博士學位論文

진리함수사상을 이용한 근사추론

濟州大學校 大學院

數 學 科

姜 尙 辰

2008年 2月

진리함수사상을 이용한 근사추론

指導敎授　尹　龍　植

姜　尙　辰

이 論文을 理學 博士學位 論文으로 提出함.

2007年　12月

姜尙辰의 理學 博士學位 論文을 認准함

審 査 委 員 長＿＿＿＿＿＿＿＿印

委　　　　員＿＿＿＿＿＿＿＿印

委　　　　員＿＿＿＿＿＿＿＿印

委　　　　員＿＿＿＿＿＿＿＿印

委　　　　員＿＿＿＿＿＿＿＿印

濟州大學校 大學院

2007年　　月　　日

Approximate reasoning using truth function mapping

Sang-Jin Kang
(Supervised by professor Yong-Sik Yun)

A thesis submitted in partial fulfillment of the requirement for the degree of Doctor of Science

2007. 12.

This thesis has been examined and approved.

Date Approved :

Department of Mathematics
GRADUATE SCHOOL
CHEJU NATIONAL UNIVERSITY

목 차

표 차 례

그 림 차 례

<초록>

진리함수사상을 이용한 근사추론

姜 尙 辰

濟州大學校 大學院 數學科

指導敎授 尹 龍 植

수학에서의 논리는 명제의 진리값이 참 또는 거짓 두 가지로 나타내는 이가 논리이다. 그러나 우리가 일상생활에서 사용하는 논리는 다가논리이다. 이러한 다가논리를 기반으로 하여 탄생한 것이 퍼지이론이다. 퍼지논리는 퍼지이론의 한 분야이며 진리값이 여러 가지로 나타나는 퍼지명제를 다루는 분야이다. 특히 근사추론은 주어진 몇 개의 퍼지명제들로부터 결론이 되는 명제를 얻어내는 과정을 말한다.

근사추론에는 이가논리에서의 연역추론과 대우추론을 각각 일반화한 일반화된 연역추론과 일반화된 대우추론이 있으며, Baldwin은 진리함수사상을 이용한 근사추론법을 고안하였다. 이 논문에서는 근사추론에 대한 기본적인 내용과 Baldwin의 방법을 소개하고 두 가지 새로운 진리함수사상을 정의하여 이 진리함수사상에 의한 근사추론의 결과를 소개하였다.

결론적으로 이 논문에서 새롭게 정의한 두 가지 진리함수사상은 Lukasiewicz의 진리함수사상을 포함한 기존의 여섯 가지 진리함수사상보다 더 나은 근사추론의 결과를 얻을 수 있음을 보였다.

0. 도입

몇 개의 전제조건인 명제들로부터 결론을 이끌어내는 과정을 추론이라 하며, 명제는 참과 거짓을 명확히 구분할 수 있는 문장이어야 한다. 따라서 수학에서의 논리는 이가 논리이다. 그러나 우리가 일상생활에서 사용하는 논리는 이러한 이가 논리를 기반으로 하지 않고 다가논리를 기반으로 추론하게 된다. 예를 들면 사과가 익은 정도를 설명할 때 사과가 익었다와 사과가 익지 않았다 두 가지 문장만을 사용하지는 않는다. 매우 잘 익었다, 잘 익었다, 잘 익지 않았다, 전혀 익지 않았다 등 여러 가지 방법으로 설명할 수 있다. 따라서 우리는 좀 더 일반화된 추론방법을 생각할 수 있는데, 이것이 퍼지이론을 이용한 근사추론이다. 근사추론법에는 무한치 논리를 기반으로 하는 Zadeh의 근사추론법과 퍼지논리를 기반으로 하는 Baldwin의 근사추론법이 있다. Baldwin은 첫 번째 전제인 암시(implication)의 퍼지 진리값을 진리함수사상(truth function mapping)으로 정의하였는데 여기에 사용되는 사상에는 대표적인 여섯 가지가 있다. 그러나 근사추론법의 네 가지 평가기준에 비추어 볼 때 평가 기준을 모두 만족시키는 것은 한 가지 사상 밖에 없으며 네 가지 사상은 평가 기준 중 한 가지 밖에 만족시키지 않는다. 그래서 좀 더 많은 평가 기준을 만족시키는 진리함수사상을 정의하여 소개하였고, 그것에 대한 근사추론을 살펴보았다.

제 1장에서는 퍼지이론에 관한 대략적인 사항 즉, 퍼지집합의 개념, 퍼지집합 사이의 기본 연산 그리고 그에 따른 성질과 기타 여러 가지의 정의 등을 간단히 정리하였다.

제 2장에서는 퍼지명제의 개념 및 진리값 계산 방법과 더불어 연관된 각종 정의들에 대하여 서술하였고 본 논문의 연구 주제의 기저를 이루는 퍼지논리에 대한 정의와 그 진리값 계산에 관하여 다루었다. 또한 언어변수 '$Truth$'의 변수값에 대한 소속함수값에 대하여 정의하였다. 그리고 퍼지논리에서 이루어지는 복합명제 사이의 연산자인 명제의 부정, 논리곱, 논리합, 암시 등에 대하여 서술하였다.

또한 언어변수의 정의와 언어변수의 진리값에 해당하는 수치적 진리값과 퍼지

논리에서 가장 핵심적인 언어적 진리값에 대하여 기술하였다. 그리고 언어적 진리값이 결합된 복합 퍼지명제의 연산과 그의 멤버쉽 함수값의 계산 방법을 서술하였다.

제 3장에서는 퍼지논리를 기반으로 하는 근사추론법에서 가장 중요한 역할을 하는 것은 진리함수사상이다. 진리함수사상이란 암시(implication)의 퍼지 진리값을 정의한 함수이다. 알려진 진리함수사상에는 Lukasiewicz의 진리함수사상을 포함하여 모두 여섯 가지가 있는데 이에 대한 내용을 살펴보았다. 그리고 근사추론법의 계산과정에서 적용되는 진리함수변형과 역진리함수변형에 대한 내용을 고찰하였다.

제 4장에서는 제 3장에 있는 진리함수사상 여섯 가지에 대하여 근사추론을 확인하여 보았다. 그런데 근사추론의 타당성을 평가하기 위한 평가기준에 비추어 볼 때 이 여섯 가지 진리함수사상 중에서 평가 기준을 모두 만족시키는 것은 한 가지 사상 밖에 없으며 나머지 네 가지 사상은 평가 기준 중 한 가지 밖에 만족시키지 않는다. 그래서 평가 기준의 타당성을 높일 수 있는 새로운 진리함수사상 두 가지를 정의하였고, 또한 그 진리함수사상에 대하여 근사추론을 실시하여 기존의 진리함수사상과의 결과를 서로 비교하여 보았다. 새로 정의한 진리함수사상은 일반화된 연역추론에서 $very\,true$, $true$, $fairly\,true$인 경우, 즉 긍정적인 입력 작용에 있어서 매우 좋은 결과를 얻었고, 일반화된 대우추론인 경우에 있어서는 $false$와 $fairly\,false$인 경우 입력값이 0.5 전후를 기준으로 후반부의 결과가 타당한 형태로 나온 것이 없지만 (ⅶ)은 후반부의 결과가 둘 다의 경우 타당하게 나왔고 (ⅷ)도 (ⅴ)를 제외한 기존의 진리함수사상들과는 다르게 0.5를 기준으로 전반부에서 타당한 결과로 나왔음을 알 수 있었다.

제 5장에서는 근사추론의 타당성 여부를 판단하는 네 가지 평가 방법의 만족 여부를 기존의 진리함수사상과 새로 정의한 진리함수사상을 일반화된 연역추론에서 비교하였다.

1. 퍼지집합

일상생활 속에서 '키가 큰 사람들의 모임', '작은 수들의 모임' 등과 같이 원소가 집합에 속하는지 또는 속하지 않는지 명확하게 구분할 수 없는 집합개념을 사용하여 나타내곤 한다. '키가 큰 사람들의 모임', '작은 수들의 모임'과 같은 모임은 주관적이고 집합으로서 표현하기 애매한 언어 '크다', '작다' 등을 사용함으로서 소속의 정도를 분명히 하기 어렵기 때문에 기존의 집합개념으로는 다룰 수가 없다. 그래서 우리가 일상생활에서 많이 사용하지만 보통 집합개념으로는 다룰 수 없는 형태의 집합개념을 다루기 위하여 Zadeh는 퍼지집합을 도입하였다. Zadeh는 원소가 집합에 속하는 정도를 0과 1사이의 값으로 나타내고 소속정도함수(membership grade function)라는 용어를 사용하였고, 소속의 정도가 $[0,1]$ 사이의 실수 값으로 표현되는 집합을 퍼지집합이라 불렀다.

1.1 퍼지집합

X를 임의의 집합이라 하자. X의 부분집합인 A는

$$\mu_A : X \rightarrow \{0,\ 1\}, \qquad \mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A, \\ 1, & x \in A, \end{cases}$$

을 만족하는 특성함수(characteristic function)로 표현할 수 있다. 다음 정의는 위의 내용을 일반화한 것이다.

정의 1.1. 집합 X 위에서의 퍼지집합 A는 X에서 구간 $[0,1]$로의 함수이다. 이 함수를 A의 소속정도함수(membership grade function) 또는 소속함수라고 한다.

A를 소속함수 μ_A를 갖는 X 위에서의 퍼지집합이라 하자. A는 다음의 순서쌍의 집합에 의해 완전하게 특성화된다.

$$A = \{(x, \mu_A(x))\}, \quad x \in X$$

소속함수의 값이 0인 원소들은 보통 쓰지 않는다. X가 유한집합 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 일 때, X 위에서 퍼지집합 A는

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \cdots + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$$

으로 나타낸다. X가 유한집합이 아니면

$$A = \int_X \mu_A(x)/x$$

로 쓴다. 두 퍼지집합 A와 B가 모든 $x \in X$에 대하여 $\mu_A(x) = \mu_B(x)$일 때, A와 B는 같다고 하며 $A = B$로 나타낸다.

예제 1.2. $X = \{1, 2, 3, 4\}$라 하자.

$$\mu_A(1) = 0.6,\ \mu_A(2) = 1,\ \mu_A(3) = 0.5,\ \mu_A(4) = 0.3$$

에 의해 정의된 함수 $\mu_A : X \to [0, 1]$는 $A = \{(1, 0.6), (2, 1), (3, 0.5), (4, 0.3)\}$라는 퍼지집합에 대한 소속함수라고 생각할 수 있다.

예제 1.3. $X = R$이고 $\mu_A(x) = \dfrac{1}{1+(x-10)^2}$ 즉, $A = \displaystyle\int_R \frac{1}{1+(x-10)^2}/x$ 라고 하자. 이 때 A는 10에 가까운 실수에 대한 퍼지집합으로 생각할 수 있다.

예제 1.4. 집합 X는 $X = \{x | 0 \leqq x \leqq 50$인 실수$\}$이고 퍼지집합 A가 $A = \{x | x$는 20에 가까운 실수$\}$일 때 다음은 퍼지집합 A를 나타내는 예들이다.

$$A = \int_X \frac{1}{1+(x-20)^2}/x$$

또는

$$\mu_A = \begin{cases} 0, & x < 10, \\ \dfrac{1}{10}(x-10), & 10 \leqq x \leqq 20, \\ -\dfrac{1}{10}(x-10)+1, & 20 < x \leqq 30, \\ 0, & x > 30. \end{cases}$$

1.2 퍼지집합의 연산

정의 1.5. A와 B를 퍼지집합이라 하자. 두 퍼지집합 A와 B의 연산은 다음과 같이 정의한다.

1. 합집합 : $A \cup B$

$$\mu_{A \cup B}(x) = max\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}, \qquad \forall x \in X$$

2. 교집합 : $A \cap B$

$$\mu_{A \cap B}(x) = min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}, \qquad \forall x \in X$$

3. 여집합 : A^c

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x), \qquad \forall x \in X$$

4. 확률합 : $A \hat{+} B$

$$\mu_{A \hat{+} B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x), \qquad \forall x \in X$$

5. 확률적 : $A \cdot B$

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \qquad \forall x \in X$$

예제 1.6. $X = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$일 때, $A = \{(1, 0.5), (2, 0.9), (3, 1), (4, 0.9), (5, 0.5)\}$, $B = \{(2, 0.4), (3, 0.8), (4, 1), (5, 1), (6, 0.8)\}$라고 하자.
그러면,

$A \cup B = \{(1, 0.5), (2, 0.9), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 0.8)\}$

$A \cap B = \{(2, 0.4), (3, 0.8), (4, 0.9), (5, 0.5)\}$

$A^c = \{(1, 0.5), (2, 0.1), (4, 0.1), (5, 0.5), (6, 1), (7, 1), (8, 1), (9, 1), (10, 1)\}$

$A \hat{+} B = \{(1, 0.5), (2, 0.94), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 0.8)\}$

$A \cdot B = \{(2, 0.36), (3, 0.8), (4, 0.9), (5, 0.5)\}$

이다.

정리 1.7. *A, B 그리고 C를 집합 X 위에서의 퍼지집합이라 하면 다음이 성립한다.*

1. *교환법칙(Commutative laws)*

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

2. *결합법칙(Associative laws)*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$$

3. *분배법칙(Distributive laws)*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. *이중부정법칙(Involution)*

$$(A^c)^c = A$$

5. *멱등법칙(Idempotency)*

$$A \cup A = A, \ A \cap A = A$$

6. *흡수법칙(Absorption)*

$$A \cup (A \cap B) = A, \ A \cap (A \cup B) = A$$

7. *항등법칙(Identity)*

$$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap X = A$$

8. *$\varnothing$와 X에 의한 흡수법칙(Absorption by $\varnothing$ and X)*

$$A \cup X = X, \quad A \cap X = A$$
$$A \cup \varnothing = A, \ A \cap \varnothing = \varnothing$$

9. *드 모르간의 법칙(De Morgan's laws)*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,\ \ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

10. *동치공식(Equivalence formula)*

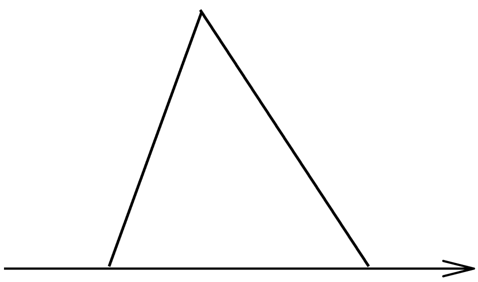
$$(A^c \cup B) \cap (A \cup B^c) = (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)$$

11. *대칭차공식(Symmetrical difference formula)*

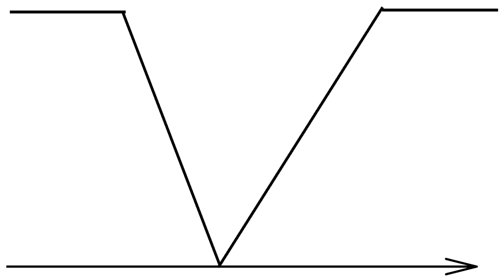
$$(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) = (A^c \cup B^c) \cap (A \cup B)$$

12. *보통집합의 연산에서 성립하는 배중율(Law of excluded middle)과 모순율 (Law of contradiction)은 퍼지집합에서는 일반적으로 성립하지 않는다.*

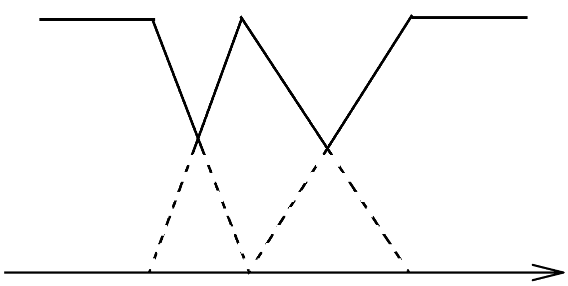
예제 1.8. 다음 그림에서 $A \cup A^c \neq X,\ A \cap A^c \neq \varnothing$ 임을 알 수 있다.



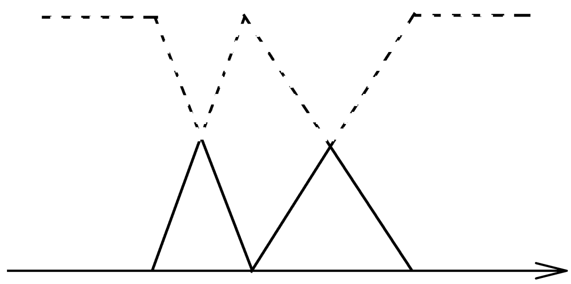
A



A^c



$A \cup A^c$



$A \cap A^c$

1.3 퍼지집합의 기타 연산

정의 1.9. A와 B를 퍼지집합이라 하자.

1. 배타 합집합(disjunctive sum)

$$A \oplus B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

2. 퍼지집합의 차이(difference)

(1) 단순차이(difference)

$$A - B = A \cap B^c$$

(2) 한계차이(bounded difference)

$$\mu_{A \ominus B}(x) = max\,[0,\ \mu_A(x) - \mu_B(x)]$$

3. 퍼지집합의 거리(distance)

(1) 해밍거리(Hamming distance)

$$d(A,B) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|$$

(2) 유클리드 거리(Euclidean distance)

$$e(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(x) - \mu_B(x))^2}$$

(3) 민코프스키 거리(Minkowski distance)

$$d_w(A,B) = (\sum_{x \in X} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|^w)^{1/w},\ w \in [1, \infty]$$

4. 퍼지집합의 곱(cartesian product)

(1) 퍼지집합 A의 곱

$$A^m = \{(x,\ \mu_{A^m}(x)) | x \in U\}$$

$$\mu_{A^m}(x) = \{\mu_A(x)\}^m,\ \ \forall x \in X,\ \ m \in R$$

여기서 $m = 2$일 때를 A의 concentration이라 부르며, $CON(A)$로 표기한다.

$$CON(A) = A^2,$$

$$\mu_{CON(A)}(x) = \{\mu_A(x)\}^2, \quad x \in U.$$

그리고 $m = 0.5$일 때를 A의 dilation이라 부르며, $DIL(A)$로 표기한다.

$$DIL(A) = A^{0.5},$$

$$\mu_{DIL(A)}(x) = \{\mu_A(x)\}^{0.5}, \quad x \in U.$$

(2) 퍼지집합 $A_1, A_2, \cdots, A_n$의 곱

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \cdots, \mu_{A_n}(x_n)\}$$

예제 1.10. $A = \{(1, 0.2), (2, 0.7), (3, 1), (4, 0)\}$,

$B = \{(1, 0.5), (2, 0.3), (3, 1), (4, 0.1)\}$라고 하자. 그러면

$A^c = \{(1, 0.8), (2, 0.3), (3, 0), (4, 1)\}$

$B^{c =} \{(1, 0.5), (2, 0.7), (3, 0), (4, 0.9)\}$

$A \oplus B = \{(1, 0.5), (2, 0.7), (3, 0), (4, 0.1)\}$

$A - B = A \cap B^{c =} \{(1, 0.2), (2, 0.7), (3, 0), (4, 0)\}$

$A \ominus B = \{(1, 0), (2, 0.4), (3, 0), (4, 0)\}$

$d(A, B) = |-0.3| + |0.4| + |0| + |-0.1| = 0.8$

$e(A, B) = \sqrt{(-0.3)^2 + 0.4^2 + 0^2 + (-0.1)^2} = \sqrt{0.26}$

2. 퍼지 명제와 퍼지 논리

2.1 퍼지 명제

정의 2.1. 참, 거짓을 명확히 판별할 수 있는 문장이나 식을 **명제**(proposition or statement)라고 한다. 참인 명제에 진리값 1을 대응시키고 거짓인 명제에 진리값 0을 대응시키면 명제는 0 또는 1의 진리값을 갖는다.

예제 2.2. 명제: "실수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다."

정의 2.3. 진리값을 진리의 정도로서 $[0, 1]$ 사이의 값으로 갖는 문장이나 식을 **퍼지명제**(fuzzy proposition)라고 한다.

예제 2.4. 다음은 퍼지명제이다.
1. 조영이는 젊다.
2. 10은 작은 수이다.

여기서 '젊다', '작다'와 같이 애매한(fuzzy) 언어가 포함되어 있을 때의 문장을 퍼지명제라 하며, 나이에 해당하는 전체집합 속에서 '젊다', 실수 또는 자연수의 집합 속에서 '작다'라는 퍼지집합에 소속되는 진리의 정도로서 진리값을 표현한다.

정의 2.5. 퍼지집합으로 나타낼 수 있는 술어를 **퍼지술어**(fuzzy predicate)라고 하고 $small$, $large$, old, $young$, $true$, $false$, $high$, $good$, bad 등이 있다.

정의 2.6. 퍼지집합 또는 퍼지개념을 꾸미고 다른 언어적 용어를 수식하여 새로운 진리값을 유도하는 용어를 **퍼지변형자**(fuzzy modifier)라고 하고, $very$, $more\ or\ less$, $fairly$, $extremely$ 등과 같은 용어이다.

정의 2.7. 퍼지명제 $P =$'$x\ is\ A$'의 진리값은 x가 퍼지집합 A에 속해있는 정도인 $\mu_A(x)$로 정의한다. 즉 $v(P) = \mu_A(x) \in [0,1]$이다.

일반적으로 함수에서 변수라고 하면 실수를 변수값으로 갖는 수치변수를 뜻한다. 그런데 퍼지명제에 있어서의 변수는 수치변수 뿐만 아니라 언어변수로 표현하는 경우가 많고, 그 진리값의 표현은 수치적 진리값과 더불어 언어적 진리값을 사용하여 나타낸다.

정의 2.8. 변수값이 자연언어나 인공언어에 있는 단어나 문장인 변수를 **언어변수**(linguistic variable)라 하며, 퍼지 변수(fuzzy variable) 혹은 퍼지 언어 변수(fuzzy linguistic variable)라고도 한다.

예제 2.9. 우리가 일상생활에서 매일 접하는 일기예보의 '온도'를 생각해 보자. '온도'의 수치변수는 5°, 15°, 23°, 32°,⋯ 등의 수치적 값을 가지고, 언어변수는 춥다, 서늘하다, 따뜻하다, 덥다, 매우 덥다,⋯ 등의 언어적 값을 가지는 변수이다. 따라서 언어변수의 변수값을 퍼지 부분집합으로 생각할 수 있고, 그러므로 각 변수값을 소속함수로 나타낼 수 있다.

하나의 언어변수는 다섯 쌍$(X, T(X), U, G, M)$으로 구성된다. X는 언어변수의 이름(name)이고, $T(X)$는 X가 값으로 가질 수 있는 용어(term)들로 구성된 집합이며, U는 언어변수 X의 특성을 결정하는 전체집합(Universe of discourse)이며, G는 $T(X)$ 내의 변수값 이름 x를 생성하는 구문법칙(syntactic grammar)이며, M은 x의 의미 M_x를 부여하는 의미규칙(semantic rule)이다.

여기서 구문법칙은 언어 변수의 값들을 체계적으로 만들어 내는 문법이고, 의미규칙은 전체집합 U 내에 정의된 퍼지집합에 $T(X)$ 내의 용어를 대응시키는 규칙을 정의한 것이다. 특히, 구문법칙과 의미규칙의 특성을 가지고 있는 언어변수를 구조적 언어변수(structured linguistic variable)라고 한다. 구조적 언어변수

의 대표적인 경우는 Age 또는 $Truth$와 같은 언어변수를 가리킨다.

예제 2.10. 언어변수 X='Age'를 살펴보자.

$(Age,\ T(Age),\ U,\ G,\ M)$

Age : 언어변수 X의 이름

$T(Age) = \{young,\ very\ young,\ very\ very\ young, \cdots\}$

$U = [0,\ 100]$

$G(Age)$: $T^{i+1} = \{young\} \cup \{very\ T^i\}$

$M(young) = \{(u,\ \mu_{young}(u)) | u \in [0, 100]\}$

여기서, $\mu_{young}(u) = \int_0^{50} \frac{1}{1 + (\frac{u-20}{5})^2} / u,\ u \in U$

정의 2.11. 퍼지 명제 $P =$ '$x\ is\ A$'의 진리값으로서 $[0, 1]$ 사이에 적당한 실수값을 대응시켜 나타내는 것을 **수치적 진리값**(numerical truth value)의 방법이다.

수치적 진리값이 1에 가까울수록 퍼지명제 P의 진리의 정도가 높고, 0에 가까울수록 진리의 정도가 낮은 것을 의미한다. 이치 논리인 경우 진리값 집합은 {0(거짓), 1(참)}이고, 무한치 논리의 진리값 집합은 0에서 1 사이의 모든 실수값 집합으로서 $[0, 1]$이다.

즉, 퍼지 명제의 수치적 진리값이라는 것은 진리값 집합 $[0, 1]$ 내의 적합한 실수값이며, 이것은 무한치 논리의 사고방식과 같다. 퍼지 명제 $P =$ '$x\ is\ A$'의 수치적 진리값을 $v(P)$로 나타내면 $0 \leq v(P) \leq 1$이다.

예제 2.12. 어떤 대상의 성질을 온도 T라고 할 경우, 퍼지명제 $P =$ '$T\ is\ high$'의 수치적 진리값 $v(P)$를 결정할 때는 그 대상의 실제 온도 값이 판

명되지 않은 경우도 생각할 수가 있다. 이때, 수치적 진리값 $v(P)$는 그 대상의 온도에 대한 주관적인 판단 하에 퍼지명제 $P=$‘T is $high$’의 수치적 진리값을 적당하게 결정한다.

그런데 온도 값이, 70^oC로 판명된 경우에는 퍼지명제 $P=$‘T is $high$’를 $P=$‘70^oC is $high$’라고 바꿀 수 있다. 이 때, 퍼지명제 P의 수치적 진리값은 ‘$high$’에 대한 퍼지집합의 멤버쉽 함수값 $v(P)=\mu_{high}(70^oC)$에 대응시켜 나타낸다.

예제 2.13. 다음 퍼지명제 P의 수치적 진리값을 구해보자.

P = ‘7은 10에 가까운 자연수이다’

= ‘7 is A’

여기서, $A=\{(7,0.2),(8,0.5),(9,0.8),(10,1),(11,0.8),(12,0.5),(13,0.1)\}$이라고 하자.

그러면 $v(P)=v(7\ \ is\ \ A)=\mu_A(7)=0.2$이다.

정의 2.14. 퍼지명제의 진리값을 진리값 집합 $[0,1]$ 상의 퍼지집합 τ에 의해서 대응시키는 방법을 **언어적 진리값**(linguistic truth value)이라고 한다.

이 τ에 $true$, $fairly\ true$, $very\ true$, $false$, $fairly\ false$, $very\ false$, $\cdots$ 등의 언어적 진리값을 대응시킬 수 있으며, τ의 종류는 여러 가지로 고찰되고 있다. 언어적 진리값의 집합을 T로 하면, T는 진리값 집합 $[0,1]$ 상의 퍼지 집합의 족으로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T=\{\tau|\mu_\tau:[0,1]\rightarrow[0,1]\}$$

일반적으로, T를 유한개의 언어적 진리값의 집합으로 구성하는 경우가 많은데, 다음과 같이 정하기도 한다.

$T = \{absolutely\ true,\ very\ true,\ true,\ fairly\ true,\ fairly\ false,$
$\quad false,\ very\ false,\ absolutely\ false,\ undecided\}$

이 때, 위의 T를 구성하는 언어적 진리값은 $[0, 1]$상의 퍼지집합이며, T를 구성하는 언어적 진리값들의 멤버쉽 함수는 여러 가지로 정의할 수 있다.

예제 2.15. $P =$ 'x is *young*'과 $Q =$ 'x is *very young*'에서 두 퍼지명제의 진리값을 알아보자.

퍼지명제 P에서 x는 객체의 이름이고, 퍼지술어 *young*은 객체 x의 속성(성질 또는 특성)을 나타내는 퍼지집합이다. 이때, 퍼지명제 P의 진리값 $v(P)$를 $v(P) = \mu_{young}(x)$으로 정의할 때 $v(P)$는 두 가지 방법으로 생각할 수 있다.

첫째로 속성을 만족하는 정도로 해석할 수 있다. 즉 P의 진리값 $v(P) = \mu_{young}(x)$는 객체 x가 속성 *young*을 만족하는 정도를 나타낸다고 할 수 있다.

둘째는 퍼지집합에 소속하는 정도로 해석할 수 있다. 즉 퍼지명제 P의 진리값 $v(P) = \mu_{young}(x)$는 *young*이 퍼지집합이므로 객체 x가 퍼지집합 *young*에 소속하는 정도로 나타낼 수 있다.

퍼지명제 Q의 퍼지술어는 *very young*이며 *very*는 *young*의 의미를 변형시키는 퍼지변형자로 작용하며 *very*를 concentration으로 취급하면

$$very\ young = CON(young) = young^2$$

이므로, 퍼지명제 Q의 진리값 $v(Q)$는

$$v(Q) = \mu_{young^2}(x)$$

이다.

퍼지집합 이론을 기반으로 하는 다치논리에서 논리연결자로 연결된 복합 퍼지명제의 진리값 계산은 어떤 퍼지집합 연산자를 사용하느냐에 따라 다양하게 표현된다. 다음은 Zadeh의 퍼지집합 기본 연산자($\cup$, $\cap$, ^{c})를 기반으로 하는 복합 퍼지명제의 진리값 계산 방법이다([18, 21]).

정의 2.16. P, Q를 퍼지명제라 하고, $v(P), v(Q)$를 각각 퍼지명제 P, Q의 진리값이라고 하자. 단, $\wedge$는 $minimum$값을 취하는 것이고, $\vee$는 $maximum$값을 취하는 연산자이다.

1. 부정(Negation) : $v(\neg P)$

명제 P의 부정 $\neg P$는 'P가 아니다.'이고, $\neg P$의 진리값은

$$v(\neg P) = 1 - v(P)$$

이다.

2. 논리곱(Conjunction) : $P \wedge Q$

명제 P와 Q의 논리곱은 ' $P\ and\ Q$'이고, $P \wedge Q$의 진리값은

$$v(P\ and\ Q) = v(P \wedge Q) = v(P) \wedge v(Q)$$

이다.

3. 논리합(Disjuction) : $P \vee Q$

명제 P와 Q의 논리합은 ' $P\ or\ Q$'이고, $P \vee Q$의 진리값은

$$v(P\ or\ Q) = v(P \vee Q) = v(P) \vee v(Q)$$

이다.

4. 암시(Implication) : $P \rightarrow Q$

퍼지암시 $P \rightarrow Q$는 '$\neg P\ or\ Q$'와 같으므로, $P \rightarrow Q$의 진리값은

$$\begin{aligned} v(P \rightarrow Q) &= v(\neg P \vee Q) \\ &= max\{v(\neg P), v(Q)\} \\ &= max\{1 - v(P), v(Q)\} \end{aligned}$$

이다.

예제 2.17. 두 퍼지명제 P와 Q를 각각 P='x는 근사적으로 7이다'이고 Q='y는 근사적으로 12이다'이며, '근사적으로 7'과 '근사적으로 12'는 각각 그림 1과 같다고 하자. 이 때, $x=8,\ y=15$인 경우 퍼지명제의 진리값을 구하여보자.

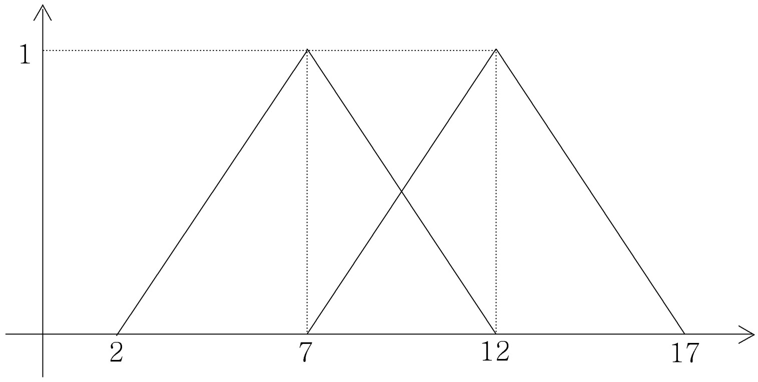


그림 1. '근사적으로 7'과 '근사적으로 12'

1. $v(P)=0.8,\ v(Q)=0.4$
2. $v(P\wedge Q)=0.4,\quad v(P\vee Q)=0.8,\quad v(P\rightarrow Q)=0.4$

정리 2.18. *퍼지집합 연산자($\cup$, $\cap$, ^{c})를 기반으로 하는 다치논리에서 모든 퍼지명제 P, Q, R에 대하여 다음이 항상 성립한다.*

1. *교환법칙(Commutative laws)*

$$P\vee Q=Q\vee P,\qquad P\wedge Q=Q\wedge P$$

2. *결합법칙(Associative laws)*

$$P\vee(Q\vee R)=(P\vee Q)\vee R=P\vee Q\vee R\ ,$$
$$P\wedge(Q\wedge R)=(P\wedge Q)\wedge R=P\wedge Q\wedge R$$

3. *분배법칙(Distributive laws)*

$$P\wedge(Q\vee R)=(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)\ ,$$
$$P\vee(Q\wedge R)=(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$$

4. *이중부정법칙(Involution)*

$$\neg(\neg P) = P$$

5. *멱등법칙(Idempotency)*

$$P \vee P = P,\ \ P \wedge P = P$$

6. *흡수법칙(Absorption)*

$$P \vee (P \wedge Q) = P,\ P \wedge (P \vee Q) = P$$

7. *항등법칙(Identity)*

$$P \wedge 1 = P,\ \ P \vee 0 = P$$

8. *0과 1에 의한 흡수법칙(Absorption by 0 and 1)*

$$P \wedge 0 = 0,\ \ P \vee 1 = 1$$

9. *드 모르간의 법칙(De Morgan's laws)*

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$
$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

그러나 모순율(Law of contradiction)과 배중율(Law of excluded middle)은 성립하지 않는다. 즉,

$$v(P \wedge \neg P) \neq 0, \qquad v(P \vee \neg P) \neq 1$$

인 경우도 있다.

2.2 퍼지논리

일상생활에서 사용하는 '$x\ is\ A$'라는 명제의 참과 거짓의 정도를 명확하게 표현할 수 없을 때는 $true,\ fairly\ true, very\ true,\ false,\ very\ false$ 등으로 나

타낼 수 있다. 특히 한 주장이나 명제의 진위를 잘 정의할 수 없을 때에는 언어적 진리값으로 나타내는 것이 수월할 때가 있다. 이런 경우 용어집합(term-set)이 $true,\, very\, true,\, false,\, \cdots$ 등인 변수 '$Truth$'를 도입하여 사용하며 명제의 진위정도를 수치적 진리값이 아닌 언어적 진리값으로 나타낼 수 있다([18]).

정의 2.19. 명제의 진리값으로 참과 거짓 이외에 다른 진리값을 함께 다루는 다치논리의 바탕위에 퍼지집합 이론을 결합시켜 나타내는 논리시스템을 **퍼지논리**(fuzzy logic) 또는 **퍼지 언어적 논리**라고 한다.

퍼지논리는 퍼지명제를 대상으로 하고 언어로 표현된 퍼지 진리값을 가지며, 근사추론이 가능하다는 특징을 갖고 있다. 그리고 퍼지논리의 진리값으로는 $[0,1]$사이의 실수인 수치적인 진리값으로만 표현되는 것이 아니라 자연언어인 언어적 진리값 $true,\, fairly\, true,\, very\, true,\, false,\, very\, false,\, \cdots$ 등을 사용하여 나타낸다. 또한 $true,\, fairly\, true,\, very\, true,\, false,\, very\, false,\, \cdots$ 등에 대한 정의는 여러 가지로 규정할 수 있으며 그에 따라 퍼지논리시스템의 특성이 달라질 수 있다.

퍼지 명제 $P=$ '$x\ is\ A$'의 언어적 진리값이 τ일 때, 이것은 일반적으로 다음과 같이 표현한다.

$$x\ is\ A\ is\ \tau.$$

예제 2.20. 퍼지명제에 언어적 진리값이 결합된 형태의 예이다.

1. x is high is *very true*.
2. 3은 10에 가까운 정수이다는 *거짓이다*.

예제 2.21. 퍼지명제 'Jack who is 60 years old is *old*.'의 수치적 진리값에 대하여 생각해 보자. old의 소속함수를 다음과 같이 정의할 경우,

$$\mu_{old}(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,55],\\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{5}{x-55}\right)^2}, & x\in(55,100]\end{cases}$$

퍼지명제 'Jack who is 60 years old is *old*.'의 수치적 진리값은 $\mu_{old}(60)=0.5$이다.

'Jack who is 60 years old is *old*.'의 진리값이 *true* 또는 *very true*와 같이 언어값으로 주어지면 명제의 진리값을 수치적으로 표현하기가 어려워진다. 그래서 퍼지명제의 언어적 진리값이 *very true*일 경우 퍼지명제 'Jack who is 60 years old is *old*.'는 언어적 진리값 *very true*를 퍼지명제에 포함시켜 'Jack who is 60 years old is *old* is *very true*.'로 나타낼 수 있다. 이때, 언어적 진리값이 퍼지명제와 결합된 형태의 퍼지논리에 대한 수치적 진리값에 대하여 알아보고자 한다.

그러면 다음의 명제들과 같이, 퍼지명제 내에 언어적 진리값이 포함된 퍼지명제들의 수치적 진리값에 대하여 생각해 보자.

(i) Jack (60 years old) is *old* is *true*.

(ii) Jack (60 years old) is *old* is *very true*.

(iii) Jack (60 years old) is *old* is *more or less true*.

수치적 진리값을 계산하기 위하여 *true*에 대한 소속함수를 다음과 같이 정의하자([18, 19]).

$$\mu_{true}(\eta)=\begin{cases}0, & 0\leqq\eta\leqq a,\\ 2\left(\dfrac{\eta-a}{1-a}\right)^2, & a\leqq\eta\leqq\dfrac{a+1}{2},\\ 1-2\left(\dfrac{\eta-a}{1-a}\right)^2, & \dfrac{a+1}{2}\leqq\eta\leqq 1.\end{cases}$$

'Jack (60 years old) is *old* is *very true*.'의 명제에서 *old*에 대한 소속함수 $\mu_{old}(x)$를 앞에 제시한 식으로 정의하고, $\mu_{true}(\eta)$에서 $a=0.6$을 사용하자.

$$\mu_{true}(\eta) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq \eta \leqq 0.6, \\ 2\left(\dfrac{\eta - 0.6}{0.4}\right)^2, & 0.6 \leqq \eta \leqq 0.8, \\ 1 - 2\left(\dfrac{\eta - 0.6}{0.4}\right)^2, & 0.8 \leqq \eta \leqq 1. \end{cases}$$

그러면 *very true*의 소속함수는 다음과 같다.

$$\mu_{very\ true}(\eta) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq \eta \leqq 0.6, \\ 4\left(\dfrac{\eta - 0.6}{0.4}\right)^4, & 0.6 \leqq \eta \leqq 0.8, \\ \left(1 - 2\left(\dfrac{\eta - 0.6}{0.4}\right)^2\right)^2, & 0.8 \leqq \eta \leqq 1. \end{cases}$$

60세인 Jack이 *old*의 특성을 만족하는 정도 η는 $\eta = \mu_{old}(60) = 0.5$이므로 'Jack (60 years old) is *old*.'의 명제가 *very true*일 가능성은 $\mu_{very\ true}(0.5) = 0$이다. 즉, v(Jack (60 years old) is *old* is *very true*) $= 0$이다.

퍼지명제 'Jack is *old* is *very true*.'의 일반적인 경우의 진리값에 대하여 살펴보자. *true*에 대한 소속함수를

$$\mu_{true}(\eta) = \begin{cases} 0, & 0 \leqq \eta \leqq a, \\ 2\left(\dfrac{\eta - a}{1 - a}\right)^2, & a \leqq \eta \leqq \dfrac{a+1}{2}, \\ 1 - 2\left(\dfrac{\eta - a}{1 - a}\right)^2, & \dfrac{a+1}{2} \leqq \eta \leqq 1. \end{cases}$$

로 나타내면 *very true*는 다음과 같다.

$$\mu_{very\ true}(\eta) = \mu_{true}^2(\eta)$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 \leqq \eta \leqq a, \\ 4\left(\dfrac{\eta - a}{1 - a}\right)^4, & a \leqq \eta \leqq \dfrac{a+1}{2}, \\ \left(1 - 2\left(\dfrac{\eta - a}{1 - a}\right)^2\right)^2, & \dfrac{a+1}{2} \leqq \eta \leqq 1. \end{cases}$$

Jack의 나이가 0세에서 55세 사이라면 $\eta = 0$이므로 $\mu_{very\ true}(\eta) = 0$이다. 따라서

'Jack is *old.*'라는 명제가 *very true*일 가능성은 0이다. Jack의 나이가 55세에서 100세 사이라면 $\eta=\left(1+\left(\frac{5}{x-55}\right)^2\right)^{-1}$ 되고, 'Jack is *old.*'라는 명제가 *very true* 일 가능성은 위의 식에 의해 계산된다.

그런데 Baldwin은 퍼지논리에서 중요하게 다루는 언어변수 '*Truth*'의 변수값과 그것들의 소속함수 값을 다음과 같이 정의하였고, 그림 2와 같이 나타낼 수 있다.

정의 2.22. [10] $x \in [0,1]$인 x에 대하여, 언어변수 *Truth*의 변수값과 그것들의 소속함수 값을 다음과 같이 정의한다.

① $\mu_{true}(x)=x$, ② $\mu_{false}(x)=1-x$,

③ $\mu_{very\ true}(x)=\mu^2_{true}(x)$, ④ $\mu_{very\ false}(x)=\mu^2_{false}(x)$,

⑤ $\mu_{fairly\ true}(x)=\mu^{1/2}_{true}(x)$, ⑥ $\mu_{fairly\ false}(x)=\mu^{1/2}_{false}(x)$,

⑦ $\mu_{absolutely\ true}(x)=\begin{cases}1, & x=1,\\ 0, & x\neq 1,\end{cases}$ ⑧ $\mu_{absolutely\ false}(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x\neq 0,\end{cases}$

⑨ $\mu_{undecided}(x)=1,\ \forall x \in [0,1]$.

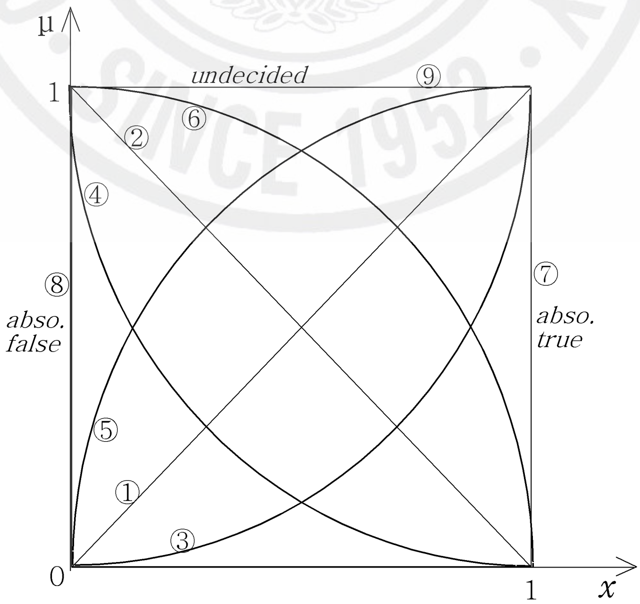


그림 2. *Truth*의 변수값

그리고 그림 2로부터 $n \rightarrow \infty$일 때 다음을 얻을 수 있다.

$$(very)^n \ true \rightarrow absolutely \ true \qquad (x \neq 0)$$
$$(very)^n \ false \rightarrow absolutely \ false \qquad (x \neq 1)$$
$$(fairly)^n \ true \rightarrow undecided \qquad (x \neq 0)$$
$$(fairly)^n \ false \rightarrow undecided \qquad (x \neq 1)$$

2.3 퍼지논리 연산자

퍼지논리에서 언어적 진리값이 포함된 퍼지명제의 부정, 논리곱, 논리합, 암시 등의 퍼지논리 연산자에 대하여 살펴보자.

정의 2.23. 언어적 진리값이 명제에 내포된 두 개의 퍼지명제에 대하여 '$x \ is \ A \ is \ \tau_P = P \ is \ \tau_P$', '$y \ is \ B \ is \ \tau_Q = Q \ is \ \tau_Q$' 이고 $\eta_P = \mu_A(x)$, $\eta_Q = \mu_B(y)$라고 하자.

1. 부정

(1) 언어진리값의 부정 : $\neg v(P)$

명제 '$P \ is \ \tau_P$' 의 부정을 '$P \ is \ not \ \tau_P$'로 정의하면, '$P \ is \ \neg\tau_P$'의 진리값은

$$v(P \, is \, not \, \tau_P) = \mu_{\neg\tau_P}(\eta_P) = 1 - \mu_{\tau_P}(\eta_P) \ , \quad \eta_P \in [0, 1]$$

이다.

(2) 퍼지술어의 부정 : $v(\neg P)$

명제 '$P \ is \ \tau_P$'의 부정을 '$not \ P \ is \ \tau_P$'로 정의하면, '$\neg P \ is \ \tau_P$'의 진리값은

$$v(not \ P \ is \ \tau_P) = \mu_{\tau_P}(1 - \eta_P)$$

이다.

2. 논리곱 : $P \ and \ Q$

'$P \ is \ \tau_P$'와 '$Q \ is \ \tau_Q$'의 논리곱은 '$P \ and \ Q \ is \ \tau_P \ and \ \tau_Q$'로 취급하고 $v(P \ and \ Q) = \tau_{P \ and \ Q}$라고 하자.

$$\mu_{\tau_{P \text{ and } Q}}(\eta) = \max_{\substack{\eta_P \wedge \eta_Q = \eta \\ \eta_P,\, \eta_Q \in [0,1]}} \{\mu_{\tau_P}(\eta_P) \ \wedge \ \mu_{\tau_Q}(\eta_Q)\},\ \forall \eta \in [0,1]$$

3. 논리합 : P *or* Q

'P *is* τ_P'와 'Q *is* τ_Q'의 논리합은 'P *or* Q *is* τ_P *or* τ_Q'로 취급하고 $v(P \text{ or } Q) = \tau_{P \text{ or } Q}$라고 하자.

$$\mu_{\tau_{P \text{ or } Q}}(\eta) = \max_{\substack{\eta_P \vee \eta_Q = \eta \\ \eta_P,\, \eta_Q \in [0,1]}} \left\{\mu_{\tau_P}(\eta_P) \ \wedge \ \mu_{\tau_Q}(\eta_Q)\right\},\ \forall \eta \in [0,1]$$

4. 암시 : $P \rightarrow Q$

'*If* P *is* τ_P *then* Q *is* τ_Q'는 '$P \rightarrow Q$ *is* $\tau_P \rightarrow \tau_Q$'로 취급하고 $v(P \rightarrow Q) = \tau_{P \rightarrow Q}$라고 하자. 언어적진리값 $\tau_{P \rightarrow Q}$는 '*If* x *is* P *then* y *is* Q.'를 어떻게 정의하느냐에 따라 다양하게 정의된다.

예제 2.24. 진리값 집합 $X = \{0,\ 0.2,\ 0.5,\ 0.8,\ 1.0\}$ 상에서 언어적 진리값 *true*와 *very false*를 다음과 같이 가정하자. *true*와 *very false*의 멤버쉽 함수를 각각 μ_t, $\mu_{v.f}$라고 하자.

$\mu_t(0) = 0$, $\mu_t(0.2) = 0.2$, $\mu_t(0.5) = 0.5$, $\mu_t(0.8) = 0.8$, $\mu_t(1) = 1$

$\mu_{v.f}(0) = 1$, $\mu_{v.f}(0.2) = 0.64$, $\mu_{v.f}(0.5) = 0.25$, $\mu_{v.f}(0.8) = 0.04$, $\mu_{v.f}(1) = 0$

이 때 *true* $\wedge$ *very false*는 정의 2.23에 의해 다음과 같이 구한다. 단, 멤버쉽 함수를 $\mu_{t \wedge v.f}$와 같이 쓰기로 하자.

진리값 집합 X의 원소 0.2에 대해 계산하면,

$$\mu_{t \wedge v.f}(0.2) = \left(\bigvee_{z \in X} (\mu_t(0.2) \wedge \mu_{v.f}(z)) \right) \vee \left(\bigvee_{w \in X} (\mu_t(w) \wedge \mu_{v.f}(0.2)) \right)$$

$$= 0.2 \vee 0.64$$

$= 0.64$

이다. 따라서,

$\mu_{t \wedge v.f}(0) = 1$, $\mu_{t \wedge v.f}(0.2) = 0.64$, $\mu_{t \wedge v.f}(0.5) = 0.25$,

$\mu_{t \wedge v.f}(0.8) = 0.04$, $\mu_{t \wedge v.f}(1) = 0$.

예제 2.24에서는 $true \wedge very\, false = very\, false$가 성립한다.

또한 같은 방법으로, $true \vee very\, false$, $1 \wedge (1 - true + very\, false)$, $1 - true$의 언어적 진리값을 정할 수 있다.

3. 진리함수사상

3.1 진리함수사상

Baldwin은 퍼지논리를 기반으로 하는 근사추론법에서 가장 중요한 역할을 하는 것이 진리함수사상이다. 진리함수사상이란 암시의 퍼지 진리값을 정의한 함수로서 다음과 같이 정의하였다.

$$\mu_I : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$
$$(\eta, \lambda) \to \mu_I(\eta, \lambda) \in [0,1]$$

정의 3.1. [6] $\mu_I(\eta, \lambda)$에 대한 대표적인 정의는 다음과 같다.

(i) Lukasiewicz rule : $\mu_I(\eta, \lambda) = 1 \wedge (1 - \eta + \lambda)$

(ii) Fuzzified binary logic rule : $\mu_I(\eta, \lambda) = (1 - \eta) \vee \lambda$

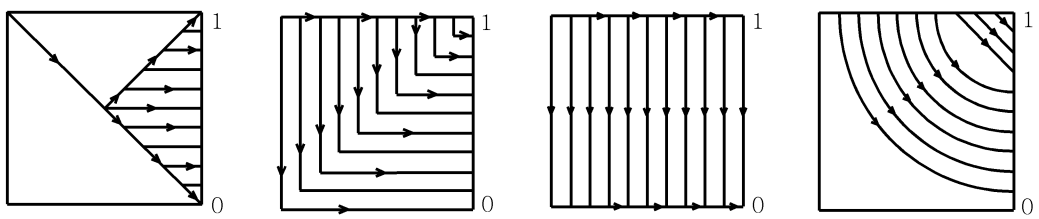
(iii) Max-min rule : $\mu_I(\eta, \lambda) = (\eta \wedge \lambda) \vee (1 - \eta)$

(iv) $\mu_I(\eta, \lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \geq \eta \\ \lambda, & \lambda < \eta \end{cases}$

(v) $\mu_I(\eta, \lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \geq \eta \\ 0, & \lambda < \eta \end{cases}$

(vi) $\mu_I(\eta, \lambda) = 1 \wedge \dfrac{\lambda}{\eta}$

식 (iii)~(vi)의 그래프는 그림 3과 같다.



$\mu_I = (\eta \wedge \lambda) \vee (1 - \eta)$ $\mu_I = \begin{cases} 1, & \lambda \geq \eta \\ \lambda, & \lambda < \eta \end{cases}$ $\mu_I = \begin{cases} 1, & \lambda \geq \eta \\ 0, & \lambda < \eta \end{cases}$ $\mu_I = 1 \wedge \dfrac{\lambda}{\eta}$

그림 3. λ를 매개변수로 한 $\mu_I(\eta, \lambda)$의 그래프

3.2 진리함수변형

퍼지명제 $P=$ 'x is A'의 언어적 진리값이 τ일 때, 이것은

$$P' = \text{'}\, x \ is \ A \ is \ \tau \,\text{'}$$

와 같이 기술할 수 있으며, 동등인 한 개의 퍼지명제 $P' = x$ is A'으로 나타낼 수 있다. 퍼지 명제 P'속의 주어 즉, 대상명은 'x is A'이지만, 대상명을 x로 바꾸어서 P'를 아래와 같이 나타내는 것을 **진리함수변형**(Truth functional modification)이라고 한다.

$$P' = \text{'}x \ is \ A'\text{'}$$

즉, 퍼지명제 $P=$ 'x is A' 를 언어적 진리값 τ에 의해 한정하는 것으로서 이것과 의미적으로 같은 다른 퍼지 명제 'x is A''을 결정하는 것을 의미한다.

진리함수변형에 의한 A'의 결정은 다음 식에 의해 이루어진다.

$$\mu_{A'}(x) = \mu_{\tau}(\mu_A(x)),\ x \in X.$$

위 식은 A의 멤버쉽 함수값 $\mu_A(x)$를 진리값 집합 $[0,1]$내의 진리값으로 대응시키고, 이것을 언어적 진리값 τ의 멤버쉽 함수 μ_τ에 의해서 다시 $[0,1]$내의 값으로 변환하는 것이다. 이것에 의해, 언어적 진리값 τ에 의해서 한정된 퍼지집합 A'가 결정된다. A'을 계산하는 과정을 나타내면 그림 4와 같다.

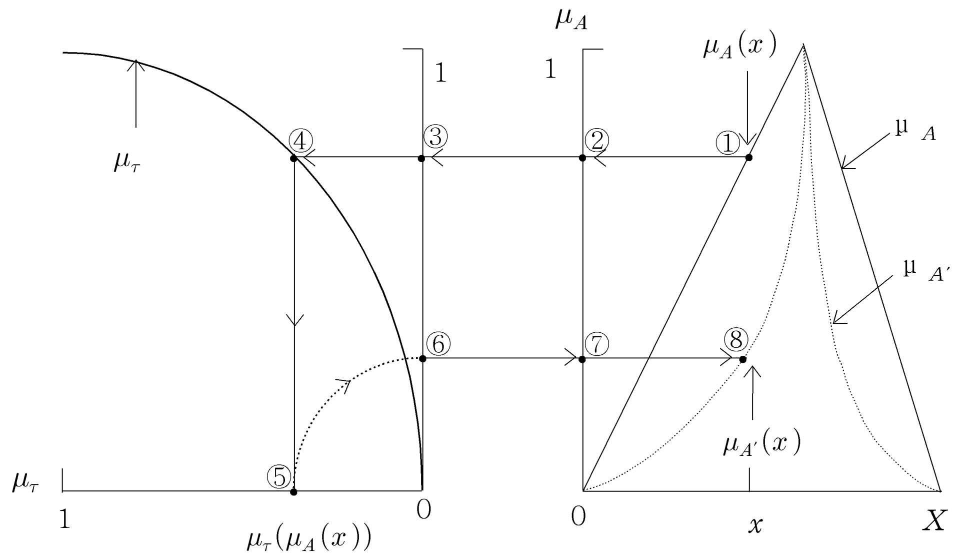


그림 4. 진리함수변형

μ_A와 μ_τ로부터 $\mu_{A'}$를 정하는 순서를 표현하고 있다. 단, 그림 4에서 언어적 진리값 τ의 멤버쉽 함수 μ_τ는 원점을 중심으로 시계 반대 방향으로 90도 회전시켰다. $\mu_A(x)$의 점으로부터 출발해서 μ_τ를 작용시켜 $\mu_{A'}(x)$를 결정하는 일련의 과정을 점 ①에서부터 출발하여 점 ⑧까지의 경로를 따라 나타내고 있다. 여기서 점 ⑧의 값이 x에 대응하는 진리값이다.

예제 3.2. [6] 다음은 진리함수변형의 예이다. 여기서 $\sigma - true$는 $\mu_{A'}(x)$의 값을 나타낸다.

1. $\sigma - true = true$이면 $A' = A$ 이다.
2. $\sigma - true = very\ \ true$이면 $A' = very\ \ A$ 이다.
3. $\sigma - true = very\ \ very\ \ true$ 이면 $A' = very\ \ very\ \ A$ 이고,

   $\sigma - true = (very)^n\ \ true$이면 $A' = (very)^n\ A$ 이다.
4. $\sigma - true = fairly\ \ true$이면 $A' = fairly\ \ A$ 이다.
5. $\sigma - true = false$(또는 $not\ true$)이면 $A' = not\ \ A$이다.

3.3 역진리함수변형

퍼지명제 '$x\ is\ A$'와 '$x\ is\ A'$'가 주어져 있을 때, 역으로 다음 식을 만족하는 언어적 진리값 τ를 구할 수 있다.

$$x\ \ is\ A\ \ is\ \tau\ \ = x\ \ is\ A'$$

이것을 진리함수변형의 역이라고 하며, **역진리함수변형**(Inverse truth functional modification)이라 한다. 역진리함수변형은 다음 식에 의해 계산된다.

$$\mu_\tau(\eta) = v(u\ \ is\ \ A|\ \ u\ \ is\ \ A')(\eta),\quad \forall \eta \in [0,1]$$

$$= \bigvee_{\substack{x \in X \\ \mu_A(x) = \eta}} \mu_{A'}(x)$$

위 식의 우변은 다음과 같은 조작을 의미한다. 우선 A의 멤버쉽 함수에 착안해서, A의 멤버쉽 값이 η로 된 X의 원소 x를 찾아내고, 이 경우 x는 μ_A의 형태에 따라 여러 개가 존재할 수 있다. 이들의 x에 대한 A'의 멤버쉽값 $\mu_{A'}(x)$의 최대값을 취하고, 이것을 언어적 진리값 τ의 멤버쉽값 $\mu_\tau(\eta)$로 정한다.

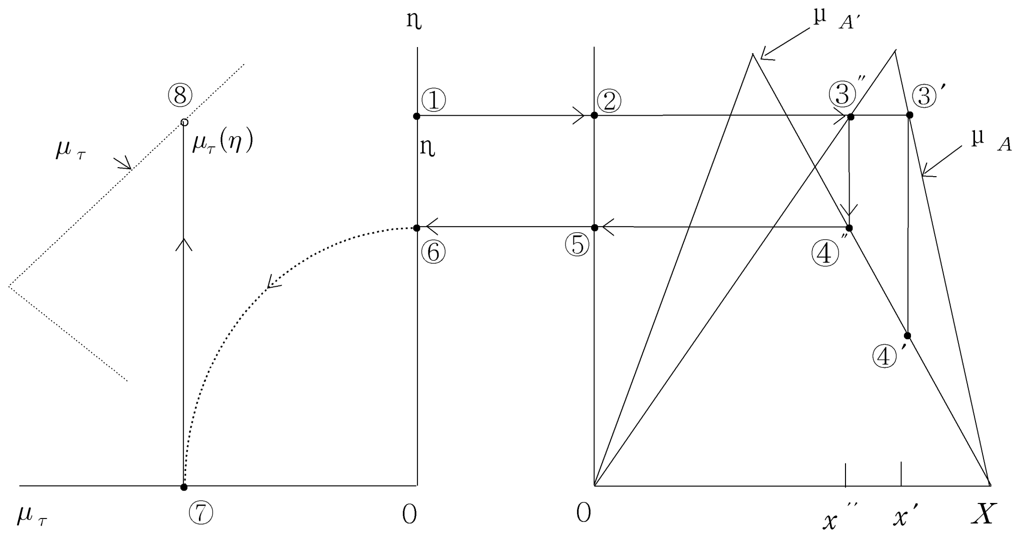


그림 5. 역진리함수 변형

그림 5는 μ_A와 $\mu_{A'}$로부터 언어적 진리값 τ의 멤버쉽 함수 μ_τ을 정하는 순서를 표현하고 있다. 즉, 진리값 집합 [0, 1] 사이의 임의의 점 η로부터 출발해서 μ_A와 $\mu_{A'}$에 넣어서 $\mu_\tau(\eta)$가 정해지는 과정으로 점 ①에서부터 출발하여 점 ⑧까지의 경로이다. 구하는 과정에서 점 ④$'(\mu_{A'}, (x'))$와 점 ④$''(\mu_{A'}, (x''))$의 높이가 비교되어 큰쪽의 점 ④$''$를 기준으로 μ_τ가 결정된다. 단, 그림에서 언어적 진리값 τ의 멤버쉽 함수 μ_τ는 원점을 중심으로 시계 반대 방향으로 90도 회전시켜 그렸다. 그림 중의 경로에서 점선은 원점을 중심으로 회전 이동하는 것을 의미한다.

예제 3.3. [6] 다음은 Baldwin의 퍼지논리에서 역진리함수변형의 예이다.

① $v(tall/\ very\ tall) = very\ true$

② $v(x\ is\ A/x\ is\ A\ ) = true$

③ $v(x\ is\ A/x\ is\ not\ A\ ) = false$

4. 근사추론

몇 개의 전제조건인 명제들로부터 결론을 이끌어내는 과정을 추론이라 한다. 그리고 명제는 참과 거짓을 명확히 구분할 수 있는 문장이어야 한다. 따라서 수학에서의 논리는 이가 논리이다. 그러나 우리가 일상생활에서 쓰는 대부분의 규칙이나 사실은 애매한 것이 많다. 특히 경험에 의한 규칙이나 사실은 애매해서 늘 옳다는 것을 보장할 수가 없다. 그래서 고전적인 추론법으로는 암시의 전제와 사실이 조금이라도 다르면 아무 결론도 얻어낼 수가 없다. 그러므로 애매함이 포함된 명제들 사이의 추론에 대한 새로운 방법이 필요하게 된다.

4.1 고전적 추론

논리에 있어서 연역추론이란 다음과 같은 형태의 추론을 말한다.

$$(1) \qquad \begin{array}{l} A \supset B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

여기서 $\supset$ 는 암시를 나타내는 기호이다. 예를 들면 다음과 같다.

$$\begin{array}{l} \text{만일 } 0 \le x \le 10 \text{ 이면 } y = 2x + 1 \text{ 이다.} \\ x = 4 \text{ 이다.} \\ \hline \text{따라서 } y = 9 \text{ 이다.} \end{array}$$

논리에 있어서 대우추론이란 다음과 같은 형태의 추론을 말한다.

$$(2) \qquad \begin{array}{l} A \supset B \\ \neg B \\ \hline \neg A \end{array}$$

여기서 ¬는 부정을 나타내는 기호이다. 예를 들면 다음과 같다.

M이 사람이면, M은 숨을 쉰다.

로봇은 숨을 쉬지 않는다.

따라서 로봇은 사람이 아니다.

4.2 일반화된 연역추론

근사추론에서의 연역추론은 다음과 같다.

$$
\begin{array}{ll}
(1') & A \supset B \\
 & A' \\
\hline
 & B'
\end{array}
$$

예를 들면

사과가 빨간색이면 그 사과는 익었다.

이 사과는 약간 빨간색이다.

따라서 이 사과는 약간 익었다.

라고 추론하는 형식이다. 이 연역추론은 Baldwin의 근사추론에 의하면 다음과 같은 과정을 통하여 얻어진다.

$$
\begin{array}{ll}
(\text{전제 } 1) & (u \textit{ is } A) \supset (w \textit{ is } B) \\
(\text{전제 } 2) & (u \textit{ is } A') \textit{ is true} \\
\hline
\end{array}
$$

여기서 A, A'는 전체집합 X의 퍼지부분집합이고, B는 전체집합 Y의 퍼지부분집합이다.

먼저 u *is* A' 이라는 가정하에서의 u *is* A 에 대한 퍼지진리값 $\tau_{A/A'}$는 역진리함수변형을 통하여

$$\tau_{A/A'}(\eta) = v(u \;\; is \;\; A | u \;\; is \;\; A')(\eta)$$
$$= \bigvee_{\substack{x \in X \\ v(u\, is\, A)(x) = \eta}} v(u \; is \; A')(x)$$

로 얻어진다. 그리고 (전제 1)에 대한 진리함수사상 I 가 주어지면 $w \; is \; B$ 에 대한 퍼지진리값 τ_B는 $max - min$합성에 의하여

$$\tau_B = v(w \;\; is \; B)(\lambda)$$
$$= \bigvee_{\eta \in [0,1]} \left\{ \mu_{\tau_{A/A'}}(\eta) \wedge \mu_I(\eta, \lambda) \right\} \quad (\lambda \in [0,1])$$

로 얻어진다. 그리고 마지막으로 진리함수변형을 통하여 $w \;\; is \;\; B \;\; is \;\; \tau_B$와 동등인 $w \;\; is \;\; B'$이라는 결론을 얻게 된다. 이것을 정리하면 다음과 같다.

$$(u \;\; is \;\; A) \supset (w \;\; is \;\; B)$$
$$(u \;\; is \;\; A')$$

$v(u \;\; is \;\; A | u \;\; is \;\; A') = \tau_{A/A'}$ 이면,

$$v(w \;\; is \;\; B) = \tau_B$$
$$\therefore w \;\; is \;\; B'$$

예제 4.1. [9] 각 진리함수사상에 대한 몇 가지 추론결과를 예시하면 다음과 같다.

1. $\mu_I(\eta, \lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \geq \eta \\ 0, & \lambda < \eta \end{cases}$인 경우

$(u \;\; is \;\; A) \supset (w \;\; is \;\; B)$

$\;\; u \; is \; A'$

$v(u \;\; is \;\; A|u \;\; is \;\; A') = very \; true$ 이면,

$v(w \; is \; B) = very \;\; true$

$\therefore \; w \; is \; very \; B$

2. $\mu_I(\eta, \lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \geq \eta \\ \lambda, & \lambda < \eta \end{cases}$ 인 경우

$(u \;\; is \;\; A) \supset (w \;\; is \;\; B)$

$\;\; u \; is \; A'$

$v(u \;\; is \;\; A|u \;\; is \;\; A') = true$ 이면,

$v(w \; is \; B) = true$

$\therefore \; w \; is \; B$

3. $\mu_I(\eta, \lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \geq \eta \\ \lambda, & \lambda < \eta \end{cases}$ 인 경우

$(u \;\; is \;\; A) \supset (w \;\; is \;\; B)$

$\;\; u \; is \; A'$

$v(u \;\; is \;\; A|u \;\; is \;\; A') = fairly \; true$ 이면,

$v(w \; is \; B) = fairly \;\; true$

$\therefore \; w \; is \; fairly \; B$

4. $\mu_I(\eta, \lambda) = 1 \wedge (1 - \eta + \lambda)$ 인 경우

$(u\ \ is\ \ A) \supset (w\ \ is\ \ B)$

$u\ is\ A'$

$v(u\ \ is\ \ A|u\ \ is\ \ A') = absolutely\ \ false$ 이면,

$v(w\ is\ B) = undecided$

$\therefore\ no\ restriction\ on\ X\ of\ w$

5. $\mu_I(\eta, \lambda) = 1 \wedge (1 - \eta + \lambda)$ 인 경우

$(u\ \ is\ \ A) \supset (w\ \ is\ \ B)$

$u\ is\ A'$

$v(u\ \ is\ \ A|u\ \ is\ \ A') = very\ true$이면,

$v(w\ is\ B) = almost\ fairly\ true$

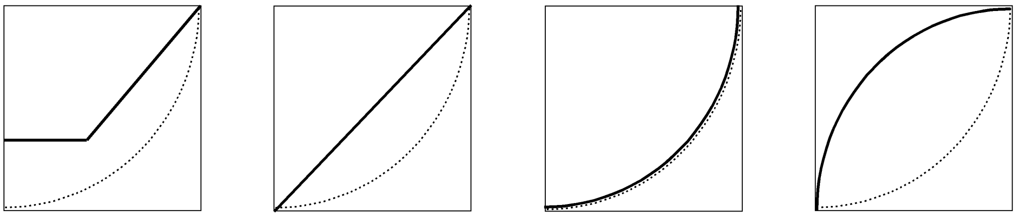
$\therefore\ w\ is\ almost\ fairly\ B$

정리 4.2. [6] *정의 3.1에 나타난 각 진리함수사상에 대한 연역 추론 결과는 다음의 표 1과 같다.*

τ / 식	very true	true	fairly true	very false	false	fairly false
(i)				undecided	undecided	undecided
(ii)				undecided	undecided	undecided
(iii)				undecided	undecided	undecided
(iv)	true	true	fairly true	undecided	undecided	undecided
(v)	very true	true	fairly true	undecided	undecided	undecided
(vi)	fairly true	fairly true	almost fairly true	undecided	undecided	undecided

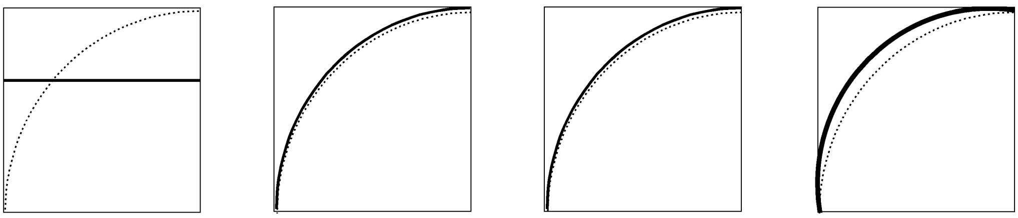
표 1. 연역 추론 결과

위 표에서 $\tau = v(u\ is\ A | u\ is\ A')$이고, 빈 칸은 결과를 언어변수 $Truth$의 언어적 진리값으로 표현하기 어려운 형태로 결과가 나타난 경우이다. 그리고 어두운 부분에 해당하는 경우를 그래프로 표현하면 아래 그림 6, 7과 같다.



$\mu_I = (\eta \wedge \lambda) \vee (1-\eta)$ $\quad \mu_I = \begin{cases} 1, & \lambda \geq \eta \\ \lambda, & \lambda < \eta \end{cases}$ $\quad \mu_I = \begin{cases} 1, & \lambda \geq \eta \\ 0, & \lambda < \eta \end{cases}$ $\quad \mu_I = 1 \wedge \dfrac{\lambda}{\eta}$

그림 6. $\tau_{A/A'} = very\ true$일 때의 $\tau_{A/A'} \circ \mu_I$의 그래프



$\mu_I = (\eta \wedge \lambda) \vee (1-\eta)$ $\quad \mu_I = \begin{cases} 1, & \lambda \geq \eta \\ \lambda, & \lambda < \eta \end{cases}$ $\quad \mu_I = \begin{cases} 1, & \lambda \geq \eta \\ 0, & \lambda < \eta \end{cases}$ $\quad \mu_I = 1 \wedge \dfrac{\lambda}{\eta}$

그림 7. $\tau_{A/A'} = fairly\ true$일 때의 $\tau_{A/A'} \circ \mu_I$의 그래프

이제 [16]에서 정의한 진리함수사상을 사용하여 연역추론을 하려고 한다. 먼저 정의를 살펴보면 다음과 같다.

정의 4.3. [16] 진리함수사상을 다음과 같이 정의하자.

(vii) $\mu_I(\eta, \lambda) = \begin{cases} \lambda, & \lambda \geq \eta \\ 0, & \lambda < \eta \end{cases}$

(viii) $\mu_I(\eta, \lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \ge \eta \\ 2\lambda - \eta, & \lambda \le \eta \le (2\lambda \wedge 1) \\ 0, & \eta > (2\lambda \wedge 1) \end{cases}$

식 (vii)과 (viii)에 대한 소속함수 $\mu_I(\eta, \lambda)$를 그래프로 표현하면 그림 8처럼 나타낼 수 있다.

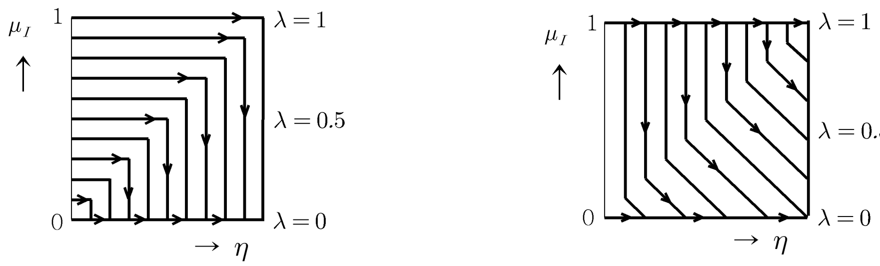


그림 8. (vii)과 (viii)에 대한 λ를 매개변수로 한 $\mu_I(\eta, \lambda)$의 그래프

정리 4.4. *정의 4.3에 제시한 진리함수사상에 대한 추론결과는 다음 표 2와 같다.*

τ / 식	very true	true	fairly true	very false	false
(vii)	very true	true	true	true	true
(viii)	almost very true	true	fairly true	undecided	undecided

표 2. (vii)과 (viii)의 정의에 대한 연역 추론결과

위 표에서 $\tau = v(u\ is\ A|u\ is\ A')$이고 $almost\ very\ true$란 그림 11에 나타난 것처럼 추론 결과가 $very\ true$의 모습과 유사한 형태인 경우를 말한다.

증명. 진리함수사상 (vii)에 대하여, $\tau = very\ \ true$인 경우를 생각하자. 즉, $\mu_\tau(\eta) = \eta^2$ 이면

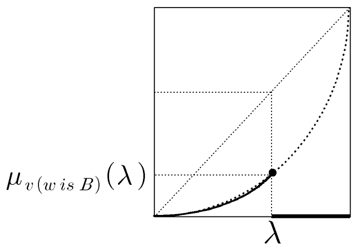
$$\mu_{v(w\,is\,B)}(\lambda) = \bigvee_{\eta \in [0,1]} [\mu_\tau(\eta) \wedge \mu_I(\eta, \lambda)]$$

$$= \bigvee_{\eta \in [0,1]} [\, \eta^2 \wedge \mu_I(\eta,\, \lambda\,)]$$

$$= \lambda^2 \qquad\qquad (\lambda \in [0,1\,])$$

이고 따라서 $v(w\ \ is\ \ B) = very\ \ true$이다. 결론적으로 $w\ is\ very\ B$를 얻을 수 있다.

위 결과의 계산과정을 그래프로 나타내면 그림 9와 같이 표현할 수 있다.



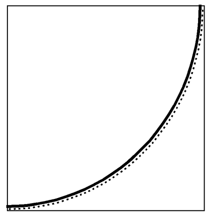


그림 9. (ⅶ)에 대한 $\tau_{A/A'} \circ \mu_I$의 결과

$\tau = true,\ fairly\,true,\ very\,false,\ false$인 경우 마찬가지 방법으로 연역추론의 결과를 얻을 수 있다. 각 경우의 추론결과를 그래프로 나타내면 그림 10과 같다.

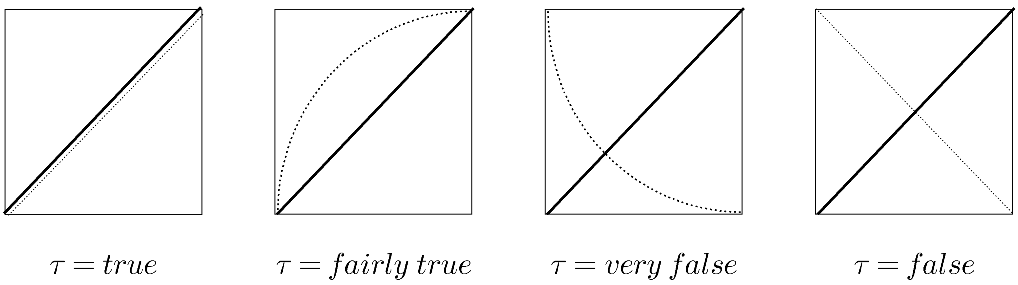


그림 10. (ⅶ)에서 τ가 $true,\ fairly\,true,\ very\,false,\ \ false$에 대한 $\tau_{A/A'} \circ \mu_I$의 결과

다음으로 진리함수사상 (ⅷ)에 대하여 $\tau = very\ \ true$인 경우를 생각하자. 즉, $\mu_\tau(\eta) = \eta^2$ 이면

$$\mu_{v(w\,is\,B)}(\lambda\,) = \bigvee_{\eta \in [0,1]} [\mu_\tau(\eta) \wedge \mu_I(\eta, \lambda\,)]$$

$$= \bigvee_{\eta \in [0,1]} [\, \eta^2 \wedge \mu_I(\eta, \lambda)]$$

$$= \bigvee_{\eta \in [0,1]} \begin{cases} \eta^2, & 0 \leq \eta < k \\ 2\lambda - \eta, & k \leq \eta < (2\lambda \wedge 1) \end{cases}$$

이다. 여기서 k는 이차방정식 $\eta^2 = 2\lambda - \eta$의 양수근이다. 이 값은 그림 11에서 보는 것과 같이 λ보다는 작고 λ^2보다는 약간 큰 값이다. 따라서 $v(w\, is\, B)$는 $almost\ very\ true$로 표현할 수 있다. 결론적으로 $w\ is\ almost\ very\ B$를 얻을 수 있다.

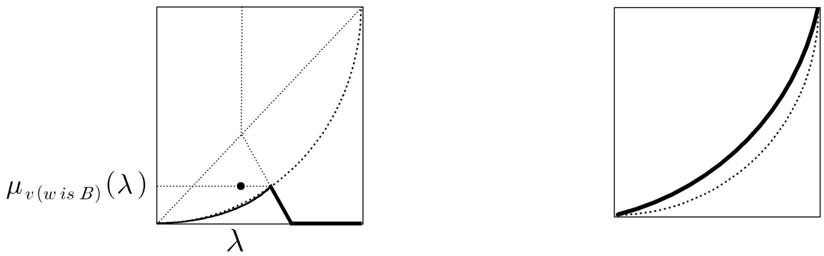
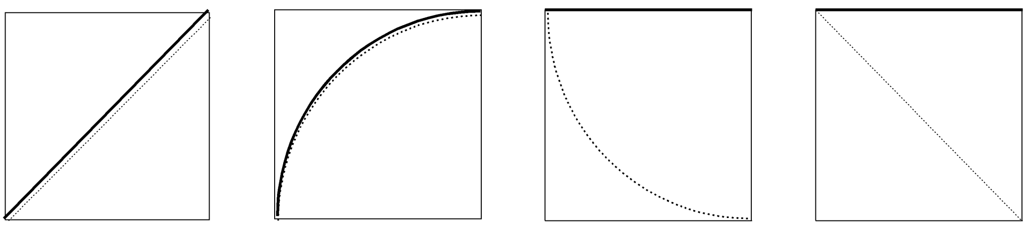


그림 11. (ⅷ)에 대한 $\tau_{A/A'} \circ \mu_I$의 결과

그리고 $\tau = true,\ fairly\ true,\ very\ false,\ false$인 경우 추론결과를 그래프로 각각 나타내면 그림 12와 같다.



$\tau = true$ $\quad$ $\tau = fairly\, true$ $\quad$ $\tau = very\, false$ $\quad$ $\tau = false$

그림 12. (ⅷ)에서 τ가 $true,\ fairly\ true,\ very\, false,\ false$에 대한 $\tau_{A/A'} \circ \mu_I$의 결과

앞에서 살펴본 바와 같이 잘 알려진 여섯 가지 진리함수사상에 대한 추론 결과들을 표 1에 정리하였다. 그리고 그 결과들을 살펴보면 진리함수사상 (ⅴ)인 경우만 정상적인 형태로 추론 결과가 도출되고 있음을 알 수 있다. 그런데 나머지 5가지 중 4가지의 진리함수사상은 추론 결과가 원하는 형태로 거의 도출되고 있지 않음을 확인할 수 있다.

그러나 새로 정의한 진리함수사상 (ⅶ)을 사용한 경우를 살펴보자. 이 경우는 $v(u\, is\ A|u\, is\ A') = very\ true,\ true,\ fairly\ true$인 경우 $w\ is\ B$가 각각 $very\ true,\ true,\ true$로 나타나 만족할만한 결과를 얻었다. 그러나 $v(u\, is\, A|u\, is\ A') = false$ 또는 $very\, false$인 경우도 $w\ is\ B$가 $true$로 나타났다. 따라서 진리함수사상 (ⅶ)은 연역추론에 있어서 그 결과가 부분적으로는 매우 타당하지만, 전체적으로 만족한 결과를 얻을 수 있다고 말할 수는 없다.

진리함수사상 (ⅷ)를 사용한 경우를 살펴보자. 이 경우는 $v(u\, is\, A|u\, is\ A') = very\ true,\ true,\ fairly\ true$인 경우 $w\ is\ B$가 각각 $almost\ very\ true,\ true,\ fairly\ true$로 나타나 매우 만족할만한 결과를 얻었다. 그러나 $v(u\, is\, A|u\, is\ A') = false$ 또는 $very\, false$인 경우 $w\ is\ B$가 $undecided$로 나타났다. 이 결과는 $w\ is\ B$가 $true$로 나타난 경우보다는 조금 나은 결과라고 판단할 수 있지만 매우 타당한 결과라고 할 수는 없다.

이상의 결과에서 보면 진리함수사상 (ⅶ)과 (ⅷ)는 연역추론에 있어서 $v(u\, is\ A|u\, is\ A')$가 긍정적인 경우에 있어서는 매우 좋은 결과를 얻었으나, 부정적인 경우에 있어서는 만족할만한 결과를 얻지 못하였다.

4.3 일반화된 대우추론

근사추론에서의 일반화된 대우추론은 다음과 같다.

$$(2') \qquad \begin{array}{l} A \supset B \\ \quad B' \\ \hline A' \end{array}$$

예를 들면,

키가 큰 사람은 몸무게가 무겁다.

민수는 몸무게가 약간 무겁다.

따라서 민수는 키가 약간 크다.

라고 추론하는 형식이다. Baldwin의 근사추론법에 있어서의 일반적인 대우추론을 소개하면 다음과 같다.

(전제 1) $(u\ is\ A) \supset (w\ is\ B)$

(전제 2) $(w\ is\ B')\ is\ true$

여기서 A는 전체집합 X의 퍼지부분집합이고 B, B'은 전체집합 Y의 퍼지부분집합이다.

먼저 $w\ is\ B'$이라는 가정 하에서 $w\ is\ B$에 대한 퍼지진리값 $\tau_{B/B'}$는 역진리함수변형을 통하여

$$\begin{aligned}\tau_{B/B'}(\lambda) &= v(w\ is\ B \mid w\ is\ B')(\lambda)\\ &= \bigvee_{\substack{y \in Y\\ v(w\ is\ B)(y)=\lambda}} v(w\ is\ B')(y)\end{aligned}$$

로 얻어진다. 그리고 (전제 1)에 대한 진리함수사상 I가 주어지면 $u\ is\ A$에 대한 퍼지진리값 τ_A는 $max-min$합성에 의하여

$$\begin{aligned}\tau_A &= v(u\ is\ A)(\eta)\\ &= \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \{\mu_I(\eta, \lambda) \wedge \mu_{\tau_{B/B'}}(\lambda)\} \quad (\eta \in [0,1])\end{aligned}$$

로 얻어진다. 그리고 마지막으로 진리함수변형을 통하여 $u\ is\ A\ is\ \tau_A$와 동등인 $u\ is\ A'$이라는 결론을 얻게 된다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{l}
(u\ \ is\ \ A) \supset (w\ \ is\ \ B) \\
\qquad\qquad\quad (w\ \ is\ \ B') \\
\hline
v(w\ \ is\ \ B|w\ \ is\ \ B') = \tau_{B/B'} \text{이면,} \\
v(u\ \ is\ \ A) = \tau_A \\
\therefore u\ \ is\ \ A'
\end{array}
$$

근사추론에 있어서 일반화된 연역추론에 대응하는 일반화된 대우추론에 대한 결과들을 집중적으로 살펴보고자 한다.

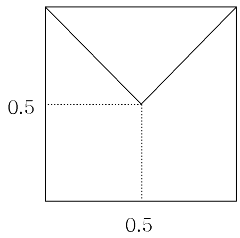
실제적인 계산은 mathematica를 이용하여 얻었으며 그 결과를 그래프로 표현하였다.

정리 4.5. [11] *진리함수사상 (i)~ (vi)에 대한 일반화된 대우추론 결과는 다음 표 3과 같다.*

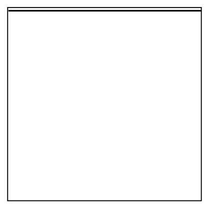
τ / 식	very true	true	fairly true	very false	false	fairly false
(i)	undecided	undecided	undecided			
(ii)	undecided	undecided	undecided			
(iii)	①	①	①			
(iv)	undecided	undecided	undecided			
(v)	undecided	undecided	undecided	very false	false	fairly false
(vi)	undecided	undecided	undecided			

표 3. (i)~ (vi)의 정의에 대한 대우 추론결과

증명. τ를 구하는 실제적인 계산을 위한 알고리즘이 [12]에 소개되어 있다. 여기서는 mathematica를 사용하여 보다 정확한 그래프를 소개하였다. 먼저, 위의 표 3의 ①에 해당하는 부분과 $very\,true$, $true$, $fairly\,true$에 대한 결과가 $undecided$인 경우를 각각 그래프로 나타내면 다음과 같다.

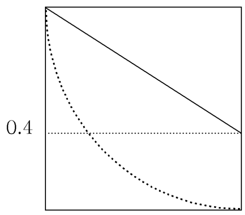


①

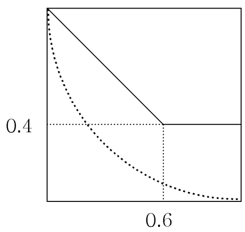


$undecided$

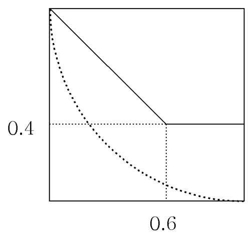
$very\ false$인 경우를 나타내면 아래와 같다.



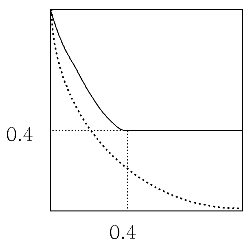
(i)



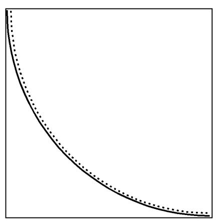
(ii)



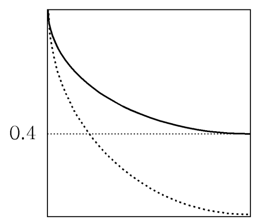
(iii)



(iv)



(v)

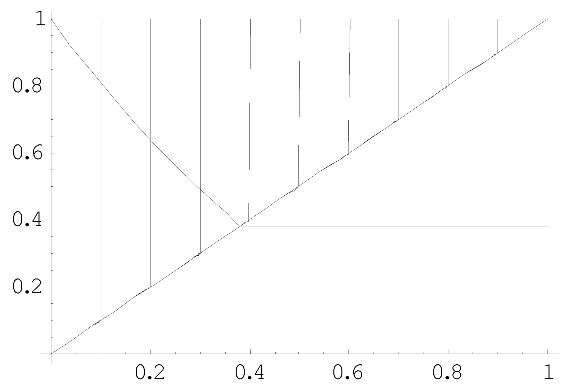


(vi)

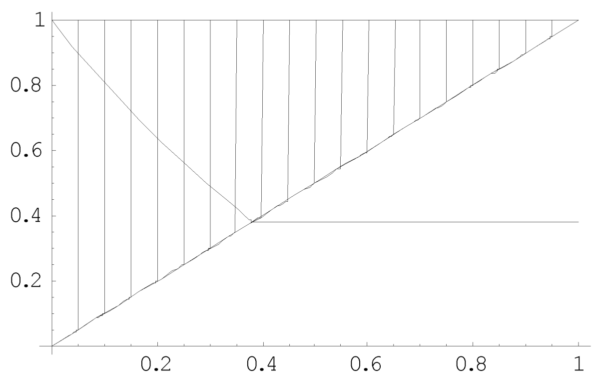
위의 그림 중 (iv)식에 대한 결과의 유도과정에 대한 명령어를 순차적으로 표현해보고, 또한 표현 간격을 점차 세밀하게 분할하여 그래프로 나타내면 다음과 같다.

```
j4[n_]:=If[n≤x, 1, If[n>x, x]]
```

```
qj[x_]:=(x-1)^2
kj4[n_]:=Min[(x-1)^2, j4[n]];
lj4[n_]:=Table[kj4[n], {x, 0, 1, 1/1000}]
pj4[n_]:=Max[lj4[n]]
p=Plot[pj4[n], {n, 0, 1}];
j=Table[Plot[j4[n], {x, 0, 1},
 DisplayFunction->identity], {n, 0, 1, 1/10}];
Show[p, j];
```

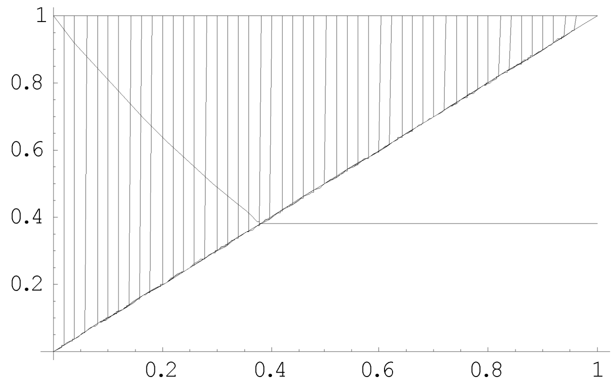



```
p=Plot[pj4[n], {n, 0, 1}];
j=Table[Plot[j4[n], {x, 0, 1},
 DisplayFunction->identity], {n, 0, 1, 1/20}];
Show[p, j];
```




```
p=Plot[pj4[n], {n, 0, 1}];
j=Table[Plot[j4[n], {x, 0, 1},
 DisplayFunction->identity], {n, 0, 1, 1/50}];
```

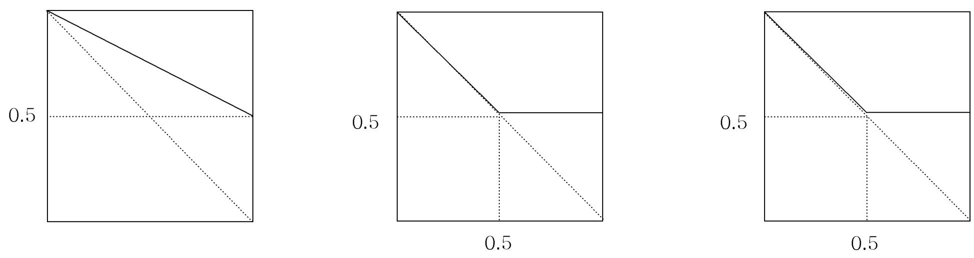
Show[p, j];



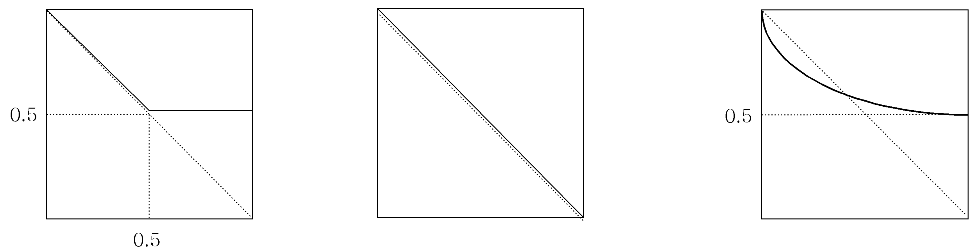
여기서 j4[n_]는 정의 3.1의 (ⅳ)식을 정의한 함수식이고, qj[x_]는 τ 값이 $very$ $false$를 나타내는 $(x-1)^2$의 함수식이다. kj4[n_]는 하나의 n의 값에 대하여 j4[n_]과 qj[x_]의 $minimum$값을 구하는 함수식이고, lj4[n_]는 각 n의 값에 대해 x의 범위 내에서 일정한 간격으로 $minimum$값을 구하고 그것을 table화하기 위해 정의한 함수식이다. pj4[n_]는 각 n에 대해 lj4[n_]의 $maximum$값을 취하도록 하여 추론의 결과를 얻기 위해 정의한 함수식이다. p는 각 n에 대해 pj4[n_]을 그래프로 나타내기 위해 정의한 함수이고 j는 추론을 하기 위해 정의한 j4[n_]함수를 그래프로 나타내기 위해 정의한 함수이다. Plot은 그래프를 나타낼 때, Show는 두 개 이상의 그래픽 객체를 한 그래프 축에 나타낼 때 사용하는 명령어이다. 또한 DisplayFunction->identity는 그래프를 숨기기하는 명령어이다.

같은 방법으로 $false$인 경우와 $fairly\ false$인 경우의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

$false$인 경우 :

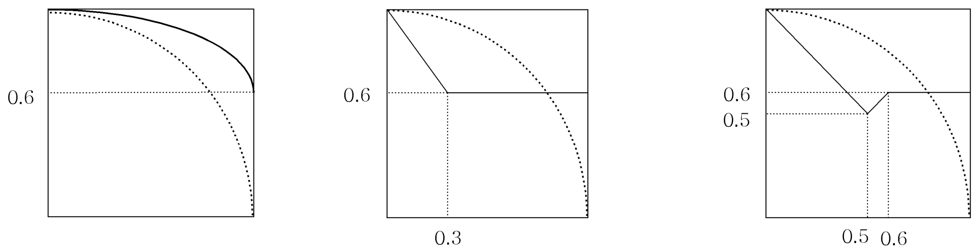


(i) (ii) (iii)

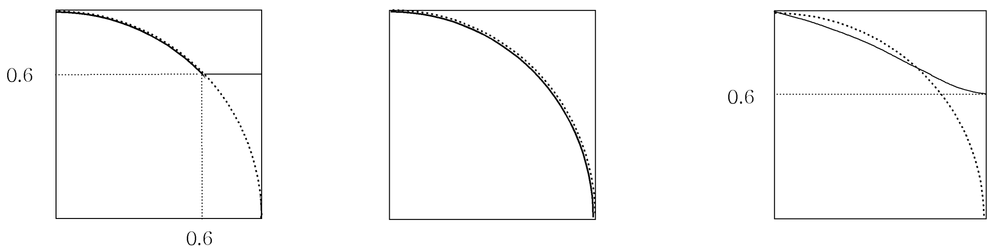


(iv) (v) (vi)

*fairly false*인 경우 :



(i) (ii) (iii)



(iv) (v) (vi)

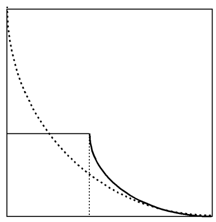
정리 4.6. *진리함수사상 (vii)∼ (viii)에 대한 일반화된 대우추론 결과는 다음 표 4와 같다.*

τ \ 식	very true	true	fairly true	very false	false	fairly false
(vii)	undecided	undecided	undecided			
(viii)	undecided	undecided	undecided			

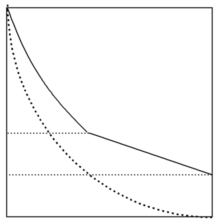
표 4. (vii)∼ (viii)의 정의에 대한 대우 추론결과

증명.

$very\ false$인 경우 :

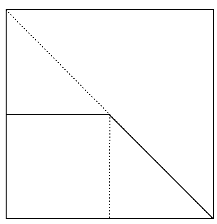


(vii)

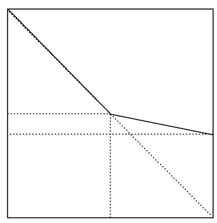


(viii)

$false$인 경우 :

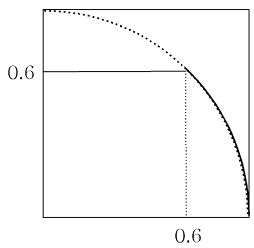


(vii)

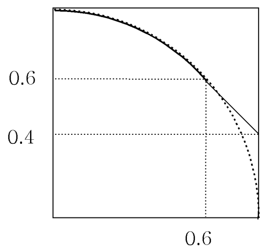


(viii)

$fairly\ false$인 경우 :



(vii)



(viii)

일반화된 대우추론에서는 모든 진리함수사상에 있어서 $v(w\ is\ B|\ w\ is\ B')$가 $very\ true$, $true$, $fairly\ true$인 경우의 입력 작용에 있어서 거의 모두 $undecided$로 결과들이 출력되고 있으나, $very\ false$, $false$, $fairly\ false$인 경우의 입력 작용에 있어서는 출력결과가 잘 알려진 진리함수사상 (v)식인 경우 대체로 만족할 만한 결과를 도출하고 있지만, 나머지 식들에 있어서는 만족할 만한 결과를 얻어내지 못하고 있다. 그런데 새로 정의한 진리함수사상인 경우 (vii)식에서 입력값이 0.5 이상에서 모든 경우의 입력 작용에 있어서 타당하게 출력되고 있고, 0.5 이하인 경우는 (viii)식에서 타당하게 출력되고 있음을 알 수 있다.

이상의 결과에서 보면 알려진 진리함수사상 여섯 가지와 새로 정의한 진리함수사상 두 가지를 일반화된 대우추론에서 각각 비교하여 보면, 알려진 진리함수사상인 경우에 있어서는 (v)식에서 결과가 타당성 있게 출력되고 있는 반면에 나머지 다섯 가지는 거의 일치하고 있지 않음을 알 수 있다. 그러나 새로 정의한 (vii)과 (viii)식에서 일반화된 대우추론인 경우에 있어서는 $very\ false$, $false$, $fairly\ false$인 경우 부분적으로 좋은 결과를 얻을 수 있었다.

5. 근사추론의 평가기준

5.1 근사추론의 평가기준

근사추론에 있어서 추론에 대한 결과들이 과연 타당성 있는 결론으로 도출되어 나타나는가 하는 의문을 가지게 된다. 그래서 추론에 대한 타당성의 준거를 마련하여 그 기준에 부합되는지를 각각의 경우마다 조사해보면 추론결과의 타당도를 입증할 수 있게 된다. 먼저 평가의 준거로 근사추론법의 평가기준을 제시한 후, 앞서 논한 진리함수사상들에 대하여 각각의 경우 평가기준에 적합한지를 판단해봄으로써 근사추론에 대한 특성과 결론을 동시에 자연스럽게 얻을 수 있다.

정의 5.1. 전제 1과 전제 2가 아래와 같을 때 y의 퍼지값 B'을 추론하는 평가기준은 다음의 4가지로 정의한다.

전제 1 : 만일 $x = A$이면 $y = B$이다.

전제 2 : $x = A'$이다.

결 론 : $y = B'$이다.

여기서 A, A'는 전체집합 X의 퍼지부분집합이고, B와 B'은 전체집합 Y에서의 퍼지부분집합이다.

평가기준 1 : 전제 2에서 '$A' = A$이면 $B' = B$이다'라고 추론한다.

평가기준 2 : 전제 2에서 '$A' = very\ A$이면 $B' = very\ B$이다'라고 추론한다.

평가기준 3 : 전제 2에서 '$A' = fairly\ A$이면 $B' = fairly\ B$이다'라고 추론한다.

평가기준 4 : 전제 2에서 'A'가 A가 아니면 y 값을 알 수 없다.'라고 추론한다.

5.2. 평가 결과

정의 3.1에서 정의한 여섯 가지 진리함수사상에 대한 다음의 결과가 알려져 있다.

정리 5.2. [6] *정의 3.1에서 정의한 여섯 가지의 진리함수사상들에 대한 평가기준의 만족여부는 다음 표 5와 같다.*

I	평가기준 1	평가기준 2	평가기준 3	평가기준 4
(i) $\mu_I(\eta,\lambda)=1\wedge(1-\eta+\lambda)$	×	×	×	○
(ii) $\mu_I(\eta,\lambda)=(1-\eta)\vee\lambda$	×	×	×	○
(iii) $\mu_I(\eta,\lambda)=(\eta\wedge\lambda)\vee(1-\eta)$	×	×	×	○
(iv) $\mu_I(\eta,\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda\geq\eta\\ \lambda, & \lambda<\eta\end{cases}$	○	×	○	○
(v) $\mu_I(\eta,\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda\geq\eta\\ 0, & \lambda<\eta\end{cases}$	○	○	○	○
(vi) $\mu_I(\eta,\lambda)=1\wedge\dfrac{\lambda}{\eta}$	×	×	×	○

표 5. (i)~ (vi)의 평가기준 만족여부

표 5에 의하면, 위의 4가지의 평가기준에 대하여 (iv)는 3가지, (v)는 4가지를 만족하지만, 나머지 식들은 한가지 밖에 만족하지 못한다는 것을 알 수 있다.

정리 5.3. *정의 4.3에서 정의한 진리함수사상 (vii)과 (viii)에 대한 평가기준의 만족여부는 다음 표 6과 같다.*

I	평가기준1	평가기준2	평가기준3	평가기준4
(vii) $\mu_I(\eta,\lambda)=\begin{cases}\lambda, & \lambda\geq\eta\\ 0, & \lambda<\eta\end{cases}$	○	○	×	×
(viii) $\mu_I(\eta,\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda\geq\eta\\ 2\lambda-\eta, & \lambda\leq\eta\leq(2\lambda\wedge1)\\ 0, & \eta>(2\lambda\wedge1)\end{cases}$	○	×	○	○

표 6. (vii)~ (viii)의 평가기준 만족여부

증명. 그림 10, 그림 12와 표 2에 의하여 위의 결과를 얻을 수 있다.

참 고 문 헌

[1] 김영익 외, *아름다운 수학 Mathematica와 함께*, 교우사, 1999.

[2] 엄정국, *퍼지이론*, 박영사, 1991.

[3] 유동선 외, *기초퍼지이론*, 교우사, 1996.

[4] 이광형 외, *퍼지이론 및 응용 I • II*, 홍릉과학출판사, 1992.

[5] 이병수 외, *퍼지수학의 기초와 응용*, (주)북스힐, 2004.

[6] 채 석 외, *퍼지이론과 제어*, 청문각, 2004.

[7] 최용엽, *퍼지공학 입문*, 웅보출판사, 1998.

[8] 퍼지기술연구회, *퍼지이론해설*, 기전연구사, 1992.

[9] J. F. Baldwin, *A new approach to approximate reasoning using a fuzzy logic*, Fuzzy Sets and Systems **2**(1979), 309-325.

[10] J. F. Baldwin, *Fuzzy logic and fuzzy reasoning*, Int. J. Man-Machine Studies **11**(1979), 465-480.

[11] J. F. Baldwin and N. C. F. Guild, *Feasible algorithms for approximate reasoning using fuzzy logic*, Fuzzy Sets and Systems **3**(1980), 225-251.

[12] J. F. Baldwin and B. W. Pilsworth, *Axiomatic approach to implication for approximate reasoning with fuzzy logic*, Fuzzy Sets and Systems **3**(1980), 193-219.

[13] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy sets and Systems: Theory and Application*, Academic Press, London, 1980.

[14] A. Kaufmann, *Introduction to the theory of fuzzy subsets*, Academic Press, New York, 1975.

[15] R. Lowen, *Fuzzy Set Theory*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.

[16] J. W. Park, S. J. Kang and Y. S. Yun, *Truth function mapping*, Journal of fuzzy logic and intelligent systems, **16**(2006), no. 2, 198-202.

[17] J. C. Song, *Normal fuzzy probability and exponential fuzzy probability for various fuzzy numbers*, Doctorial thesis Cheju National University, 2005.

[18] Y. S. Yun, S. J. Kang and J. W. Park, *Generalized modus tollens using truth function mapping*, Journal of fuzzy logic and intelligent systems, **17**(2007), no. 5, 674-678.

[19] L. A. Zadeh, *The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning I*, Information Sciences, **8**(1975), 199-249.

[20] ＿＿＿＿＿, *Outline of a new approach to the analysis of complex-systems and decision processes*, IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, **3**(1973), no. 1, 28-44.

[21] ＿＿＿＿＿, *Information and Control* **8**(1965), no. 338, 338-353.

[22] H. J. Zimmermann, *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, Kluwer-Nijhoff Publishing, 1985.

<Abstract>

Approximate reasoning using truth function mapping

Mathematical logic is two-valued logic that a truth value is represented by either true or false. But we use multi-valued logic generally in daily life. Fuzzy theory is based on the multi-valued logic. Fuzzy logic is a field of fuzzy theory and deals with fuzzy propositions that their truth value comes out various types. Especially, approximate reasoning is the process obtaining a conclusion proposition from some given fuzzy propositions.

In approximate reasoning, there are generalized modus ponens and generalized modus tollens which are generalized by modus ponens and modus tollens in two-valued logic, respectively. Baldwin suggested approximate reasoning using truth function mapping. In this paper, we introduce basic properties and Baldwin's method for approximate reasoning. We propose two truth function mappings for approximate reasoning. It is shown that approximate reasoning using these truth function mappings is better than that using known six truth function mappings containing Lukasiewicz's truth function mapping.

감사의 글

이 작은 결실을 위해 그동안 하고 싶었던 많은 일들을 절제해야 했지만 배움의 진정한 기쁨을 느끼며 삶의 큰 의미를 생각할 수 있었던 소중하고 보람된 시간들이었습니다.

박사과정 동안 바쁘신 가운데에도 애정을 갖고 격려와 힘이 되어 주시고 연구하는 자세를 가르쳐주신 윤용식 교수님께 진심으로 깊은 감사를 드립니다. 그리고 논문심사를 맡아 세심하게 지도해주시고 좋은 말씀을 해주신 송석준 교수님, 고윤희 교수님, 유상욱 교수님과 늦은 밤까지 세미나를 같이 하면서 많은 부분을 가르쳐주신 박진원 교수님, 그 외 수학과, 수학교육과 교수님들께도 감사드립니다.

또한 함께 공부하며 서로 격려하고 의지가 되었던 동료인 문동주 선생님, 김순찬 선생님, 김철준 선생님, 강경훈 선생님, 강문환 선생님, 정민주 조교선생님과 송재충 선배님을 비롯한 여러 선배님들에게도 감사의 마음을 전합니다. 그리고 지금의 제가 현재의 위치까지 올 수 있도록 많은 도움을 주신 분들을 다 일일이 언급하지 못함을 죄송스럽게 생각하며 그분들의 앞날에 무궁한 발전이 있기를 기원합니다.

마지막으로 존경하는 양가 부모님께 자식 된 입장에서 조금이나마 흐뭇한 마음을 가질 수 있도록 해드렸다는 것에 감사드리며, 항상 옆에서 사랑과 인내로 내조해준 아내 姬와 밝고 건강하게 자라며 자신의 꿈을 위해 열심히 생활하는 賢卓, 炫周, 賢瑀에게 아빠로서 충실히 최선을 다하는 모습을 보여주었다는 것이 가슴 뿌듯하고 자랑스럽습니다. 따뜻하게 격려해준 형제들과 처남들, 친구들을 비롯한 저를 아는 모든 분들과 이 작은 행복을 같이 나눕니다.

2007년 12월