碩士學位請求論文

指數函數의 새로운 導入을 통한 指數法則의 指導에 관한 研究

指導教授 梁 成 豪

濟州大學校 教育大學院

數學教育專攻

李 美 福

1991年度

指數函數의 새로운 導入을 통한 指數法則의 指導에 관한 研究

이 論文을 教育學 碩士學位 論文으로 提出함

濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻

提 出 者 李 美 福

指導教授 梁 成 豪

1991年 7月 日

李美福의 碩士學位 論文을 認准함

1991年 月 日

主審 _____________________ 印

副審 _____________________ 印

副審 _____________________ 印

濟州大學校 教育大學院

目 次

(Abstract)

A Study on Teaching Laws of Exponents by Introducing the Exponential Function

Lee Mi-bok

Mathematics Education Major

Graduate School of Education

Cheju National University, Cheju Korea

Supervised by Professor Yang, Song-ho

In this paper, we first define the logarithmic function logx as the area of the region bounded by x-axis, and the curve $\frac{1}{x}$ between 1 and x if $x \geq 1$, and the negative area of the region bounded by x-axis and the curve $\frac{1}{x}$ between 1 and x if $0 < x < 1$, we will study properties of this function. Also we will define the exponential function as the inverse function of the logarithmic function, and investigate the laws of exponents.

Secondly, we will define the exponent a^x as the limit of the sequence $\{a^{x_n}\}$, where $a > 0$, $a \neq 1$ and $x_n \in Q$, the set of rational numbers, and study its properties (law's of exponents, continuity etc.).

Here this concept is mostly based on the fact that Q is dense in the set R of real numbers. From these, we can obtain several properties of exponential function, and then we can define the logarithmic function as the inverse of the exponential function.

序 論

現行 高等學校 1學年에서 學習되고 있는 指數函數와 로그函數 單元의 展開過程을 살펴보면 먼저 指數函數를 定義하고 그의 逆函數로서 로그函數를 導入하고 있다. 그런데 교과서에서 紹介하고 있는 指數函數의 定義를 살펴보면

"實數 전체의 集合을 정의역으로 하는 函數 $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ 를 a를 밑으로 하는 指數函數라고 한다." 라고 그 定義를 내리고 있다.

여기서 우리는 指數函數의 정의역이 實數전체라는 부분에 注目해 볼 필요가 있다. 즉, 指數 x 가 實數일때 a^x 는 어떤 의미를 갖는 수인가 ? 에 대한 疑問이다. 그래서 指數函數의 先手學習으로서 中學校에서는 "指數"의 用語 사용과 지수가 整數일때 성립하는 간단한 지수法則들을 紹介하고 있고, 高等學校에서도 지수함수의 定義에 앞서 지수의 範圍를 整數에서 有理數로, 有理數에서 實數로 擴張시켜 그때의 a^n 의 뜻과 여러가지 지수法則들을 紹介하고 있다.

그런데 指數를 有理數에서 實數로 擴張시킬때 지수 n 이 無理數일때 a^n 의 뜻을 直觀적으로 인정하게 하여 學習시킴으로써 學習者로 하여금 學習의 진행에 부자연스러움을 주고 있다고 여겨진다.

예를들어, n 이 $0,\ 3,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}$ 일때

2^n 의 값은 각각

$2^0 = 1$, $2^3 = 8$, $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, $2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 가 되는 것은 이해가 되어도

n 이 $\sqrt{2}$, 즉 $2^{\sqrt{2}}$ 는 무엇을 의미하는 것이며 과연 그런 수가 있을까? 라는

疑問을 갖게 된다. 만일 있다면 이것은 무리수인가? 유리수인가? 에 대하여 學習者들에게 이해시킬 수 있는 說明은 現行 高等學校 수학교과서의 構成을 가지고는 할 수가 없다.

결국 학습자들은 $2^{\sqrt{2}}$ 가 무엇인가에 대하여 확실하게 이해하지도 못하면서 $y = 2^x$ (x : 실수) 라는 函數를 공부하였고, 또 이것의 逆函數를 定義하였으니 論理적으로 볼때 理論의 展開에 缺陷이 있다는 이야기가 된다.

따라서, 本 論文에서는 指數函數를 현재 高等學校 數學 敎科書에서 紹介되어진 것과는 다른 方向에서 指導할 수 있는 方法들을 살펴보고 그 指導 方法에 따른 고등학교 敎科書의 構成을 再檢討하여 보다 효과적인 指數函數와 로그函數의 학습 方法을 摸索해 보고자 한다.

本 論文의 第 一章에서는 現行 中,高等學校 敎科過程 構成을 指數函數와 관련된 單元을 中心으로 살펴보고, 指導上의 문제점을 알아본다. 第 二章에서는 指數函數를 面積으로 정의한 로그함수의 逆函數로 定義하고 이에 대한 여러가지 指數函數의 性質과 指數法則들을 소개한다.

마지막으로 第 三章에서는 임의의 實數는 유리수의 數列의 極限으로 나타낼 수 있다는 사실을 이용하여 指數를 정의한 후 이의 指數法則을 조사하고 지수함수를 研究하고자 한다.

本　　論

第一章　現行 教科過程의 分析

1) 中, 高等學校 數學敎科의 體系

指數法則, 指數函數, 로그函數와 관련된 중, 고등학교 수학교과의 構成은 아래 표와 같다.

(표). 중, 고등학교 수학교과의 체계

중 학 교			고 등 학 교	
1 학년	2 학년	3 학년	일 반 수 학 I	수 학 I
I. 집합과 자연수 1) 기수법 . 거듭제곱의 뜻 . 지수의 뜻 II. 정수와 유리수	I. 수와 연산 . 지수법칙 (지수: 정수)	I. 수와 연산 1) 무리수 . 제곱근	V. 함 수 VI. 지수함수와 로그함수 1) 지수함수 . 거듭제곱과 거듭제곱근 . 지수의 확장 . 지수함수 2) 로그함수 . 로그함수의 성질	1. 수 열 2. 극 한 3. 미 분 4. 적 분

2) 分 析

위 표에서 본 바와 같이 中學校의 敎材는 유리수의 사칙연산, 大小關係, 거듭제곱, 指數, 指數法則, 無理數의 順으로 構成되고 있고 거듭제곱의 지수는 整數까지에 限定시켜 간단한 지수법칙만을 다루고 있다. 실제 無理數 $\sqrt{2}$ 의 作圖 및 이의 無限소수로의 표현됨을 소개하고 있고 유리수는 實數上에서 稠密(dense) 하다는 사실을 예를 들어 다루고 있다.

高等學校의 敎材에서는 지수가 陽의 整數로부터 유리수까지 擴張해서 지수법칙을 다루고 있고, 특히 지수가 유리수로부터 實數로 擴張할때 數列 單元 前에 有理數의 지수들이 가까워지는 값으로 (예를들어, $2^{\sqrt{2}}$ 는 $2^{1.4}, 2^{1.41}, 2^{1.414}, 2^{1.4142}, \cdots$ 처럼 有理數 r 이 한없이 $\sqrt{2}$ 에 가까운 값을 취할때, 2^r 이 한없이 가까워지는 값으로 $2^{\sqrt{2}}$ 의 값을 정하였다.) 간략히 紹介한 후 指數가 有理數일때와 마찬가지로 指數가 實數일때에 지수법칙이 成立한다고 敍述하고 있다.

또한 指數函數 $y = a^x$ ($a > 1$) 의 예로서 $y = 2^x$ 에 대하여 함수값이 간단하게 計算되어지는 數値만을 이용하여 對應표를 만들고 이의 그래프를 그리고 있다. 作成한 대응표상에 있지 않는 x에 대하여 2^x 의 값이 정해져서 그래프는 連續적으로 이어진 連續 曲線이 된다고 말하고 있다.

指數의 範圍를 자연수에서 정수로 다시 정수에서 유리수로 擴張할때 그 原理는 지수법칙이 保存되게 擴張했다. 지수의 정의를 有理數에서 實數로 擴張하는 데에는 連續의 形式이 保存된다는 原則 이외에 連續性이 保障되도록 해야한다.

이를테면 實數의 연속성에 의해서 無理數 x는 有理數로된 수열 { x_n } 의 극한

값이 된다. 이때 a^{x_1}, a^{x_2} ,····· a^{x_n} , ······ 의 극한값으로 a^x 을 정의한다. 이 정의의 妥當性은 無理數 x에 수렴하는 어떤 數列을 택해도 $\{a^{x_n}\}$의 極限은 일정하다는 것이다.

指數函數 $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) 은 정의역이 實數의 集合, 値域이 陽의 實數集合인 單射函數이므로 이 逆의 對應으로 로그를 導入하고 그 性質을 調査하고 있다.

지수에서 지수함수, 로그함수까지의 理論 展開하는 데에 實數의 連續概念, 實數上에서 유리수의 稠密性의 性質, 數列單元 前의 " 한없이 가까워지는 값 " 의 표현 등의 理論에 대하여 微少하게 다루고 있어 學習者가 이들 槪念이나 性質을 이해하는데 많은 어려움이 따르고 있는 實情이다.

第二章　로그函數에 의한 指數函數의 展開

2.1　로그函數

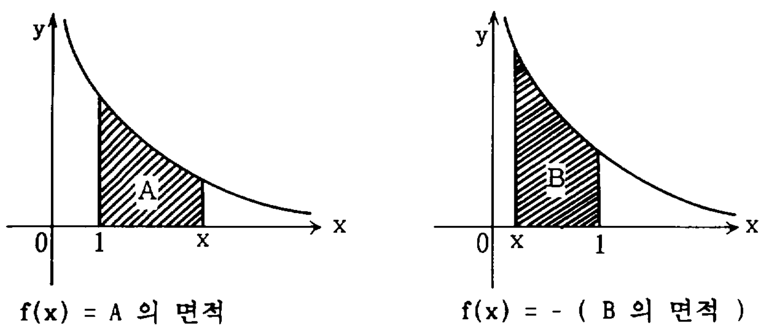
정의역을 陽의實數로 하고 , 공역을 모든 實數로 하면서

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{이고} \qquad f(1) = 0$$

을 만족하는 函數 f(x) 를 생각해보자. 과연 그러한 函數가 存在할것인가 ?

函數 f(x) 를 다음과 같이 定義하여 보자.

즉, 函數 f(x) 를 x>1 일때에는 1과 x사이의 區間에서 曲線 $\frac{1}{x}$ 과 x축과의 면적으로 , 0 < x < 1 일때에는 x부터 1까지의 區間의 面積에 -1를곱한것으로 定義한다. 그림 2-1 의 빗금친 부분은 x > 1 일때와 0< x < 1 에서의 f(x) 값을 나타낸다.



< 그림 2-1 >

특히, 이 定義에 따르면 $f(1) = 0$ 이 됨을 알수 있고, 또한 이 函數 $f(x)$ 는 다음 定理를 따른다.

定理 1) 函數 $f(x)$ 는 微分可能하고 다음과 같이 된다.

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

證明) 定義에 의하여 $f(x)$ 의 導函數를 구하여 보자.

즉, 평균 변화율 $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

는 h 가 0 에 가까워짐에 따라 $\dfrac{1}{x}$ 에 접근함을 보이면 된다.

먼저 $h > 0$ 인 경우 $f(x+h) - f(x)$ 는 그림 2-2 의 빗금친 부분의 面積이므로 다음과 같은 不等式이 만족된다.

$$h\frac{1}{x+h} < f(x+h) - f(x) < h\frac{1}{x}$$

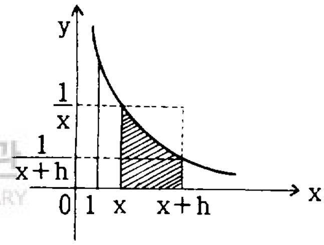


그림 2-2

不等式의 兩邊을 陽數 h 로 나누면

$$\frac{1}{x+h} < \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < \frac{1}{x}$$ 이다.

h 가 0 에 가까워짐에 따라 $\dfrac{1}{x+h}$ 은 $\dfrac{1}{x}$ 에 가까워지고

따라서, $$\lim_{h\to\infty}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{x}$$ 이다.

마찬가지로 $h < 0$ 인 경우도 위의 極限값을 $\frac{1}{x}$ 로 구할 수

있다. 따라서, $\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x}$ 이다.

그러므로, 위에서 $x > 0$ 일때 曲線 $\frac{1}{x}$ 과 x 축과의 面積으로 定義한 函數 $f(x)$ 는 $x > 0$ 일때 定義되는 函數로서 $f(1) = 0$ 과 $f'(x) = \frac{1}{x}$

을 만족함을 알 수 있다.

이제, 우리는 이 函數 $f(x)$가 唯一하게 存在하는지에 대해서도 살펴 볼필요가 있다.

만일 函數 $g(x)$ 가 모든 陽의實數에서 定義되고 $g'(x) = \frac{1}{x}$ 이고 $g(1) = 0$ 인 函數라면 그때 이 函數는 $f(x)$ 와는 常數 C 만큼의 차이가 있다. 즉, 모든 陽의實數 x 에 대하여 $g(x) = f(x) + C$ 이다.

만일 $x = 1$ 이라면, $g(1) = f(1) + C = 0 + C = C$ 이다.

그런데 $g(1) = 0$ 이므로 $C = 0$ 이 된다. 따라서,

$$g(x) = f(x)$$

이것은 $x > 0$ 일때 $f'(x) = \frac{1}{x}$ 이고 $f(1) = 0$ 을 만족하는 函數가 唯一하게 存在한다는 것을 보여준다.

지금까지 $f : R^{+} \rightarrow R$ 이고 $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(1) = 0$ 인 函數는 앞의 定義 (面積을 利用) 따랐을때 唯一하게 存在한다는것을 보여 주었다.

이제 이 函數 $f(x)$ 를 다음과 같이 부르도록 하자.

$$f(x) = \log(x)$$

정의한 log 函數는 다음과 같은 性質들을 滿足한다.

定 理 2) 函數 $\log(x)$ 는 모든 陽의實數에서 單調增加한다.

證 明) $\log(x)$ 의 導函數는 $\dfrac{1}{x}$ 이고 이 값은 $x > 0$ 이면 陽이다.

따라서 $\log(x)$ 는 $x > 0$ 에서 單調增加 函數이다.

定 理 3) 모든 $a, b > 0$ 에 대하여 $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ 이다.

證 明) 모든 $x > 0$ 에 대하여 定義된 函數 $f(x) = \log(ax)$ 의

導函數는 $\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{d\log(ax)}{dx}$

$$= \frac{1}{ax} \times a$$

$$= \frac{1}{x}$$ 이므로

$\log(ax) = \log(x) + C$ (C 는 상수) 이다.

이 式은 모든 $x > 0$ 에 대하여 成立하므로 $x = 1$ 을 택하면

$$\log(a) = C$$

즉, $\log(ax) = \log(a) + \log(x)$ 이다.

이제 $x = b$ 라 놓으면

$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ 가 되어 구하는 結論이 나온다.

定 理 4) n 이 整數이고 $a > 0$ 이면, $\log(a^n) = n\log(a)$ 이다.

證 明) 먼저 n 을 陽의整數라고 하자.

定理2) 에 의하여 $\log(a^2) = \log(a) + \log(a) = 2\log(a)$,

$\log(a^3) = \log(a^2) + \log(a) = 2\log(a) + \log(a) = 3\log(a)$ 이다.

歸納法을 쓰기 위하여, $\log(a^{n-1}) = (n-1)\log(a)$ 를 가정하면

$$\begin{aligned}\log(a^n) &= \log(a^{n-1}) + \log(a) \\ &= (n-1)\log(a) + \log(a) \\ &= n\log(a)\end{aligned}$$

다음에 n 이 陰의 整數라면, $n = -m$ (m: 陽의 整數) 라 놓자.

$0 = \log(1) = \log(a^m \cdot a^{-m}) = \log(a^m) + \log(a^{-m})$

따라서, $\log(a^{-m}) = -\log(a^m)$

즉, $\log(a^n) = \log(a^{-m}) = -\log(a^m) = -m\log(a) = n\log(a)$

그리고, 특히 $n = 0$ 일때

$$\log(a^n) = \log(a^0) = \log(1) = 0$$ 이므로

n 이 整數일때

$\log(a^n) = n\log(a)$ 가 됨을 알 수 있다.

위의 定理에 따라서 다음 定理들은 쉽게 說明할 수 있을 것이다.

따름定理1) $a > 0$ 일때, $\log \frac{1}{a} = -\log(a)$

證 明) $\frac{1}{a} = a^{-1}$ 이므로 위의 定理 4 에 의하여

$$\log \frac{1}{a} = -\log(a)$$ 이다.

따름定理2) $a, b > 0$ 일때, $\log \frac{a}{b} = \log(a) - \log(b)$

證 明) 定理2) 와 따름定理1) 에 의하여

$$\log \frac{a}{b} = \log(a \cdot \frac{1}{b}) = \log(a) + \log(\frac{1}{b})$$

$$= \log(a) + \log(b^{-1})$$

$$= \log(a) - \log(b)$$ 가 된다.

이제 위의 모든 性質을 滿足하는 函數 $\log(x)$ 의 그래프에 대하여 생각해 보도록 한다.

$y = \log(x)$ 의 기울기는

$$\frac{d\log(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$ 이다.

그러므로, $y = \log(x)$ 의 그래프는 왼편에서 오른편으로 올라간다. 그 導函數는 連續이므로, $\log(x)$ 도 連續이고 曲線은 連續적으로 변하는 接線을 갖는다.

$$\frac{d^2 \log(x)}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

은 항상 陰이므로 曲線 $y = \log(x)$ 는 어디서나 위로 볼록하다.

$\log(1) = 0$ 이므로 曲線은 점(1,0) 을 지난다. 이 점에서 기울기는 1 이므로 曲線은 x축과 45^0 각을 이루게 된다.

예를들어, $\log(2)$ 값을 살펴볼때 이것은 [1,2] 에서 $\frac{1}{x}$ 曲線이 이루는 面積 이다. 이 面積에 內接 또는 外接하는 사각형을 생각해 볼때

$$0.5 < \log(2) < 1.0$$

임을 알 수 있는데 실제로 사다리꼴 公式을 이용하여 좀 더 정확히 계산해 보면

$\log(2) \approx 0.69315$ 가 된다.

위에서 證明된 定理들을 이용하여 다음값들을 계산해 보면,

$$\log(4) = \log(2^2) = 2\log(2) \approx 1.38630,$$

$$\log(8) = \log(2^3) = 3\log(2) \approx 2.07944,$$

$$\log(\frac{1}{2}) = \log(2^{-1}) = -\log(2) \approx -0.69315,$$

$$\log(\frac{1}{4}) = \log(2^{-2}) = -2\log(2) \approx -1.38630.$$

등을 얻을 수 있다.

더군다나, $\log(2^n) = n\log(2)$ 는 n 값이 陽으로 커져감에 따라 그값도 점점 커져간다.

따라서, $x \to +\infty$ 일때

$$\log(x) \to \infty$$

이고, 한편 x 가 0 에 가까이 가면 $\dfrac{1}{x}$ 은 ∞ 에 가까이 가므로

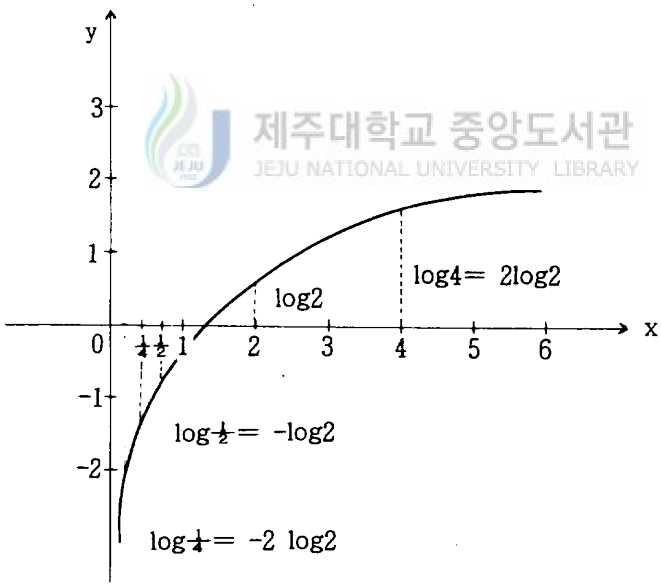
$x \to +0$ 일때

$$\log(x) = -\log\left(\frac{1}{x}\right) \to -\infty$$

를 얻는다.

그러므로, 函數 log(x) 의 値域은 實數 전체가 된다.

이제 이값들을 좌표평면위 차례로 대응시켜 선으로 연결하면 다음 그래프를 얻을 수 있다.



2.2 指數函數

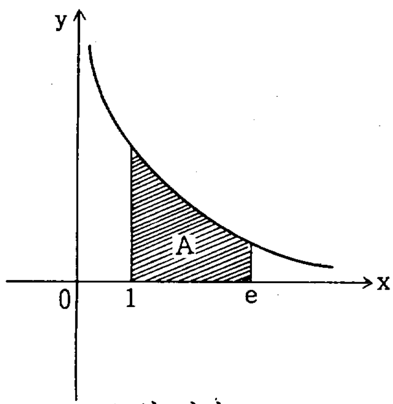
앞 章에서 定義한 函數 log(x) 는 陽의 實數를 정의역으로 하는 增加函數이고 實數 전체가 値域이므로 逆函數가 존재한다.

우리는 이것을 기호 exp 로 표시한다.

log 函數가 그 함수값으로 모든 實數를 취하므로 函數 exp 는 實數 전체에서 정의되는데 특히, log(1) = 0 이므로 exp(0) = 1 이 된다.

定 義) exp(1) = e

즉, 이것은 1 과 x사이의 區間에서 曲線 $\frac{1}{x}$ 과 x 축과의 面積이 1 이 되는 x 축상의 값을 e 라고 한다는 뜻이다 .



A 의 면적 = 1

函數 exp 는 다음과 같은 성질을 갖는다.

定 理 1) z 와 w 가 實數 일때

$$\exp(z + w) = \exp(z) + \exp(w)$$ 이다.

證 明) $a = \exp(z)$, $b = \exp(w)$ 라 하면

$z = \log(a)$, $w = \log(b)$ 이다.

그리고 $z + w = \log(a) + \log(b) = \log ab$ 가 됨을 앞장의 定理에서

이미 밝혔다. 그리고 逆函數의 定義에 따라

$\log(ab) = z + w$ 는 $\exp(z + w) = ab$ 가 된다.

따라서 $\exp(z + w) = ab = \exp(z)\exp(w)$ 이다.

이 定理를 이용하면 다음 性質은 쉽게 證明이 된다.

定 理 2) r 이 有理數일때 $\exp(r) = \{\exp(1)\}^r$ 이 된다.

證 明) 먼저, r 이 自然數 일때 定理1) 에 의하여

$\exp(2) = \exp(1 + 1) = \exp(1)\exp(1) = \{\exp(1)\}^2$ 이고

$\exp(3) = \exp(2 + 1) = \exp(2)\exp(1) = \{\exp(1)\}^3$ 이 된다.

만일 $\exp(r - 1) = \{\exp(1)\}^{r-1}$ 라고 假定하면

歸納法에 의하여

$\exp(r) = \exp(r - 1 + 1) = \exp(r-1)\exp(1) = \{\exp(1)\}^r$

임을 밝힐 수 있다.

만일 r 이 陰의 整數라면 , $r = -m$ (m은 陽의 整數) 라 놓을때

$$1 = \exp(0) = \exp(r + m) = \exp(r)\exp(m)$$ 이다.

따라서, $$\exp(r) = \frac{1}{\exp(m)} = \frac{1}{\{\exp(1)\}^{m}}$$

$$= \{\exp(1)\}^{-m}$$

$$= \{\exp(1)\}^{r}$$

또한 $r = \frac{1}{m}$ (m : 陽의 整數) 라고 하면 그때,

$$\{\exp(r)\}^{m} = \{\exp(\frac{1}{m})\}^{m}$$

$$= \exp(\frac{1}{m})\exp(\frac{1}{m})\cdots\cdots\cdots\exp(\frac{1}{m})$$

$$= \exp(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \cdots\cdots\cdots \frac{1}{m})$$

$$= \exp(m\cdot\frac{1}{m})$$

$$= \exp(1)$$. 따라서 ,

$$\exp(r) = \{\exp(1)\}^{\frac{1}{m}} = \{\exp(1)\}^{r}$$

위의 경우에서 알수 있듯이 x 가 有理數일때는

$$\exp(x) = \{\exp(1)\}^{x}$$ 이 된다.

한편, $\exp(1) = e$ 이므로 $\exp(r) = e^{r}$ 로 나타낼수 있다.

函數 exp 는 다음과 같은 性質을 갖는다.

定 理 3) 函數 exp 는 微分可能하고 $\dfrac{d\exp(x)}{dx} = \exp(x)$ 이다.

證 明) 逆函數의 微分定理에 의하여 函數 exp(x) 는 微分可能하다

만일 $y = \exp(x)$, $x = \log(y)$ 이라면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\log(y)}{dy} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\exp(x)}$$

로 나타낼 수 있다. 따라서,

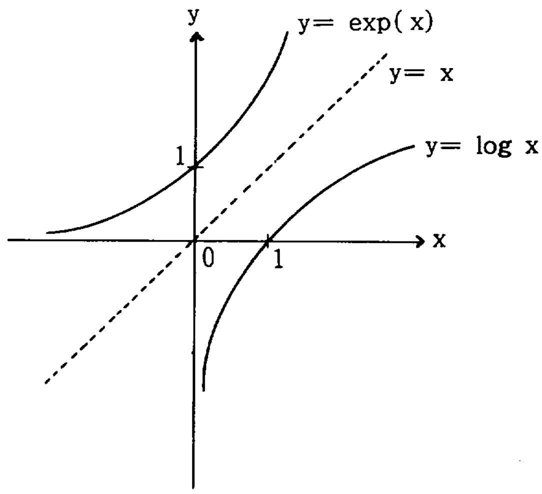
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{1}{\exp(x)}} = \exp(x).$$

函數 exp(x) 의 그래프는 함수 exp(x) 가 增加函數이고 $\exp(1) > 0$ 이므로 exp(n) 은 n 이 커짐에 따라 점점 커진다.

또한, $\dfrac{d\exp(x)}{dx} = \dfrac{d^2\exp(x)}{dx^2} = \exp(x) > 0 \quad (x > 0)$

이므로 그 그래프는 아래로 볼록하다.

따라서, exp(x) 의 그래프는 다음과 같다.



이 그래프는 y = log(x) 의 그래프와 y = x 에 대하여 對稱이다.

2.3 一般적인 指數函數

우리는 앞에서 2^x 을 定義하는데 어려움이 있다는 것을 지적하였는데 다음과 같은 定義를 사용한다면 學習者들이 이해하는데 어려움은 없을것이다.

a 를 陽數, x 를 實數라면 이때 a^x 를 다음과 같이 정의한다.

$$a^x = \exp(x\log(a))$$

예를 들어

$$2^x = \exp(x\log(2)) \ , \ 2^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2}\log(2))$$

a^x 를 위와 같이 定義할때, 만일 n이 陽의 整數라면 a^n은 a를 n번 곱한것이

라는 것을 다음을 보면 알 수 있다.

$$a^n = \exp(n\log(a))$$
$$= \exp(\ \log(a) + \log(a) + \cdots\cdots + \log(a)\ )$$
$$= \exp(\log(a)) \times \exp(\log(a)) \times \cdots\cdots \times \exp(\log(a))$$
$$= a \times a \times \cdots\cdots \times a$$

특히· $a^0 = \exp(0) = 1$

이것은 一般적으로 x가 有理數일때 a^x 는 우리가 이미 알고 있는 값과 일치한다는 것을 보여준다.

다음 定理는 一般적인 指數函數 a^x가 a에 따라서 增加函數가 되기도 하고 減少函數도 되는 것을 보여준다.

定 理 1) $a > 0$ 일때 a^x 는 a의 값에 따라서 다음과 같이 된다.

a가 $0 < a < 1$ 일때 a^x 는 減少函數이고

a가 $a > 1$ 일때 a^x 는 增加函數이다.

證 明) 定義에 의하여, 모든 實數 x 에 대하여 $a^x = \exp(x\log(a))$ 이다.

그런데, $0 < a < 1$ 라면 $\log a^x$ 는 x값이 커짐에 따라 陰으로 그 절대값이 점점 커진다.

즉, $\lim_{x \to +\infty} \log a^x = \lim_{x \to +\infty} x\log a = -\infty$

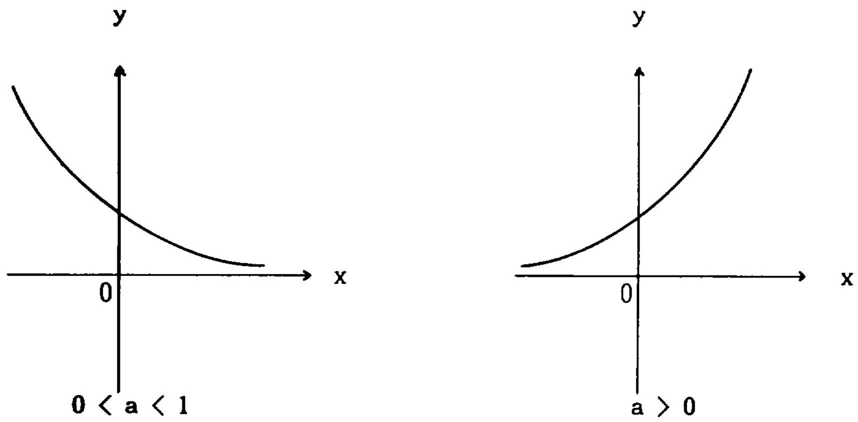
따라서, $\exp(x\log(a))$ 는 $0 < a < 1$ 일때 減少函數가 된다.

한편, $a>1$ 일때 $\log a^x = x\log(a)$ 이므로 x 값이 증가함에 따라 $\log a^x$

도 점점 증가한다.

따라서, $a^x = \exp(x\log(a))$ 는 增加函數이다.

위의 定理에 따라 이 函數의 그래프는 다음과 같다.



— $y = a^x$ 의 그래프 —

이 一般적인 指數函數 a^x 는 다음과 같은 성질을 갖는다.

定 理 2) $a > 0$ 이고, r, s 가 實數일때 다음의 指數法則이 成立한다.

(i) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

(ii) $(a^r)^s = a^{rs}$

(iii) $(ab)^r = a^r \cdot b^r$

(iv) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

證　明) 위의 性質들은 로그函數와 指數函數의 性質을 이용하여 證明할 수 있다.

$$(i)\ a^r \cdot a^s = \exp(r\log(a))\ \exp(s\log(a))$$
$$= \exp((r+s)\log(a))$$
$$= a^{r+s}$$

$$(ii)\ (a^r)^s = \exp(s\log(a^r))$$
$$= \exp(rs\log(a))$$
$$= a^{rs}$$

$$(iii)\ (ab)^r = \exp(r\log(ab))$$
$$= \exp(r\log(a)) \bullet \exp(r\log(b))$$
$$= a^r \cdot b^r$$

$$(iv)\ \left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^r = a^r \cdot b^{-r} = a^r \cdot \frac{1}{b^r} = \frac{a^r}{b^r}$$

따라서 이 指數函數 a^x는 x 가 實數일때 우리가 이미 알고 있는 指數 函數에 관한 여러가지 성질이 모두 成立한다. 이 함수의 導函數는 다음과 같다.

定 理 3) 指數函數 a^x 의 導函數는 $a^x(\log a)$ 이다.

證　明) $u = (\log a)x$ 라 놓으면

$$\frac{du}{dx} = \log a \text{ 이고, } \exp(u) = \exp(x\log a) = a^x$$

$$\text{그러므로, } \frac{da^x}{dx} = \frac{d\exp(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \exp(u) \cdot \log(a)$$

따라서, $\dfrac{da^x}{dx} = a^x(\log a)$

定 理 4) C 는 임의의 **常數**이고 $x > 0$ 일때

$f(x) = x^c$ 로 정의된 **函數**는 **微分可能**하고 **導函數**는 다음과 같다.

$$\frac{df(x)}{dx} = cx^{c-1}$$

證 明) 定義에 의하여 $f(x) = x^c = \exp(c\log(x))$

만일, $u = c\log(x)$ 라 놓으면

$f(x) = \exp(c\log(x)) = \exp(u)$ 이고,

$$\frac{du}{dx} = c\cdot\frac{1}{x} = \frac{c}{x}$$

따라서, $\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{d\exp(u)}{du}\cdot\dfrac{du}{dx} = \exp(u)\cdot\dfrac{c}{x}$

$$= \exp(c\log(x))\cdot\frac{c}{x}$$

$$= x^c\cdot\frac{c}{x} = cx^{c-1}$$

第三章 數列에 의한 指數函數의 展開

本 章에서는 實數上에서 有理數의 稠密性과 數列을 이용하여 指數法則과 指數函數를 定義하고자 한다. 여기서 數列이란 自然數의 集合 N 에서 實數의 集合 R 로의 函數를 의미한다. $a_n \geq a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$일때 數列 $\{ a_n \}$은 減少數列이라 말하고 $a_n \leq a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$일때 數列 $\{ a_n \}$은 增加數列이라 한다. 數列 $\{ a_n \}$이 增加數列이거나 減少數列이면 $\{ a_n \}$은 單調數列(monotone sequence)이라 한다.

定理 1 〔참고문헌 6〕참조 單調數列 $\{ a_n \}$이 收斂하기 위한 必要充分條件은 $\{ a_n \}$ 이 유계 수열이다.

定理 2) 임의의 實數 x에 대하여, x에 수렴하는 유리수의 增加數列 $\{ r_n \}$ 이 존재한다.

證明) 유리수의 稠密性에 의하여 $x - 1 < r_1 < x$ 를 만족하는 유리수 r_1 이 존재한다. 다시 有理數의 稠密性에 의하여

$\max\{ r_1, x - \frac{1}{2} \} < r_2 < x$ 를 만족하는 유리수 r_2 가 존재한다. 一般적으로 $r_n < x$ 인 유리수 r_n을 택한다음 다시 유리수의 조밀성을 적용하면,

$\max \{ r_n , x - \frac{1}{n+1} \} < r_{n-1} < x$ 가 되는 유리수 r_{n+1} 이 존재한다. 분명히, r_n 은 有理數들의 增加數列이고

$x - \frac{1}{n} < r_n < x$ 이므로, $\lim_{n \to \infty} r_n = x$

예를 들면, $\sqrt{2}$ 는 1, 1.4, 1.41, 1.414, ····· 과 같은 수열의 極限이다. 즉, 이 수열은 $\sqrt{2}$ 에 수렴한다.

定理 3) 임의의 實數 x에 대하여, x에 수렴하는 有理數의 減少數列 $\{ q_n \}$ 이 존재한다.

證明) 證明은 定理 1 의 證明과 類似하다.

$a \geq 1$ 이고 x가 임의의 實數이면 위 定理 1에 의하여 $\lim_{n \to \infty} r_n = x$ 인 유리수의 增加數列 $\{ r_n \}$ 을 택할 수 있다. 이때 數列 $\{ a^{r_n} \}$ 은 增加數列 이고 만약 r가 $r > x$ 인 임의의 有理數이면, $a^{r_n} < a^r$ (n=1,2.,3,·····). 따라서,
$\{ a^{r_n} \}$ 은 유계이고 增加數列이므로 $\{ a^{r_n} \}$ 은 수렴한다.

$a^x = \lim_{n \to \infty} a^{r_n}$ 로 a^x 를 定義할 수 있다.

定義) $a \leq 1$ 이고 x 는 한 實數일때 $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ 로 정의한다.

(여기서, $\{r_n\}$ 은 x 에 수렴하는 有理數의 增加數列이다.) 만약,

$0 < a < 1$ 이고 x가 實數이면, $a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$ 로 定義한다.

우리는 여기서 a^x 가 잘 定義됨을 보여주어야 한다. 즉, a^x 의 값은 數列 r^n 의 선택에 無關함을 證明하면 된다.

定理 4) $a \geq 1$ 이고 x 는 임의의 實數라고 하자. 數列 $\{r_n\}$, $\{s_n\}$ 이 수렴하는 有理數들의 增加數列이라면,

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n}$$

證明) $R_n = r_n - \frac{1}{n}$, $S_n = s_n - \frac{1}{n}$ ($n = 1,2,3.....$)로 놓으면, R_n 과 S_n 는 모두 有理數의 增加數列이고

$R_n < x$, $S_n < x$ ($n = 1,2,3,....$) ,

$\lim_{n\to\infty} R_n = x = \lim_{n\to\infty} S_n$.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ 이므로,

$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{R_n}$, $\lim_{n\to\infty} a^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{S_n}$

$R_1 < x$ 이므로 $R_1 < S_{m_1}$ 이 되는 自然數 m_1 를 택해도 좋다.

$S_{m_1} < x$ 이므로 $S_{m_1} < R_{n_2}$ 을 만족하는 自然數 n_2 를 택해도 좋다. 이와 같이 계속해 나가면, $R_{n_1} < S_{m_1} < R_{n_2} < S_{m_2} < \cdots$ 이 되는 增加數列을 얻게된다.

$b_{2k} = S_{m_k}$, $b_{2k-1} = R_{n_k}$ ($k = 1, 2, 3, \cdots$) 로 놓으면, $\{ b_k \}$ 는 유계이고 有理數의 增加數列이다. 따라서 $\lim a^{b_k}$ 는 존재한다. 지금, $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{R_n} = \lim_{n\to\infty} a^{R_{n_k}} = \lim_{n\to\infty} a^{b_{2k-1}}$

$$= \lim_{n\to\infty} a^{b_{2k}} = \lim_{n\to\infty} a^{S_{m_k}} = \lim_{n\to\infty} a^{S_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n} .$$

예를 들면, $3^{\sqrt{2}}$ 는 3^1, $3^{1.4}$, $3^{1.41}$, $3^{1.414}$, ... 과 같은 數列의 極限으로 定義된다.

우리는 (*) 임의의 陰이 아닌 實數 x와 自然數 n에 대하여 $x^{1/n}$ 은 $y^n = x$ 를 만족하는 陰이 아닌 實數 y로 定義되는 것을 알고 있다. $a \geq 1$이고 r 이 有理數일때, $r_n = r$ ($n=1, 2, 3, \cdots$) 인 增加數列 $\{ r_n \}$ 을 택해도 좋으므로 定義는 a^r 의 위 定義 (*) 와 一致함을 알 수있다.

定理 5) $a > 0$ 이고 x는 임의의 實數라 하자. 數列 $\{ t_n \}$은 極限 x를 갖는 임의의 數列이라면, $\lim_{n\to\infty} a^{t_n} = a^x$.

證明) $\lim t_n = x$ 이므로, $r_n < t_n < s_n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$) 을 만족하고, x에

수렴하는 有理數의 增加數列 { r_n } 과 減少數列 { s_n }을 얻을 수 있다.

$a > 1$ 일때, 定理 (vi)에 의하여, $a^{r_n} \le a^{t_n} \le a^{s_n}$.

따라서, $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x = \lim_{n\to\infty} a^{s_n}$ 이므로 $\lim a^{t_n} = a^x$.

마찬가지로,

$0 < a < 1$ 일때, $a^{r_n} \ge a^{t_n} \ge a^{s_n}$ $(n=1, 2, \cdots)$.

따라서, $\lim_{n\to\infty} a^{t_n} = a^x$.

指數가 實數의 範圍에서 다음 指數法則은 指數가 有理數의 範圍에서 指數法則, 定理1 과 極限을 이용하여 얻어짐을 알 수 있다.

定理 6) a,b 는 陽數라 하자. 이때

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$ $(x, y \in R)$

(ii) $(a^x)^y = a^{xy}$ $(x, y \in R)$

(iii) $(ab)^x = a^x b^x$ $(x \in R)$

(iv) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ $(x \in R)$

(v) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$ $(x \in R)$

(vi) $a > 1$ 이고 $x < y$ 이면, $a^x < a^y$

(vii) $0 < a < 1$ 이고 $x < y$ 이면, $a^x > a^y$

(viii) $x > 0$ 이고 $a < b$ 이면 , $a^x < b^x$

(ix) $x < 0$ 이고 $a < b$ 이면 , $a^x > b^x$

證明) (i) 먼저 $a \geq 1$ 이라 하자. 數列 $\{ r_n \}$, $\{ s_n \}$는 각각 x, y 에 수렴하는 有理數의 增加數列이라 하면, $\{ r_n + s_n \}$ 은 $x + y$ 에 수렴하는 增加數列이다.

$a^{r_n+s_n} = a^{r_n} a^{s_n}$ 이므로

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n+s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} a^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \lim_{n\to\infty} a^{s_n} = a^x a^y$$

다음 $0 < a < 1$ 이면 $\frac{1}{a} > 1$.

따라서 $a^{x+y} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x-y} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} \left(\frac{1}{a}\right)^{-y} = a^x a^y$

(ii) $a \geq 1$ 이라 假定하자. 數列 $\{ r_n \}$, $\{ s_n \}$은 각각 極限 x,y를 갖는 유리수의 增加數列이라 할때, $\{ r_n s_n \}$은 極限 xy를 갖는 有理數의 증가수열이다. $(a^{r_n})^{s_n} = a^{r_n s_n}$ 이므로,

$$(a^x)^y = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n})^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n s_n} = a^{xy} .$$

$0 < a < 1$ 이면, $\frac{1}{a} > 1$. 따라서,

$$(a^x)^y = \left(\left(\frac{1}{a} \right)^{-x} \right)^y = \left(\frac{1}{a} \right)^{-xy} = a^{xy}$$

(iii) $a \geq 1,\ b \geq 1$ 이라 假定하자. 數列 $\{ r_n \}$은 極限 x를 갖는 有理數의 增加數列이라 하면, $(ab)^{r_n} = a^{r_n} b^{r_n}$ 이므로

$$(ab)^x = \lim_{n\to\infty} (ab)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} b^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \lim_{n\to\infty} b^{r_n} = a^x b^x.$$

$0 < a,\ b < 1$ 일때 $\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{b} > 1$

$$\therefore\ (ab)^x = \left(\frac{1}{ab} \right)^{-x} = \left(\frac{1}{a} \right)^{-x} \left(\frac{1}{b} \right)^{-x} = a^x b^x.$$

다른 경우도 마찬가지로 證明할 수 있다.

(iv) (i)에 의하여 $a^x a^{-x} = a^{x-x} = a^0 = 1$

$$\therefore\ a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

(v) $\left(\dfrac{a}{b} \right)^x = \left(a \dfrac{1}{b} \right)^x = a^x b^{-x} = \dfrac{a^x}{b^x}$

(vi) $y-x > 0$ 이므로 수열 $\{r_n\}$을 極限 $y-x$를 갖는 有理數의 增加數列이라 하면, 적당한 陽의 整數 k에 대하여 $r_n > 0$ $(n=k,\ k+1,\ \cdots)$ 이므로

$a^{r_n} > 1$ $(n=k,\ k+1, \cdots)$. 따라서 $a^{y-x} = \lim a^{r_n} > 1$, 즉, $\dfrac{a^y}{a^x} > 1$

(즉, $a^y > a^x$).

(vii) $0 < a < 1$ 이면, $\frac{1}{a} > 1$. (vi) 에 의하여

$$\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x < \left(\frac{1}{a}\right)^y = \frac{1}{a^y} \quad \text{즉, } a^x > a^y.$$

(viii) 와 (ix)의 證明은 위의 證明들과 類似하다.

定義) $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 로 定義한다. (단, $0! = 1$)

여기서 e가 具體적으로 어떤 수인가 에 대해서 살펴 보기로 한다.

이 級數의 部分合

$$S_n = 1 + 1 + \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{1\times2\times3} + \cdots\cdots + \frac{1}{1\times2\times3\times\cdots\times n}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

이므로, 이 級數는 수렴한다. 따라서 이 定義는 의미가 있다.

그렇다면 e 는 有理數인가? 無理數인가?

만일 e 가 有理數라고 假定해보자. 그때 e 는 $\frac{p}{q}$ (p, q 는 陽의整數) 로 나타낼 수 있다.

$$S_q = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$$ 라 놓도록 하자.

그러면 $e - S_q = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \cdots\cdots$

$$< \frac{1}{(q+1)!}\left[1+\frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+2)!}+\cdots\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{q!q}$$

따라서 $0 < e - S_q < \dfrac{1}{q!q}$ 이 된다. 이것은 또한,

$$0 < q!(e - S_q) < \frac{1}{q}$$

假定에 의해서 $q!e$ 는 整數이다.

그리고 $q!S_q = q!\left(1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{q!}\right)$ 이므로 또한 정수이다. 그러므로 $q!(e - S_q)$ 역시 整數가 된다. 그런데 $q!(e - S_q)$ 는 0 과 1 사이의 整數가 되므로 矛盾이 생긴다.

따라서 , e 는 有理數가 아니라 無理數이다.

사실 계산해보면 $e = 2.71828182\cdots\cdots$ 이 되며,

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ 임을 알 수 있다.

정의와 定理 5), 6) 로 부터 指數函數 $f(x) = e^x$ 는 다음 사실을 만족함을 알 수 있다.

(1) $f(x+y) = f(x)f(y)$.

(2) $f(0) = 1$.

(3) 임의의 實數 x에 대하여 $f(x) > 0$.

(4) $f(x)$ 는 R 에서 強한 意味로 增加函數이다.

(5) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ 이고 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

(6) $f(x) = e^x$ 는 R에서 連續函數이다.

위 사실로 부터 f의 逆函數 f^{-1}가 存在하고 이 逆函數는 또한 增加函數이고 連續임을 알 수 있다.

結 論

本 論文의 理論 展開는 高等學校 敎育 現場에서 學習者들에게 $y = 2^x$ (x 는 實數) 를 이해시키는 方法으로서 現行 敎科書에서 紹介되어진 것과는 다른 方向에서 그 指導 方法을 提示하였다.

第 二章에서는 먼저 $x > 0$ 일때 1과 x사이의 區間에서 曲線 $\frac{1}{x}$ 과 x 축이 이루는 面積으로 函數 log(x)를 定義하여, log 函數의 여러가지 性質등을 조사하였다. 이 函數는 連續이고 增加函數이므로 이의 逆函數가 存在한다. 이의 逆函數로써 函數 exp 를 定義하여 指數法則 및 여러가지 性質등을 살펴보았다.

또한 이 두 函數를 이용하여 $a > 0$ 일때 一般指數函數 a^x를 定義하였다. 이 指數函數는 x 가 有理數일때는 우리가 이미 알고 있는 a^x 의 값과 같다. x 가 임의의 實數라면 지수함수 a^x 는 ($a > 0$) 는 우리가 알고 있는 지수함수에 관한 性質이 모두 成立한다.

이와같은 理論 展開가 現行 敎科書에서 소개된 방법보다 훨씬 學習者들에게 理解시키기 쉽다고 斷定하지는 못하지만 微分槪念이 이미 學習된 학습자라면 이 지도 方法을 적용해도 充分히 무리없이 學習이 이루어지리라 여겨진다.

한편, 第 三章에서는 유리수의 稠密性과 數列을 이용하여 $a > 0$ 일때 一般적인 指數函數 a^x를 정의하고 이에 의하여 여러가지 指數法則의 成立 여부를 조사하였다. 특히 $a = e$ 일때 지수함수 $f(x) = e^x$ 의 性質을 提示하고 이 함수의 逆函數 log 函數를 定義해 나갈 수 있음을 暗示해준다. 이와같은 이론 전

개는 지수가 自然數, 整數, 有理數일때 指數의 性質을 바탕으로 有理數의 稠密性과 로그함수 順으로 理論 展開가 바람직하다는 論理이다.

끝으로, 中,高等學校 敎育過程 構成上 지수함수와 로그함수의 이론 전개는 理論의 體系와 중,고등학교 교과과정의 連繫性 , 학생의 修學能力등의 여러가지 要因을 고려하여 充分한 先行 硏究 및 調査 實驗 후에 이루어져야 된다고 判斷된다.

參 考 文 獻

1. 金容雲외, 微分積分學과 解析幾何學 , 청문각, 1983.

2. 김정수외, 微積分學,이우출판사, 1985.

3. 신동선외, 大學一般數學 ,선진문화사 ,1987.

4. 정영진, 高等學校 數學 I, 학연사, 1989.

5. S. Lang , A First Course in Calculus , Addison-Wesley Publishing Company , 1968.

6. R.Johnsonbaugh & W.E.Pfaffenberger, Foundations of mathematical analysis, Marcel Dekker Inc, 1981.

感謝의 글

그 동안 부족함이 너무 많았던 나에게 오늘 이 한편의 論文이 나오기까지 세심한 配慮와 關心을 갖고 指導해 주신 指導敎授 梁成豪 敎授님과 梁永五 敎授님을 비롯한 數學敎育科 및 數學科의 여러 敎授님들께 고마운 말씀 드립니다.

아울러, 講義를 같이 받으면서 그동안 아낌없는 忠告와 激勵를 해주신 여러 先輩 선생님, 後輩 원생, 그리고 西歸中央女子中學校 선생님들께도 紙面으로나마 고마운 말씀 드립니다.

끝으로, 나의 사랑하는 父母님, 그외 家族들과 함께 이 조그마한 成就의 기쁨을 나누고자 합니다.

1991년 7 월

이 미 복