碩士學位論文

택시기하학에서의 택시삼각함수

濟州大學校 教育大學院

數學教育專攻

文 淑 媄

2007年 8月

택시기하학에서의 택시삼각함수

指導敎授 鄭 承 達

文 娥 媄

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함.

2007年 8月

文娥媄의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

審 査 委 員 長 ________ 印

委 員 ________ 印

委 員 ________ 印

濟州大學校 敎育大學院

2007年　8月

목　　차

< Abstract >

< 抄 錄 >

택시기하학에서의 택시삼각함수

文 娽 媄

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

指導敎授 鄭 承 達

본 논문에서는 택시기하학에서 택시삼각함수를 정의하고 택시삼각함수의 성질을 연구한다. 택시기하학은 비유클리드 기하학으로서 우리가 살고 있는 도시에서 택시의 움직이는 거리를 그 모델로 하는 기하학이다. 또한 택시기하학은 유클리드기하학과 매우 비슷하므로 중 · 고등학생들이 큰 어려움 없이 비유클리드기하학을 경험하게 할 수 있는 기하학의 한 분야이다.

* 본 논문은 2007학년도 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임.

1. 서　　론

중 고등학교에서의 유클리드 기하학은 합리적 및 논리적으로 수학적 사고를 신장시키는데 큰 몫을 담당하여 왔다. 유클리드기하학은 우리의 직관과 전혀 갈등이 없이 우리가 살고 있는 세계를 자연스럽게 설명하는 체계로서 쉽게 이해될 수 있지만 사실은 ‘공리’나 ‘공준’등에 기초한 공리체계로 이루어져 있다. 또한 우리의 실생활에 큰 도움을 주는 사실을 수학적으로 설명하는 토대를 인류의 시작부터 이 모든 과학에서 절대적인 가치를 지닌 것으로 인식되어 왔다. 그러나 유클리드 기하학으로 설명이 불가능한 사실들이 생겨나고 이것은 평행선 공리에 의해 탄생된 비 유클리드 기하에 의해 설명이 가능하게 되었다.

그러나 비유클리드 기하학은 대개의 경우 난해하여 중 고등학교에서 쉽게 접근하기가 어렵다. 이런 비 유클리드 기하학중 택시 기하학은 유클리드 기하학에 가장 가깝고 이해하기 쉬운 기하학의 예이다. 또한 실제적으로 생활에 이용할 수 있는 수학으로서 많은 응용성을 내포하고 있기 때문에 그 연구가치는 높다. 뿐만 아니라 택시 기하학은 수학에 흥미를 갖고 있는 학생들에게 무한한 상상의 나래를 펼칠 수 있는 창의성을 기르는데 좋은 아이디어를 산출하는 분야로 좋은 표본이 되어 줄 것이다.

본 논문에서는 유클리드기하학과 비슷하며 일상에서 쉽게 이해할 수 있는 택시기하학을 도입하여 비유클리드 기하학을 직관적인 사고로 접근할 수 있도록 한다. 택시기하는 우리가 살고 있는 도시에서 택시의 움직이는 거리를 그 모델로 삼은 비유클리드 기하학이다. 특히 택시삼각함수를 정의하고 그 성질을 연구한다.

본론에서는 먼저 택시거리와 택시호도법, 택시 삼각함수를 소개하고 택시 삼각함수의 각의 성질을 알아본다. 그 다음으로는 택시사인과 코사인의 덧셈, 뺄셈 법칙에 대해 알아보고, 마지막으로 택시사인과 코사인, 탄젠트 그래프의 형태를 살펴본다.

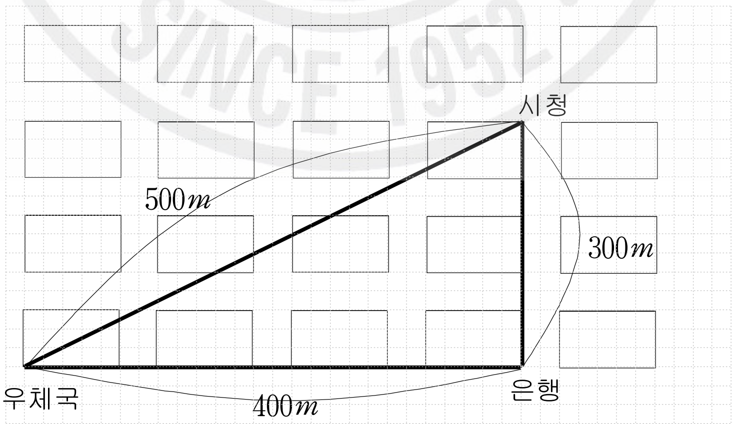
2. 택시기하

2.1 택시거리함수

일반적으로 평면기하학은 점, 선, 거리, 각도 등을 기본적으로 사용하고 그것들을 이용하여 많은 성질을 연구한다. 평면기하, 즉 유클리드 평면기하에 좌표를 도입하면 평면기하의 연구가 훨씬 쉬워진다. 즉, 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$에 대해 두 점사이의 유클리드 거리 d_E는 다음과 같이 정의 된다.

$$d_E(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

그러나 이러한 거리개념을 우리의 현실 생활에 적용하는 것은 비합리적이다. 다시 말하면 구획정리가 잘 된 도시를 상상해 보자. 블록간의 거리는 일정하게 $100m$ 라고 가정하자. 아래 그림과 같이 은행, 우체국, 시청이 위치해 있을 때 우체국에서 시청까지 택시를 탄다면 우체국에서 시청까지의 직선거리 $500m$에 해당하는 요금을 지불 할 수는 없다. 우체국에서 은행까지의 거리 $400m$, 은행에서 시청까지 $300m$, 총 $700m$에 해당하는 요금을 지불해야 할 것이다.

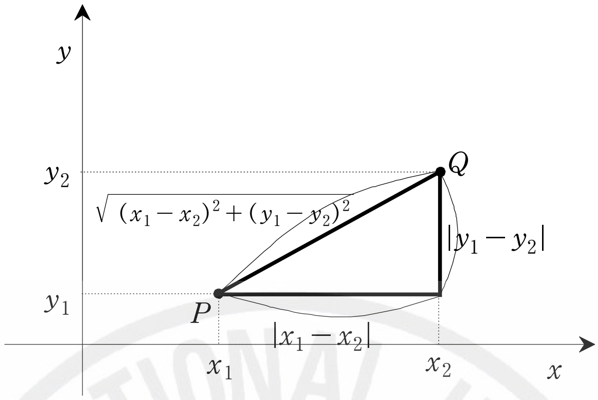


택시기하에서는 이러한 가상의 도시를 더욱 추상화해서 건물은 넓이가 없는 점으로, 도로는 폭이 없는 선으로 나타내어 거리의 개념을 수평거리와 수직거리

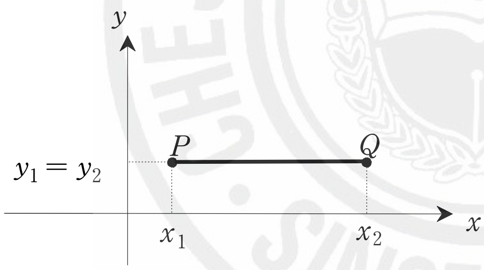
의 합으로 계산하고 이를 택시거리라 하고, 기호로 d_T로 나타낸다. 즉,

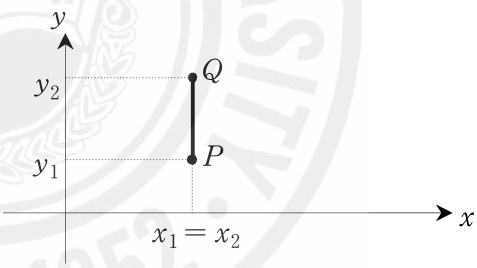
$$d_T(P,\ Q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

일반적으로 임의의 두 점 P, Q 에 대하여 $d_T(P, Q) \geq d_E(P, Q)$ 이다.



더구나 $d_T(P, Q) = d_E(P, Q)$일 필요충분조건은 선분 $\overline{PQ}$ 가 x 축 또는 y축과 평행할 때이다. 다시 말하면 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$에 대하여 $x_1 = x_2$ 또는 $y_1 = y_2$ 일 때이다.

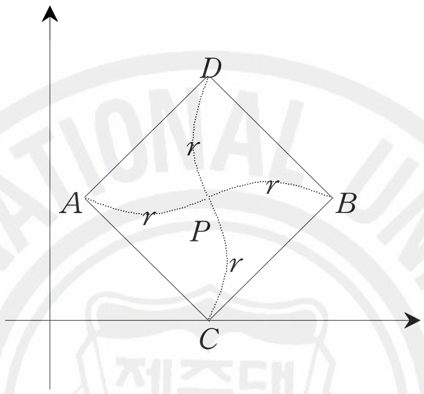




택시기하에서 점과 직선, 그리고 각도는 유클리드 기하에서의 것과 같은 것으로 정의한다.

2.2 택시호도법

정의 1.1 (택시원) 택시원은 한 점에서 같은 택시거리에 있는 점들의 집합이다. 즉 좌표평면에서 중심이 P, 반지름이 r인 택시원 $C_T(P,r)$ 은 $C_T(P,r)=\{Q\in R^2 \mid d_T(P,Q)=r\}$이다.

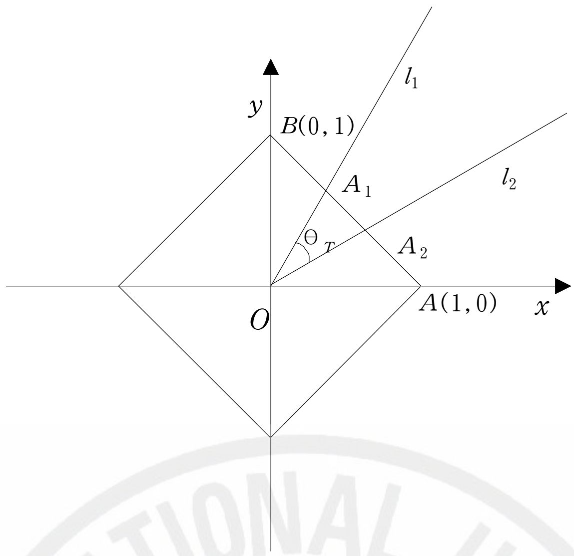


(그림 1)

정리 1.2 택시 원주율 π_T는 택시원의 지름에 대한 원주의 비이다. 이때 $\pi_T=4$ 이다.

(증명) 택시원 $C_T(O,r)$ 에서 지름의 길이는 $2r$이고 원주(원의 둘레)는 $8r$이다. 따라서 택시 원주율 $\pi_T=\frac{\text{원주}}{\text{지름}}=4$가 된다.

정의 1.3 (택시호도법) 원점에서 출발하는 두 반직선 l_1, l_2가 반지름 1인 택시원 $C_T(O,1)$ 과 만나는 점을 A_1, A_2라 하자. 이때 $\angle A_1OA_2$의 크기를 l_1과 l_2에 의해 잘려진 택시원의 호의 길이(l_T)로 정의한다. 이것을 택시호도법이라 하고 $\angle A_1OA_2=\Theta_T$로 표시하고 택시각이라 부른다.



(그림 2)

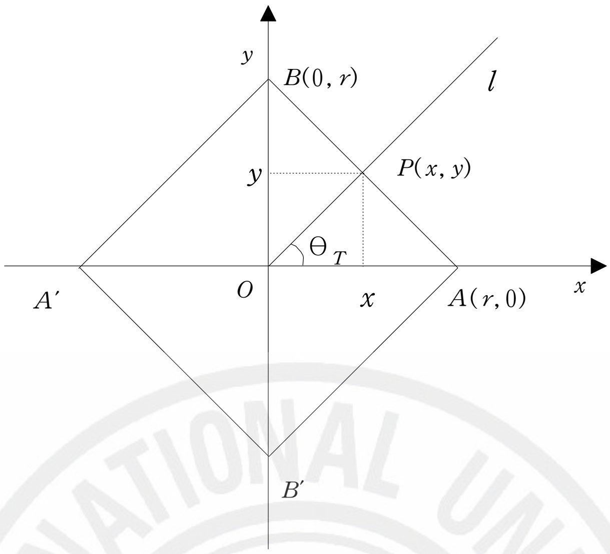
따름정리 1.4 반지름 r인 택시원 $C_T(O,r)$ 에서 각 Θ_T로 잘려진 호의 길이를 l_T라 하면 $l_T = r\Theta_T$이다.

(증명) 비례식을 사용하면 쉽게 증명할 수 있다.

정리 1.5 반지름 r인 택시원 $C_T(O,r)$ 에서 $A(r,0)$, $B(0,r)$, $A'(-r,0)$, $B'(0,-r)$이라 할 때 택시각 Θ_T는 다음과 같이 주어진다.

$$\Theta_T = \begin{cases} \dfrac{d_T(P,A)}{r} = \dfrac{r-x+y}{r}, & \Theta_T \in [0,2) \\ \dfrac{2r+d_T(P,B)}{r} = \dfrac{3r-x-y}{r}, & \Theta_T \in [2,4) \\ \dfrac{4r+d_T(P,A')}{r} = \dfrac{5r+x-y}{r}, & \Theta_T \in [4,6) \\ \dfrac{6r+d_T(P,B')}{r} = \dfrac{7r+x+y}{r}, & \Theta_T \in [6,8) \end{cases}.$$

여기서 $P(x,y)$는 x축과 택시각 θ_T가 되는 반직선이 택시원과 만나는 점이다.



(그림 3)

(증명) 정리 1.4에 의해 첫 번째 등식은 분명하다. 두 번째 등식이 성립함을 보이자. 우선 $\theta_T \in [0,2)$일 때 $d_T(P,A) = |x-r| + |y| = r - x + y$이고, $\theta_T \in [2,4)$일 때 $d_T(P,B) = |x| + |y-r| = r - x - y$이다. 또한 $\theta_T \in [4,6)$일 때 $d_T(P,A') = |x+r| + |y| = r + x - y$이고, $\theta_T \in [6,8)$일 때 $d_T(P,B') = |x| + |y+r| = r + x + y$이다. 따라서 증명이 완성되었다.

2.3 택시 삼각함수

정의 1.6 중심 O이고 반지름 r인 택시원 $C_T(O,r)$ 에서 중심 O를 지나고 x축과 택시각 Θ_T인 반직선을 l이라고 하자. 이때, 직선 l과 택시원이 만나는 점을 $P(x,y)$라고 한다. 택시 삼각함수 $\sin\Theta_T$, $\cos\Theta_T$, $\tan\Theta_T$, $\operatorname{cosec}\Theta_T$, $\sec\Theta_T$, $\cot\Theta_T$ 를 (그림 3)에서 다음과 같이 정의한다.

$$\sin\Theta_T=\frac{y}{r}, \quad \cos\Theta_T=\frac{x}{r}, \quad \tan\Theta_T=\frac{\sin\Theta_T}{\cos\Theta_T},$$

$$\operatorname{cosec}\Theta_T=\frac{1}{\sin\Theta_T}, \quad \sec\Theta_T=\frac{1}{\cos\Theta_T}, \quad \cot\Theta_T=\frac{1}{\tan\Theta_T}.$$

정리 1.7 택시 삼각함수는 Θ_T 의 크기에 따라 다음과 같이 나타난다.

$$(1)\quad \cos\Theta_T=\begin{cases} 1-\dfrac{\Theta_T}{2}, & \Theta_T\in[0,4] \\ -3+\dfrac{\Theta_T}{2}, & \Theta_T\in[4,8] \end{cases}$$

$$(2)\quad \sin\Theta_T=\begin{cases} \dfrac{\Theta_T}{2}, & \Theta_T\in[0,2] \\ 2-\dfrac{\Theta_T}{2}, & \Theta_T\in[2,6] \\ -4+\dfrac{\Theta_T}{2}, & \Theta_T\in[6,8] \end{cases}$$

$$(3)\quad \tan\Theta_T=\begin{cases} \dfrac{\Theta_T}{2-\Theta_T}, & \Theta_T\in[0,2) \\ \dfrac{4-\Theta_T}{2-\Theta_T}, & \Theta_T\in[2,4] \\ \dfrac{4-\Theta_T}{-6+\Theta_T}, & \Theta_T\in[4,6) \\ \dfrac{-8+\Theta_T}{-6+\Theta_T}, & \Theta_T\in[6,8] \end{cases}$$

이지만 $\tan\Theta_T$의 주기가 π_T이므로 고치면

$$(3)' \quad \tan\Theta_T=\begin{cases}\dfrac{\Theta_T}{2-\Theta_T}, & \Theta_T\in[0,2)\\[2ex] \dfrac{4-\Theta_T}{2-\Theta_T}, & \Theta_T\in(2,4].\end{cases}$$

(증명) 택시원 $C_T(O,r)$에 다음과 같은 등식이 성립한다.

$$\begin{cases}r=x+y\ , & \Theta_T\in[0,2)\\ r=-x+y\ , & \Theta_T\in[2,4)\\ r=-x-y\ , & \Theta_T\in[4,6)\\ r=x-y\ , & \Theta_T\in[6.8).\end{cases}$$

위 등식과 정리1.5를 결합하면 다음과 같은 등식을 얻는다.

(i) $\Theta_T\in[0,2)$일 때, $\Theta_T=\dfrac{r-x+y}{r}$이고 $r=x+y$이므로 대입하여 정리하면 $\dfrac{x}{r}=1-\dfrac{\Theta_T}{2}$과 $\dfrac{y}{r}=\dfrac{\Theta_T}{2}$를 얻을 수 있다. 택시 삼각함수의 정의에 의해서 $\cos\Theta_T=1-\dfrac{\Theta_T}{2}$, $\sin\Theta_T=\dfrac{\Theta_T}{2}$이다.

(ii) $\Theta_T\in[2,4)$일 때, $\Theta_T=\dfrac{3r-x-y}{r}$이고 $r=-x+y$이므로 대입하여 정리하면 $\dfrac{x}{r}=1-\dfrac{\Theta_T}{2}$과 $\dfrac{y}{r}=2-\dfrac{\Theta_T}{2}$를 얻을 수 있다. $\cos\Theta_T=1-\dfrac{\Theta_T}{2}$, $\sin\Theta_T=2-\dfrac{\Theta_T}{2}$이다.

(iii) $\Theta_T\in[4,6)$일 때, $\Theta_T=\dfrac{5r+x-y}{r}$이고 $r=-x-y$이므로 대입하여 정리하면 $\dfrac{x}{r}=-3+\dfrac{\Theta_T}{2}$과 $\dfrac{y}{r}=2-\dfrac{\Theta_T}{2}$를 얻을 수 있다. 따라서 $\cos\Theta_T=-3+\dfrac{\Theta_T}{2}$, $\sin\Theta_T=2-\dfrac{\Theta_T}{2}$이다.

(iv) $\Theta_T\in[6,8)$일 때, $\Theta_T=\dfrac{7r+x+y}{r}$이고 $r=x-y$이므로 대입하여 정리하면

$\frac{x}{r}=-3+\frac{\Theta_T}{2}$과 $\frac{y}{r}=-4+\frac{\Theta_T}{2}$를 얻을 수 있다. 따라서 $\cos\Theta_T=-3+\frac{\Theta_T}{2}$, $\sin\Theta_T=-4+\frac{\Theta_T}{2}$이다.

(ⅰ)~(ⅳ)의 사실들을 종합하면 (1), (2), (3)의 성질이 증명된다.

따름정리 1.8 택시기하에서 $\operatorname{cosec}\Theta_T$, $\sec\Theta_T$, $\cot\Theta_T$는 택시각 Θ_T의 크기에 따라 다음과 같이 나타낸다.

$$(1)\quad \operatorname{cosec}\Theta_T=\begin{cases}\frac{2}{\Theta_T}, & \Theta_T\in(0,2]\\ \frac{2}{4-\Theta_T}, & \Theta_T\in[2,4)\ ,(4,6]\\ \frac{4}{-8+\Theta_T}, & \Theta_T\in[6,8),\end{cases}$$

$$(2)\quad \sec\Theta_T=\begin{cases}\frac{2}{2-\Theta_T}, & \Theta_T\in[0,2)\ ,\ \Theta_T\in(\ 2,4]\\ \frac{2}{-6+\Theta_T}, & \Theta_T\in[4,6)\ ,\ \Theta_T\in(6,8],\end{cases}$$

$$(3)\quad \cot\Theta_T=\begin{cases}\frac{2-\Theta_T}{\Theta_T}, & \Theta_T\in(0,2]\\ \frac{2-\Theta_T}{4-\Theta_T}, & \Theta_T\in[2,4).\end{cases}$$

참고 정리 1.7로부터 다음을 알 수 있다.

$$\begin{cases}\cos\Theta_T\geq 0\ , & \Theta_T\in[0,2]\ ,\Theta_T\in[6,8]\\ \cos\Theta_T\leq 0\ , & \Theta_T\in[2,6]\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\Theta_T\geq 0\ , & \Theta_T\in[0,4]\\ \sin\Theta_T\leq 0\ , & \Theta_T\in[4,8].\end{cases}$$

따름정리 1.9

$$(1)\quad |\sin\Theta_T|+|\cos\Theta_T|=1$$

$$(2)\quad 1+|\tan\Theta_T|=|\sec\Theta_T|$$

(3) $1+|\cot\Theta_T|=|\mathrm{cosec}\,\Theta_T|$

(증명) (1) 택시각 Θ_T인 직선이 택시원 $C_T(O, r)$ 과 만나는 점을 $P(x, y)$라 하면 택시 삼각함수 $\sin\Theta_T$, $\cos\Theta_T$ 의 정의에 의해서

$$|\sin\Theta_T|+|\cos\Theta_T| = \left|\frac{y}{r}\right|+\left|\frac{x}{r}\right|=\frac{|x|+|y|}{r}=1$$이다.

(2) 또한, $\tan\Theta_T$ 의 정의에 의해서, $|x|+|y|=r$ 이므로 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}1+|\tan\Theta_T| &= 1+\left|\frac{y}{x}\right|=\frac{|x|+|y|}{|x|}=\frac{|r|}{|x|}\\ &=|\sec\Theta_T|\end{aligned}$$

이다.

(3) 마지막으로 $\cot\Theta_T$ 의 정의에 의해서

$$\begin{aligned}1+|\cot\Theta_T| &= 1+\frac{|x|}{|y|}=\frac{|x|+|y|}{|y|}=\frac{r}{|y|}\\ &=|\mathrm{cosec}\,\Theta_T|\end{aligned}$$

이 된다.

3. 택시삼각함수의 성질

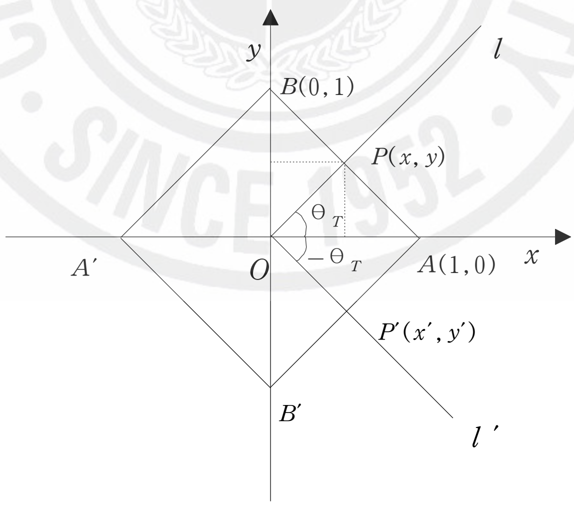
3.1 택시삼각함수의 각의 성질

정리 2.1 (1) $2n\pi_T + \Theta_T$ 의 택시삼각함수 (n 은 정수)

$$\begin{cases} \sin(2n\pi_T + \Theta_T) = \sin\Theta_T \\ \cos(2n\pi_T + \Theta_T) = \cos\Theta_T \\ \tan(n\pi_T + \Theta_T) = \tan\Theta_T \end{cases}$$

(2) $(-\Theta_T)$의 택시삼각함수

$$\begin{cases} \sin(-\Theta_T) = -\sin(\Theta_T) \\ \cos(-\Theta_T) = \cos(\Theta_T) \\ \tan(-\Theta_T) = -\tan(\Theta_T) \end{cases}$$



(그림 4)

(증명)

(1) 택시삼각함수의 정의에 의해 분명하다.

(2) 택시각 θ_T 의 정의에 의해서 θ_T 를 나타내는 동경 l 과 $-\theta_T$ 를 나타내는 동경 l'이 택시 단위원 $C_T(O,1)$ 과 만나는 점을 각각 $P(x,y)$, $P'(x',y')$이라 하면, 두 점 P, P'은 x 축에 대하여 대칭이므로 $x'=x$, $y'=-y$이다. 따라서

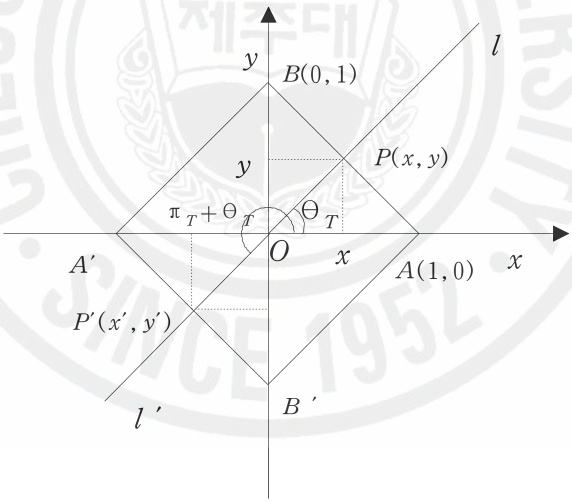
$$\sin(-\theta_T)=y'=-y=-\sin(\theta_T)\ ,\ \cos(-\theta_T)=x'=x=\cos(\theta_T),$$

$$\tan(-\theta_T)=\frac{y'}{x'}=\frac{-y}{x}=-\tan(\theta_T)$$

가 성립한다.

정리 2.2 $\pi_T \pm \theta_T$ 의 택시삼각함수

$$\begin{cases} \sin(\pi_T \pm \theta_T)=\mp\sin\theta_T \\ \cos(\pi_T \pm \theta_T)=\mp\cos\theta_T \\ \tan(\pi_T \pm \theta_T)=\pm\tan\theta_T \end{cases}$$



(그림 5)

(증명) 택시각 θ_T 의 정의에 의해서 각 θ_T 를 나타내는 동경 l 과 $\pi_T+\theta_T$ 를 나타내는 동경 l'이 택시 단위원 $C_T(O,1)$ 과 만나는 점을 각각 $P(x,y)$, $P'(x',y')$이라 하면, 두 점 P ,P'은 원점에 대하여 $P'(x',y')$과 대칭이므로 $x'=-x$, $y'=-y$ 이다. 따라서

$$\sin(\pi_T+\Theta_T)=y'=-y=-\sin(\Theta_T)\ ,\quad \cos(\pi_T+\Theta_T)=x'=-x=-\cos(\Theta_T)\ ,$$

$$\tan(\pi_T+\Theta_T)=\frac{y'}{x'}=\frac{-y}{-x}=\tan(\Theta_T)$$

이고, 위의 식에서 Θ_T 대신에 $-\Theta_T$ 를 대입하면

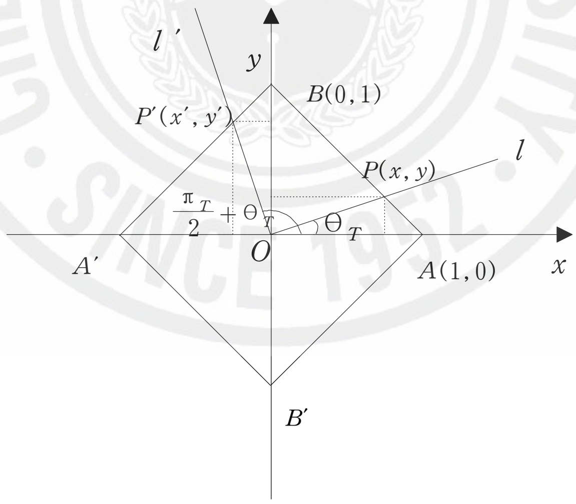
$$\sin(\pi_T-\Theta_T)=-\sin(-\Theta_T)=\sin\Theta_T\ ,\quad \cos(\pi_T-\Theta_T)=-\cos(-\Theta_T)=-\cos\Theta_T\ ,$$

$$\tan(\pi_T-\Theta_T)=\tan(-\Theta_T)=-\tan\Theta_T$$

이다.

정리 2.3 $\frac{\pi_T}{2}\pm\Theta_T$ 의 택시삼각함수

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi_T}{2}\pm\Theta_T)=\pm\cos\Theta_T \\ \cos(\frac{\pi_T}{2}\pm\Theta_T)=\mp\sin\Theta_T \\ \tan(\frac{\pi_T}{2}\pm\Theta_T)=\mp\cot\Theta_T \end{cases}$$



(그림 6)

(증명) 택시각 Θ_T 의 정의에 의해서 각 Θ_T 를 나타내는 동경 l 과 $\frac{\pi_T}{2}+\Theta_T$ 를 나타내는 동경 l' 이 택시 단위원 $C_T(O,1)$ 과 만나는 점을 각각 $P(x,y)$,

$P'(x', y')$이라 하면 삼각형의 합동조건에 의하여 $x' = -y$, $y' = x$ 이다. 따라서

$$\sin\left(\frac{\pi_T}{2} + \Theta_T\right) = y' = x = \cos\Theta_T , \qquad \cos\left(\frac{\pi_T}{2} + \Theta_T\right) = x' = -y = -\sin\Theta_T ,$$

$$\tan\left(\frac{\pi_T}{2} + \Theta_T\right) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{-y} = -\cot\Theta_T$$

가 성립한다.

또한, 위의 식에서 Θ_T 대신에 $-\Theta_T$를 대입하면

$$\sin\left(\frac{\pi_T}{2} - \Theta_T\right) = \cos(-\Theta_T) = \cos\Theta_T , \quad \cos\left(\frac{\pi_T}{2} - \Theta_T\right) = -\sin(-\Theta_T) = \sin\Theta_T ,$$

$$\tan\left(\frac{\pi_T}{2} - \Theta_T\right) = -\cot(-\Theta_T) = \cot\Theta_T$$

이 성립한다.

3.2 택시코사인함수의 성질

정리 2.4 (택시코사인 덧셈법칙)
택시각 α_T와 β_T가 좌표평면에 놓인 사분면에 따라 다음과 같이 계산된다.

α_T	β_T	$\cos(\alpha_T+\beta_T)$	
Ⅰ	Ⅰ	$\cos\alpha_T+\cos\beta_T-1$	$-1+\lvert\cos\alpha_T+\cos\beta_T\rvert$
Ⅱ	Ⅱ	$-\cos\alpha_T-\cos\beta_T-1$	
Ⅲ	Ⅲ	$\cos\alpha_T+\cos\beta_T-1$	
Ⅳ	Ⅳ	$\cos\alpha_T+\cos\beta_T-1$	
Ⅰ	Ⅱ	$\cos\alpha_T+\cos\beta_T-1$ $(2\le\alpha_T+\beta_T\le4)$ $-\cos\alpha_T-\cos\beta_T-1$ $(4\le\alpha_T+\beta_T\le6)$	
Ⅲ	Ⅳ	$-\cos\alpha_T-\cos\beta_T-1$ $(10\le\alpha_T+\beta_T\le12)$ $\cos\alpha_T+\cos\beta_T-1$ $(12\le\alpha_T+\beta_T\le14)$	
Ⅰ	Ⅲ	$-\cos\alpha_T+\cos\beta_T+1$	$1-\lvert\cos\alpha_T-\cos\beta_T\rvert$
Ⅰ	Ⅳ	$-\cos\alpha_T+\cos\beta_T+1$ $(6\le\alpha_T+\beta_T\le8)$ $\cos\alpha_T-\cos\beta_T+1$ $(8\le\alpha_T+\beta_T\le10)$	
Ⅱ	Ⅲ	$-\cos\alpha_T+\cos\beta_T+1$ $(6\le\alpha_T+\beta_T\le8)$ $\cos\alpha_T-\cos\beta_T+1$ $(8\le\alpha_T+\beta_T\le10)$	
Ⅱ	Ⅳ	$\cos\alpha_T-\cos\beta_T+1$	

(표 1)

(증명) 다음과 같이 경우별로 증명한다.

(경우1) $\alpha_T\in$ Ⅰ, $\beta_T\in$ Ⅰ

이 경우 $0 \le \alpha_T + \beta_T \le 4$이다. 한편 정리 1.7에 의해서 $\cos\alpha_T = 1 - \frac{\alpha_T}{2}$이고, $\cos\beta_T = 1 - \frac{\beta_T}{2}$이다. 따라서 $0 \le \alpha_T + \beta_T \le 4$인 경우에

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_T + \beta_T) &= 1 - \frac{\alpha_T + \beta_T}{2} \\ &= 1 - \frac{\alpha_T}{2} + 1 - \frac{\beta_T}{2} - 1 \\ &= \cos\alpha_T + \cos\beta_T - 1\end{aligned}$$

이다.

(경우2) $\alpha_T \in \mathrm{I}$, $\beta_T \in \mathrm{II}$

이 경우 $2 \le \alpha_T + \beta_T \le 6$이다. 한편 정리 1.7에 의해서 $\cos\alpha_T = 1 - \frac{\alpha_T}{2}$이고, $\cos\beta_T = 1 - \frac{\beta_T}{2}$이다. 그러므로

(ⅰ) $2 \le \alpha_T + \beta_T \le 4$인 경우, 정리 1.7에 의해

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_T + \beta_T) &= 1 - \frac{\alpha_T + \beta_T}{2} \\ &= 1 - \frac{\alpha_T}{2} + 1 - \frac{\beta_T}{2} - 1 \\ &= \cos\alpha_T + \cos\beta_T - 1.\end{aligned}$$

(ⅱ) $4 \le \alpha_T + \beta_T \le 6$인 경우, 정리 1.7에 의해서

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_T + \beta_T) &= -3 + \frac{\alpha_T + \beta_T}{2} \\ &= -1 + \frac{\alpha_T}{2} - 1 + \frac{\beta_T}{2} - 1 \\ &= -\cos\alpha_T - \cos\beta_T - 1.\end{aligned}$$

그러므로 (ⅰ)과 (ⅱ)에 의해서 $\cos(\alpha_T + \beta_T) = -1 + |\cos\alpha_T + \cos\beta_T|$이다.

(경우3) $\alpha_T \in \mathrm{I}$, $\beta_T \in \mathrm{III}$

이 경우 $4 \le \alpha_T + \beta_T \le 8$이다. 한편 정리 1.7에 의해서 $\cos\alpha_T = 1 - \frac{\alpha_T}{2}$이고, $\cos\beta_T = -3 + \frac{\beta_T}{2}$이다. 따라서 $4 \le \alpha_T + \beta_T \le 8$인 경우

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_T+\beta_T) &= -3+\frac{\alpha_T+\beta_T}{2}\\ &= -1+\frac{\alpha_T}{2}-3+\frac{\beta_T}{2}+1\\ &= -\cos\alpha_T+\cos\beta_T+1\end{aligned}$$

이다.

(경우4) $\alpha_T \in \mathrm{I}$, $\beta_T \in \mathrm{IV}$

이 경우 $6 \le \alpha_T+\beta_T \le 10$이다. 한편 정리 1.7에 의해서 $\cos\alpha_T = 1-\frac{\alpha_T}{2}$이고, $\cos\beta_T = -3+\frac{\beta_T}{2}$이다. 그러므로

(i) $6 \le \alpha_T+\beta_T \le 8$인 경우

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_T+\beta_T) &= -3+\frac{\alpha_T+\beta_T}{2}\\ &= -1+\frac{\alpha_T}{2}-3+\frac{\beta_T}{2}+1\\ &= -\cos\alpha_T+\cos\beta_T+1.\end{aligned}$$

(ii) $8 \le \alpha_T+\beta_T \le 10$인 경우, $0 \le \alpha_T+\beta_T-8 \le 2$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_T+\beta_T)=\cos(\alpha_T+\beta_T-8) &= 1-\frac{\alpha_T+\beta_T-8}{2}\\ &= 1-\frac{\alpha_T}{2}+3-\frac{\beta_T}{2}+1\\ &= \cos\alpha_T-\cos\beta_T+1.\end{aligned}$$

그러므로 (i)과 (ii)에 의해서 $\cos(\alpha_T+\beta_T) = 1-|\cos\alpha_T-\cos\beta_T|$이다.

(경우5) $\alpha_T \in \mathrm{II}$, $\beta_T \in \mathrm{II}$

이 경우 $4 \le \alpha_T+\beta_T \le 8$이다. 한편 정리 1.7에 의해서 $\cos\alpha_T = 1-\frac{\alpha_T}{2}$이고, $\cos\beta_T = 1-\frac{\beta_T}{2}$이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_T+\beta_T) &= -3+\frac{\alpha_T+\beta_T}{2} \\ &= -1+\frac{\alpha_T}{2}-1+\frac{\beta_T}{2}-1 \\ &= -\cos\alpha_T-\cos\beta_T-1\end{aligned}$$

이다.

(경우6) $\alpha_T \in \mathrm{II}$, $\beta_T \in \mathrm{III}$

이 경우 $6 \le \alpha_T+\beta_T \le 10$이다. 한편 정리 1.7에 의해서 $\cos\alpha_T = 1-\frac{\alpha_T}{2}$이고, $\cos\beta_T = -3+\frac{\beta_T}{2}$이다. 그러므로

(i) $6 \le \alpha_T+\beta_T \le 8$인 경우,

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_T+\beta_T) &= -3+\frac{\alpha_T+\beta_T}{2} \\ &= -1+\frac{\alpha_T}{2}-3+\frac{\beta_T}{2}+1 \\ &= -\cos\alpha_T+\cos\beta_T+1.\end{aligned}$$

(ii) $8 \le \alpha_T+\beta_T \le 10$인 경우, $0 \le \alpha_T+\beta_T-8 \le 2$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_T+\beta_T) = \cos(\alpha_T+\beta_T-8) &= 1-\frac{\alpha_T+\beta_T-8}{2} \\ &= 1-\frac{\alpha_T}{2}+3-\frac{\beta_T}{2}+1 \\ &= \cos\alpha_T-\cos\beta_T+1.\end{aligned}$$

그러므로 (i)과 (ii)에 의해서 $\cos(\alpha_T+\beta_T) = 1-|\cos\alpha_T-\cos\beta_T|$이다.

(경우7) $\alpha_T \in \mathrm{II}$, $\beta_T \in \mathrm{IV}$

이 경우 $8 \le \alpha_T+\beta_T \le 12$이므로, $0 \le \alpha_T+\beta_T-8 \le 4$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_T+\beta_T) = \cos(\alpha_T+\beta_T-8) &= 1-\frac{\alpha_T+\beta_T-8}{2} \\ &= 1-\frac{\alpha_T}{2}+3-\frac{\beta_T}{2}+1 \\ &= \cos\alpha_T-\cos\beta_T+1\end{aligned}$$

이다.

(경우8) $\alpha_T \in \mathrm{III}$, $\beta_T \in \mathrm{III}$

이 경우 $8 \le \alpha_T + \beta_T \le 12$이므로, $0 \le \alpha_T + \beta_T - 8 \le 4$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_T + \beta_T) = \cos(\alpha_T + \beta_T - 8) &= 1 - \frac{\alpha_T + \beta_T - 8}{2} \\ &= 3 - \frac{\alpha_T}{2} + 3 - \frac{\beta_T}{2} - 1 \\ &= \cos\alpha_T + \cos\beta_T - 1\end{aligned}$$

이다.

(경우9) $\alpha_T \in \mathrm{III}$, $\beta_T \in \mathrm{IV}$

이 경우 $10 \le \alpha_T + \beta_T \le 14$이므로, $2 \le \alpha_T + \beta_T - 8 \le 6$이다. 그러므로

(i) $10 \le \alpha_T + \beta_T \le 12$인 경우, $2 \le \alpha_T + \beta_T - 8 \le 4$. 따라서

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_T + \beta_T) = \cos(\alpha_T + \beta_T - 8) &= 1 - \frac{\alpha_T + \beta_T - 8}{2} \\ &= 3 - \frac{\alpha_T}{2} + 3 - \frac{\beta_T}{2} - 1 \\ &= -\cos\alpha_T - \cos\beta_T - 1.\end{aligned}$$

(ii) $12 \le \alpha_T + \beta_T < 14$인 경우, $4 \le \alpha_T + \beta_T - 8 \le 6$. 따라서

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_T + \beta_T) = \cos(\alpha_T + \beta_T - 8) &= -3 + \frac{\alpha_T + \beta_T - 8}{2} \\ &= -3 + \frac{\alpha_T}{2} - 3 + \frac{\beta_T}{2} - 1 \\ &= \cos\alpha_T + \cos\beta_T - 1.\end{aligned}$$

그러므로 (i)과 (ii)에 의해서 $\cos(\alpha_T + \beta_T) = -1 + |\cos\alpha_T + \cos\beta_T|$이다.

(경우10) $\alpha_T \in \mathrm{IV}$, $\beta_T \in \mathrm{IV}$

이 경우 $12 \le \alpha_T + \beta_T \le 16$이므로, $4 \le \alpha_T + \beta_T - 8 \le 8$이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_T + \beta_T) = \cos(\alpha_T + \beta_T - 8) &= -3 + \frac{\alpha_T + \beta_T - 8}{2} \\ &= -3 + \frac{\alpha_T}{2} - 3 + \frac{\beta_T}{2} - 1 \\ &= \cos\alpha_T + \cos\beta_T - 1\end{aligned}$$

이다.

따름정리 2.5 (택시코사인 2배각법칙)

$$\cos(2\alpha_T) = -1 + 2|\cos\alpha_T|$$

(증명) 택시코사인 덧셈법칙을 적용하면

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha_T) &= \cos(\alpha_T + \alpha_T) \\ &= -1 + |\cos\alpha_T + \cos\alpha_T| \\ &= -1 + 2|\cos\alpha_T|\end{aligned}$$

이다.

따름정리 2.6 (택시코사인 뺄셈법칙)

α_T	β_T	$\cos(\alpha_T - \beta_T)$
Ⅰ	Ⅲ	$-1 + \vert\cos\alpha_T + \cos\beta_T\vert$
Ⅰ	Ⅳ	
Ⅱ	Ⅲ	
Ⅱ	Ⅳ	
Ⅰ	Ⅰ	$1 - \vert\cos\alpha_T - \cos\beta_T\vert$
Ⅰ	Ⅱ	
Ⅱ	Ⅱ	
Ⅲ	Ⅲ	
Ⅲ	Ⅳ	
Ⅳ	Ⅳ	

(표 2)

(증명) $\cos\alpha_T = \cos(-\alpha_T)$와 β_T와 $-\beta_T$의 구간을 비교하여 택시코사인 덧셈정리를 적용하면 얻는다.

3.3 택시사인함수의 성질

정리 2.7 (택시사인 덧셈법칙)

α_T	β_T	$\sin(\alpha_T+\beta_T)$	
Ⅰ	Ⅲ	$-\sin\alpha_T-\cos\beta_T-1$ $(4\le\alpha_T+\beta_T\le6)$ $\sin\alpha_T+\cos\beta_T-1$ $(6\le\alpha_T+\beta_T\le8)$	$-1+\lvert\sin\alpha_T+\cos\beta_T\rvert$
Ⅰ	Ⅳ	$\sin\alpha_T+\cos\beta_T-1$	
Ⅱ	Ⅱ	$\sin\alpha_T+\cos\beta_T-1$ $(4\le\alpha_T+\beta_T\le6)$ $\sin\alpha_T-\cos\beta_T-1$ $(6\le\alpha_T+\beta_T\le8)$	
Ⅳ	Ⅳ	$-\sin\alpha_T-\cos\beta_T-1$ $(12\le\alpha_T+\beta_T\le14)$ $\sin\alpha_T+\cos\beta_T-1$ $(14\le\alpha_T+\beta_T\le16)$	
Ⅰ	Ⅰ	$\sin\alpha_T-\cos\beta_T+1$ $(0\le\alpha_T+\beta_T\le2)$ $-\sin\alpha_T+\cos\beta_T+1$ $(2\le\alpha_T+\beta_T\le4)$	$1-\lvert\sin\alpha_T-\cos\beta_T\rvert$
Ⅰ	Ⅱ	$-\sin\alpha_T+\cos\beta_T+1$	
Ⅱ	Ⅲ	$-\sin\alpha_T+\cos\beta_T+1$	
Ⅱ	Ⅳ	$-\sin\alpha_T+\cos\beta_T+1$ $(8\le\alpha_T+\beta_T\le10)$ $\sin\alpha_T-\cos\beta_T+1$ $(10\le\alpha_T+\beta_T\le12)$	
Ⅲ	Ⅲ	$-\sin\alpha_T+\cos\beta_T+1$ $(8\le\alpha_T+\beta_T\le10)$ $\sin\alpha_T-\cos\beta_T+1$ $(10\le\alpha_T+\beta_T\le12)$	
Ⅲ	Ⅳ	$\sin\alpha_T-\cos\beta_T+1$	

(표 3)

(증명) 증명은 각각의 경우별로 증명한다.

(경우1) $\alpha_T \in \mathrm{I}$, $\beta_T \in \mathrm{I}$

$\alpha_T - 2 \in \mathrm{IV}$ 이므로, 정리 2.3에 의해 $\cos(\alpha_T - 2) = \cos(\alpha_T - \frac{\pi_T}{2}) = \cos(\frac{\pi_T}{2} - \alpha_T) = \sin\alpha_T$임을 이용하여, 사인함수를 택시코사인 함수로 고쳐서

(i) $6 \le (\alpha_T - 2) + \beta_T \le 8$인 경우, 택시코사인 덧셈법칙에 적용하면

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_T + \beta_T) &= \cos((\alpha_T + \beta_T) - 2) \\ &= \cos((\alpha_T - 2) + \beta_T) \\ &= \cos(\alpha_T - 2) - \cos\beta_T + 1 \\ &= \sin\alpha_T - \cos\beta_T + 1. \end{aligned}$$

(ii) $8 \le (\alpha_T - 2) + \beta_T \le 10$인 경우, 택시코사인 덧셈법칙에 적용하면

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_T + \beta_T) &= \cos((\alpha_T + \beta_T) - 2) \\ &= \cos((\alpha_T - 2) + \beta_T) \\ &= -\cos(\alpha_T - 2) + \cos\beta_T + 1 \\ &= -\sin\alpha_T + \cos\beta_T + 1 \end{aligned}$$

이다.

(경우2) $\alpha_T \in \mathrm{I}$, $\beta_T \in \mathrm{II}$

$\alpha_T - 2 \in \mathrm{IV}$이므로, $\cos(\alpha_T - 2) = \sin\alpha_T$임을 이용하여, 사인함수를 택시코사인 함수로 고쳐서 택시코사인 덧셈법칙에 적용하면

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_T + \beta_T) &= \cos((\alpha_T + \beta_T) - 2) \\ &= \cos((\alpha_T - 2) + \beta_T) \\ &= -\cos(\alpha_T - 2) + \cos\beta_T + 1 \\ &= -\sin\alpha_T + \cos\beta_T + 1 \end{aligned}$$

이다.

(경우3) $\alpha_T \in \mathrm{I}$, $\beta_T \in \mathrm{III}$

$\alpha_T - 2 \in \mathrm{IV}$이므로, $\cos(\alpha_T - 2) = \sin\alpha_T$임을 이용하여, 사인함수를 택시코사인 함수로 고쳐서

(i) $10 \le (\alpha_T - 2) + \beta_T \le 12$인 경우, 택시코사인 덧셈법칙에 적용하면

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_T + \beta_T) &= \cos((\alpha_T + \beta_T) - 2) \\ &= \cos((\alpha_T - 2) + \beta_T) \\ &= -\cos(\alpha_T - 2) - \cos\beta_T - 1 \\ &= -\sin\alpha_T - \cos\beta_T - 1. \end{aligned}$$

(ii) $12 \le (\alpha_T - 2) + \beta_T \le 14$인 경우, 택시코사인 덧셈법칙에 적용하면

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_T + \beta_T) &= \cos((\alpha_T + \beta_T) - 2) \\ &= \cos((\alpha_T - 2) + \beta_T) \\ &= \cos(\alpha_T - 2) + \cos\beta_T - 1 \\ &= \sin\alpha_T + \cos\beta_T - 1 \end{aligned}$$

이다.

(경우4) $\alpha_T \in \mathrm{I}$, $\beta_T \in \mathrm{IV}$

$\alpha_T - 2 \in \mathrm{IV}$이므로, $\cos(\alpha_T - 2) = \sin\alpha_T$임을 이용하여, 사인함수를 택시코사인 함수로 고쳐서 택시코사인 덧셈법칙에 적용하면

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_T + \beta_T) &= \cos((\alpha_T + \beta_T) - 2) \\ &= \cos((\alpha_T - 2) + \beta_T) \\ &= \cos(\alpha_T - 2) + \cos\beta_T - 1 \\ &= \sin\alpha_T + \cos\beta_T - 1 \end{aligned}$$

이다.

(경우5) $\alpha_T \in \mathrm{II}$, $\beta_T \in \mathrm{II}$

$\alpha_T - 2 \in$ Ⅰ 이므로, $\cos(\alpha_T - 2) = \sin\alpha_T$임을 이용하여, 사인함수를 택시코사인 함수로 고쳐서

(i) $2 \le (\alpha_T - 2) + \beta_T \le 4$인 경우, 택시코사인 덧셈법칙에 적용하면

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_T + \beta_T) &= \cos((\alpha_T + \beta_T) - 2) \\ &= \cos((\alpha_T - 2) + \beta_T) \\ &= \cos(\alpha_T - 2) + \cos\beta_T - 1 \\ &= \sin\alpha_T + \cos\beta_T - 1.\end{aligned}$$

(ii) $4 \le (\alpha_T - 2) + \beta_T \le 6$인 경우, 택시코사인 덧셈법칙에 적용하면

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_T + \beta_T) &= \cos((\alpha_T + \beta_T) - 2) \\ &= \cos((\alpha_T - 2) + \beta_T) \\ &= -\cos(\alpha_T - 2) - \cos\beta_T - 1 \\ &= -\sin\alpha_T - \cos\beta_T - 1\end{aligned}$$

이다.

(경우6) $\alpha_T \in$ Ⅱ, $\beta_T \in$ Ⅲ

$\alpha_T - 2 \in$ Ⅰ 이므로, $\cos(\alpha_T - 2) = \sin\alpha_T$임을 이용하여, 사인함수를 택시코사인 함수로 고쳐서 택시코사인 덧셈법칙에 적용하면

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_T + \beta_T) &= \cos((\alpha_T - 2) + \beta_T) \\ &= -\cos(\alpha_T - 2) + \cos\beta_T + 1 \\ &= -\sin\alpha_T + \cos\beta_T + 1\end{aligned}$$

이다.

(경우7) $\alpha_T \in$ Ⅱ, $\beta_T \in$ Ⅳ

$\alpha_T - 2 \in$ Ⅰ 이므로, $\cos(\alpha_T - 2) = \sin\alpha_T$임을 이용하여, 사인함수를 택시코사인 함수로 고쳐서

(i) $6 \le (\alpha_T - 2) + \beta_T \le 8$인 경우,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_T+\beta_T) &= \cos((\alpha_T-2)+\beta_T)\\ &= -\cos(\alpha_T-2)+\cos\beta_T+1\\ &= -\sin\alpha_T+\cos\beta_T+1.\end{aligned}$$

(ii) $8\le(\alpha_T-2)+\beta_T\le 10$인 경우

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_T+\beta_T) &= \cos((\alpha_T-2)+\beta_T)\\ &= \cos(\alpha_T-2)-\cos\beta_T+1\\ &= \sin\alpha_T-\cos\beta_T+1\end{aligned}$$

이다.

(경우8) $\alpha_T\in\mathrm{III}$, $\beta_T\in\mathrm{III}$

$\alpha_T-2\in\mathrm{II}$ 이므로, $\cos(\alpha_T-2)=\sin\alpha_T$임을 이용하여, 사인함수를 택시코사인 함수로 고쳐서

(i) $6\le(\alpha_T-2)+\beta_T\le 8$인 경우,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_T+\beta_T) &= \cos((\alpha_T-2)+\beta_T)\\ &= -\cos(\alpha_T-2)+\cos\beta_T+1\\ &= -\sin\alpha_T+\cos\beta_T+1.\end{aligned}$$

(ii) $8\le(\alpha_T-2)+\beta_T\le 10$인 경우, 택시코사인 덧셈법칙에 적용하면

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_T+\beta_T) &= \cos((\alpha_T-2)+\beta_T)\\ &= \cos(\alpha_T-2)-\cos\beta_T+1\\ &= \sin\alpha_T-\cos\beta_T+1\end{aligned}$$

이다.

(경우9) $\alpha_T\in\mathrm{III}$, $\beta_T\in\mathrm{IV}$

$\alpha_T-2\in\mathrm{II}$ 이므로, $\cos(\alpha_T-2)=\sin\alpha_T$임을 이용하여, 사인함수를 택시코사인 함수로 고쳐서, 택시코사인 덧셈법칙에 적용하면

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_T+\beta_T) &= \cos((\alpha_T-2)+\beta_T)\\ &= \cos(\alpha_T-2)-\cos\beta_T+1\\ &= \sin\alpha_T-\cos\beta_T+1\end{aligned}$$

이다.

(경우10) $\alpha_T \in \mathrm{IV}$, $\beta_T \in \mathrm{IV}$

$\alpha_T-2 \in \mathrm{III}$이므로, $\cos(\alpha_T-2)=\sin\alpha_T$임을 이용하여, 사인함수를 택시코사인 함수로 고쳐서

(i) $10\le(\alpha_T-2)+\beta_T\le12$인 경우,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_T+\beta_T) &= \cos((\alpha_T-2)+\beta_T)\\ &=-\cos(\alpha_T-2)-\cos\beta_T-1\\ &=-\sin\alpha_T-\cos\beta_T-1.\end{aligned}$$

(ii) $12\le(\alpha_T-2)+\beta_T\le14$인 경우,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_T+\beta_T) &= \cos((\alpha_T-2)+\beta_T)\\ &= \cos(\alpha_T-2)+\cos\beta_T-1\\ &= \sin\alpha_T+\cos\beta_T-1\end{aligned}$$

이다.

정리 2.8 (택시사인 2배각법칙)

$$\sin(2\alpha_T)=-1+2|\cos(\alpha_T-1)|$$

(증명) 택시사인 함수를 택시코사인 함수로 고치고, 코사인 덧셈법칙을 적용하면

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha_T) &= \cos(2\alpha_T-2)\\ &= \cos(2(\alpha_T-1))\\ &=-1+2|\cos(\alpha_T-1)|\end{aligned}$$

이다.

따름정리 2.9 (택시사인 뺄셈법칙)

α_T	β_T	$\sin(\alpha_T - \beta_T)$
Ⅰ	Ⅰ	$-1+\lvert\sin\alpha_T+\cos\beta_T\rvert$
Ⅰ	Ⅱ	
Ⅱ	Ⅲ	
Ⅳ	Ⅰ	
Ⅰ	Ⅲ	$1-\lvert\sin\alpha_T-\cos\beta_T\rvert$
Ⅰ	Ⅳ	
Ⅱ	Ⅰ	
Ⅱ	Ⅱ	
Ⅲ	Ⅰ	
Ⅲ	Ⅱ	
Ⅱ	Ⅳ	$1-\lvert\cos\alpha_T+\sin\beta_T\rvert$
Ⅲ	Ⅲ	
Ⅳ	Ⅱ	
Ⅳ	Ⅲ	
Ⅲ	Ⅳ	$-1+\lvert\cos\alpha_T-\sin\beta_T\rvert$
Ⅳ	Ⅳ	

(표 4)

(증명) 택시 삼각함수의 덧셈정리와 정리 2.1의 (2)로부터 얻는다.

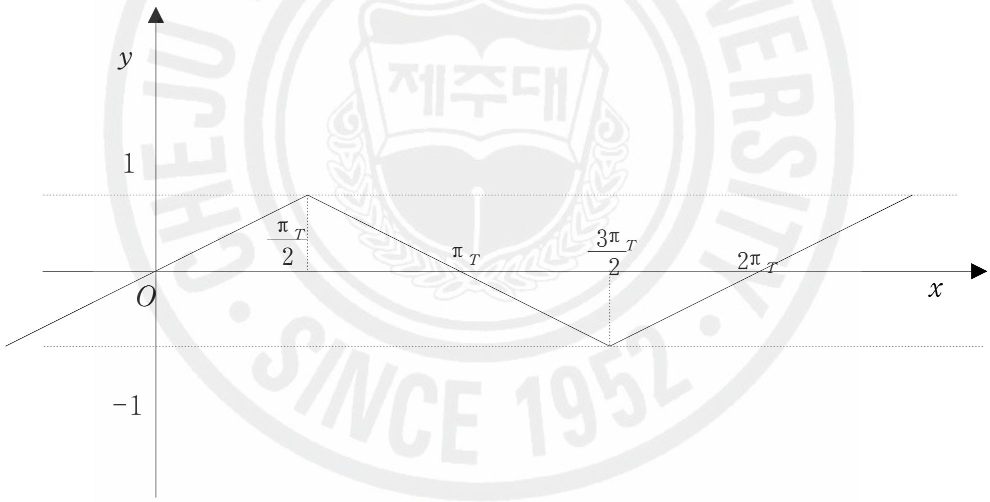
4. 택시 삼각함수의 그래프

4.1 택시사인, 코사인함수의 그래프

(1) $f(x) = \sin\theta_T$ 라 하면, 정리 1.7에 의해서

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & x \in [0,2] \\ 2 - \dfrac{x}{2}, & x \in [2,6] \\ -4 + \dfrac{x}{2}, & x \in [6,8] \end{cases}$$

이다.

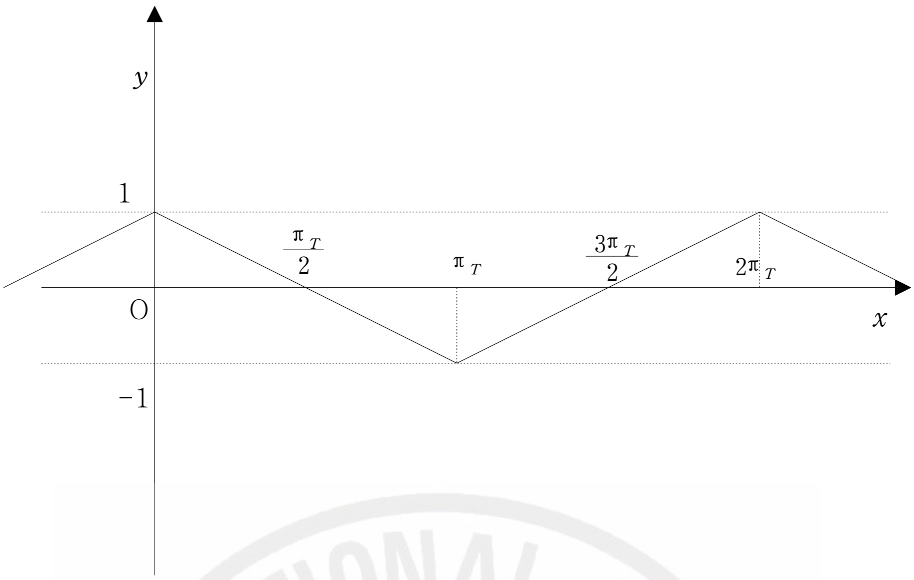


(그림 7)

(2) $f(x) = \cos\theta_T$ 라 하면, 정리 1.7에 의해서

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2}, & x \in [0,4] \\ -3 + \dfrac{x}{2}, & x \in [4,8] \end{cases}$$

이다.



(그림 8)

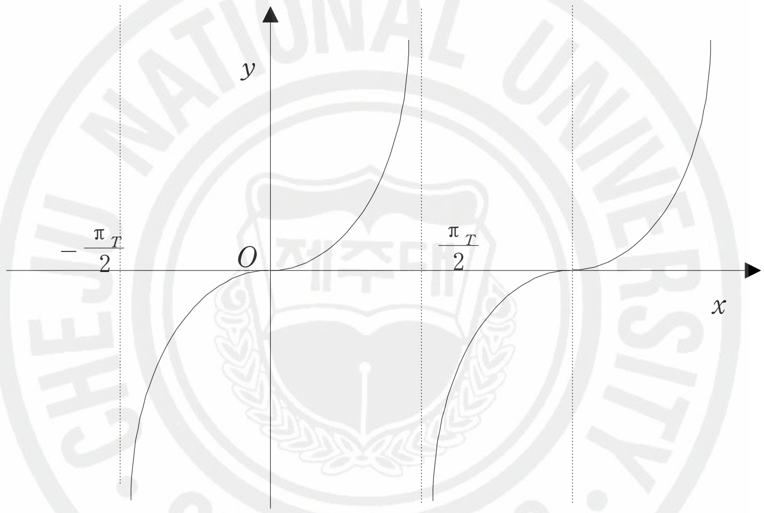
$f(x)=\sin\Theta_T$과 $f(x)=\cos\Theta_T$ 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y|-1\leq y\leq 1\}$이다. 또한 임의의 정수 k에 대하여 택시각 Θ_T의 일반각은 $(\Theta_T+2k\pi_T)\in[0,8)$이며 $\sin(\Theta_T+2k\pi_T)=\sin\Theta_T$, $\cos(\Theta_T+2k\pi_T)=\cos\Theta_T$인 주기 함수이다. $f(x)=\sin\Theta_T$의 그래프는 원점에 대하여 대칭인 기함수이다. 즉, $f(-\Theta_T)=-f(\Theta_T)$이다. 또한 $f(x)=\cos\Theta_T$의 그래프는 y축에 대하여 대칭인 우함수이다. 즉, $f(-\Theta_T)=f(\Theta_T)$임을 알 수 있다.

4.2 택시탄젠트함수의 그래프

$f(x)=\tan\Theta_T$라고 하면, 정리 1.7에 의해서

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2-x}, & x\in[0,2)\\ \\ \dfrac{4-x}{2-x}, & x\in(2,4]\end{cases}$$

이다.



(그림 9)

$f(x)=\tan\Theta_T$의 그래프에서 정의역은 $n\pi_T+\dfrac{\pi_T}{2}$ (단, n은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이며, 치역은 실수 전체의 집합이다. 또한, 임의의 정수 k에 대하여 택시각 Θ_T의 일반각은 $(\Theta_T+2k\pi_T)\in[0,4)$이며 $\tan(\Theta_T+k\pi_T)=\tan\Theta_T$인 주기함수이다. 그래프는 원점에 대하여 대칭인 기함수이다. 즉, $f(-\Theta_T)=-f(\Theta_T)$이며, 점근선의 방정식은 $\Theta_T=n\pi_T+\dfrac{\pi_T}{2}$ (단, n은 정수)이다.

5. 결　　론

거리함수만을 달리 적용하여도, 우리가 살고 있는 사회에서 새로운 경험을 하게 된다. 아무리 직선거리가 가까워도 두 지점 사이에 길이 없는 경우에는 돌아갈 수밖에 없다. 유클리드기하가 자연적인 세계를 서술하는 것이라면, 택시기하는 도로망이 발달한 도시의 모습을 설명하는 기하로 인식될 수 있을 것이다.

택시기하는 비 유클리드 기하 중에서 유클리드 기하학과 거의 유사할 뿐만 아니라, 유클리드 기하학의 기본 지식만 가지고 있으면 충분히 학습할 수 있기 때문에 학생들에게 가르치기 적합한 내용이다. 택시기하학은 설명이 어려웠던 비 유클리드 기하학을 쉽게 설명 할 수 있다는 점과, 현실세계의 문제를 수학적으로 추상화하고 형식화하여 학생들이 자연스럽게 적용 가능할 수 있게 하는 역할을 하였다. 따라서 택시기하학은 수학의 교육 목표를 달성하는데 효과적인 도구가 될 수 있을 것이다. 또한 택시거리의 새로운 수학적 개념을 가지고 교육과정에 나와 있는 유클리드 기하학에 기초한 모든 영역을 택시기하학으로 바꾸어 어떻게 변화되는지를 탐구하게 하는 것은 요즘 강조되는 창의성 교육에 매우 근접한 과제가 될 것이다.

유클리드 기하에 기초한 고등학교까지의 기하 영역을 비 유클리드 기하학의 하나인 택시기하학으로 확장하여 적용함으로써 수학 학습에 있어서 탐구 능력을 기를 수 있음은 물론 창의적이고 독창적인 이론의 전개를 통하여 폭 넓은 사고력을 기르게 할 수 있을 것이다. 뿐만 아니라 수학에 대한 태도도 긍정적이고 적극적으로 변할 수 있을 것이라고 예상된다.

참 고 문 헌

[1] Krause, Eugene F, “Taxicab Geometry-An Adventure in Non- Euclidean Geometry”, Dover Publication, Inc. New York, 1986.

[2] 김경동, “중등학교에서의 택시기하 지도방안”, 충북대학교 교육대학원 석사학위논문, 1996.

[3] Kevin Thompson and Tevian Dray "Taxicab Angles and Trigonometry" Oregon State University.

[4] 고선미, “택시기하학에서의 택시원추곡선의 특성” 제주대학교 교육대학원 석사학위논문, 2006.

[5] 김경동, “택시기하학(비유클리드 기하학에서의 모험)”, 경문사, 2004.

[6] Ziya AKCA and Rustem KAYA, " On The Taxicab Trigonometry", University, Turkey.

[7] 수학 10-나 교과서 , 동화사, 2001.

< Abstract >

Taxicab Trigonometry on the Taxicab geometry

Suk mi Moon

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Jeju, Korea

Supervised by professor Seoung Dal Jung

In this these, we study the taxicab trigonometry on the taxicab geometry. We also give the properties of the taxicab trigonometry on the taxicab geometry.

Taxicab geometry is the geometry by the taxicab distance function, which the distance between two points is measured by moving distance of taxi and so it is non-Euclidean geometry.

Taxicab geometry is interesting geometry because it is a non-Euclidean geometry but it is very similar to Euclidean geometry.

Therefore it is good geometry for students who want to study the non-Euclidean geometry.

---

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 2007.