

格子型 웨이브 디지털 필터의 성능에 관한 연구*

고주홍**, 이용학***

A Study on the Performance of the Lattice Wave Digital Filters*

Joo Hong Ko** and Yong Hak Lee***

ABSTRACT

For one input signal the wave digital filter(WDF) has a merit producing two output signals which are complemented each other. The WDF are described in terms of analog LC filters and WDF are classified into Lattice WDF(LWDF) and Ladder WDF(WDLF) depending on their references. In this paper, firstly theory of the LWDF is summarized and the design procedures are outlined. By introducing examples LWDF is compared with the conventional IIR filters and WDLF. Also the coefficients quantization error are discussed quantitatively. It is verified that the characteristics both transition and stopband attenuation of LWDF are more improved than that of two types.

I. 서 론

신호전송과 같은 필터의 응용부분에 있어서 필터 응답의 신속성과 정확성은 이용자의 당연한 요구 과제일 것이다. 이같은 기능을 위한 검토는 여러 방법으로 이루어지고 있다(Fettweis, 1986, 1974). 디지털 필터를 구현함에 있어서 필터응답

의 산출시간을 최소화 하는 한 방법으로 유한어장 고정 소수점 연산을 주로 이용한다. 그러나 유한어장 연산을 하기 위해서는 필터계수를 양자화 해야 하고 이때 나타나는 양자화 오차는 필터의 전달특성을 변화시키고 이로 인해 응답의 정확도가 저하된다.

* 본 연구는 1994년도 제주대학교 발전기금에 의해 이루어졌음.

** 대학원 통신공학과

*** 통신공학과 교수

무손실 4단자 필터의 기능을 발휘하도록 Fettweis에 의해 제한된 웨이브 디지털필터 (Wave Digital Filters : WDF)는 전달 특성이 필터의 계수값의 변화와 무관하다고 알려지고 있다. 아날로그 전달함수를 먼저 구한 다음 디지털 전달함수로의 변환이 디지털 필터 설계의 일반적 순서임에 반해 WDF의 설계는 아날로그 소자를 직접 웨이브 디지털화한 다음 이들을 직렬 및 병렬의 어댑터로 연결하는 것이 차이점이라 할 수 있다. WDF의 대표적인 두 형태는 Wave Digital Ladder Filter (WDLF)와 Wave Digital Lattice Filter (LWDF)이다. 이들은 다같은 LC 필터의 변환으로서 전자는 사다리꼴 아날로그 LC 필터로부터 그리고 후자는 아날로그 대칭 LC 필터로부터 유도된다. WDF의 단자는 어느 경우든 직렬 및 병렬 어댑터(Adaptor)에 의해 연결된다.

WDF에서 어댑터는 회로 연결 즉 직렬 및 병렬 연결부분에서 입사파 및 반사파의 흐름을 나타낸다. WDF의 구성은 일반 형태의 디지털 필터에 비해 많은 수의 가산기를 필요로 하는바 이는 필터의 실현을 복잡하게 하고 pipeline이 쉽지 않으며 적응 필터링의 부적합이 문제점으로 되고 있다. 그러나 낮은 감수계수 특성과 기존의 필터에 비해 차수가 적다는 것이 주 특징이라 할 수 있다. (李鎔鶴 등, 1990)

WDF의 발표 이래 Sedlmeyer와 Fettweis (1973)는 아날로그 LC사다리형 필터로 WDF를 실현하였고, Wegener (1979)는 승산기와 가산기 수를 줄인 WDF를 구하였으며 Gazsi(1985)는 LWDF 설계 공식을 직접 유도하여 어댑터를 최적화 하였다.

본 논문에서는 필터 계수를 고정 소숫점으로 양자화 할 때 유한어장의 비트수의 변화에 따른 격자형 WDF의 전달특성 변화를 검토하였다. 이론의

타당성을 입증하기 위하여 종래의 IIR 지역통과 필터와 상호 비교하였으며, 시뮬레이션을 통하여 감도 특성을 확인하였다.

II. 격자형 아날로그 필터를 기초로 한 웨이브 디지털 필터

II-1. 산란행렬에 의한 웨이브 변수 표현

Fig. 1. 과 같은 4 단자망의 산란행렬에 의한

$$\lambda = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (1)$$

이고, 입사파 및 반사파의 정의는 다음과 같다. (Antoniu, 1979)

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

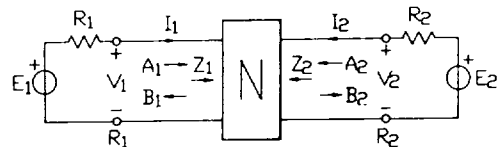


Fig. 1. A two-port N with port resistances R_1 and R_2 .

식 (2)의 대칭 격자형 구조는 Fig. 2와 같고

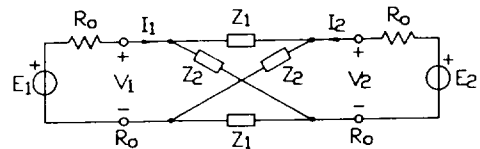


Fig. 2. Lattice reference filter consisting of canonic impedance.

대칭 구조로 인해 Fig. 1의 단자저항 $R_1 = R_2 = R_0$ 이 되어 다음이 성립한다. (Fettweis, 1972, 1984 ; Wegener, 1978)

$$S_{11} = S_{22}, \quad S_{21} = S_{12} \quad (3)$$

식(3)의 S_{11} 과 S_{21} 은 다음과 같은 물리적 의미를 지니므로

$$S_{11} = \left. \frac{B_1}{A_1} \right|_{A_2=0}, \quad S_{21} = \left. \frac{B_2}{A_1} \right|_{A_2=0} \quad (4)$$

S_{11} 과 S_{21} 은 전달함수가 되고 Feldtkeller식에 의하여 다음 조건을 만족하므로

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \quad (5)$$

따라서 S_1 과 S_2 는 서로 상보관계에 있게 된다. 회로망 N의 canonic 격자 임피던스를 Z_1 및 Z_2 라 하면 S_1 과 S_2 는 다음과 같게 된다.

$$S_1 = \frac{Z_1 - R}{Z_1 + R}, \quad S_2 = \frac{Z_2 - R}{Z_2 + R} \quad (6)$$

여기서

$$S_1 = S_{11} - S_{21}, \quad S_2 = S_{11} + S_{21} \quad (7)$$

식(7)에 의하여

$$2B_1 = S_1(A_1 - A_2) + S_2(A_1 + A_2) \quad (8)$$

$$2B_2 = S_1(A_2 - A_1) + S_2(A_1 + A_2) \quad (9)$$

윗 식에 의한 LWDF의 웨이브 흐름도를 Fig. 3과 같이 나타낼 수 있으며 $A_2=0$ 이면 식(9)는 $A_2=B_2=A_1$ 이므로 간략화한 웨이브 흐름도는 Fig. 4와 같이 간단히 된다.

$$B_2 = \frac{1}{2} (S_2 - S_1) A_1 \quad (10a)$$

식(8)에서 입력 $A_2=0$ 이면 출력 B_1 은

$$B_1 = \frac{1}{2} (S_1 + S_2) A_1 \quad (10b)$$

LWDF의 송산기와 지연기는 아날로그 필터의 차수와 동일하므로 WDLF에 비해 소자수를 줄일 수 있고 구조가 간단해 질 수 있다.

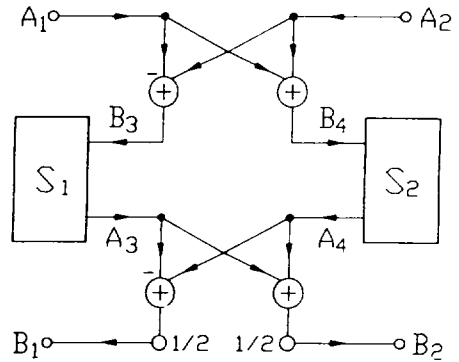


Fig. 3. LWDF wave flow diagram of Fig. 2.

식(10)의 웨이브 흐름은 Fig. 4에서 “-” 부호를 삭제하면 된다.

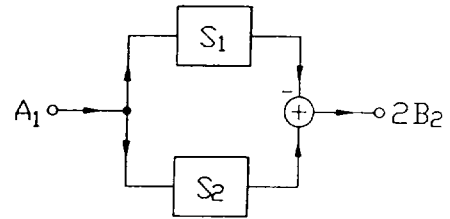
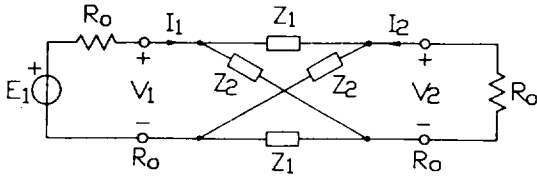


Fig. 4. Simplified wave-flow diagram of Fig. 3.

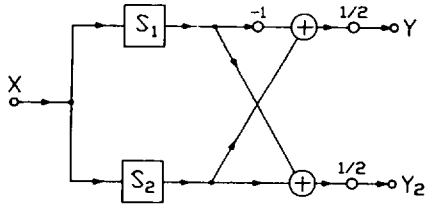
II-2. 설계 방법

식(6)의 Z_1 과 Z_2 가 무손실 리액턴스 소자이고 입력 $A_2=0$ 일때의 격자형 기준필터는 Fig. 5(a)와 같고, 그때 S_1 과 S_2 는 전역통과 함수가 되므로 LWDF의 웨이브 흐름을 S_1 과 S_2 로 Fig. 5(b)와 같이 나타낼 수 있다.

입력 A_1 은 Fig. 5(b)에 의해 B_1 은 저역통과로 나타나고, B_2 는 고역통과 신호로 나타난다. 즉 LWDF는 S_{21} 과 S_{11} 을 모두 전달함수로 사용하고 있고 2가지 경로는 서로 상보관계이므로 S_{21} 이 저역통과 특성이면 S_{11} 은 고역통과 특성을 갖는다.



(a)



(b)

Fig. 5. (a) LWDF reference filter when $A_2=0$
(b) Block diagram of LWDF

LWDF은 Fig. 3의 S_1 과 S_2 를 4단자 어댑터로 실현시킬 수 있다. 어댑터에 포함된 승산기 계수를 구하기 위하여 S_1 과 S_2 를 Hurwitz 다항식 $g_1(\Psi)$ 와 $g_2(\Psi)$ 로 나타내면

$$S_1 = \frac{g_1(-\Psi)}{g_1(\Psi)}, \quad S_2 = \frac{g_2(-\Psi)}{g_2(\Psi)} \quad (11)$$

여기서 Hurwitz 다항식 $g(\Psi)$ 의 일반형태는 다음과 같다.

$$g(\Psi) = (\Psi + B_0) \prod_{i=1}^{(N-1)/2} (\Psi^2 + A_i\Psi + B_i) \quad (12)$$

식(12)로부터 식(11)의 $g_1(\Psi)$ 와 $g_2(\Psi)$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g_1(\Psi) = (\Psi + B_0) \prod_{i=\text{even}}^{(N-1)/2} (\Psi^2 + A_i\Psi + B_i) \quad (13)$$

$$g_2(\Psi) = (\Psi + B_0) \prod_{i=\text{odd}}^{(N-1)/2} (\Psi^2 + A_i\Psi + B_i) \quad (14)$$

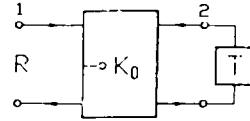
식(12)로부터 어댑터가 1차일 때는, 즉 $i=1$ 이면 $(\Psi + B_0)$ 이므로 Fig. 6(a)와 같은 1차 어댑터가 되고 $i=2$ 인 2차식일 경우는 $(\Psi^2 + A_i\Psi + B_i)$ 이 되어 Fig. 6(b)의 2차 어댑터가 된다.

1차 어댑터의 전달함수 H_1 은 식(11)에 의해

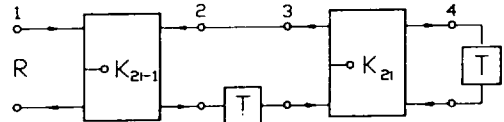
$$H_1 = \frac{-\Psi + B_0}{\Psi + B_0} \quad (15)$$

여기서 식(5)를 대입하면

$$H_1 = \frac{-K_0 + z^{-1}}{1 - K_0 z^{-1}} \quad (16)$$



(a)



(b)

Fig. 6. (a) Block Diagram of adaptor. (1st order)
(b) Block Diagram of adaptor. (2nd order)

따라서 식(16)을 지연기 T와 승산기 계수 K_0 에 의한 식(16)의 LWDF 실현은 Fig. 6(a)와 같이 4단자 어댑터로 이루어진다. 2차 어댑터의 전달함수 H_2 는

$$H_2 = \frac{\Psi^2 - A_i\Psi + B_i}{\Psi^2 + A_i\Psi + B_i} \quad (18)$$

식(18)에 식(5)를 대입하면

$$H_2 = \frac{-K_{2i-1} + \frac{2B_{i-2}}{A_i + B_i = 1} z^{-1} + z^{-2}}{1 + \frac{2B_{i-2}}{A_i + B_i = 1} z^{-1} - K_{2i-1} z^{-2}} \quad (19)$$

여기서

$$K_{2i-1} = \frac{A_i - B_i - 1}{A_i + B_i + 1} \quad (20)$$

단자 번호 3-4의 K_{2i} 구간형태는 구간 1-2의 K_0 구간형태와 동일하므로 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$K_{2i} = \frac{1 - B_i}{1 + B_i} \quad (21)$$

따라서 구간의 전달함수는

$$H_{2K_i} = \frac{-K_{2i} + z^{-1}}{1 - K_{2i} z^{-1}} \quad (22)$$

이상에 의한 Fig. 3의 LWDF 구성의 일반형태는 Fig. 7과 같다. 입력과 출력의 "D" 표시는 부하저항이다.

식(19)를 식(22)로 표현하면

$$H_2 = \frac{-K_{2i-1} + S_{K_i} z^{-1}}{1 - K_{2i-1} S_{K_i} z^{-1}} \quad (23)$$

계수값 K_0 , K_{2i} 및 K_{2i-1} 은 다음의 관계를 만족해야 하므로

$$-1 < K_0, K_{2i}, K_{2i-1} < 1 \quad (24)$$

계수값에 따른 식(16), (22), (23)의 최적화는 Fig. 8과 같고 각각의 전달함수를 $H_a(z) - H_e(z)$ 라 하면

$$H_a(z) = \frac{-(1-\gamma) + z^{-1}H}{1 - (1-\gamma) * z^{-1}H} \quad (25)$$

$$H_e(z) = \frac{-\gamma + z^{-1}H}{1 - \gamma z^{-1}H} \quad (26)$$

$$H_c(z) = z^{-1}H \quad (27)$$

$$H_d(z) = \frac{\gamma + z^{-1}H}{1 + \gamma z^{-1}H} \quad (28)$$

$$H_e(z) = \frac{(1-\gamma) + z^{-1}H}{1 + (1-\gamma) * z^{-1}H} \quad (29)$$

여기서 γ 는 식(24)의 계수값 범위에 따라 최적화된 신호흐름의 승산기 계수이며 H 는 Fig. 6(a)일 경우 $H=1$ 이고 Fig. 6(b)에서는 단자 4의 전달함수가 되며 쌍가역성인 경우는 $H=z^{-1}$ 이 된다.

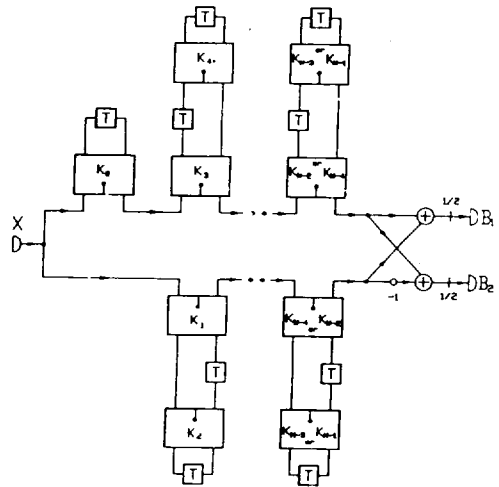


Fig. 7. Constructed LWDF of Fig. 3.

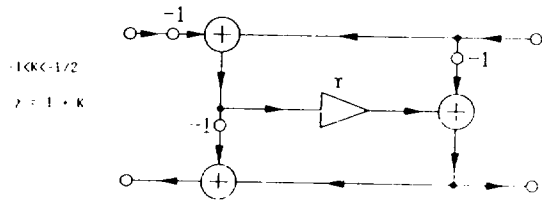


Fig. 8. Optimized signal flow diagram of 2-port adaptor

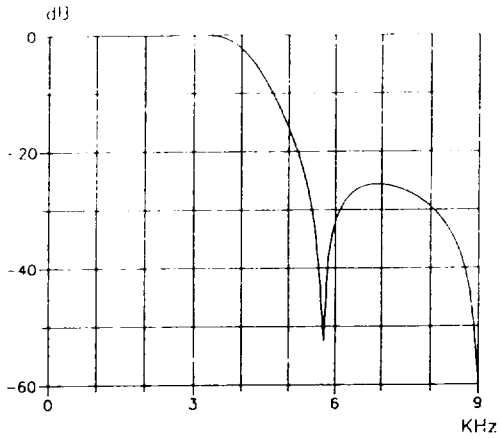


Fig. 11. Characteristic response of lowpass LWDF

III. 시뮬레이션 및 고찰

LWDF 및 WDLF와 캐스케이드 디지털 필터의 특성을 서로 비교 검토하기 위해 먼저 식(4)를 쌍선형 변환하면 디지털 전달함수 $H_D(z)$ 는 다음과 같다.

$$H_D(z) = A \cdot \frac{1+Fz^{-1}}{1+Bz^{-1}} \cdot \frac{1+Ez^{-1}+Fz^{-2}}{1+Dz^{-1}+Cz^{-2}} \quad (32)$$

여기서

$$A = 0.15844, \quad B = -0.23175, \quad C = 0.54862, \\ D = -0.32732, \quad E = 0.96101, \quad F = 1.0$$

이것을 그림으로 나타내면 Fig. 12과 같고

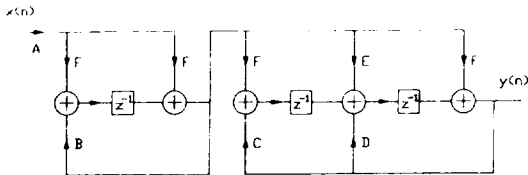


Fig. 12. cascaded digital filter.

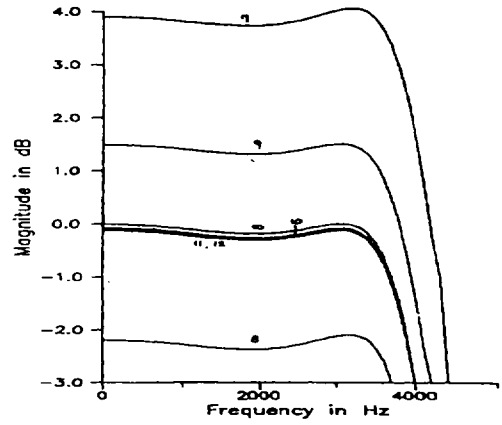


Fig. 13. Characteristic response in pass-band(cascade)

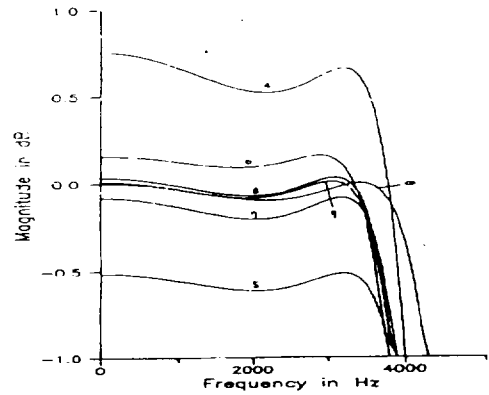


Fig. 14. Characteristic response of passband(WDLF).

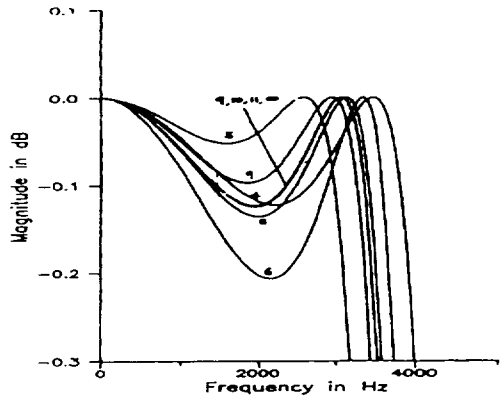


Fig. 15. Characteristic response of passband(LWDF)

캐스케이드, WDLE 및 LWDF 필터의 계수값을 먼저 고정 소숫점으로 나타낸 다음 유한어장의 변화에 따른 통과대역특성은 각각 Fig. 13, 14, 15과 같다. 그림에서 종축은 식(5)를 나타내며 동일한 비트에서 응답크기를 비교할 수 있다.

이 그림으로부터 양자화 길이가 캐스케이드형은 10비트 이상, WDLF형은 7비트 이상, LWDF형은 4비트 이상에서 주어진 조건을 각각 만족하므로 세 형태의 필터 중 LWDF가 계수 감도특성이 제일

낮다고 결론 지을 수 있다. Fig. 13, 14 및 15의 주파수 응답을 비트에 따라 나타내면 각각 Table 2, 3 및 4와 같고 이들 Table로부터 LWDF 및 WDLF의 오차는 종래 캐스케이드 필터의 비해 7비트 이상에서 오차는 더 적고 6비트 이하일 때도 캐스케이드방법보다 양호한 특성을 나타내고 있다. 따라서 LWDF의 감도 특성은 캐스케이드 필터보다 낮고 아울러 캐스케이드보다 짧은 유한 어장으로도 실현 가능함을 알 수 있다.

Table 2. Frequency response vs Quantized cascade filter coefficients

	Bits (Cascade)							
	4	5	6	7	8	9	10	11
M_{max} (dB)	-	-	-	4.051	-2.092	1.495	-0.722	-0.106
Γ_{max} (dB)	-	-	-	0.322	0.276	0.186	0.199	0.206
Γ_{err} (%)	-	-	-	78.6	53.2	3.14	10.9	14.8
a (dB)	-	-	-	3.98	-2.2	1.31	-0.272	-0.313
b (dB)	-	-	-	-23.8	-32.5	-27.6	-20.2	-29.5

M_{max} : 통과대역 최대크기

Γ_{max} : 통과대역 최대리플

Γ_{err} : 통과대역 최대오차 = $\frac{\Gamma_p - \Gamma_{max}}{\Gamma_p} \times 100$

a : f_p 에서의 리플

b : f_s 에서의 감쇄

Table 3. Frequency response vs Quantized WDLF filter coefficients

	Bits (WDLF)							
	4	5	6	7	8	9	10	11
M_{max} (dB)	0.756	-0.514	0.158	-0.083	0.033	0.010	0.0003	0.005
Γ_{max} (dB)	0.237	0.099	0.233	0.122	0.105	0.111	0.099	0.102
Γ_{err} (%)	31.53	-44.86	29.67	-32.01	-41.39	-38.30	-44.70	-43.47
a (dB)	0.615	-0.541	-0.076	-0.129	-0.062	-0.101	-0.093	-0.097
b (dB)	-25.7	-24.3	-31.4	-27.4	-29.2	-29.2	-28.7	-28.9

Table 4. Frequency response vs Quantized LWDF filter coefficients

	Bits(WDLF)							
	4	5	6	7	8	9	10	11
M_{max} (dB)	0	0	0	0	0	0	0	0
r_{max} (dB)	0.1227	0.748	0.206	0.223	0.135	0.1245	0.1245	0.1248
r_{err} (%)	-31.85	316	14.81	24	-24.8	-30.9	-30.9	-30.7
a (dB)	0.0026	-7.488	-0.031	-0.223	-0.075	-0.122	-0.122	-0.124
b (dB)	-13.75	-31.34	-26.59	-32.8	-31	-35.7	-35.7	-34.2

이들 Table로부터 LWDF의 WDLF의 오차는 종래 캐스케이드 필터에 비해 7비트 이상에서 오차가 더 적고 6비트 이하일 때는 캐스케이드 방법보다 양호한 특성을 나타내고 있다. 따라서 LWDF의 감도특성은 캐스케이드 필터보다 낮고 아울러 캐스케이드보다 짧은 유한어장으로도 실현 가능함을 알 수 있다.

한편 동일한 사양 하에서 캐스케이드 필터와 WDLF, LWDF간의 소자 수 비교는 Table 5와 같고 Table 5로부터 LWDF의 승산기 수는 가장 적고 지연기 수는 캐스케이드와 같으나 WDLF보다는 적으며 가산기 수는 캐스케이드보다 많고 WDLF보다 적음을 알 수 있다.

Table 5. Comparison of 3-order digital filter.

Type	Multiplier	Adder	Delayer
Cascade	5	5	3
WDLF	5	16	4
LWDF	3	9	3

결론

본 논문에서는 산란행렬에 의한 웨이브법을 적용하여 격자형 아날로그 필터를 기준으로 한 웨이브 디지털 필터(LWDF)를 실현하였으며 필터 계수를 고정 소숫점으로 양자화 할 때 유한어장의 비트 수의 변화에 따른 LWDF의 전달특성 변화를 검토한 결과 LWDF는 사다리형 아날로그 필터를 기준으로 한 WDF(WDLF) 및 종래의 캐스케이드형 IIR 디지털 필터에 비해 적은 유한어장의 비트로 디지털 필터의 실현이 가능함을 알 수 있었다. 그리고 디지털 필터 계수의 유한 어장에 따른 양자화 오차가 다른 것에 비해 적었으며 감도가 낮아 적은 수의 소자로 디지털 필터의 구성이 가능함을 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

1. A. Fettweis, "Wave Digital Filters : Theory and Practice," IEEE proceedings, vol. 74, No. 2, pp.272-372, Feb. 1986.
2. A. Fettweis, H. Levin, and A. Sedlmeyer, "Wave digital lattice filters," Int. J. Circuit Theory Appl., vol. 2, pp.203-211, June 1974.
3. 李鎔鶴, 劉守鉉, 金在功, "Wave Digital Filter의 성능에 관한 研究," 韓國通信學會 論文誌, 第15卷, 第6號, pp.526-534 (1990. 6).
4. A. Sedlmeyer and A. Fettweis, "Digital filters with true ladder configuration," Int. J. Circuit Theory Appl., vol. 1, pp.5-10, Mar. 1973.
5. W. Wegener, "Wave digital directional filters with reduced number of multipliers and adders," Arch. Elektr. Ubertr., Vol. 33, pp.239-243, June 1979.
6. L. Gazsi, "Explicit formulas for Lattice Wave Digital Filters," IEEE Trans., vol. CAS-32, pp.68-88, Jan. 1985.
7. V. Beievich, "Classical Network Theory," San Francisco. CA : Holden Day 1968.
8. A. Antoniou, "Digital Filters : Analysis and Design," New -York, NY : McGraw - Hill, 1979.
9. W. Wegener, "On the design of wave digital lattice filters with short coefficient word lengths and optimal dynamic range," IEEE Trans. Circuits Sys., Vol. CAS-25, pp. 1091-1098, Dec. 1978.
10. A. Fettweis, "Scattering properties of wave digital filters," in Proc. Florence Sem. on Digital Filtering, Florence, Italy : Teorema Edizioni, pp.1-8, Sept. 1972.
11. A. Fettweis, "On Discrete Scattering Hurwitz Polynomials," Int. J. Circuit Theory, Jun. 1984.