碩士學位 論文

지수함수와 로그함수의 미분가능성

지도교수 고 윤 희

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

송 기 언

2008년 8월

지수함수와 로그함수의 미분가능성

지도교수 고 윤 희

이 논문을 교육학 석사학위 논문으로 제출함.

2008년 5월 일

제주대학교 교육대학원 수학교육전공

제출자 송 기 언

송기언의 교육학 석사학위 논문을 인준함.

2008년 7월 일

심사위원장 인

심사위원 인

심사위원 인

<국문초록>

지수함수와 로그함수의 미분가능성

송 기 언

제주대학교 교육대학원 수학교육전공

지도교수 고 윤 희

대부분의 고등학교 과정의 미분적분학과 대학교 과정의 미분적분학에서 지수함수의 미분공식은 로그함수의 미분가능성을 이용하여 유도한다. 본 논문에서는 로그함수의 미분가능성을 이용하지 않고 지수함수의 아래로 볼록성을 이용하여 미분가능성을 유도하였다. 해석학의 위계성(극한->연속->볼록->미분)을 고려할 때, 자연스러운 전개방법으로 평가될 수 있을 것이다.

차 례

I. 서론

고등학교 미분적분학교재에서 지수함수와 로그함수의 도함수를 구하는 과정에서 로그함수의 도함수를 도입하고 로그함수의 도함수를 이용하여 지수함수의 도함수를 유도한다. 그리고 대부분의 대학 미분적분학교재에서도 주로 로그함수의 도함수를 이용하여 지수함의 도함수를 유도한다. 그 이유는 $x=0$에서 지수함수의 미분계수를 구하는 과정이 구체적으로 제시할 수 없기 때문이다.

함수 도입단계에서 지수함수를 도입한 후 지수함수의 역함수로 로그함수를 도입한다. 그러므로 함수도입의 위계성을 고려할 때 지수함수의 도함수를 도입한 후 로그함수의 도함수를 유도하는 것이 자연스러운 전개과정이라 할 수 있다.

Toeplitz 의 저서 “The Calculus-A Ginetic Approach, The University of Chicago Press, 1963"의 미분적분학에 관한 역사 발생적 분석에서

$$y = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad (x > 0)$$

로 로그함수를 정의한 후 로그함수의 역함수로 지수함수 $y=e^x$를 정의하고 있다. $y=e^x$의 도함수는 역함수미분법과 $y=\ln x$의 미분법을 이용하여 얻을 수 있다. 또한 $y=x^r$ (r : 실수)의 도함수는 $y=e^{r\ln x}$의 도함수로 구할 수 있다.

본 연구에서는 지수함수의 연속성을 이용하여 지수함수의 아래로 볼록성을 유도한다. 연속개념을 이용하여 볼록성을 유도하는 것은 자연스러운 개념 확장 과정이 된다. 그리고 연속성과 아래로 볼록성을 이용하여 $x=0$에서 지수함수의 미분계수의 존재성을 증명함으로써 지수함수의 도함수를 구하는 과정을 연구한다. 그리고 지수함수의 역함수로 로그함수를 정의하고 역함수 미분법을 이용하여 로그함수의 도함수를 구할 수 있다.

조건을 최소화 하여 로그함수를 도입하고 로그함수의 도함수를 구하는 과정을 구체적으로 연구한다. 로그함수의 기본 성질과 미분가능성을 이용하여 역함수를 정의하고 역함수 미분법에 의하여 로그함수의 역함수인 지수함수의 도함수를 구하는 과정을 연구한다.

본론 제1절에서는 지수함수와 로그함수의 미분가능성에 대한 연구에 필요한 기본 정의와 기본 정리 들을 제시하였다.

본론 제2절에서는 조건을 최소화 하여 지수함수를 도입하고 유리수의 조밀성과 함수의 아래로 볼록성들을 이용하여 지수함수의 미분가능성을 연구하였다.

본론 제3절에서는 조건을 최소화 하여 로그함수를 도입하고 로그함수의 미분가능성을 연구하였다.

결론 부분에서 본 연구의 주요 내용에 대한 요약 및 제언을 기술하였다.

II. 본론

1. 기본정의와 정리

공리 1.1 (실수의 완비성 공리) 실수 집합 R의 공집합이 아닌 부분집합 A가 위로 유계이면 A의 최소상계가 존재한다.

정리 1.2 실수계의 완비성 공리는 다음 명제와 서로 동치이다.
"실수 집합 R의 공집합이 아닌 부분집합 A가 아래로 유계이면 A의 최대하계가 존재한다."

정리 1.3 (아르키메이안 성질) 임의의 두 실수 $x(>0)$, y에 대하여 양의 정수 n_0가 존재하여 $n_0\ x > y$의 조건을 만족한다.

정리 1.4 단조증가(단조감소)인 수열 $\{a_n\}$이 수렴하기위한 필요충분조건은 수열 $\{a_n\}$은 유계수열이다.

정리 1.5 수열 $\{a_n\}$이 p로 수렴하기위한 필요충분조건은 모든 부분 수열 $\{a_{nk}\}$이 p로 수렴하는 것이다.

정리 1.6 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 p에 수렴하는 경우 수열 $\{c_n\}$도 p에 수렴한다. 여기에서 $c_{2n-1} = a_n$ 이고 $c_{2n} = b_n$이다.

(증명) $\lim_{n\to\infty} a_n = p$라고 하자. 이 때, 임의의 양수 ϵ에 대하여 양의 정수 n_1이 존재하여 $n \geqq n_1$이면 $|a_n - p| < \epsilon$이 성립한다. $\lim_{n\to\infty} b_n = p$이면, 양의 정수 n_2이 존재하여 $n \geqq n_2$이면 $|b_n - p| < \epsilon$이 성립한다. 여기에서 $n_0 = 2\ max\{n_1, n_2\}$라 하자. 만약 $n \geqq n_0$이면 $|c_n - p| < \epsilon$을 만족한다.

정리 1.7 (압축정리) 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 모든 n에 대하여

$$a_n \leqq b_n \leqq c_n$$

을 만족하고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = p$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = p$가 성립한다.

정의 1.8 임의의 양수 ϵ에 대하여 양의 정수 n_0가 존재하여 $n, m \geqq n_0$이면 $|a_n - a_m| < \epsilon$의 조건을 만족하는 경우, 실수열 $\{a_n\}$을 코쉬(Cauchy) 수열이라 한다.

정리 1.9 실수열 $\{a_n\}$이 코쉬 수열이면 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

정의 1.10 임의의 실수 x에 대하여 x를 넘지 않은 최대정수를 $[x]$로 나타내며 $[x]$를 x의 Gauss 정수라고 한다.

참고 1.11 정의 1.10에 의하면 모든 실수 x는 $x = [x] + \theta$로 나타낼 수 있다. 여기에서 $0 \le \theta < 1$이다.

정의 1.12 $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$

정리 1.13 $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (x \in R)$

정리 1.14 (유리수의 조밀성) 임의의 두 실수 x, y가 $x < y$를 만족하는 경우 유리수 r이 존재하여 $x < r < y$ 를 만족한다.

(증명) 정리 1.3에 의하여 두 실수 $y - x,\ 1$에 대하여 n_0가 존재하여 $n_0(y - x) > 1$의 조건을 만족한다. 그러므로

$$n_0 y > n_0 x + 1 \geqq [n_0 x + 1] > n_0 x$$

의 조건을 만족한다. 여기에서 $[n_0 x + 1]$은 Gauss 정수이다. 따라서

$$y > \frac{[n_0 x + 1]}{n_0} > x$$

가 성립된다. 여기에서 $r = \dfrac{[n_0 x + 1]}{n_0}$라 하면 r은 유리수가 된다.

정의 1.15 다음 조건을 만족하는 경우 함수 f가 구간 (a,b)에서 **아래로 볼록 (concave)하다**고 한다. "임의의 $\alpha, \beta \in (a,b)$와 $\lambda \in [0,1]$에 대하여

$$f((1-\lambda)\alpha + \lambda\beta) \leqq (1-\lambda)f(\alpha) + \lambda f(\beta)$$

가 성립한다."

참고 1.16 정의 1.15는 $y = f(x)$위의 임의의 두 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$ 사이에 할선(secant line)을 그을 경우 할선이 $y = f(x)$의 그래프 위에 위치한다는 의미가 된다. 여기에서 $a < \alpha < \beta < b$이다.

정리 1.17 함수 f가 구간 (a,b)에서 아래로 볼록하기 위한 필요충분조건은 임의의 $x, p, y \in (a,b)$에 대하여

$$\frac{f(p) - f(x)}{p - x} \leq \frac{f(y) - f(p)}{y - p}$$

가 성립한다. 단 여기서 $a < x < p < y < b$.

정리 1.18 함수 f가 (a,b)에서 단조증가이고 유계이면, $x = a$에서 우방극한값과 $x = b$에서 좌방극한값이 존재한다.

(증명) $A = inf\{f(x) \mid x \in (a,b)\}$라 하자. 임의의 양수 ϵ에 대하여 $p \in (a,b)$가 존재하여 $f(p) < A + \epsilon$를 만족한다. 함수 f가 (a,b)에서 단조증가이므로 $a < x \leqq p$이면 $f(x) \leqq f(p) < A + \epsilon$를 만족한다.

$\delta = p - a > 0$라 하자. 이 때, $a < x < a + \delta$이면

$$A-\epsilon < A \leq f(x) < A+\epsilon$$

를 만족한다. 그러므로 $\lim_{x\to a^+} f(x) = A$가 된다.

한편, $B = sup\{f(x) \mid x \in (a,b)\}$하자. 이 때, 임의의 양수 ϵ에 대하여 $q \in (a,b)$가 존재하여 $B-\epsilon < f(q)$를 만족한다. 함수 f는 (a,b)에서 단조증가이므로 $q \leqq x < b$이면

$$B-\epsilon < f(q) \leqq f(x) \leq B < B+\epsilon$$

을 만족한다. $\delta = b-q > 0$라 하자. 이 때, $x \in (b-\delta,\ b)$이면

$$B-\epsilon < f(x) < B+\epsilon$$

이 된다. 즉, $\lim_{x\to b^-} f(x) = B$가 된다.

정리 1.19 (역함수 미분법) 함수 $f:(a,b)\to(c,d)$가 미분가능하면, 역함수 $f^{-1}:(c,d)\to(a,b)$에서

$$(f^{-1})'(q) = \frac{1}{f'(p)}$$

이 성립한다. 여기에서 $f(p) = q$이고 $f'(p) \neq 0$의 조건을 갖는다.

참고 1.20 역함수 미분법을 이용하여 역함수 방정식을 모르는 상태에서 특정한 점에서 역함수의 미분계수를 원래 제시된 함수를 통해 구할 수 있다.

2. 지수함수의 미분가능성

W. Rudin은 Maclaurin 급수를 이용하여 지수함수를 정의하고 지수함수의 다양한 성질들을 연구하였다. 즉, 임의의 실수 x에 대하여 $E(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 로 정의한 후 임의의 실수 x,y에 대하여 $E(x+y)=E(x)E(y)$의 성질을 유도하였다. 그리고 유리수의 조밀성을 이용하여 $E(x)=e^x$임을 보이고 있다.

이 절에서는 지수함수의 기본 성질인 $f(x+y)=f(x)f(y)$의 조건을 이용하여 지수함수의 미분가능성에 대한 성질을 조사하고자 한다.

보조정리 2.1 함수 f가 임의의 실수 x,y에 대하여

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

를 만족하면 모든 정수 n에 대하여 $f(n)=\{f(1)\}^n$이 성립한다.

(증명) 우선 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=0$ 혹은 $f(x)=1$인 경우에는 자명하다.

$$a=f(1)=\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2>0\ \ (a\neq 0, a\neq 1)$$

라고 하자. 이 때,

$$f(2)=f(1+1)=f(1)f(1)=a^2$$

이 성립한다. 양의 정수 n에 대하여$f(n)=a^n$이라고 가정하자. 그러면

$$f(n+1)=f(n)f(1)=a^n a=a^{n+1}$$

이 성립한다. 그러므로 수학적 귀납법에 의하여 모든 양의 정수 n에 대하여

$f(n) = a^n$이 성립한다.

한편 양의 정수 n에 대하여

$$1 = f(0) = f\{n + (-n)\} = f(n)f(-n)$$

이 성립한다. 그러므로

$$f(-n) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

이 성립한다. 그러므로 모든 정수 n에 대하여 $f(n) = \{f(1)\}^n$이 성립한다.

보조정리 2.2 함수 f가 임의의 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

를 만족하면 모든 유리수 p에 대하여 $f(p) = \{f(1)\}^p$이 성립한다.

(증명) 우선 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = 0$ 혹은 $f(x) = 1$인 경우에는 자명하다. 임의의 양의 정수 n에 대하여 수학적 귀납법을 적용하여

$$f(1) = f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \left\{f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^n$$

이 성립함을 보일 수 있다. 그러므로 $f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1)^{\frac{1}{n}}$이 성립한다. 따라서 양의 정수 m에 대하여 수학적 귀납법을 적용하여

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \{f(1)\}^{\frac{m}{n}}$$

이 성립함을 보일 수 있다. 따라서 모든 유리수 p에 대하여 $f(p) = \{f(1)\}^p$를 만족한다.

보조정리 2.3 양의 실수 a에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$이 성립한다.

(증명) $a=1$이면 자명하다. $a>1$인 경우에 증명하기로 하자. 수열 $\left\{a^{\frac{1}{n}}\right\}$은 단조 감소이고 유계되어 있으므로 수렴한다. $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = A$라 하자. 그리고

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = A^2$$

이 된다. 그리고 수열 $\left\{a^{\frac{1}{n}}\right\} = \left\{a^{\frac{2}{2n}}\right\}$은 수열 $\left\{a^{\frac{2}{n}}\right\}$의 부분수열이 되므로 $A^2 = A$가 되어 $A=1$이 된다.

보조정리 2.4 유리수 수열 $\{r_n\}$이 0으로 수렴하는 경우, 양의 실수 a에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = 1$이 성립한다.

(증명) 보조정리 2.3과 Gauss 정수 개념을 이용하여 증명할 수 있다.

보조정리 2.5 함수 f가 임의의 실수 x, y에 대하여

(i) $f(x+y) = f(x)f(y)$,

(ii) $\exists \lim_{x\to 0} f(x)$

를 만족하면 모든 실수에서 f는 연속이 된다.

(증명) 우선 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=0$ 혹은 $f(x)=1$인 경우에는 자명하다. $f(1)=a$라고 하자. 이 때, $a>0$ $(a\neq 1)$의 조건을 만족한다. $a>1$인 경우에 증명하기로 하자. 보조정리 2.2에 의해 임의의 유리수 p에 대하여 $f(p) = \{f(1)\}^p = a^p$가 성립한다.

한편, $A = \lim_{x \to 0} f(x)$라 하자. 이 때,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(2x) = \lim_{x \to 0} \{f(x)\}^2 = \left\{\lim_{x \to 0} f(x)\right\}^2$$

이 성립한다. 그러므로 $A = A^2$이므로 $A = 0, 1$을 만족한다. 그런데

$$A = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

을 만족하므로

$$\lim_{x \to 0} f(x) = A = 1 = f(0)$$

이 되어 함수 f는 $x = 0$에서 연속이 된다. q를 임의의 고정된 실수라 하자. 이 때,

$$\lim_{x \to q} f(x) = \lim_{\theta \to 0} f(q + \theta) = \lim_{\theta \to 0} f(q) f(\theta) = f(q) \lim_{\theta \to 0} f(\theta) = f(q)$$

이 성립하므로 f는 모든 실수에서 연속이 된다.

참고 2.6 $a > 0$ $(a \neq 1)$인 경우, 지수함수 $g(x) = a^x$을 정의하는 과정은 대부분의 대학 미분적분학 교재에서 제시가 되고 있다. $a > 1$인 경우 [4]에 제시된 지수함수 정의과정을 언급하기로 하자. p가 유리수인 경우에 a^p는 보조정리 2.2에서 표현된 의미와 같다. q가 실수인 경우 $g(q) = a^q$ 정의 과정을 언급해보자. 만약 유리수 p_1, p_2가 $p_1 < p_2$의 조건을 만족하면 $a^{p1} < a^{p2}$가 성립한다. 임의의 실수 q를 고려하자. 유리수의 조밀성에 의해 q에 수렴하는 단조 증가하는 유리수 수열 $\{r_n\}$이 존재한다. 이 때, 수열 $\{a^{r_n} \mid r_n < q\}$은 단조 증가한다. 그리고 q보다 큰 유리수 p에 대하여 수열 $\{a^{r_n}\}$은 유계되어 있다. 그러므로 수열 $\{a^{r_n}\}$은 정리 1.4에 의하여 수렴한다. 이 경우 $\lim_{n \to \infty} a^{r_n} = a^q = g(q)$로 정의하기로 한다. 정의가 잘 되어 있는

지 확인해보자. 유리수 수열 $\{r_n\}$이 q로 수렴한다고 하자. 그러면 $\{r_n\}$은 코쉬수열이 된다. 즉 $\lim_{n,m\to\infty} |r_n - r_m| = 0$ 이 성립한다. 그러므로 수열 $\{a^{r_n}\}$은 보조정리 2.4에 의하여 코쉬수열이 된다. 따라서, 정리 1.9에 의하여 $\{a^{r_n}\}$은 수렴한다. 유리수 수열 $\{r_n\}$, $\{s_n\}$이 실수 q로 수렴한다고 하자. 이 때, 유리수 수열 $\{z_n \mid z_{2n-1} = r_n, z_{2n} = s_n\}$은 정리 1.6에 의하여 q로 수렴한다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty} a^{z_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n} = a^q = g(q)$$

성립하여 모순 없이 정의가 잘 되었다. 이렇게 정의된 지수함수 $g(x) = a^x$는 모든 실수에서 연속임을 증명할 수 있다. 증명과정은 [4]를 참고할 수 있다. 보조정리 2.5에서 제시된 함수 f와 위에서 제시된 지수함수

$$g(x) = a^x \ (a = f(1))$$

는 모든 유리수 p에 대하여

$$f(p) = \{f(1)\}^p = g(p)$$

이 성립하고 f, g가 모든 실수에서 연속이므로 실수의 완비성에 의하여 임의의 실수 q에 대하여 $f(q) = g(q) = a^q \ (a = f(1))$가 성립한다.

보조정리 2.7 상수함수가 아닌 함수 f가 임의의 실수 x, y에 대하여

(i) $f(x+y) = f(x)f(y)$,

(ii) $\exists \lim_{x\to 0} f(x)$

를 만족하면 모든 실수에서 아래로 볼록하다.

(증명) 우선 함수 $f(x) = a^x$는 모든 실수에서 연속이 됨을 알 수 있다. 여기에서 $a = f(1)$이다. 그리고 모든 실수 x, y에 대하여 산술평균과 기하평

균의 관계식에 따라

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=a^{\frac{x+y}{2}} \le \frac{1}{2}a^x+\frac{1}{2}a^y=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$$

이 성립한다.

만약 함수 f가 $(-\infty,\ \infty)$에서 아래로 볼록이 아니라고 가정하자. 이때, 정의 1.15에 의해 a,p,b가 존재하여

$$r(p)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(p-a)+f(a)<f(p)$$

를 만족한다. 여기에서 $a<p<b$이고 $r(x)$는 두 점 $(a,f(a))$, $(b,f(b))$를 연결하는 할선의 방정식이며 아래 식으로

$$r(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-p)+f(a)$$

이 된다. $F(x)=f(x)-r(x)$라 하자. 그리고

$\alpha=max\{t\in[a,p]\mid F(t)=0\}$, $\beta=min\{t\in[p,b]\mid F(t)=0\}$

라 하자. 그러면 $x\in(\alpha,\ \beta)$에 대하여 $F(x)>0$의 조건을 만족한다. 따라서

$$F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-r\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>0$$

과

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>r\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}r(\alpha)+\frac{1}{2}r(\beta)=\frac{1}{2}f(\alpha)+\frac{1}{2}f(\beta)$$

가 되어서 모순이 된다. 그러므로 함수 f는 $(-\infty,\ \infty)$에서 아래로 볼록하다.

정리 2.8 함수 f가 임의의 실수 x,y에 대하여

(i) $f(x+y)=f(x)f(y)$,

(ii) $\exists \lim_{x\to 0} f(x)$

를 만족하는 경우 함수 f는 모든 실수에서 미분가능하다.

(증명) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=0$ 혹은 $f(x)=1$인 경우에는 상수함수이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=0$이므로 자명하다.

함수 $f(x)$가 상수가 아닌 함수라고 하자. 이 때, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=a^x$로 나타낼 수 있다. 여기에서 $f(1)=a$이고 $0<a<1,\ 1<a$이 된다.

우선 $a>1$인 경우에 증명하기로 하자. $y=f(x)=a^x$의 그래프 위의 두 점 $(0,1)$과 (t,a^t)을 연결한 기울기를 $m(t)$라 하자. 여기에서 $t>0$는 충분히 작은 양의 수로 선택할 수 있다. 이 때,

$$m(t)=\frac{a^t-1}{t-0}=\frac{a^t-1}{t}$$

가 된다. 그리고 f가 모든 실수에서 아래로 볼록하기 때문에 정리 1.17에 의하여 $m(t)$는 $(0,\ 1)$에서 증가함수가 되고 유계이다. 그리고 (s,a^s)에서

$$m(s)=\frac{a^s-1}{s-0}=\frac{a^s-1}{s}$$

증가이고 유계이다. 그러므로 정리 1.18에 의하여 $\lim_{t\to 0^+} m(t)$와 $\lim_{s\to 0^-} m(s)$가 존재한다. 또한

$$0<m(-t)=\frac{a^{-t}-1}{-t}=m(t)a^{-t}$$

이 성립한다. 따라서

$$0<m(t)-m(-t)=m(t)-m(t)a^{-t}=m(t)(1-a^{-t})$$

이 성립하고 $\lim_{t\to 0^+} m(t)(1-a^{-t})=0$ 이므로

$$f'(0)=\lim_{t\to 0^+} m(t)=\lim_{t\to 0^-} m(t)$$

이 된다. 그리고 임의의 양수 p에 대하여 $0 < m(-p) < f'(0) < m(p)$이 되어 $f'(0) > 0$이 성립한다. 그리고 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h} = a^x f'(0)$$

가 성립한다. 즉, 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 미분가능하고 증가한다.

$0 < a < 1$인 경우에도 비슷한 방법으로 증명할 수 있다. 즉,

$$f(x) = a^x \ \ (0 < a < 1)$$

는 모든 실수에서 미분가능하고 감소한다.

정리 2.9 임의의 실수 x, y에 대하여 상수가 아닌 함수 f가

(i) $f(x+y) = f(x)f(y)$,

(ii) $\exists \lim_{x\to 0} f(x)$

의 성질을 만족하는 경우 f의 역함수 $f^{-1} = g : (0, \infty) \to (-\infty, \infty)$는 다음의 성질들을 만족한다.

(i) $g(uv) = g(u) + g(v)$

(ii) $g'(u) = \dfrac{1}{f'(0)u}$

(증명) (i) $f(1) = a > 1$인 경우에 증명하기로 하자. 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x) = f'(0)f(x) > 0$$

이므로 $f(x) = a^x$는 $(-\infty, \infty)$에서 증가함수이므로 단사함수가 된다. 그리고 양의 정수 n에 대하여 베르누이의 부등식에 의하여

$$a^n = (1+p)^n \geq 1 + np$$

이 된다. 여기에서 $p = a - 1 > 0$이다. 이 때, $\lim_{n\to\infty} np = \infty$이므로 함수

$y=f(x)=a^x$의 치역은 $(0,\infty)$이 된다. 그러므로 f의 역함수

$$g=f^{-1}\ (0,\infty)\to(-\infty,\ \infty)$$

를 정의할 수 있다. $g(u)=x,\ g(v)=y$라 하자. 이 때, $f(x)=u$, $f(y)=v$가 성립된다. 즉,

$$uv=f(x)f(y)=f(x+y)$$

이 된다. 그러므로 $f^{-1}(uv)=x+y$와 $g(uv)=g(u)+g(v)$이 성립된다.

(ii) 임의의 실수 $u\in(0,\ \infty)$에 대하여 $g(u)=x$라 하자. 이 때, $f(x)=u$가 성립한다. 그러므로 역함수 미분법에 의하여

$$g'(u)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(0)f(x)}=\frac{1}{f'(0)u}$$

이 성립한다.

3. 로그함수의 미분가능성

Toeplitz 의 저서 "The Calculus-A Ginetic Approach, The University of Chicago Press, 1963"의 미분적분학에 관한 역사 발생적 분석에서

$$y=\ln x=\int_1^x\frac{1}{t}\,dt\quad(x>0)$$

로 로그함수를 정의한 후 로그함수의 역함수로 지수함수 $y=e^x$를 정의하고 있다. $y=e^x$의 도함수는 역함수미분법과 $y=\ln x$의 미분법을 이용하여 얻을 수 있다. 또한 $y=x^r$ (r : 실수)의 도함수는 $y=e^{r\ln x}$의 도함수로 구할 수 있다.

W. Rudin은 $E(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$를 정의한 후 $E(x)$의 역함수로 자연로그

함수를 정의하고 있다.

다음에 제시되는 정리를 통해 일반화된 방법으로 로그함수의 미분가능성을 통해 지수함수의 미분가능성을 유도하게 될 것이다.

정리 3.1 상수가 아닌 함수 $f:(0,\infty)\to R$가

(i) 모든 양의 실수 x, y에 대하여 $f(xy)=f(x)+f(y)$를 만족한다.

(ii) $\exists \ \lim_{x\to 1} f(x)$

이 경우 f 는 모든 양의 실수에서 미분가능하고 $f'(x)=\frac{1}{x}f(e)$를 만족한다.

(증명) 우선 $x=1$에서 $f(x)$가 연속임을 보이자. $\lim_{x\to 1} f(x)=A$라 하자. 이때,

$$\lim_{x\to 1} f(x^2)=\lim_{x\to 1}\{f(x)+f(x)\}=2A$$

가 된다. $x^2=t$라 하면

$$2A=\lim_{x\to 1} f(x^2)=\lim_{t\to 1} f(t)=A$$

에서 $A=0$가 된다. 그리고 $f(1)=f(1\cdot 1)=2f(1)$이므로 $f(1)=0$를 만족한다.

그러므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$을 만족하여 $x=1$에서 연속이다. 또한 임의의 양수 a, b에 대하여

$$0=f(1)=f(a\cdot \frac{1}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a}),\ \ f(\frac{1}{a})=-f(a),$$

그리고

$$f(\frac{a}{b})=f(a\cdot \frac{1}{b})=f(a)+f(\frac{1}{b})=f(a)-f(b)$$

가 성립한다.

임의의 양의 실수 $a(\neq 0)$에서 연속임을 보이자.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}f\left(\frac{x}{a}\right)$$

를 만족한다. $x-a=\Theta$, $u=\frac{a+\Theta}{a}$라 하면

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}f\left(\frac{x}{a}\right)=\lim_{\Theta\to 0}f\left(\frac{a+\Theta}{a}\right)=\lim_{u\to 1}f(u)=f(1)=0$$

즉, $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$를 만족한다.

한편, 수학적 귀납법과 f 의 성질에 의해 임의의 유리수 p에 대하여 $f(x^p)=pf(x)$를 만족한다. 그리고 유리수의 조밀성에 의해 임의의 실수 y에 대하여 유리수열 $\{r_n\}$이 존재하여 $\lim_{n\to\infty}r_n=y$를 만족한다. 고정된 양의 수 x에 대하여 수열 $\{x^{r_n}\}$은 수렴한다. 이 때, $\lim_{n\to\infty}x^{r_n}=x^y$로 정의할 수 있다. 따라서

$$f(x^y)=f\left(\lim_{n\to\infty}x^{r_n}\right)=\lim_{n\to\infty}f(x^{r_n})=\lim_{n\to\infty}r_nf(x)=yf(x)$$

를 만족한다.

마지막으로 임의의 양의 실수 x에 대하여 $f'(x)$를 구하자.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+\frac{h}{x})}{h}$$

여기에서 $1+\frac{h}{x}=t$라 하면

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+\frac{h}{x})}{h}=\frac{1}{x}\lim_{t\to 1}f\left(t^{\frac{1}{t-1}}\right)$$

를 만족한다. $t-1=u$라 하면

$$f'(x)=\frac{1}{x}f\left\{\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right\}=\frac{1}{x}f(e)$$

참고 3.2 정리 3.1의 결과로 $x=1$에서 함수 f의 극한의 존재성을 통해 모든 양의 실수에서 함수 f가 모든 양수에서 미분가능함을 알 수 있다.

한편, 만약 $f(e)>0$이면 $(0,\infty)$에서 증가하므로 역함수를 정의할 수 있다. 만약 $f(e)<0$인 경우에도 $(0,\infty)$에서 감소하므로 역함수를 정의할 수 있다.

(i) 만약 $f(e)=1$이면 $f(x)=\ln x$

(ii) 만약 $f(e)>0$이면 $f(x)=\log_a x \quad (a>1)$

(iii) 만약 $f(e)<0$이면 $f(x)=\log_a x \quad (0<a<1)$

참고 3.3 정리 3.1에서 $f(e)>0$인 경우를 고려하자. $f:(0,\infty)\to R$가 전단사함수가 되므로 f 의 역함수 $g:(-\infty,\infty)\to(0,\infty)$를 정의할 수 있다. 이때,

(i) $g(u+v)=g(u)g(v)$, (ii) $g'(u)=\frac{g(u)}{f(e)} \quad (f(x)=u)$

(증명) (i) $g(u)=x,\ g(v)=y$라 하면, $f^{-1}(u)=x,\ f^{-1}(v)=y$가 된다. 즉, $f(x)=u,\ f(y)=v$가 된다. 그러므로

$$u+v=f(x)+f(y)=f(xy)$$

이 성립한다. 따라서

$$g(u+v)=g\circ f(xy)=xy=g(u)g(v)$$

이 된다.

(ii) 역함수 미분법에 의해 $g'(u)=\frac{1}{f'(x)} \quad (f(x)=u)$가 된다. 그러므로

$$g'(u)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{x}{f(e)}=\frac{g(u)}{f(e)}$$

III. 결론

이상에서와 같이 지수함수의 연속성질과 아래로 볼록성질을 이용하여 지수함수의 도함수를 구하는 과정을 연구하였다. 비록 지수함수 $f(x)=a^x$에서 $f'(0)$값의 구체성이 결여되었지만 연속성과-> 볼록성->미분가능성의 자연스러운 개념의 확장을 통해 지수함수의 도함수를 구하였다.

고등학교 미분적분학 교과과정에서 연구내용의 일부분 내용을 기하학적으로 기술하는 것을 고려할 수 있을 것이다. 그리고 대학의 미분적분학 수준에서는 연구내용을 구체적으로 적용하여 지수함수의 도함수를 도입할 수 있을 것이다. 그리고 지수함수의 도함수와 역함수의 도함수 정리를 이용하여 로그함수의 도함수를 구하는 과정을 제시하는 것도 가능하다.

일반적인 조건을 최소화하여 일반 로그함수를 도입하고 로그함수의 도함수를 구하였다. 그리고 도함수 성질을 이용하여 역함수를 유도하고 역함수의 도함수를 구하였다.

참고문헌

[1] 양승갑외 8인, 고등학교 미분과 적분, 금성출판사, 2004

[2] 우정호외 5인, 고등학교 미분과 적분, 대한교과서, 2003

[3] 홍성사, 실력 수학의 정석, 성지출판, 2005

[4] 현진오외 5인, 미분적분학, 청문각, 1995

[5] W. Rudin, Priciples of Mathematical Analysis, McGraw-Hill International Editions(경문사), 1976

[6] O. Toeplitz, The Calculus-A Genetic Approach, The University of Chicago Press

<Abstract>

Differential Possibility of an Exponential Function
and Logarithmic Function

Song Ki Eon

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Jeju, Korea
Supervised by Professor Ko, Youn-Hee

In most calculus texts the differentiability of the exponential function depends on the differentiability of the logarithmic function. We establish the differentiability directly from the convexity of the exponential function without the differentiability of the logarithmic function. To the best of our knowledge we believe that the proof of the main theorem is new.