해 두 점사이의 유클리드 거리 d_E는 다음과 같이 정의 된다.

$$d_E(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

그러나 이러한 거리개념을 우리의 현실 생활에 적용하는 것은 비합리적이다. 다시 말하면 구획정리가 잘 된 도시를 상상해 보자. 블록간의 거리는 일정하게 $100m$ 라고 가정하자. 아래 그림과 같이 은행, 우체국, 시청이 위치해 있을 때 우체국에서 시청까지 택시를 탄다면 우체국에서 시청까지의 직선거리 $500m$에 해당하는 요금을 지불 할 수는 없다. 우체국에서 은행까지의 거리 $400m$, 은행에서 시청까지 $300m$, 총 $700m$에 해당하는 요금을 지불해야 할 것이다.

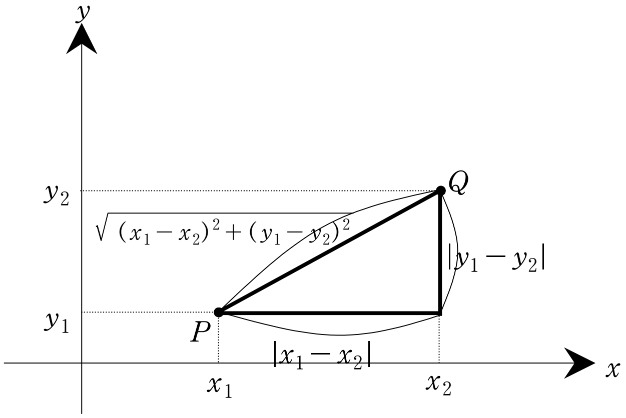


택시기하에서는 이러한 가상의 도시를 더욱 추상화해서 건물은 넓이가 없는 점으로, 도로는 폭이 없는 선으로 나타내어 거리의 개념을 수평거리와 수직거리

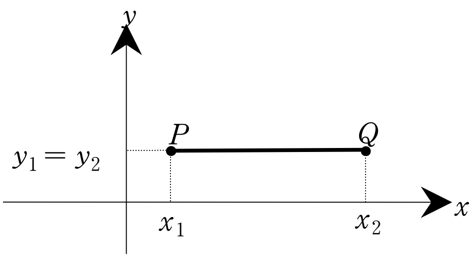
의 합으로 계산하고 이를 택시거리라 하고, 기호로 d_T로 나타낸다. 즉,

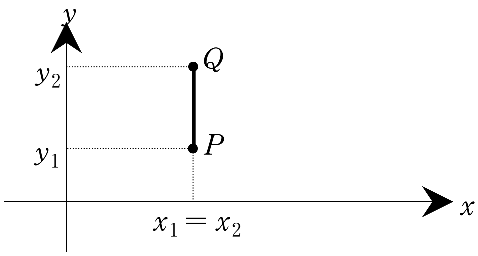
$$d_T(P,\ Q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

일반적으로 택시거리는 유클리드 거리보다 크다.



그러나 아래 그림에서와 같이 만약 이들 두 점 X, Y를 이은 선분이 x축, 또는 y축과 평행할 때는 결국 유클리드 거리와 택시거리는 같게 된다.





택시기하는 유클리드 기하와 유사하다. 점과 선, 그리고 각도를 나타내는 방법은 같다. 단지, 거리함수만 다를 뿐이다.

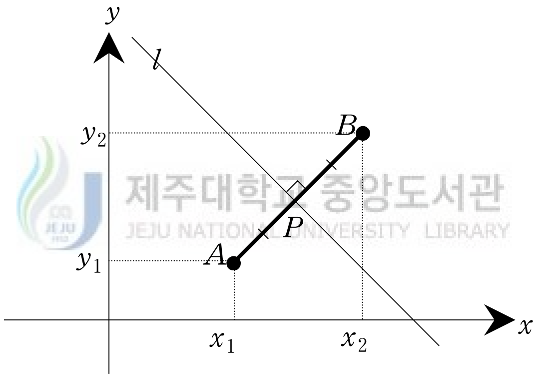
택시기하는 유클리드 공리 구조 속에서 유클리드 기하와는 밀접한 관련을 맺고 있으며 우리들의 실제 생활과 관련하여 여러 가지 응용문제들을 생각해 볼 수 있다. 뿐만 아니라, 유클리드 기하를 처음 시작하는 사람이라도 누구나 쉽게 이해할 수 있다는 장점이 있다.

2.2 택시기하에서의 택시원추곡선의 정의

(1) 두 점에서 같은 거리에 있는 점들의 자취

-. 유클리드 기하의 경우

유클리드의 좌표기하에서는 두 점에서 같은 거리에 있는 점들의 자취는 이들 두 점을 잇는 선분의 수직이등분선이다. 예를 들면 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$라면 점 A와 점 B로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취는 아래 그림에서 직선 l과 같다. 이 직선 l위의 임의의 점 P에서 A, B까지 의 거리는 각각 같다.



-. 택시기하의 경우

택시기하에서는 두 점에서 같은 거리에 있는 점들의 자취는 이들 두 점을 잇는 선분의 수직이등분선이 될 때는 드물다. 단지, 두 점을 이은 선분이 x축 또는 y축과 평행할 때만 가능하다. 일반적으로 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에서 같은 택시거리에 있는 점들의 자취를 찾는 방법은 다음과 같다.

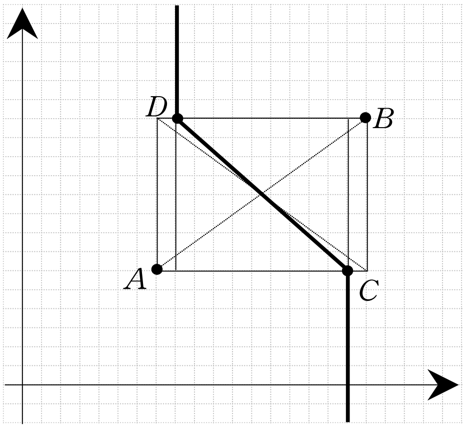
ⅰ) 점 A, B가 마주보는 꼭지점이 되는 직사각형을 그린다.

ⅱ) 사각형내의 두 대각선이 만나는 점 O를 찾는다.

ⅲ) 점 O를 대각선의 교점으로 하고 ⅰ)의 사각형을 벗어나지 않는 최대의 정사각형을 그린다.

ⅳ) 이때 선분 AB와 사이각이 큰 정사각형의 대각선을 선택한다.

ⅴ) ⅳ)의 대각선의 끝점 C, D에서 y축(또는 x축)에 평행한 반직선을 각각 그린다.



ⅵ) 이때 두 반직선과 대각선으로 연결된 선은 점 A와 점 B에서 같은 거리에 있는 점들의 자취이다.

예제1. 가상의 도시 $X(-1, 3)$에서 사고 신고가 경찰서에 접수되었다. 그 구역에는 두 대의 경찰차가 $C(-1, -1)$지점과 $D(2, 1)$지점에 있다. 어느 차가 더 빨리 도착할까?

풀이) C지점과 D지점에서 같은 거리에 있는 점들의 자취를 구해보자.

ⅰ) 좌표상에서 선분 CD를 대각선의 끝점으로 하는 직사각형을 그린다.

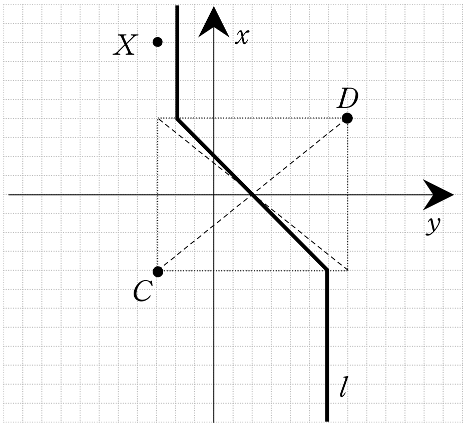
ⅱ) 사각형내의 두 대각선의 교점 O를 찾는다.

ⅲ) 점 O를 대각선의 교점으로 하고 ⅰ)의 직사각형을 벗어나지 않는 최대의 정사각형을 그린다.

ⅳ) 정사각형에서 선분 CD와 사이각이 큰 대각선을 선택한다.

ⅴ) ⅳ)에서 선택한 대각선의 끝점에서 y축에 평행한 반직선을 각각 작도한다.

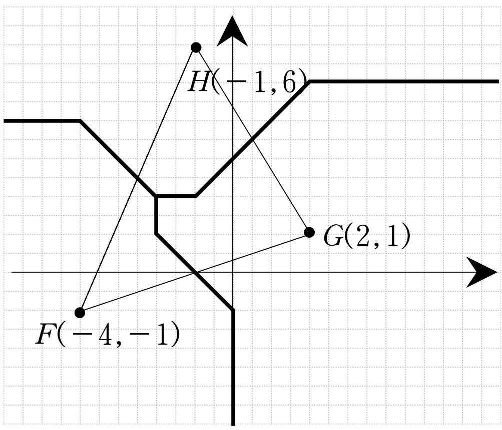
이와 같은 순서로 작도한 아래 그림에서 선 l은 C점과 D점으로부터 같은 거리에 있는 점들의 집합이다.



따라서 X지점에서 C지점까지의 거리가 더 가깝다는 것을 알 수 있다. 따라서 C지점에 있는 경찰차가 사건현장으로 보내져야 한다.

예제2. 가상의 도시에 3개의 고등학교가 있다. F고교는 $(-4,-1)$지점에, G고교는 $(2,1)$지점에 H고교는 $(-1,+6)$지점에 위치해 있다. 각각의 학생들은 그들의 집에서 가장 가까운 학교에 다녀야 한다면 그들은 이들 세 학교의 학군은 어떻게 나누어야 하는가?

풀이) 이들 세 학교에서 F고교와 G고교사이, F고교와 H고교사이, H고교와 G고교 사이에서 같은 거리에 있는 점들의 자취를 구하면 그림과 같다.



따라서 문제의 학군은 위 그림의 굵은 실선을 기준으로 하는 것이 합리적이다.

(2) **택시원**

유클리드의 좌표기하에서 원은 한 점에서 같은 유클리드거리에 있는 점들의 자취를 의미한다. 따라서 유클리드 기하에서의 원은 언제나 둥글다. 그래서 원을 작도하기 위해서는 컴퍼스를 사용한다.

정의1. 택시기하에서의 택시원은 한 점에서 같은 택시거리에 있는 점들의 집합이다. 반지름 r이고 중심이 O인 택시원은 다음과 같은 집합으로 나타난다.

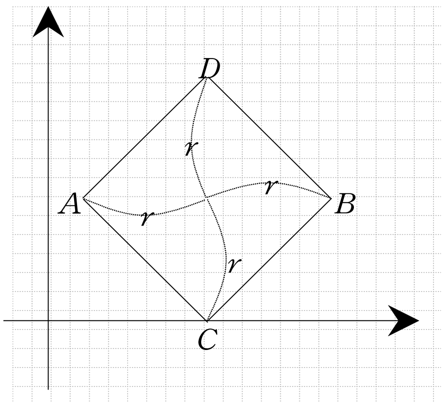
$$\{P \in \mathbb{R}^2 \mid d_T(O, P) = r\}$$

일반적으로 택시기하에서 중심이 O이고 반지름이 r인 택시원을 작도하는 방법은 다음과 같다.

ⅰ) 주어진 점에서 x축과 평행한 방향으로 거리가 r인 점을 점 A와 점 B를 각각 잡는다.

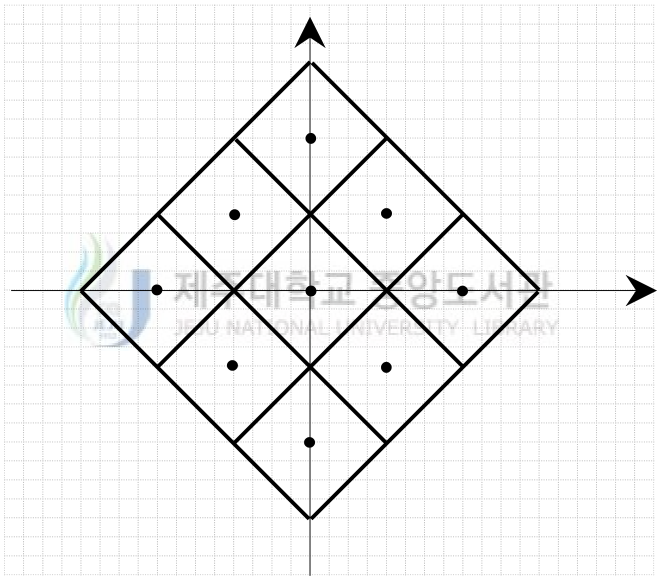
ⅱ) 주어진 점에서 y축과 평행한 방향으로 거리가 r인 점을 점 C와 점 D를 각각 잡는다.

ⅲ) ⅰ)과 ⅱ)에서 잡은 점들을 이어서 네모난 모양의 도형을 그린다.



예제3. 전화회사는 공중전화 박스를 세우기로 하였다. 그래서 도시의 중심부로부터 12블럭안에 살고 있는 모든 사람들이 공중전화 박스로부터 4블럭 이내에 위치할 수 있도록 설치하려고 한다. 그들은 얼마나 많은 박스를 어디에 세워야 하는가?

풀이) 도시의 중심부로부터 반경이 12인 택시원을 작도하고 이를 다시 반경이 4인 택시원 으로 나누면 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 반경이 4인 작은 각각의 택시원의 중심이 되는 지점에 공중전화 박스를 설치하면 된다.

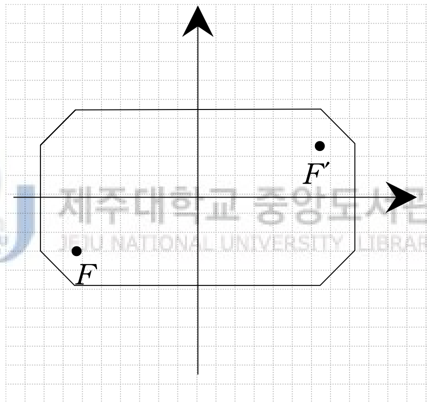
(3) 택시타원

유클리드 기하에서 타원은 두 정점으로부터의 유클리드 거리의 합이 일정한 점의 자취를 타원이라고 정의하며, 이때 두 정점을 타원의 초점이라고 정의한다. 같은 방법으로 택시타원을 정의하자.

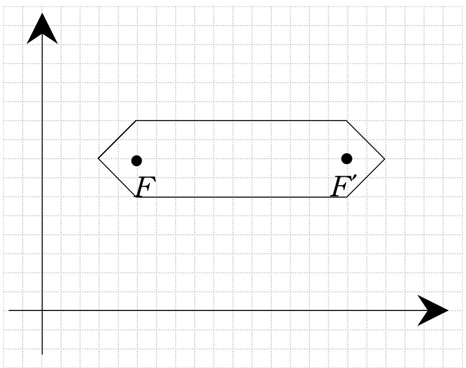
정의2. 택시기하에서의 택시타원은 두 정점으로부터 택시거리의 합이 일정한 점들의 집합이다. 즉, 좌표평면상에서 주어진 두 점 F, F'에 대해 택시거리의 합이 $2a$인 택시타원은 다음과 같이 주어진다.

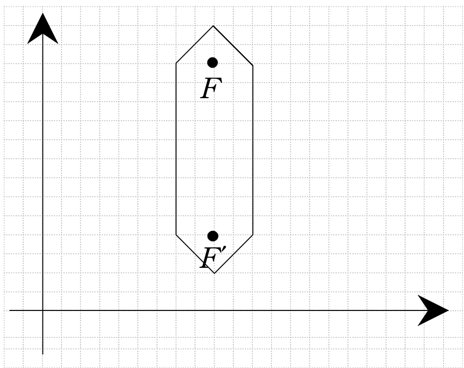
$$\{P \in \mathbb{R}^2 \mid d_T(P,F) + d_T(P,F') = 2a \text{ (일정)}\}$$

참고) 유클리드 타원과 달리 택시타원은 초점의 위치에 따라 그래프의 모양이 달라진다. 즉, F와 F'이 x축 또는 y축과 나란하지 않을 때에는 다음과 같은 그림이 된다.



특히 두 초점을 이은 선분이 x축 또는 y축과 평행할 때는 또 다른 모양으로 그림과 같은 모양으로 나타난다.





택시타원위의 임의의 한점 P에서 두 초점 F, F'에 이르는 택시거리의 합은 항상 일정하다. 그러면 택시기하에서 택시타원이 어떻게 작도되는지 예를 들어 알아보자.

예제4. $F(-2,-1), F'(2,2)$가 초점이고 이들 두 점에서의 택시거리의 합이 9가 되는 점의 자취 즉, $\{P \mid d_T(P,F)+d_T(P,F')=9\}$를 그려라.

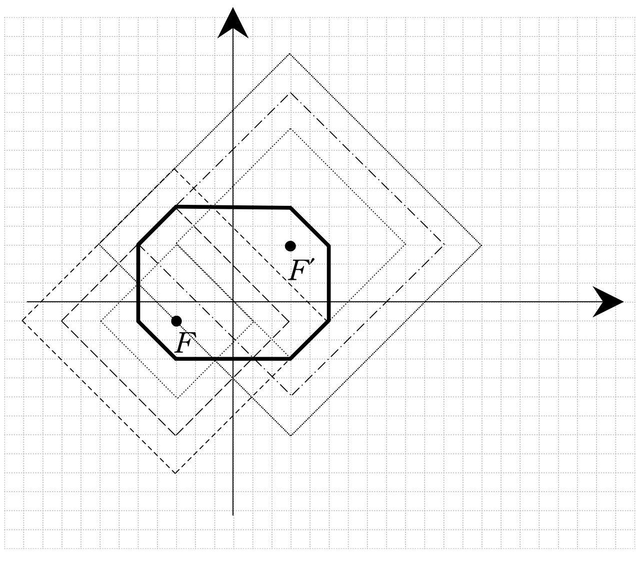
ⅰ) 중심이 F이고 반경이 5인 택시원과 중심이 F'이고 반경이 4인 택시원을 그린다. 이들 두 원이 만나는 점을 찾는다.

ⅱ) F에서부터 반경이 4인 택시원과 F'에서부터 반경이 5인 택시원을 그린다. 이들 두 원의 만나는 점을 찾는다.

ⅲ) F에서부터 반경이 3인 택시원과 F'에서부터 반경이 6인 택시원을 그린다. 이들 두 원의 만나는 점을 찾는다.

ⅳ) ⅰ), ⅱ),ⅲ)과 같은 방법으로 중심이 F와 F'이고 반경의 합이 9가 되는 두개의 택시원을 그려서 만나는 점을 찾는다.

ⅴ) 타원의 대체적인 모양을 알 수 있을 만큼 충분한 점을 찾고 그들 점들을 연결한다.



예제5. 제주 공업주식회사는 이상적인 장소에 공장을 지으려고 한다. $C(-5,-3)$지점에 위치한 기차역으로부터의 거리와 $D(5,-1)$지점에 위치한 공항으로부터의 거리의 합이 많아야 16블록이 되는 곳에 공장을 지으려고 한다. 제주 공업주식회사는 어느 곳에 공장을 지을 수 있는가?

풀이)

ⅰ) 중심이 C이고 반경이 9인 택시원과 중심이 D이고 반경이 7인 택시원을 그린다. 이들 두 원이 만나는 점을 찾는다.

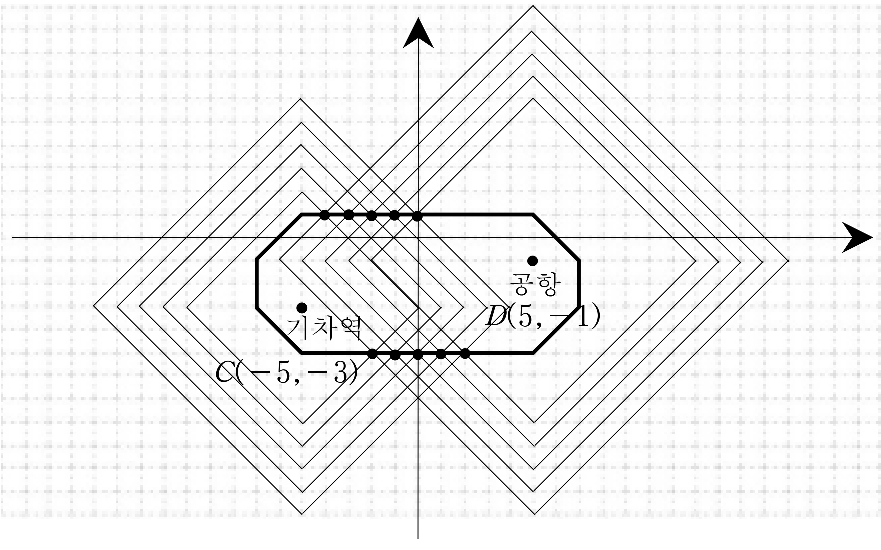
ⅱ) C에서부터 반경이 8인 택시원과 D에서부터 반경이 8인 택시원을 그린다. 이들 두 원의 만나는 점을 찾는다.

ⅲ) C에서부터 반경이 7인 택시원과 D에서부터 반경이 9인 택시원을 그린다. 이들 두 원의 만나는 점을 찾는다.

ⅳ) C에서부터 반경이 6인 택시원과 D에서부터 반경이 10인 택시원을 그린다. 이들 두 원의 만나는 점을 찾는다.

ⅴ) ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ) 과 같은 방법으로 중심이 C와 D이고 반경의 합이 16이 되는 두개의 택시원을 그려서 만나는 점을 찾는다.

ⅵ) 타원의 대체적인 모양을 알 수 있을 만큼 충분한 점을 찾고 그들 점들을 연결한다.



ⅶ)공항은 위의 실선으로 나타난 택시타원의 내부에 설립하는 것이 좋다.

(4) 택시쌍곡선

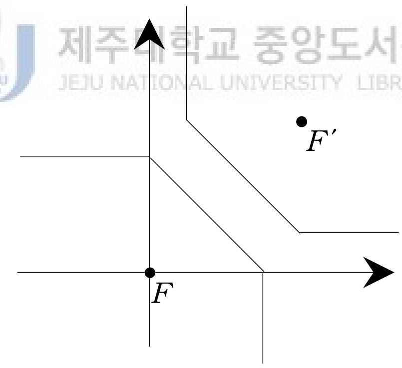
유클리드 기하에서 쌍곡선은 두 정점으로부터의 유클리드 거리의 차가 일정한 점의 자취로 정의한다.

즉, $\{ P \mid |d_E(P,F) - d_E(P,F')| = 2a \text{ (일정)} \}$ 이다. 이때 두 정점 F, F'를 쌍곡선의 초점이라고 정의한다. 유사하게 택시쌍곡선을 정의한다.

정의3. 택시기하에서 택시쌍곡선은 두 정점으로부터의 택시거리의 차가 일정한 점들의 집합이다. 즉, 임의의 주어진 F, F'에 대해 택시쌍곡선은 다음과 같이 주어진다.

$$\{ P \mid |d_T(P,F) - d_T(P,F')| = 2a \text{ (일정)} \} .$$

이때 두 정점 F, F'는 택시쌍곡선의 초점이라 한다.



따라서 유클리드 쌍곡선과는 전혀 다른 모양으로 나타난다.

택시기하에서 택시쌍곡선을 작도하는 방법은 택시타원의 작도방법과 유사하여 택시원을 반복하여 작도하면서 택시 쌍곡선의 자취를 찾아나간다.

그러나 택시쌍곡선도 택시타원과 유사하게 초점 F와 F'의 위치에 따라 다양한 방법으로 나타난다. 이 경우의 일반적인 것은 3장에서 다룰 것이다.

예제6. 삼순이와 삼식이가 이상적인 도시에서 어떤 집을 구하고 있다. 삼순이는 제과점 $A(-3,-1)$에서 일을 하고 있고, 삼식이는 $B(3,3)$에서 일을 하고 있다. 그들의 집을 얻는데 결정사항은 한 사람이 걷는 거리가 다른 한 사람이 걷는 거리보다 4블록 이상 많지 않아야 한다는 것이다. 그들은 어디에서 집을 구해야 하는가?

풀이)

ⅰ) 중심이 A이고 반경이 11인 택시원과 중심이 B이고 반경이 7인 택시원을 그린다. 이들 두 원이 만나는 점을 찾는다.

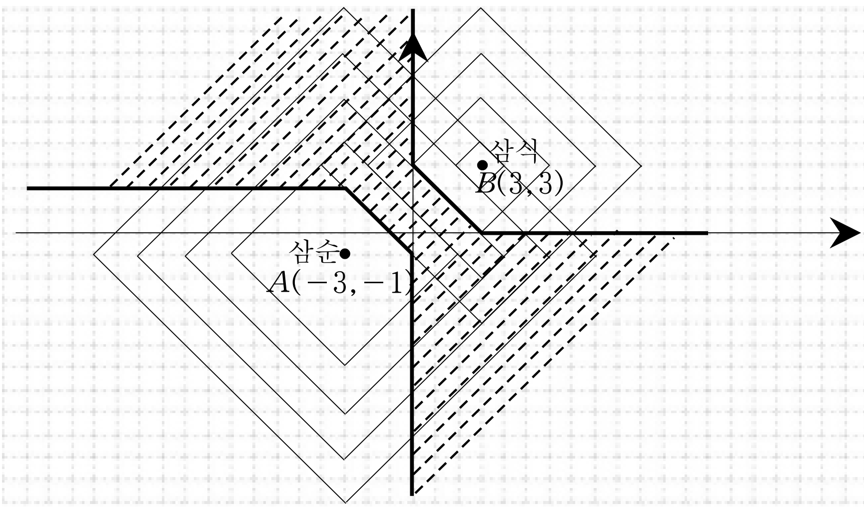
ⅱ) A에서부터 반경이 9인 택시원과 B에서부터 반경이 5인 택시원을 그린다. 이들 두 원의 만나는 점을 찾는다.

ⅲ) A에서부터 반경이 7인 택시원과 B에서부터 반경이 3인 택시원을 그린다. 이들 두 원의 만나는 점을 찾는다.

ⅳ) A에서부터 반경이 5인 택시원과 B에서부터 반경이 1인 택시원을 그린다. 이들 두 원의 만나는 점을 찾는다.

ⅴ) ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)과 같은 방법으로 중심이 A와 B이고 반경의 차가 4가 되는 두개의 택시원을 그려서 만나는 점을 찾는다.

ⅵ) 포물선의 대체적인 모양을 알 수 있을 만큼 충분한 점을 찾고 그들 점들을 연결한다.



ⅶ) 삼순이와 삼식이는 위의 택시 쌍곡선의 빗금친 부분에 집을 얻어야 한다.

3. 택시원추곡선

3.1 택시원추곡선의 일반형

평면에서 모든 원추곡선의 집합은 두 가지 변수의 2차 방정식으로 나타낼 수 있다.

정의4. 택시평면상에서 주어진 한 점 P에서 직선 l까지의 택시거리는 다음과 같이 정의한다.

$$d_T(P, l) = \min_{X \in l} d_T(P, X).$$

정리1. 택시평면에서 한 점 $P = (x_0, y_0)$가 주어질 때 한 점 P에서 직선 $l: ax + by + c = 0$까지의 거리는 다음과 같이 주어진다.

$$d_T(P, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|, |b|\}}.$$

증명: X는 직선 l과 $x = x_0$, Y는 직선 l과 $y = y_0$의 교점이라 하자. 그때

$$d_T(P, l) = \min\{d_T(P, X),\ d_T(P, Y)\}$$

$$d_T(P, l) = \begin{cases} \min\left\{\left|\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{b}\right|, \left|\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a}\right|\right\} & \text{if } a \neq 0 \neq b \\ \left|\dfrac{by_0 + c}{b}\right| & \text{if } a = 0 \\ \left|\dfrac{ax_0 + c}{a}\right| & \text{if } b = 0 \end{cases}$$

$$= (\max\{|a|, |b|\})^{-1} \cdot |ax_0 + by_0 + c| \qquad ■$$

참고) 한 점 P에서 직선 l까지의 택시 거리를 다시 정의하면 다음과 같다.

(가) l이 급경사 직선일 경우: P의 x좌표를 따라서 점 P에서 l까지의 거리를 구

한다.

(나) l이 완만한 경사 직선일 경우: P의 y좌표를 따라서 점 P에서 l까지의 거리를 구한다.

(다) l이 $45°$ 직선일 경우, x축 또는 y축을 따라서 점 P에서 l까지의 거리를 구한다.

정리2. 초점 $F_1(x_1, y_1)$, ($F_2(x_2, y_2)$ 또는 초점(x_1, y_1)과 준선 $ax+by+c=0$을 갖는 택시원추곡선은 다음과 같은 방정식의 형태를 따른다.

$$|x-x_1|+|y-y_1|+\alpha(|x-x_2|+|y-y_2|)+\beta(|ax+by+c|)\mp\alpha\gamma=0. \qquad (*)$$

여기서 $\alpha\in\{-1,0,1\}$, $\beta=e(\alpha^2-1)(\max\{|a|,|b|\})^{-1}$, $\gamma\le 0$, e는 원추곡선의 이심률이다.

증명: 초점 (x_1, y_1)와 (x_2, y_2)을 갖는 택시원추곡선의 방정식의 형태는

$$|x-x_1|+|y-y_1|+p(|x-x_2|+|y-y_2|)=\mp q. \qquad (1)$$

여기서 $p\in\{-1,1\}$, $q\ge 0$이다.

유사하게 초점 $F_1(x_1, y_1)$, 준선 $ax+by+c=0$을 갖는 택시원추곡선의 방정식의 형태는

$$|x-x_1|+|y-y_1|+\gamma|ax+by+c|=0, \quad \gamma<0. \qquad (2)$$

따라서 (1)과 (2)의 일차결합

$$a_1(|x-x_1|+|y-y_1|)+a_2(|x-x_2|+|y-y_2|)+a_3|ax+by+c|\mp a_4=0 \quad (3)$$

을 얻는다. 이 (3)식이 모든 택시원추곡선을 나타낸다. 식 (3)에서 $a_1\neq 0$임은 분명하다. 따라서 $a_1=1$이라고 해도 상관이 없으니까 $a_1=1$이라 하자. 그러면

방정식 (3)이 (1)를 포함할 필요충분조건 $a_2\in\{-1,1\}$, $a_3=0$, $a_4\le 0$이고, 따라서 $a_3=(a_2^2-1)s$, $s\in R$이다.

방정식 (3)이 (2)를 포함 할 필요충분조건은 $a_2=0$, $a_3<0$, $a_4=0$이고, $a_4=a_2\gamma$, $\gamma\le 0$이다.

만약 $a_2=\alpha$라 하자. 방정식 (3)은

$$|x-x_1|+|y-y_1|+\alpha(|x-x_2|+|y-y_2|)+(\alpha^2-1)s\ |ax+by+c|\mp\alpha\gamma=0. \quad (4)$$

여기서 $\alpha\in\{-1,0,1\}$, $s>0$, $\gamma\leq 0$이다.

특히 $\alpha=0$인 경우 방정식(4)로 부터

$$s=\frac{|x-x_1|+|y-y_1|}{|ax+by+c|}$$ 이다.

만약 e를 다음과 같이 두자.

$$e=\max\{|a|,|b|\}\cdot\frac{|x-x_1|+|y-y_1|}{|ax+by+c|}$$

그러면 $e=s\cdot\max\{|a|,|b|\}$ 이기 때문에

$(\alpha^2-1)\cdot s=e(\alpha^2-1)(\max\{|a|,|b|\})^{-1}=\beta$이다. ■

참고) 방정식 (*)에 의해 나타나는 모든 택시원추곡선은 계수 α을 사용함으로써 두 가지로 분류할 수 있다. 방정식(*)에 의해 나타나는 택시원추곡선은 $\alpha=1$이면 택시타원이고 $\alpha=-1$이면 택시쌍곡선이다. 그리고 $\alpha=0$일 때는 택시포물선이다. 이 경우 $0<e<1$, $e=1$, $e>1$ 이면 $f-d$타원, 택시포물선, $f-d$쌍곡선이라고 부른다.

3.2 택시타원의 분류

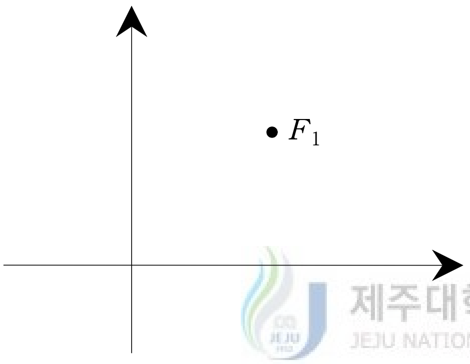
본 장에서 $F_1=(x_1,y_1)$, $F_2=(x_2,y_2)$ $(x_1\leq x_2)$은 고정된 초점이고 m은 택시평면에서 F_1F_2을 잇는 기울기이다. $m=\infty$일 조건은 F_1F_2가 y축에 평행이다. $d_T(F_1,F_2)=\delta$라 하면 택시타원은 다음과 같이 분류된다.

정리 3. 방정식(*)에서 $\alpha=1$일 때 택시타원이고, 그 방정식은 다음과 같다.

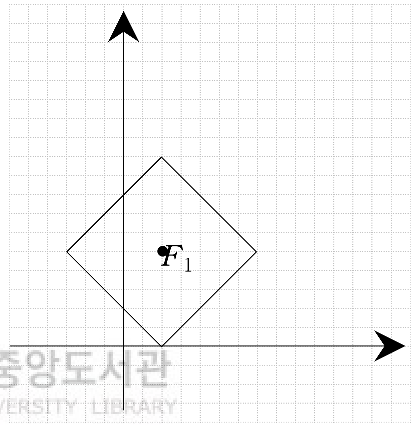
$$|x-x_1|+|y-y_1|+|x-x_2|+|y-y_2|+\gamma=0, \quad \gamma\le 0 .$$

(1) $-\gamma<\delta$는 공집합이다.

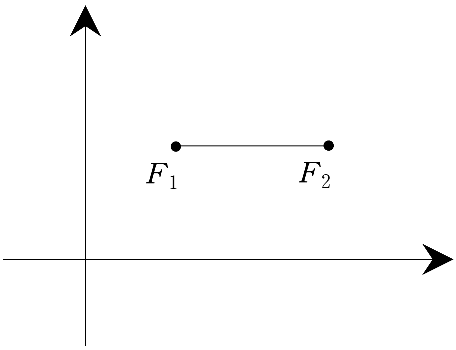
(2) $-\gamma\ge\delta$ 일 때는 다음과 같다.



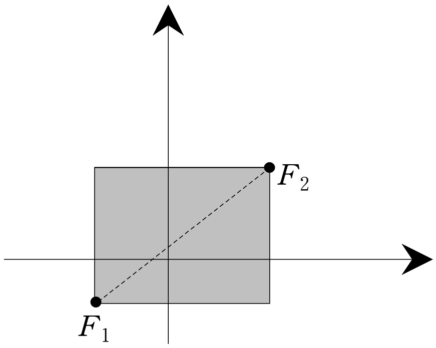
$\delta=0, \gamma=0$



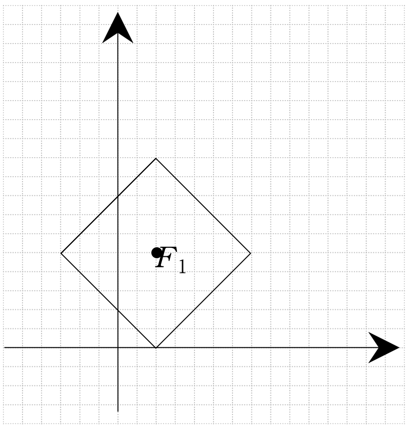
$\delta=0, \gamma<0$



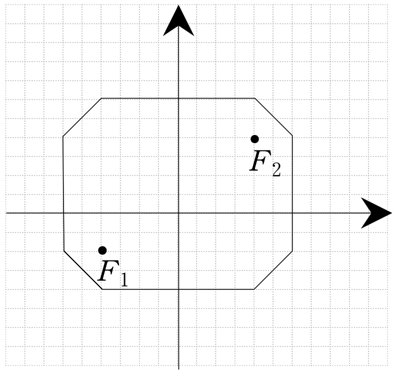
$-\gamma=\delta\ (m=0,\infty)$



$-\gamma=\delta\ (othercase)$



$-\gamma > \delta$ $(m=0,\infty)$



$-\gamma > \delta$ $(other\,case)$

3.3 택시쌍곡선의 분류

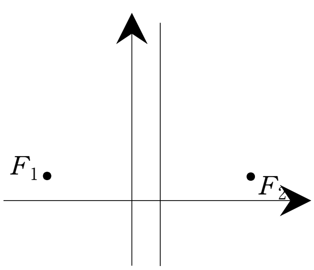
$d_T(F_1, F_2)=\delta$라 하면 택시쌍곡선은 다음과 같이 분류된다.

정리 4. 방정식(*)에서 $\alpha=-1$일 때 택시쌍곡선이고, 그 방정식은 다음과 같다.

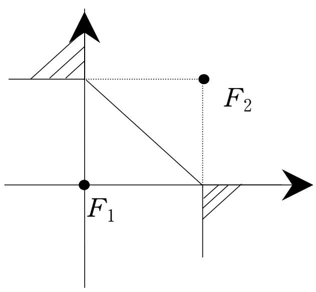
$$\left| |x-x_1|+|y-y_1|-(|x-x_2|+|y-y_2|) \right| + \gamma = 0, \quad \gamma \le 0.$$

(1) $-\gamma > \delta$ 공집합이다.

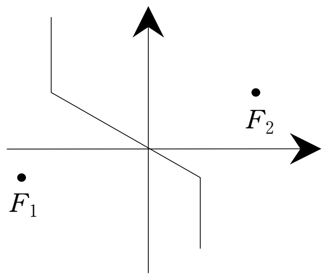
(2) $-\gamma \le \delta$ 일 때는 다음과 같다.



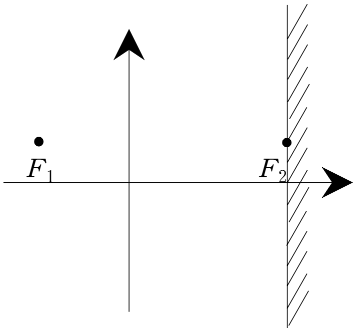
$\gamma=0$ $(m=0,\infty)$



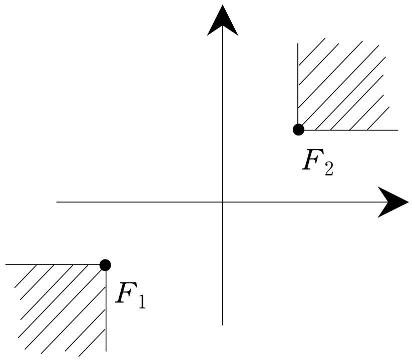
$\gamma=0$ $(m=\pm 1)$



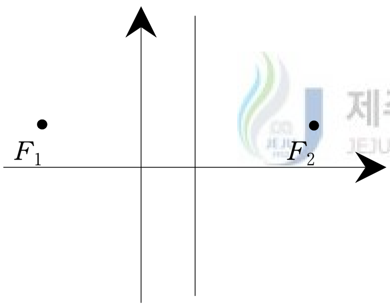
$\gamma=0$ $(othercase)$



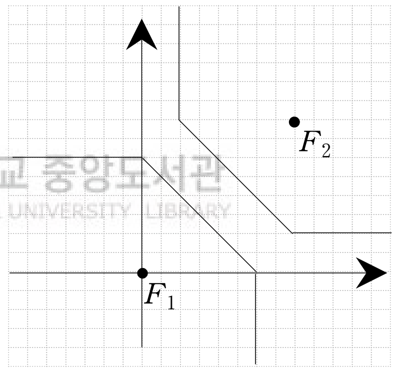
$-\gamma = \delta$ ($m=0,\infty$)



$-\gamma = \delta$ ($othercase$)



$-\gamma < \delta$ ($m=0,\infty$)

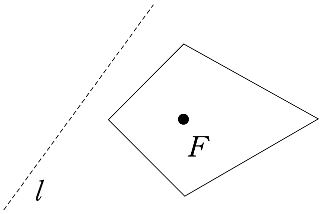


$-\gamma < \delta$ ($othercase$)

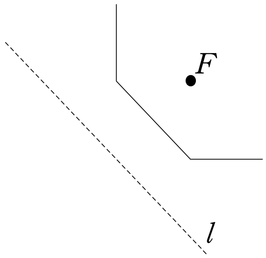
3.3 택시포물선의 분류

정리 5. 방정식(*)에서 $\alpha = 0$ 일 때 택시포물선의 방정식은 다음과 같다.

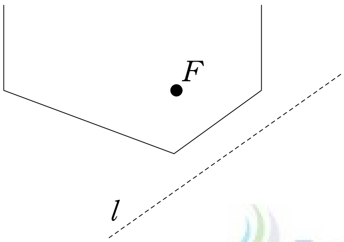
$$|x - x_1| + |y - y_1| - e(\max\{|a|, |b|\})^{-1}|ax + by + c| = 0.$$



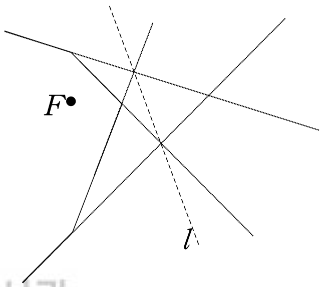
$0 < e < 1$



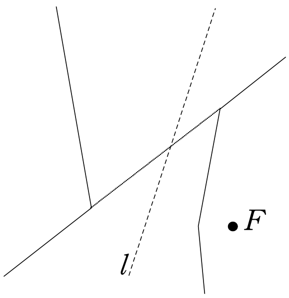
$e=1,\ |\frac{-a}{b}|=1$



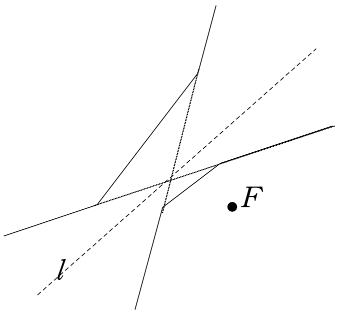
$e=1, |\frac{-a}{b}| < 1$



$|\frac{-a}{b}| > e > 1$



$|\frac{-a}{b}| = e > 1$



$e > |\frac{-a}{b}| > 1$

※ 정리3,4,5의 증명은 참고문헌[3]을 참조.

Ⅲ. 결　　론

유클리드기하에서 거리함수 만을 달리 적용하였을 때, 우리는 색다른 경험을 하게 된다. 우리가 살고 있는 실제 사회에서 아무리 직선거리가 가까워도 두 지점 사이에 길이 없는 경우에는 돌아 갈 수밖에 없고 그렇게 가는 거리가 현실적인 거리이기 때문이다. 유클리드기하가 - 한 지점에서 어느 방향으로도 장애 없이 갈 수 있는 - 자연적인 세계를 서술하는 것이라면, 택시기하는 도로망이 발달한 도시의 모습을 설명하는 기하로 인식될 수 있을 것이다.

택시 기하학은 유클리드 기하학에 가장 가깝고 이해하기 쉬운 비유클리드 기하학의 하나라고 볼 수 있다. 또한 실생활에 이용할 수 있는 수학으로서 많은 응용성을 내포하고 있기 때문에 택시 기하학은 학생들이 수학에 흥미를 갖게 하고 학생들이 창의성을 기르는데 큰 역할을 한다. 더구나 학생들이 체험을 통하여 확인이 가능한 비 유클리드기하라는 점에서 지금까지 어려웠던 비 유클리드 기하의 설명을 쉽게 할 수 있다는 점에서 택시기하의 탐구는 반드시 필요하다고 생각한다. 택시 기하학은 좌표평면에 대한 지식만 있으면 누구나 쉽게 이해할 수 있기 때문에 유클리드기하와 비교하여 수학에 대한 새로운 경험을 통하여 학생들이 독창적인 과제를 수행할 수 있다. 택시 기하학은 아직 체계적으로 발전되지 못했으며 잘 알려지지도 못하고 있다. 물론 택시 거리 개념은 위상수학에서 기초적인 성질로써 잘 알려져 있다. 실제로 택시 거리를 포함하는 일련의 거리 개념은 민코프스키에 의해 도입되었다. 그러나 분명한 것은 택시 거리 위에 기초하여 기하학을 충분히 전개시킨 사람은 아직 아무도 없다. 따라서 학생들에게 택시 거리의 새로운 수학적 개념에 도전하는 자세를 심어줄 필요가 있으며 고등학교 교육과정에 나와 있는 도형의 방정식과 삼각함수 등 유클리드 기하학에 기초한 모든 영역을 택시 기하학으로 바꾸어 어떻게 변화되는지를 탐구하게 하는 것은 요즘 강조되는 창의성 교육에 매우 접근된 과제가 될 것이다.

유클리드 기하학에 기초한 고등학교까지의 기하 영역을 비유클리드 기하학의 하나인 택시 기하학으로 확장하여 적용함으로써 수학 학습에 있어서 탐구 능력

을 기를 수 있음은 물론 창의적이고 독창적인 이론의 전개를 통하여 폭 넓은 사고력을 기르게 할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1] Krause, Eugene F, “Taxicab Geometry-An Adventure in Non-Euclidean Geometry”, Dover Publication, Inc., New York, 1986.

[2] 김경동, “중등학교에서의 택시기하 지도방안”, 충북대학교 교육대학원 석사 학위논문, 1996.

[3] Ges. Hamburg, “General Equation For Taxicab Conics And Their Classification”, Mitt. Math.135-148, 2000.

[4] Kuan-Kuan Tian, “Taxicab Parabolas”, *The Pillow Book*, 2002.

[5] 김경동, “택시기하학(비유클리드 기하학에서의 모험)”, 경문사, 2004.

< Abstract >

Taxicap Conics on the Taxicap geometry

Sun-mi Ko

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Jeju, Korea

Supervised by professor Seoung Dal Jung

In this thesis, we study the properties of the taxicap geoemtry. In particular, we study the properties of the taxicap conics with the equations and compare to the properties of the conics on the Euclidean plane. We also give many applications about the taxicap conics.

Taxicap geometry is the geometry by the taxicap distance function, which the distance between two points is measured by moving distance of taxi and so one of Non-Eulicdean geometry which students can understand very well.