석사학위청구논문

정수체계의 구조에 관한 연구

지도교수 양 성 호

제주대학교 교육대학원

수학교육전공

김 용 준

1993년 8월

정수체계의 구조에 관한 연구

지도교수 양 성 호

이 논문을 교육학 석사학위 논문으로 제출함

1993년 6 월 일

제주대학교 교육대학원 수학교육전공

제출자 김 용 준

김용준의 교육학 석사학위 논문을 인준함

1993년 7 월 일

심사위원장 고 봉 수

심 사 위 원 송 석 준

심 사 위 원 양 성 호

<초 록>

정수 체계의 구조에 관한 연구

김 용 준

제주대학교 교육대학원 수학교육전공

지도교수 양 성 호

본 연구에서는 자연수 체계에서 정수 체계로 확장하여 직관적으로 받아들이고 있는 기본적인 성질들을 논리적으로 증명하고, 정수 체계가 순서정역의 대수적 구조에 대한 여러가지 성질들을 갖고 있음을 증명한다.

그리고, 순서정역으로부터 새롭게 도입된 정수체계와 자연수 체계로부터 도입된 정수 체계는 서로 동형임을 증명하여 정수 체계의 유일성을 밝힌다.

목 차

I. 서 론

수의 개념은 우리의 실생활에 없어서는 안될 중요한 개념중의 하나다. 그러나 수의 정의가 무엇인지를 묻는다면 수와 숫자를 구분하여 생각할 때 그 대답은 거의 불가능하다. 수는 추상적인 개념인 데에 그 어려움이 있다. 여기서 우리는 수(Numbers)와 숫자(Numerals)를 명확히 구분할 필요가 있다. 빨간색이 추상적인 개념이듯이 수 역시 쉽게 정의할 수 없는 추상적인 개념이다. 그러나 숫자는 수를 나타내는 기호에 불과하다. 기호 자체를 수라고 할 수 없듯이 숫자가 곧 수라고 말할 수는 없다. 종이 위에 그려 놓은 어떤 표시가 숫자는 될 수 있지만 수는 아니다. 이러한 숫자는 여러가지 방법으로 표시할 수 있다. 숫자의 표시방법이 무엇이든 관계없이 수는 그 본연의 성질을 갖고 있다. 그러한 성질을 어떤 숫자로 표시하는 것이다. 수는 인간의 존재와는 별도로 존재하는 것이고 오직 인간에 의하여 그 수가 발견된 것으로 한 때는 생각되어 왔었으나 적어도 숫자는 물론 수는 인간의 창조물이라는 것이 일반적인 현대적 견해이다. 수학자는 새로운 수학을 발견한다라기 보다 창조하는 것이라는 것이 오늘날의 견해이다.

우리의 실생활에 널리 사용되는 수는 실수의 체계이다. 그런데 우리는 그러한 실수의 체계가 실제로 존재하고 있으며 그 실수들의 성질이 모두 당연한 사실로 단순하게 받아 들여지고 있다. 그러나 실수 체계의 존재성과 막연히 사실일 것이라고 믿고 있는 실수의 성질들을 논리적인 추론에 의하여 증명을 한다는 것은 매우 중요한 일이다. 더우기 수학교육에 있어서 실수의 존재성과 실수의 여러 성질들이 당연한

사실로 또는 인정하지 않으면 안되는 공리로 취급되고 있음을 우리는 중시하지 않으면 안되겠다. 본 연구에서는 수의 체계에서 가장 기본적인 자연수의 체계를 바탕으로 하여 정수의 체계를 이론적으로 전개하여 실수의 체계로 확장하는 데에 기초자료로 활용하는 동시에 수의 체계를 효과적으로 지도하는데 기초 자료로 활용하고자 한다.

물건의 개수를 센다(Counting)든가, 순서를 붙일(Ordering)때 기본이 되는 수인 $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 를 양의 정수 또는 자연수(Natural Numbers)라 한다. 1 은 최소의 자연수이고, 1 다음의 수는 2 이다. 그리고 자연수의 체계에서는 합과 곱의 연산이 정의 되고 그들 사이에서 여러가지 성질들을 갖게 된다. 그런데 자연수들끼리의 연산 $2 + 5 = 7$, $5 - 2 = 3$, $4 \times 7 = 28$ 등은 자유롭게 계산할 수 있으나, $2 - 5$, $4 - 4$ 들은 계산할 수 없게 된다. 즉, 자연수체계는 덧셈과 곱셈에 대해서 닫혀 있지만, 덧셈의 역연산인 뺄셈에 대해서는 닫혀 있지 않다는 결점을 갖고 있다. 따라서 뺄셈도 자유롭게 할 수 있는 정수체계로의 확장이 필요하다.

본 논문은 정수의 체계를 다음과 같이 전개하였다.
제 2 장에서 자연수 체계를 도입하여 증명없이 그 성질들을 언급하고 또 기본적인 대수적 구조(Algebraic Structure)에 관하여 소개하였다.
제 3 장에서는 자연수 체계에서 정수 체계로 확장하여 직관적으로 받아들이고 있는 기본적인 성질들을 논리적으로 증명하고, 정수체계가 제 2 장에서 언급한 순서 정역의 대수적 구조에 대한 여러가지 성질들을 갖고 있음을 증명하였다.
제 4 장에서는 순서정역(Ordered Integral Domain)으로부터 새로이 정수를 도입하였다.
제 5 장에서는 제 3 장에서 확장한 정수체계와 제 4 장에서 순서정역으로부터 도입된 정수가 서로 동형(Isomorphic)임을 증명하여 정수체계의 유일성을 밝혔다.

Ⅱ. 자연수의 체계와 기본적인 정리

여기서는 제 3 장을 전개하는 데 기초가 되는 기본개념들을 소개한다. 대부분이 잘 알고 있는 내용이기 때문에 정리 또는 요약을 해서 언급을 하고자 한다.
자연수는 두 가지의 기본적인 유용성을 가지고 있다. 즉 셈(Counting) 과 순서를 붙이는 것(Ordering)이다. 이러한 자연수를 오늘날 가장 널리 사용되고 있는 아라비아숫자로 표시하여 어떤 유한 대상들과 하나씩 일대일 대응시키면서 하나, 둘 등과 같이 세어 나갈 수 있고 또한 첫째, 둘째 등으로 순서를 붙여 나갈 수 있다. 이러한 두 가지 관점으로부터 집합론과 명제논리만을 기본으로 하여 자연수의 체계를 도입할 수 있다.

(정의2.1) (페아노 체계 : Peano System)
집합 P 와 P 에 속하는 특정한 원소 1 과 P 에서 P 로의 함수 S 가 다음의 세 조건을 만족할 때 페아노 체계라 하고 기호 $(P, S, 1)$ 로 나타낸다.

P1. 1 은 P의 어떤 원소 x 의 후자(Successor), 즉 $S(x)$ 가 될 수 없다.

P2. P 의 서로 다른 원소는 각기 다른 후자를 갖는다.

P3. P 는 수학적 귀납법이 만족된다.

(즉 , $(\forall A)([A \subseteq P \wedge 1 \in A \wedge (\forall x)(x \in A \Rightarrow S(x) \in A)] \Rightarrow P = A.)$)

(정리2.2) (반복정리 : Iteration Theorem)
$(P, S, 1)$ 을 페아노 체계라 하고 W 를 임의의 집합이라 하자. $c \in W$ 이고

$g : W \to W$ 라 하면 다음의 성질을 갖는 함수 $F : P \to W$ 는 유일하게 존재한다.

1. $F(1) = c$

2. 모든 원소 x 에 대하여 $F(S(x)) = g(F(x))$ 이다.

위의 반복정리에 의하면 페아노 체계의 존재성을 가정할 때 유일하게 존재함을 보일 수 있다. 이렇게 유일하게 존재하는 페아노 체계 $(P, S, 1)$ 을 자연수 체계라 하면 P 의 원소들을 자연수(Natural Number) 라 한다. 그리고 그 자연수들을

$S(1) = 2, \quad S(2) = 3, \quad S(3) = 4, \cdots$ 등으로 나타내기로 한다.

다음에는 자연수에서의 이항연산 $+$ 와 $\times$ 를 도입하고 그 성질들을 소개하고자 한다.

(정리2.3) (합과 곱의 존재성)

다음과 같은 성질을 갖는 P 위에서의 이항연산 $+$ 와 $\times$ 는 유일하게 존재한다. 그리고 $+$ 와 $\times$ 를 각각 합, 곱이라 부르기로 한다.

1. $\forall x \in P \quad x + 1 = S(x)$

2. $\forall x, y \in P \quad x + S(y) = S(x + y)$

3. $\forall x \in P \quad x \times 1 = x$

4. $\forall x, y \in P \quad x \times S(y) = (x \times y) + x$

(예2.4) a. $4 + 3 = 4 + S(2) = S(4 + 2) = S(4 + S(1)) = S(S(4 + 1))$

$= S(S(S(4))) = S(S(5)) = S(6) = 7$

b. $4 \times 3 = 4 \times S(2) = (4 \times 2) + 4 = (4 \times S(1)) + 4$

$= ((4 \times 1) + 4) + 4 = (4 + 4) + 4 = 8 + 4 = 12$

(정리2.5) (자연수에서 합과 곱에 대한 성질)

모든 자연수 x, y, z 에 대하여 다음의 성질들이 성립한다.

a. $x + (y + z) = (x + y) + z$

b. $x + y = y + x$

c. $y \neq x + y$

d. $x = y$ 이거나 $x = y + u$ 이거나 $y = x + v$ 중 어느 하나의

경우이다. (적당한 자연수 u, v)

e. $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$

f. $x \times y = y \times x$

g. $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$

h. $x \times z = y \times z \Rightarrow x = y$

(정의2.6) (자연수에서의 순서관계)

서로 다른 임의의 원소 $x, y \in P$ 에 대해서 다음과 같이 정의한다.

$$x < y \Leftrightarrow (\exists z)\ (y = x + z)$$

(정리2.7) (< 의 성질)

임의의 원소 $x, y, z \in P$ 에 대하여 다음의 성질들이 성립한다.

a. $x < x + y$

b. $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$

c. $x < y \Leftrightarrow x \times z < y \times z$

이제부터는 일반적인 대수적 구조에 대하여 요약, 정리하고자 한다.

(정의2.8) 집합 R 과 R 위에서 정의된 두 이항연산 $+$, $\times$ 가 다음 조건들을 만족하면 $(R, +, \times)$ 를 환(Ring)이라 한다.

R1. $x + (y + z) = (x + y) + z$ 결합성(assoiativity)

R2. $x + y = y + x$ 가환성(commutativity)

R3. 다음을 만족하는 $0 \in R$ 이 유일하게 존재한다.

3a. $(\forall x)(x + 0 = x)$ (여기에서 0 : 영원)

3b. $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$ (y 를 $-x$ 로 나타낸다.)

R4. $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$ ($\times$ 의 결합성)

R5. a. $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$

b. $(y + z) \times x = (y \times x) + (z \times x)$ 분배성(distributivity)

(정의2.9) 환 $(R, +, \times)$ 가 다음 조건을 만족하면 R 을 단위원을 갖는 환 (Ring with Unit Element) 이라 한다.

R6. $(\forall x)(\exists 1 \in R)(x = 1 \times x = x \times 1)$

여기에서 1 은 유일하게 존재하고, 1을 R 의 단위원이라 한다.

(정의2.10) 환 $(R, +, \times)$ 이 다음 조건을 만족할 때, R 을 가환환 (Commutative Ring)이라 한다.

R7. $x \times y = y \times x$ $(\forall x, y \in R)$

(정리2.11) (환에 관한 성질)

a. $x + y = x + z \Longrightarrow y = z$ (소거법칙)

b. $-0 = 0$

c. $-(-x) = x$

d. $-x = -y \Longrightarrow x = y$

e. $-(x + y) = (-x) + (-y)$

f. $x + y = x \Longrightarrow y = 0$

g. $x \times 0 = 0 = 0 \times x$

h. $-(x \times y) = (-x) \times y = x \times (-y)$

i. $(-x) \times (-y) = x \times y$

(정의2.12) $(R, +, \times)$ 을 임의의 환이라 할때, $x - y = x + (-y)$ 로 나타내기로 하고, 연산 $-$ 를 뺄셈(Subtraction)이라 부르기로 한다.

(정리2.13) (뺄셈에 관한 성질)

a. $x - x = 0$

b. $-(x - y) = y - x$

c. $x - y = 0 \Longleftrightarrow x = y$

d. $x \times (y - z) = (x \times y) - (x \times z)$

$(y - z) \times x = (y \times x) - (z \times x)$

e. R 을 단위원 1 을 갖는 환이라 하면, $(-1) \times x = -x = x \times (-1)$ 이고, $(-1) \times (-1) = 1$ 이다. 결국 $(-1) \times (-1) = 1 \times 1 = 1$ 이다.

(정의2.14) 단위원을 갖는 가환환(Commutative Ring with Unit Element) $(R,+,\times)$ 가 다음 조건을 만족할 때, R 을 정역(Integral Domain) 이라 한다.

R8. 모든 x, y 에 대하여

$[x \neq 0 \wedge y \neq 0] \Longrightarrow x \times y \neq 0$ (즉, $x \times y = 0 \Longrightarrow [x = 0 \vee y = 0]$ 이다.)

(주의2.15) 환 R 의 원소 $x \neq 0$ 에 대하여 $x \times y = 0$ 을 만족하는 R 의 원소 $y \neq 0$ 가 존재할 때, x 를 영인자(Zero Divisor) 라 부른다.

(정리2.16) 단위원을 갖는 가환환 $(R,+,\times)$ 에 대하여 (정의$R8$) 은 다음 성질과 동치개념이다.

$R8'$. 모든 x, y, z 에 대하여

$[x \times y = x \times z \ \wedge \ x \neq 0] \Longrightarrow y = z$ ($\times$ 에 관한 소거법칙)

(정의2.17) 정역 $(R,+,\times)$ 와 R 에서의 이항관계 $<$ 가 다음 조건을 만족하면 $(R,+,\times,<)$ 을 순서정역(Ordered Integral Domain) 이라 한다.

O1. $x \not< x$

O2. $[x < y \wedge y < z] \Rightarrow x < z$

O3. $x < y \ \vee \ x = y \ \vee \ y < x$

O4. $x < y \Rightarrow x + z < y + z$

O5. $[x < y \ \wedge \ 0 < z] \Rightarrow x \times z < y \times z$

(정의2.18) $x \leq y \Leftrightarrow x < y \ \vee \ x = y$

$x > y \Leftrightarrow y < x$

$x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$

(정리2.19) 순서성에 $(R,+,\times,<)$ 에 대하여 다음의 성질들이 성립한다.

a. 다음 중 반드시 한 가지 경우만 성립한다.

$x < y \ \vee \ x = y \ \vee \ y < x$

b. $[x < y \wedge u < v] \Rightarrow x + u < y + v$

c. $[x < y \wedge u \leq v] \Rightarrow x + u < y + v$

d. $[x \leq y \wedge u < v] \Rightarrow x + u < y + v$

e. $[x \leq y \wedge u \leq v] \Rightarrow x + u \leq y + v$

f. $[0 < z \ \wedge \ x \times z < y \times z] \Rightarrow x < y$

(정의2.20) $0 < x$ 인 때 x 는 양(Positive) 이라 하고,

$x < 0$ 인 때 x 는 음(Negative) 이라 한다.

(정리2.21) 순서성에 $(R,+,\times,<)$ 에 대하여 다음의 성질들이 성립한다.

a. $x < y \Leftrightarrow 0 < y - x$

b. $x < y \Leftrightarrow x - y < 0$

c. $0 < y \Leftrightarrow -y < 0$

d. $x < 0 \Leftrightarrow 0 < -x$

e. $x < y \Leftrightarrow -y < -x$

f. $[x < y \ \wedge \ z < 0] \Rightarrow y \times z < x \times z$

g. $[0 < x \ \wedge \ 0 < y] \Rightarrow 0 < x + y \ \wedge \ 0 < x \times y$

h. $[x < 0 \ \wedge \ y < 0] \Rightarrow 0 < x \times y$

i. $[0 < x \ \wedge \ y < 0] \Rightarrow x \times y < 0$

j. $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$

k. $x^2 \geq 0$

l. $-1 < 0 < 1$

(정리2.22) $0 \neq 1$ 인 정역 $(R, +, \times)$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 R 의 부분집합 $\mathcal{P}$ 가 존재한다고 가정하자.

a. $0 \notin \mathcal{P}$

b. $x \in \mathcal{P} \vee x = 0 \vee -x \in \mathcal{P}$

c. $[x \in \mathcal{P} \wedge y \in \mathcal{P}] \Rightarrow x + y \in \mathcal{P}$

d. $[x \in \mathcal{P} \wedge y \in \mathcal{P}] \Rightarrow x \times y \in \mathcal{P}$

여기에서 $x < y$ 를 $y - x \in \mathcal{P}$ 라 정의하면 $(R, +, \times, <)$ 는 순서정역이 되고, $\mathcal{P}$ 는 $(R, +, \times, <)$ 의 양의 원소들의 집합이 된다.

Ⅲ. 자연수 체계로부터의 정수

이 장에서는 제 2 장에서 소개된 자연수의 체계로부터 정수의 체계로 확장하고자 한다.

직관에 의하면 모든 정수는 자연수들의 차로 나타낼 수 있다.
예를 들면, $3 = 4 - 1$, $0 = 1 - 1$, $-7 = 1 - 8$ 등이다.
그런데 위의의 두 자연수의 차가 정의되지 않았기 때문에 정수를 두 자연수의 순서쌍 (n, k) 로 나타내려 한다. 그러나 같은 정수라 할지라도 두 자연수의 차로 나타낼 수 있는 방법이 무수히 많게 된다. 즉,

$$3 = 4 - 1 = 5 - 2 = 6 - 3 = 7 - 4 = \cdots$$

$$0 = 1 - 1 = 2 - 2 = 3 - 3 = 4 - 4 = \cdots$$

$$-7 = 1 - 8 = 2 - 9 = 3 - 10 = 4 - 11 = \cdots$$ 등이다.

같은 정수를 나타내는 순서쌍 (n, k) 들은 모두 동치(Equivalent)가 되도록 취급되어야 하기 때문에 다음과 같이 $P \times P$ 위에서의 관계(Relation)를 정의한다.

(정의3.1) 집합 P 의 임의의 원소 n, j, k, i 에 대하여 $P \times P$ 위의 관계(Relation) $\sim$ 를 $n + i = k + j$ 일때 $(n, j) \sim (k, i)$ 으로 정의한다. (단, P 는 자연수의 집합)

직관에 의하면 $(n, j) \sim (k, i)$ 은 결국 $n - j = k - i$ 을 의미하게 되는데 이 방정식을 $n + i = k + j$ 로 대신 나타내고 있을 뿐이다.

(주의3.2) 1. $(n, j) \sim (1, 1) \Leftrightarrow n = j$.

2. $(n, j) \sim (2, 1) \Leftrightarrow n = j + 1$.

(정리3.3) $P \times P$ 위에서의 관계 $\sim$ 은 동치관계(Equivalence Relation)이다.
즉, 집합 P 의 원소 h, i, j, k, m, n에 대하여

a. $(h, i) \sim (h, i)$: 반사성(reflexivity),

b. $(h, i) \sim (j, k) \Rightarrow (j, k) \sim (h, i)$; 대칭성(symmetry),

c. $(h, i) \sim (j, k)$, $(j, k) \sim (m, n) \Rightarrow (h, i) \sim (m, n)$;

추이성(transitivity)이 성립한다.

(증명) (a) $h + i = h + i$ 이므로 $(h, i) \sim (h, i)$ 이다.

(b) $(h, i) \sim (j, k)$ 라 하면 $h + k = j + i$ 이다. 그러면 $j + i = h + k$이므로 $(j, k) \sim (h, i)$ 이다.

(c) 만일, $(h, i) \sim (j, k)$ 이고, $(j, k) \sim (m, n)$ 이면, $h + k = j + i$ 이고, $j + n = m + k$ 이므로 변끼리 더하면 $h + k + j + n = j + i + m + k$ 이다. 소거율에 의하여 $h + n = m + i$ 이다. 따라서 $(h, i) \sim (m, n)$ 이다.

이제 관계 $\sim$ 은 $P \times P$ 위에서의 동치관계이므로 동치류(Equivalence Class)로 $P \times P$ 를 분할할 수 있다. (n, j) 를 포함하는 동치류를 $[(n, j)]$ 로 나타내기로 한다. 그러면 $[(n, j)] = \{(k, i) \in P \times P | (n, j) \sim (k, i)\}$ 이다. 예를 들면,

$[(2, 3)] = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), \cdots\}$

$[(4, 4)] = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), \cdots\}$ 이 된다.

관계 $\sim$ 에 관한 동치류들의 집합을 Z 로 나타내기로 한다. 그리고 Z 의 원소들을 정수(Integer)라 부르고, 그리이스 소문자 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots$ 등으로 표시하기로 한다.

(주의3.4) $0_z = [(1,1)]$, $1_z = [(2,1)]$ 으로 나타내기로 한다.
그러면, $0_z = \{(1,1),(2,2),(3,3),\cdots\}$, $1_z = \{(2,1),(3,2),(4,3),\cdots\}$ 이므로 $0_z \neq 1_z$ 임을 알 수 있다.

이제 정수의 합을 정의하기 위하여 직관에 의한 정수의 합을 생각해 보자. 즉, $r = n - j$ 이고 $s = k - i$ 이면 $r + s = (n + k) - (j + i)$ 가 된다. 이 사실을 이용하여 정수의 합을 정의하기 위해서는 우선 잘 정의(Well-Defined) 될 수 있는지를 조사해야 하겠다.

(보조정리3.5) 위의의 자연수 $n, j, k, i, n_1, j_1, k_1, i_1$ 에 대하여
$(n, j) \sim (n_1, j_1)$ 이고 $(k, i) \sim (k_1, i_1)$ 이면 $(n + k, j + i) \sim (n_1 + k_1, j_1 + i_1)$ 이다.
(증명) 가정에 의하여 $n + j_1 = n_1 + j$, $k + i_1 = k_1 + i$ 이다. 변끼리 더하면 $(n + j_1) + (k + i_1) = (n_1 + j) + (k_1 + i)$ 이고, $+$에 대한 결합법칙, 교환법칙에 의하여 $(n + k) + (j_1 + i_1) = (n_1 + k_1) + (j + i)$ 가 된다. 따라서 $(n + k, j + i) \sim (n_1 + k_1, j_1 + i_1)$ 이다.

위의 보조 정리로부터 다음에 정의된 두 정수의 합의 연산은 잘 정의(Well-Defined) 된다.

(정의3.6) 두 정수 α, β 대하여 $(n, j) \in \alpha$, $(k, i) \in \beta$ 일때
$\alpha +_z \beta = [(n + k, j + i)]$ 으로 정의한다.

위 정의에서 정의된 두 정수의 합의 연산에 대하여 여러가지 성질을 갖는다는 것은 다음의 정리에서 알 수 있다. 즉, 정수의 집합은 합의 연산에 대하여 가환

$\alpha +_z \delta = [(n+j, j+n)] = [(n+j, n+j)] = 0_z$ 이다.

이제 δ의 유일성을 증명하자. 만일 $\alpha +_z \mu = 0_z$ 인 μ 가 존재한다면, $\mu = \mu +_z 0_z = \mu +_z (\alpha +_z \delta) = (\mu +_z \alpha) +_z \delta = (\alpha +_z \mu) +_z \delta = 0_z +_z \delta = \delta +_z 0_z = \delta$ 가 된다.

이제 정수의 곱의 연산을 생각하기로 하자. 합의 연산과 같은 방법으로 생각할 수 있다. 만일 $r = n - j$ 이고 $s = k - i$ 이면 $r \times s = ((n \times k) + (j \times i)) - ((j \times k) + (n \times i))$ 이 된다. 이 사실을 이용하여 정수의 곱을 정의하기 위해서는 다음의 보조정리가 성립되는 가를 밝혀야 한다.

(보조정리3.8) 임의의 자연수 $n, j, k, i, n_1, j_1, k_1, i_1$ 에 대하여
만일 $(n, j) \sim (n_1, j_1)$, $(k, i) \sim (k_1, i_1)$ 이면
$((n \times k) + (j \times i), (j \times k) + (n \times i)) \sim ((n_1 \times k_1) + (j_1 \times i_1), (j_1 \times k_1) + (n_1 \times i_1))$
이다.

(증명) 만일 $(n, j) \sim (n_1, j_1)$, $(k, i) \sim (k_1, i_1)$ 이면

$n + j_1 = n_1 + j \qquad (1)$

$k + i_1 = k_1 + i$ 이다. $\qquad (2)$

이제 다음을 증명하자.

$$\underbrace{(n \times k) + (j \times i) + (j_1 \times k_1) + (n_1 \times i_1)}_{(A)}$$

$$= \underbrace{(n_1 \times k_1) + (j_1 \times i_1) + (j \times k) + (n \times i)}_{(B)}$$

군(Commutative Group)을 이룬다는 것을 알 수 있다. 따라서 군(Group)에서 성립되는 일반적인 성질들이 정수에서도 성립하게 된다.

(정리3.7) (합에 대한 성질)

집합 Z 의 모든 원소 α, β, γ 에 대하여 다음의 성질을 갖는다.

a. $\alpha +_z \beta = \beta +_z \alpha$ (교환법칙)

b. $\alpha +_z (\beta +_z \gamma) = (\alpha +_z \beta) +_z \gamma$ (결합법칙)

c. $\alpha +_z 0_z = \alpha$

d. $(\exists 1\delta)(\alpha +_z \delta = 0_z)$

(여기서 $\delta = -_z\alpha$ 로 나타내고, 만일 $(h, i) \in \alpha \Rightarrow (i, h) \in -_z\alpha$ 이다.)

(증명) (a) 임의의 $(n, j) \in \alpha$, $(k, i) \in \beta$ 라 하자.

정의에 의하여 $\alpha +_z \beta = [(n + k, j + i)]$이고, $\beta +_z \alpha = [(k + n, i + j)]$이다.

따라서 + 에 관한 교환법칙에 의하여 $\alpha +_z \beta = \beta +_z \alpha$ 이다.

(b) 임의의 $(n, j) \in \alpha$, $(k, i) \in \beta$, $(m, h) \in \gamma$ 라 하자.

그러면 $\beta +_z \gamma = [(k + m, i + h)]$, $(k + m, i + h) \in \beta +_z \alpha$ 이다. 따라서 $\alpha +_z (\beta +_z \gamma) = [(n + (k + m), j + (i + h)]$ 가 된다.

같은 방법으로 $\alpha +_z \beta = [(n+k, j+i)]$, $(\alpha +_z \beta) +_z \gamma = [((n+k)+m, (j+i)+h)]$ 이다. 결국 $\alpha +_z (\beta +_z \gamma) = (\alpha +_z \beta) +_z \gamma$ 가 된다.

(c) 임의의 $(n, j) \in \alpha$라 하자. $(1, 1) \in 0_z$ 이므로 $\alpha +_z 0_z = [(n + 1, j + 1)]$ 이다.

그러면 $(n + 1) + j = n + (j + 1)$ 이므로 $[(n + 1, j + 1)] = [(n, j)]$ 가 된다.

그리고 $(n, j) \in \alpha$ 이므로 $[(n, j)] = \alpha$ 이다. 따라서 $\alpha +_z 0_z = \alpha$ 이다.

(d) 임의의 $(n, j) \in \alpha$ 라 하고, $\delta = [(j, n)]$ 라 하자. 그러면,

(1)에 k를 곱하면 $(n \times k) + (j_1 \times k) = (n_1 \times k) + (j \times k)$ (3)

(2)에 j_1을 곱하고 양변을 교환하면

$(j_1 \times k_1) + (j_1 \times i) = (j_1 \times k) + (j_1 \times i_1)$ (4)

(1)에 i를 곱하고 양변을 교환하면

$(i \times j) + (i \times n_1) = (i \times n) + (i \times j_1)$ (5)

(2)에 n_1 을 곱하면 $(n_1 \times k) + (n_1 \times i_1) = (n_1 \times i) + (n_1 \times k_1)$ (6)

(3) + (4) + (5) + (6) 을 하면, (A) + (C) = (B) + (C) 가 된다.

단, $(C) = (j_1 \times k) + (j_1 \times i) + (i \times n_1) + (n_1 \times k)$ 이다.

따라서 +에 대한 소거율에 의하여 (A) = (B) 이다.

위의 보조정리에 의하여 다음에 정의된 정수의 곱의 연산은 잘 정의 (Well-Defined)된다.

(정의3.9) 임의의 두 정수 α, β 에 대하여 $(n, j) \in \alpha$, $(k, i) \in \beta$ 일 때,

$\alpha \times_z \beta = [((n \times k) + (j \times i), (j \times k) + (n \times i))]$ 로 정의한다.

위에서 정의된 정수의 합과 곱에 대하여 다음의 정리에서 처럼 여러가지 성질들을 갖게 된다. 즉, 정수의 집합은 합과 곱의 연산에 대하여 단위원을 갖는 가환환(Commutative Ring with Unit Element) 을 이루게 됨을 알 수 있다. 따라서 제 2 장에서 언급한 환에 관한 여러가지 성질들이 정수에서도 그대로 성립하게 된다.

(정리3.10) (곱에 대한 성질)

임의의 정수 α, β, γ에 대하여 다음의 성질들이 성립한다.

a. $\alpha \times_z \beta = \beta \times_z \alpha$ (교환법칙)

b. $\alpha \times_z (\beta \times_z \gamma) = (\alpha \times_z \beta) \times_z \gamma$ (결합법칙)

c. $\alpha \times_z (\beta +_z \gamma) = (\alpha \times_z \beta) +_z (\alpha \times_z \gamma)$ (분배법칙)

d. $\alpha \times_z 1_z = \alpha$

(증명) 임의의 원소 $(n, j) \in \alpha$, $(k, i) \in \beta$, $(m, h) \in \gamma$에 대하여 생각해 보자.

(a) $\alpha \times_z \beta = [((n \times k) + (j \times i), (j \times k) + (n \times i))]$ 이고, $\beta \times_z \alpha = [((k \times n) + (i \times j), (i \times n) + (k \times j))]$ 이다. 그러면 $+$와 $\times$의 가환성(commutativity)에 의하여 $\alpha \times_z \beta = \beta \times_z \alpha$가 된다.

(b) $\beta \times_z \gamma = [((k \times m) + (i \times h), (i \times m) + (k \times h))]$이다. 그러므로 $\alpha \times_z (\beta \times_z \gamma) = [((n \times ((k \times m) + (i \times h))) + (j \times ((i \times m) + (k \times h))), (j \times ((k \times m) + (i \times h))) + (n \times ((i \times m) + (k \times h))))] = [((n \times (k \times m)) + (n \times (i \times h)) + (j \times (i \times m)) + (j \times (k \times h)), (j \times (k \times m)) + (j \times (i \times h)) + (n \times (i \times m)) + (n \times (k \times h)))]$ 이다. (배분법칙)

한편 $\alpha \times_z \beta = [((n \times k) + (j \times i), (j \times k) + (n \times i))]$이다. 그러므로 $(\alpha \times_z \beta) \times_z \gamma = [((((n \times k) + (j \times i)) \times m) + (((j \times k) + (n \times i)) \times h), (((j \times k) + (n \times i)) \times m) + (((n \times k) + (j \times i)) \times h))] = [(((n \times k) \times m) + ((j \times i) \times m) + ((j \times k) \times h) + ((n \times i) \times h), ((j \times k) \times m) + ((n \times i) \times m) + ((n \times k) \times h) + ((j \times i) \times h))]$ 이다. 따라서 $\times$ 에 대한 결합성(associativity)과 $+$ 에 대한 가환성에 의하여 $\alpha \times_z (\beta \times_z \gamma) = (\alpha \times \beta_z) \times_z \gamma$이다.

(c) $\alpha \times_z (\beta +_z \gamma) = [(n, j)] \times_z [(k + m, i + h)] = [((n \times (k + m)) + (j \times (i + h)), (j \times (k + m)) + (n \times (i + h)))] = [((n \times k) + (n \times m) + (j \times i) + (j \times$

$h), (j \times k) + (j \times m) + (n \times i) + (n \times h))] = [((n \times k) + (j \times i), (j \times k) + (n \times i))] +_z [((n \times m) + (j \times h), (j \times m) + (n \times h))] = (\alpha \times_z \beta) +_z (\alpha \times_z \gamma)$.

(d) $\alpha \times_z 1_z = [(n, j)] \times_z [(2, 1)]$

$= [((n \times 2) + (j \times 1), (j \times 2) + (n \times 1))]$

$= [((2 \times n) + j, (2 \times j) + n)]$

$= [(n, j)] = \alpha$. (왜냐하면, $2 \times n = n + n$ 이고, $2 \times j = j + j$)

그리고 정수의 집합이 영인자(Zero Divisor)를 갖지 않는다는 것은 다음의 정리로부터 알 수 있다. 그러므로 정수의 집합은 정역(Integral Domain)을 이루고 있음을 알 수 있다.

(정리3.11) 임의의 정수 α, β 에 대하여

$$\alpha \neq 0_z,\ \beta \neq 0_z \text{ 이면 } \alpha \times_z \beta \neq 0_z \text{ 이다.}$$

(증명) $\alpha \neq 0_z$, $\beta \neq 0_z$ 이고, $(n, j) \in \alpha$, $(k, i) \in \beta$ 라하면 $n \neq j$, $k \neq i$ 이다. 그리고 $k \neq i$ 이므로 자연수의 삼분법에 의하면 $k < i$ 이거나 $i < k$이다.

경우1. $i < k$ 이면 적당한 자연수 u 에 대하여 $k = i + u$ 로 나타낼 수 있다. 그런데 $n \neq j$ 이므로 $n \times u \neq j \times u$ 이다. 따라서 $(n \times k) + (j \times i) = (n \times (i + u)) + (j \times i)$ $= (n \times i) + (n \times u) + (j \times i) \neq (n \times i) + (j \times u) + (j \times i)$ 이다. 그러나 $(n \times i) + (j \times u) + (j \times i) = (j \times (i \times u)) + (n \times i) = (j \times k) + (n \times i)$ 이다. 그러므로 $(n \times k) + (j \times i) \neq (j \times k) + (n \times i)$ 이고

$\alpha \times_z \beta = [((n \times k) + (j \times i), (j \times k) + (n \times i))] \neq 0_z$ 이다.

경우2. $k < i$ 일때도 위와 같은 방법으로 하여 $\alpha \times_z \beta \neq 0_z$ 임을 증명할 수 있다.

이제 정수의 집합은 순서정역(Ordered Integral Domain)의 구조를 갖는다는 것을 밝히기 위하여 다음의 몇가지 보조정리를 살펴보자.

(보조정리3.12) 임의의 정수 α 에 대하여 $(n, j) \in \alpha$, $(k, i) \in \alpha$ 라 하면

$$j < n \Longleftrightarrow i < k \text{ 이다.}$$

(증명) $(n, j) \in \alpha$, $(k, i) \in \alpha$ 이므로 $(n, j) \sim (k, i)$ 이다.

즉, $n + i = k + j$. (*)

$j < n$ 이라 가정할 때 $i < k$ 임을 보이면 된다. 만일 $i \not< k$ 이라 가정하면 $k \leq i$ 이다. 그러면 $j < n$ 이고 $k \leq i$ 이므로 $k + j < n + i$ 가 되어 (*) 에 모순이다. 따라서 $j < n \Rightarrow i < k$ 이다. 같은 방법으로 $i < k \Rightarrow j < n$ 도 쉽게 증명할 수 있다.

(정의3.13) $\mathcal{P}_z = \{\alpha \in Z \mid (n, j) \in \alpha \Rightarrow j < n\}$. 즉,

모든 $(n, j) \in \alpha$에 대하여 $\alpha \in \mathcal{P}_z \Longleftrightarrow j < n$.

(보조정리3.14) $\mathcal{P}_z$는 다음을 만족한다.

1. $0_z \notin \mathcal{P}_z$.
2. 모든 $\alpha \in Z$ 에 대하여 $\alpha \in \mathcal{P}_z$ 이거나 $\alpha = 0_z$ 이거나 $-_z\alpha \in \mathcal{P}_z$.
3. $\alpha \in \mathcal{P}_z$, $\beta \in \mathcal{P}_z \Rightarrow \alpha +_z \beta \in \mathcal{P}_z$.
4. $\alpha \in \mathcal{P}_z$, $\beta \in \mathcal{P}_z \Rightarrow \alpha \times_z \beta \in \mathcal{P}_z$.

(증명) (1) $(1,1) \in 0_z$ 이고 $1 \not< 1$ 이므로 $0_z \notin \mathcal{P}_z$.

(2) $\forall \alpha \in \mathcal{P}_z$, $\forall (n,j) \in \alpha$ 이라 하면 삼분법칙에 의하여

$j < n$ 이거나 $j = n$ 이거나 $n < j$ 이다.

만일 $j < n$ 이면 $\alpha \in \mathcal{P}_z$ 이고, $j = n$ 이면 $\alpha = 0_z$이고,

$n < j$ 이면 $(j,n) \in -_z\alpha$ 이므로 $-_z\alpha \in \mathcal{P}_z$ 이다.

즉, $\alpha \in \mathcal{P}_z$ 이거나 $\alpha = 0_z$ 이거나 $-_z\alpha \in \mathcal{P}_z$ 이다.

(3),(4) : $\alpha \in \mathcal{P}_z$, $\beta \in \mathcal{P}_z$ 라 가정하자.

$(n,j) \in \alpha$ 이고 $(k,i) \in \beta$ 라 하면 $j < n$ 이고 $i < k$ 이다.

여기서 $\alpha +_z \beta = [(n+k, j+i)]$ 이고 $j < n$, $i < k$이므로 $j + i < n + k$ 이다.

따라서 $\alpha +_z \beta \in \mathcal{P}_z$ 이다.

이제 $\alpha \times_z \beta \in \mathcal{P}_z$ 임을 보이자.

즉, $(n \times i) + (j \times k) < (n \times k) + (j \times i)$ 임을 보이면 된다. $i < k$ 이므로 적당한

자연수 u 에 대하여 $k = i + u$ 이고 $j < n$ 이므로 $j \times u < n \times u$ 가 된다.

따라서 $(n \times i) + (j \times k) = (n \times i) + (j \times (i + u)) = (n \times i) + (j \times i) + (j \times u)$

$< (n \times i) + (j \times i) + (n \times u) = (n \times i) + (n \times u) + (j \times i) = (n \times (i + u)) + (j \times i)$

$= (n \times k) + (j \times i)$ 이다.

(정의3.15) $\beta -_z \alpha = \beta +_z (-_z\alpha)$. 그리고 $\alpha <_z \beta \Longleftrightarrow \beta -_z \alpha \in \mathcal{P}_z$.

위의 정의와 (보조정리3.14)로부터 정수의 집합은 다음의 정리와 같이 순서정역을 이룬다는 것을 알 수 있다.

(정리3.16) $(Z, +_z, \times_z, <_z)$ 는 순서정역이고 P_z 는 양의 원소의 집합이다.

이제 정역의 표수(Characteristic)에 대하여 살펴 보도록 하자.

정역을 $\mathcal{D} = (D, +, \times)$ 라 하고 영원을 0_D, 단위원을 1_D 라 하자.

제 2 장의 반복정리에서 $W = D$, $c = x \in D$ 이고 모든 $u \in D$ 에 대하여 $g(u) = u + x$ 라 하면 함수 $F_x : P \longrightarrow D$ 가 $F_x(1) = x$ 이고 $F_x(n+1) = F_x(n) + x$ 을 만족하는 유일한 함수가 존재한다.

특히, $F_x(1) = x$

$F_x(2) = F_x(1) + x = x + x$

$F_x(3) = F_x(2) + x = x + x + x$

$\cdots$

$$F_x(n) = \overbrace{x + x + x + \cdots + x}^{n \text{ times}}$$

여기에서 $F_x(n)$ 대신에 관습상의 기호 nx 를 사용하면

$1x = x$

$2x = x + x$

$3x = x + x + x$

$\cdots$

$$nx = \overbrace{x + x + x + \cdots + x}^{n \text{ times}}$$

등으로 나타낼 수 있고, 일반적으로 $(n+1)x = nx + x$ 가 된다. 이제 새로운 함수 nx 에 관한 다음의 정리를 살펴보자.

(정리3.17) 임의의 두 자연수 n, k 와 D 의 임의의 원소 x, y 에 대하여 나음의 성질들이 성립한다.

a. $(n+k)x = (nx)+(kx)$

b. $n(x+y) = (nx)+(ny)$

c. $(n \times k)x = n(kx)$

d. $n(x \times y) = (nx) \times y$

e. $(nx) \times (ky) = (n \times k)(x \times y)$

(증명) 집합 D 의 임의의 원소 X, y 에 대하여 생각하자.

(a) k 에 대하여 수학적 귀납법을 사용하자. 모든 $n \in P$ 에 대하여 집합 $A = \{k \in P \mid (n+k)x = nx + kx\}$ 라 하자. 그러면 $A = P$ 가 됨을 보이면 된다.

$(n+1)x = nx + 1x$ 이므로 $1 \in A$ 이다. 이제 $k \in A$ 라 하자. 그러면 $(n+k)x = (nx)+(kx)$ 이다. 그런데 $(n+(k+1))x = ((n+k)+1)x = (n+k)x + x = (nx+kx)+x = nx+(kx+x) = nx+(k+1)x$ 이다. 따라서 $k \in A \Rightarrow k+1 \in A$ 이므로 수학적 귀납법에 의하여 $A = P$ 이다.

(b) 집합 $B = \{n \in P \mid n(x+y) = nx + ny\}$ 라 두자. 그러면 $B = P$ 임을 보이자. $1(x+y) = x+y = 1x+1y$ 이므로 $1 \in B$ 이다. 이제 $n \in B$ 라 하면 $n(x+y) = nx+ny$ 이다.

그런데 $(n+1)(x+y) = n(x+y)+(x+y) = (nx+ny)+(x+y) = (nx+x)+(ny+y) = (n+1)x+(n+1)y$ 이다.

따라서 $n \in B \Rightarrow n+1 \in B$ 이므로 수학적 귀납법에 의하여 $B = P$ 이다.

(c) 모든 자연수 n 에 대하여 집합 $C = \{k \in P \mid (n \times k)x = n(kx)\}$ 라 하자.

그러면 $C = P$ 임을 보이자. $(n \times 1)x = nx = n(1x)$ 이므로 $1 \in C$ 이다.

이제 $k \in C$ 라 하면 $(n \times k)x = n(kx)$ 이다. 그런데 $(n \times (k+1))x = ((n \times k)+n)x = (n \times k)x + nx = n(kx) + nx = n((kx)+x) = n((k+1)x)$ 이다.

따라서 $k \in C \Rightarrow k+1 \in C$ 이므로 $C = P$ 이다.

(d) 집합 $L = \{n \in P |\ n(x \times y) = (nx) \times y\}$ 라 하자.

$1(x \times y) = x \times y = (1x) \times y$ 이므로 $1 \in L$ 이다. 이제 $n \in L$ 이라 하면 $n(x \times y) = (nx) \times y$ 이다.

그런데 $(n+1)(x \times y) = n(x \times y) + (x \times y) = ((nx) \times y) + (x \times y) = ((nx)+x) \times y$ $= ((n+1)x) \times y$ 이다. 따라서 $n \in L \Rightarrow n+1 \in L$ 이므로 $L = P$ 이다.

(e) $(nx) \times (ky) = n(x \times (ky)) = n((ky) \times x) = n(k(y \times x)) = (n \times k)(y \times x)$ $= (n \times k)(x \times y)$

모든 자연수 n 에 대하여 $n1_D$ 를 n_D 로 나타내기로 하자.

이를테면, $1_D = 1(1_D) = 1_D$, $2_D = 2(1_D) = 1_D + 1_D$,

$3_D = 3(1_D) = 1_D + 1_D + 1_D$ 이 된다.

(정의3.18) 정역 $\mathcal{D} = (D, +, \times)$ 의 표수(Chracteristic) 는

1) 모든 $n \in P$ 에 대하여 $n_D \neq 0_D$ 일 때 0 으로 정의하고,

2) $n_D = 0_D$ 인 $n \in P$ 이 존재할 때는 그러한 자연수 n 중 최소의 자연수로 정의한다.

(정리3.19) 임의의 순서정역 $\mathcal{D} = (D, +, \times, <)$ 의 표수는 0 이다.

(증명) 집합 $A = \{n \in P |\ 0_D < n1_D\}$ 이라 하자. 그러면 집합 A 는 n_D 가 D

의 양의 원소가 되게 하는 모든 자연수 n 의 집합이다.

정리 (2.22) 에 의하면 $1(1_D) = 1_D > 0_D$ 이므로 $1 \in A$ 이다.

이제 $n \in A$ 라 가정하면 $0_D < n1_D$ 이다.

그러면 $(n+1)1_D = n1_D + 1_D > 0_D$ 이므로 $n+1 \in A$ 이다. 즉 $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ 이므로 수학적 귀납법에 의하여 $A = P$ 이다.

즉, 모든 자연수 n 에 대하여 $n_D \neq 0_D$ 임을 알 수 있다.

따라서 $\mathcal{D}$ 의 표수는 0 이다.

위의 정리로부터 다음의 따름정리를 얻을 수 있다.

(따름정리3.20) 정수체계 $(Z, +_z, \times_z, <_z)$ 의 표수는 0 이다.

이제 정수체계의 양의 원소의 집합인 $\mathcal{P}_z$ 가 페아노체계(Peano System) 를 이룸을 증명하자.

(정리3.21) 모든 $x \in \mathcal{P}_z$ 에 대하여 $T(x) = x +_z 1_z$ 로 정의할 때 $(\mathcal{P}_z, T, 1_z)$ 는 페아노 체계(Peano System)이다.

(증명) $(2,1) \in 1_z$ 이고 $1 < 2$ 이므로 $1_z \in \mathcal{P}_z$ 이다. 그리고 T 는 보조정리 (3.14) 에 의하여 정의가 가능하다. 이제 페아노 공리를 만족함을 보이자.

(P1) 모든 $x \in \mathcal{P}_z$ 에 대하여 $1_z \neq T(x) = x +_z 1_z$ 이다. 왜냐하면, $1_z = x +_z 1_z \Rightarrow x = 0_z$ 가 되어 $0_z \notin \mathcal{P}_z$ 에 모순이다.

(P2) $x +_z 1_z = y +_z 1_z$ 라 하면 소거법칙에 의하여 $x = y$ 이다.

(P3) $A \subseteq \mathcal{P}_z$, $1_z \in A$ 이고,($x \in A \Rightarrow x +_z 1_z \in A$) 라 가정하자. 그러면

$A = \mathcal{P}_z$ 임을 보이면 된다. 집합 $B = \{n \in P | [(n+1, 1)] \in A\}$ 라 하자.

$[(1+1, 1)] = [(2, 1)] = 1_z \in A$ 이므로 $1 \in B$ 이다.

다음 $n \in B$ 라 가정하면 즉, $[(n+1, 1)] \in A$ 이다. $[(n+1, 1)] +_z 1_z \in A$ 이다.

그런데 $[(n+1, 1)] +_z 1_z = [(n+1, 1)] +_z [(2, 1)] = [(n+1+2, 1+1)]$ $= [((n+1)+1, 1)]$ 이다. 즉, $n+1 \in B$ 이다.

$n \in B$ 일때 $n+1 \in B$ 이므로 $(P, S, 1)$ 에서의 수학적 귀납법에 의하여 $B = P$ 이다. 이것은 결국 모든 $n \in P$ 에 대하여 $[(n+1, 1)] \in A$ 임을 알 수 있다.

따라서 $\forall \alpha \in \mathcal{P}_z$, $(k, i) \in \alpha$ 이면 $k > i$ 이고, 적당한 자연수 j 에 대하여 $k = i + j$ 이므로 $\alpha = [(k, i)] = [(j+1, 1)] \in A$ 이다. 즉 $A = \mathcal{P}_z$ 이다.

위 정리 (3.21) 과 다음의 정리 (3.22) 로부터 정수의 체계는 자연수의 체계를 포함하면서 합과 곱의 이항연산과 순서관계 및 여러가지 대수적 성질들을 그대로 보존시켜 주는 확장된 체계임을 알 수 있다.

(정리3.22) 페아노 체계 $\mathcal{P}_z$ 에서 정의되는 합과 곱, 그리고 순서 관계를 $\oplus$, $\otimes$, $<_p$ 라 하면 임의의 $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_z$ 에 대하여 다음이 성립한다.

a. $\alpha \oplus \beta = \alpha +_z \beta$

b. $\alpha \otimes \beta = \alpha \times_z \beta$

c. $\alpha <_p \beta \Longleftrightarrow \alpha <_z \beta$.

(증명) 정리 (3.21) 에 의하면 $T(x) = x +_z 1_z$ 라 정의할 때, $(\mathcal{P}_z, T, 1_z)$ 는 페아노 체계를 이룬다.

(a) 임의의 $\alpha \in \mathcal{P}_z$ 에 대하여 $A = \{\beta \in \mathcal{P}_z | \alpha \oplus \beta = \alpha +_z \beta\}$ 라 하자. 그러면 $\alpha \oplus 1_z = T(\alpha) = \alpha +_z 1_z$ 이므로 $1_z \in A$ 이다.

이제 $\beta \in A$ 라 하면 $\alpha \oplus \beta = \alpha +_z \beta$ 이다. 그러면 $\alpha \oplus T(\beta) = T(\alpha \oplus \beta)$ $= (\alpha \oplus \beta) +_z 1_z = (\alpha +_z \beta) +_z 1_z = \alpha +_z (\beta +_z 1_z) = \alpha +_z T(\beta)$ 이다. 따라서 $T(\beta) \in A$ 이므로 $A = \mathcal{P}_z$ 이다.

(b) 임의의 $\alpha \in \mathcal{P}_z$ 에 대하여 $B = \{\beta \in \mathcal{P}_z | \alpha \otimes \beta = \alpha \times_z \beta\}$ 라 하자. 그러면 $\alpha \otimes 1_z = \alpha = \alpha \times_z 1_z$ 이므로 $1_z \in B$ 이다.

이제 $\beta \in B$ 라면 $\alpha \otimes \beta = \alpha \times_z \beta$ 이다. 그러면 $\alpha \otimes T(\beta) = (\alpha \times_z \beta) \oplus \alpha$ $= (\alpha \times_z \beta) +_z \alpha = (\alpha \times_z \beta) +_z (\alpha \times_z 1_z) = \alpha \times_z (\beta +_z 1_z) = \alpha \times_z T(\beta)$ 이므로 $T(\beta) \in B$ 이다. 따라서 $B = \mathcal{P}_z$ 이다.

(c) $\alpha <_p \beta$ 이면 적당한 $\gamma \in \mathcal{P}_z$ 에 대해서 $\beta = \alpha \oplus \gamma$ 이다. (b) 에 의하여 $\beta = \alpha +_z \gamma$ 이므로 $\beta -_z \alpha = \gamma$ 이다. 즉, $\beta -_z \alpha \in \mathcal{P}_z$ 이므로 $\alpha <_z \beta$ 이다.

마찬가지로 역도 성립한다.

Ⅳ. 순서정역으로부터의 정수

이 장에서는 순서정역(Ordered Integral Domain) 으로부터 자연수를 도입하고 그 자연수를 확장하여 정수를 도입하고자 한다.

정역 $\mathcal{D} = (D, +, \times)$ 에서 자연수를 $1_D, 1_D + 1_D, 1_D + 1_D + 1_D, \cdots$ 등으로 생각할 수 있겠으나, 수학적으로 명확한 정의가 필요하다.

(정의4.1) D 의 부분집합 A 가 다음의 두가지 조건을 만족하면 A 는 귀납적(Inductive) 이라고 한다.

1) $1_D \in A$

2) $x \in A \Rightarrow x + 1_D \in A$

(주의4.2) $A = D$ 이면 A 가 귀납적이므로 적어도 하나의 귀납적인 집합은 존재한다.

$\mathcal{N}_\mathcal{D}$ 를 모든 귀납적인 집합에 속하는 D 의 원소들의 집합이라 하자.
즉, $\mathcal{J}$ 를 모든 귀납적인 집합들의 집합이라 하면 $\mathcal{N}_\mathcal{D} = \cap_{A \in \mathcal{J}} A$ 이다.
여기에서 $\mathcal{N}_\mathcal{D}$ 의 원소들을 $\mathcal{D}$ 로부터의 자연수(Natural Numbers) 라 부른다.

(정리4.3) 다음이 성립한다.

a. A 가 귀납적이다 $\Rightarrow \mathcal{N}_\mathcal{D} \subseteq A$

b. $\mathcal{N}_\mathcal{D}$ 는 귀납적이다.

(증명) (a) $\mathcal{N}_D$ 의 정의에 의하여 명백하다.

(b) 분명하게 1_D 는 모든 귀납적인 집합의 원소이므로 $1_D \in \mathcal{N}_D$ 이다.

$x \in \mathcal{N}_D$ 라 가정하고, A 를 임의의 귀납적인 집합이라 하자.

그러면 $x \in A$ 이다. (a) 에서 집합 A 가 귀납적이므로 $x + 1_D \in A$ 이다.

따라서 $x + 1_D$ 는 모든 귀납적인 집합의 원소이다. 즉 $x + 1_D \in \mathcal{N}_D$ 이다. 결국 $x \in \mathcal{N}_D \Rightarrow x + 1_D \in \mathcal{N}_D$ 이므로 $\mathcal{N}_D$ 는 귀납적이다.

(보조정리4.4) 다음이 성립한다.

a. $\{n1_D | \ n \in P\}$ 는 귀납적이다.

b. A 가 귀납적이고, $n \in P$ 이면 $n1_D \in A$ 이다.

(증명) (a) 집합 $B = \{n1_D | \ n \in P\}$ 라 하자. 그러면 $1_D = 1(1_D) \in B$ 이다. 이제 $x \in B$ 라 가정하자. 그러면 적당한 자연수 n 에 대하여 $x = n1_D$ 이다. 그런데 $x + 1_D = n1_D + 1_D = (n+1)1_D \in B$ 이다. 즉 $x \in B \Rightarrow x + 1_D \in B$ 이므로 B 는 귀납적이다.

(b) 집합 A 를 귀납적이라 가정하고, 집합 $C = \{n | \ n \in P \Rightarrow n1_D \in A\}$ 라 하자. 그러면 $C = P$ 임을 보이면 된다.

$1(1_D) = 1_D \in A$ 이므로 $1 \in C$ 이다. 이제 $n \in C$ 라 가정하면 $n1_D \in A$ 이다. 그런데 $(n+1)1_D = n1_D + 1_D \in A$ 이다. 즉 $n + 1 \in C$ 이다.

따라서 $n \in C \Rightarrow n + 1 \in C$ 이므로 수학적 귀납법에 의하여 $C = P$ 이다.

(따름정리4.5) $\mathcal{N}_D = \{n1_D | \ n \in P\}$.

(증명) 정리 (4.3) 과 보조정리 (4.4) 에 의하여 분명하다.

다음의 정리에서는 정역으로부터의 자연수는 덧셈과 곱셈에 대하여 닫혀있음을 알 수 있다.

(정리4.6) 다음이 성립한다.

hskip 20 pt a. $x \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}},\ y \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}} \Longrightarrow x+y \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$

b. $x \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}},\ y \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}} \Longrightarrow x \times y \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$

(증명) $x \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}},\ y \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 라 가정하자. 그러면 (따름정리4.5)에 의하여 적당한 n, k 에 대하여 $x = n1_D,\ y = k1_D$ 이다.

hskip 20 pt (a) $x+y = n1_D + k1_D = (n+k)1_D \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$

(b) $x \times y = n1_D \times k1_D = (n \times k)1_D \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$

표수가 0인 정역으로부터의 자연수는 자연수체계의 여러 성질들을 그대로 갖고있는 것을 다음의 정리로부터 알 수 있다.

(정리4.7) $\mathcal{D} = (D, +, \times)$ 를 표수가 0인 정역이라고 하자. 그리고, 함수 $T : \mathcal{N}_D \longrightarrow \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 를 모든 $x \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 에 대해서 $T(x) = x + 1_D$ 로 정의하면 다음이 성립한다.

a. $0_D \notin \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$

b. $(\mathcal{N}_{\mathcal{D}}, T, 1_D)$ 는 페아노 체계이다.

c. 페아노 체계 $(\mathcal{N}_{\mathcal{D}}, T, 1_D)$ 과 정역 $\mathcal{D}$ 에서의 합과 곱은 서로 같은 것이 된다. 즉, 페아노 체계 $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 에서 유일하게 존재하는 합과 곱을 $\oplus$, $\odot$ 라 한다면 임의의 $x, y \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 에 대해서 $x \oplus y = x + y,\ x \odot y = x \times y$ 이다.

(증명) (a) (따름정리4.5)에 의하여 $\mathcal{N}_{\mathcal{D}} = \{n1_D \mid n \in P\}$ 이고 $\mathcal{D}$ 의 표수가 0 이므로 모든 $n \in P$ 에 대하여 $n1_D \neq 0_D$ 이다. 따라서 $0_D \notin \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 이다.

(b) (P1) 모든 $x \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 에 대하여 $1_D \neq T(x)$ 이다.

왜냐하면, 만일 $1_D = T(x) = x + 1_D$ 이면 $x = 0_D$ 가 된다. (a) 에 의하면 $0_D \notin \mathcal{N}_D$ 이므로 $x \in \mathcal{N}_D$ 라는 사실에 모순이다.

(P2) $x \neq y \Rightarrow x + 1_D \neq y + 1_D \Rightarrow T(x) \neq T(y)$

(P3) 만일 $B \subseteq \mathcal{N}_D$, $1_D \in B$, $(\forall x)(x \in B \Rightarrow T(x) \in B)$ 라 가정하자. 그러면 B 가 귀납적이므로 (정리4.3)에 의하여 $\mathcal{N}_D \subseteq B$ 이다. 따라서 $\mathcal{N}_D = B$ 이다.

(c) 정리 (2.4) 에 의하면 페아노 체계 $(\mathcal{N}_D, T, 1_D)$ 위에서 합의 연산 $\dotplus$ 가 유일하게 존재하여 임의의 $x, y \in \mathcal{N}_D$ 에 대해서 $x + 1_D = T(x)$, $x \dotplus T(y) = T(x \dotplus y)$ 이 성립한다.

그러면 T 의 정의로부터 $x \dotplus 1_D = x + 1_D$ 이고 $x \dotplus (y + 1_D) = (x \dotplus y) + 1_D$ 임을 알 수 있다.

이제 임의의 $x \in \mathcal{N}_D$ 에 대해서 $A = \{y \in \mathcal{N}_D | x \dotplus y = x + y\}$ 라 하자. 그러면 $x \dotplus 1_D = x + 1_D$ 이므로 $1_D \in A$ 이다. $y \in A$ 라 가정하면 $x \dotplus y = x + y$ 가 성립하게 된다. 그러면 $x \dotplus T(y) = (x \dotplus y) + 1_D = (x + y) + 1_D = x + (y + 1_D)$ $= x + T(y)$ 이므로 $T(y) \in A$ 이다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 $A = \mathcal{N}_D$ 이다. 즉, 임의의 $x, y \in \mathcal{N}_D$ 에 대해서 $x \dotplus y = x + y$ 이다.

곱에 대해서도 마찬가지로 비슷하게 증명할 수 있다.

이제 순서정역으로부터의 자연수에서 정수로 확장하기 위해서 다음의 정의를 살펴보자.

(정의4.8) $\mathcal{D} = (D, +, \times)$ 를 정역이라 하자. $x \in D$ 이고 $a \in Z$ 에 대하여, 다음과 같이 정의한다.

$$\alpha x = \begin{cases} \alpha x & (0_z <_z \alpha) \\ 0_D & (\alpha = 0_z) \\ (-\alpha)(-x) & (\alpha <_z 0_z) \end{cases}$$

(보조정리4.9) 임의의 두 정수 α, β 와 정역 D 의 두 원소 x, y 에 대하여 다음의 성질들이 성립한다.

a. $(\alpha +_z \beta) = \alpha x + \beta x$.

b. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

c. $(\alpha(-x)) = -(\alpha x)$.

d. $(\alpha \times_z \beta)x = \alpha(\beta x)$.

e. $\alpha(x \times y) = (\alpha x) \times y$.

f. $(\alpha x) \times (\beta y) = (\alpha \times_z \beta)(x \times y)$.

g. $(-\alpha)x = -(\alpha x)$.

h. $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$.

(정리4.10) $D = (D, +, \times, <)$ 를 순서정역이라 하면 다음이 성립한다.

a. $x \in \mathcal{N}_D \Rightarrow 1_D \leq x$

b. $x \in \mathcal{N}_D$, $y \in \mathcal{N}_D$, $x < y$ 이면 $y - x \in \mathcal{N}_D$ 이다.

c. 페아노체계 $(\mathcal{N}_D, T, 1_D)$에서의 순서관계를 $<_N$ 라 하면 임의의 원소 $x, y \in \mathcal{N}_D$ 에 대해서 $x <_N y$ 와 $x < y$ 는 동치이다.

(증명) (a) 집합 $A = \{x \in D \mid 1_D \leq x\}$ 라 하자. 그러면 A 는 귀납적이므로 $\mathcal{N}_D \subseteq A$ 이다.

(b) $x \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$, $y \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$, $x < y$ 라 가정하자.

그러면 적당한 자연수 k, j 에 대하여 $x = k1_D$, $y = j1_D$ 이다.

그런데 $x < y$ 이므로 $k \neq j$ 이다. 따라서 $j < k$ 이거나 $k < j$ 이다.

만일 $j < k$ 이면 적당한 자연수 n 에 대하여 $k = j + n$ 이다. 그러면 $x = k1_D = (j+n)1_D = j1_D + n1_D \geq j1_D + 1_D > j1_D = y$ 가 되어 $x < y$ 라는 사실에 모순이다. 따라서 $k < j$ 이다. 그리고 정리 (3.21), (3.22) 와 정리 (3.15) 에 의하면 $j - k \in P$ 이다.

그러므로 보조정리 (4.5) 에 의하면 $y - x = j1_D - k1_D = (j-k)1_D \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 이다.

(c) $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 의 모든 원소 x, y 에 대하여 $x <_N y \Leftrightarrow (\exists z)(z \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}},\ y = x \oplus z)$ 이다.

(정리4.7)에 의하여 $x <_N y \Leftrightarrow (\exists z)(z \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}},\ y = x + z)$ 가 된다.

이제 $x <_N y$ 라 가정하자. 그러면 적당한 $z \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 에 대하여 $x + z = y$ 이다.

그러면 (a)에 의하여 $0 < z$, $x < x + z = y$ 이다.

역으로 $x < y$ 라 가정하자. (b)에 의하여 $y - x \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 이다. 따라서 적당한 $z \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 에 대하여 $z = y - x$ 이므로 $x + z = y$ 이다. 그러므로 $x <_N y$ 이다.

결국 $x <_N y$ 와 $x < y$ 는 동치(equivalent) 이다.

이제 $\mathcal{Z}_{\mathcal{D}} = \{x \in D \mid x \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 이거나 $x = 0_D$ 이거나 $-x \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}\}$ 로 정의하자. 이 때 $\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}$ 의 원소들을 정역 $\mathcal{D}$ 로부터의 정수라 한다. 이 정의에 의하면 $\mathcal{N}_{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}$ 이다.

(정리4.11) $\mathcal{Z}_{\mathcal{D}} = \{a1_D \mid a \in Z\}$

(증명) ($\Rightarrow$) $x \in \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}$ 라 가정하자. 그러면 정의에 의하여 $x \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 이거나 $x = 0_D$

이거나 $-x \in \mathcal{N}_\mathcal{D}$ 이다. 이것은 (따름정리4.5)에 의하여 적당한 자연수 n 에 대하여 $x = n1_D$ 이거나 $x = 0_D$ 이거나 $-x = n1_D$ 이다.

만일 $x = 0_D$ 이면 $x = 0_z1_D$ 이고, $-x = n1_D$ 이면 $x = (-n)1_D$ 이다.

따라서 어느 경우이든 적당한 $\alpha \in Z$ 에 대하여 $x = \alpha 1_D$ 이다.

$(\Leftarrow)$ $\alpha \in Z$ 라 가정하자. 만일 $0_z <_z \alpha$ 이면 $\alpha 1_D \in \mathcal{N}_\mathcal{D} \subseteq \mathcal{Z}_\mathcal{D}$ 이고, 만일 $\alpha = 0_z$ 이면 $\alpha 1_D = 0_z 1_D = 0_D \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$ 이다. 그리고 만일 $\alpha <_z 0_z$ 이면 $\alpha 1_D = (-\alpha)(-1_D) = -((-\alpha)1_D)$ 이다. 그런데 $(-\alpha)1_D \in \mathcal{N}_\mathcal{D}$ 이므로 $-((-\alpha)1_D) \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$ 이다. 따라서 어느 경우이든 $\alpha 1_D \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$ 이고, $\{\alpha 1_D | \alpha \in Z\} \subseteq \mathcal{Z}_\mathcal{D}$ 이다.

그러므로 $\mathcal{Z}_\mathcal{D} = \{\alpha 1_D | \alpha \in Z\}$ 이다.

(정리4.12) 다음이 성립한다.

a. $x \in \mathcal{Z}_\mathcal{D} \Leftrightarrow -x \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$

b. $x,\ y \in \mathcal{Z}_\mathcal{D} \Rightarrow [x + y \in \mathcal{Z}_\mathcal{D} \wedge x - y \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}]$

c. $x,\ y \in \mathcal{Z}_\mathcal{D} \Rightarrow x \times y \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$

(증명) (a) $x \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$ 라 하자.

경우1. $x \in \mathcal{N}_\mathcal{D} \Rightarrow -(-x) \in \mathcal{N}_\mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$

경우2. $x = 0_D \Rightarrow -x = 0_D \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$

경우3. $-x \in \mathcal{N}_\mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$

따라서 모든 경우에 대하여 $-x \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$ 이다. 즉 $x \in \mathcal{Z}_\mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$ 이다.

역으로는 x 대신에 $-x$ 를 대입하면

$-x \in \mathcal{Z}_\mathcal{D} \Rightarrow -(-x) \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$. 즉, $-x \in \mathcal{Z}_\mathcal{D} \Rightarrow x \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$ 이다.

(b) $x,\ y \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$ 라 가정하자.

(정리4.11)에 의하면 적당한 α, $\beta \in Z$ 에 대하여 $x = \alpha 1_D$ 이고, $y = \beta 1_D$ 이다.

그러면 $x + y = \alpha 1_D + \beta 1_D = (\alpha +_z \beta)1_D \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$ 이다.

그리고, (a) 에 의하여 $x - y = x + (-y) \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$ 이다.

(c) x, $y \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$ 라 가정하자.

그러면 적당한 α, $\beta \in Z$ 에 대하여 $x = \alpha 1_D$, $y = \beta 1_D$ 이다.

그러면 $x \times y = (\alpha 1_D) \times (\beta 1_D) = (\alpha \times_z \beta)(1_D \times 1_D) = (\alpha \times_z \beta)1_D \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$.

V. 정수의 동형성

이 장에서는 표수가 0 인 정역으로부터의 정수 $\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}$ 와 제 3 장에서 페아노 체계로부터 확장된 정수체계 Z 가 본질적으로 같음을 보이고자 한다.

(정의5.1) $\mathcal{E} = (E, \oplus, \odot)$ 와 $\mathcal{D} = (D, +, \times)$ 는 각각 단위원 1_E 와 1_D 를 갖는 두 개의 정역이라 하자.

$\mathcal{E}$ 가 다음의 조건을 만족하면 $\mathcal{E}$ 를 $\mathcal{D}$ 의 부분정역(Subdomain)이라 한다.

1. $E \subseteq D$
2. $1_D \in E$
3. 모든 $x, y \in E$ 에 대하여 $x \oplus y = x + y$
4. 모든 $x, y \in E$ 에 대하여 $x \odot y = x \times y$

여기에서 $\oplus$ 와 $\odot$ 를 각각 E 에 대한 $+$ 와 $\times$ 의 한정(Restriction) 이라 말한다.

(정리5.2) $\mathcal{D} = (D, +, \times)$ 를 정역이라 하고, $\mathcal{E} = (E, \oplus, \odot)$ 를 $\mathcal{D}$ 의 부분정역이라 하면 다음이 성립한다.

a. E 는 $+$ 와 $\times$ 에 대하여 닫혀 있다.

b. $1_D = 1_E$

c. $0_D = 0_E$

d. 모든 $x, y \in E$ 에 대하여 $x -_E y = x -_D y$

e. $\mathcal{Z}_{\mathcal{D}} \subseteq E$

(증명) (a) 모든 x, y 에 대하여 $x \oplus y \in E$, $x \odot y \in E$ 이다.

그런데 $x \oplus y = x + y$ 이고, $x \odot y = x \times y$ 이다.

(b) $1_D = 1_D \odot 1_E = 1_D \times 1_E = 1_E$.

(c) $0_E + 0_E = 0_E \oplus 0_E = 0_E$ 이므로 $\mathcal{D}$ 의 원소로서 양변에 0_E 를 빼면 $0_E = 0_D$ 이다.

(d) 임의의 $y \in E$ 에 대하여, $y \oplus (-_E y) = 0_E$ 이다.

따라서 정의 (5.1) 과 (c)에 의하여 $y + (-_E y) = 0_D$ 이다.

즉 $-_E y = -_D y$ 이다. 그러면 모든 $x, y \in E$ 에 대하여 $x -_E y = x \oplus (-_E y)$ $= x + (-_E y) = x + (-_D y) = x -_D y$ 이다.

(e) 정의 (5.1) 에 의하여 E 는 귀납적이다. 따라서 $\mathcal{N}_\mathcal{D} \subseteq E$ 이다. 만일 $y \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$ 이면 $y \in \mathcal{N}_\mathcal{D}$ 이거나 $y = 0_D$ 이거나 $-y \in \mathcal{N}_\mathcal{D}$이다.

만일 $y \in \mathcal{N}_\mathcal{D}$ 이면 $y \in E$ 이고, $y = 0_D$ 이면 (c) 에 의하여 $y \in E$ 이고, $-y \in \mathcal{N}_D$ 일 때는 (d) 에서 $x = 0_D$ 라 놓으면 $y \in E$ 이다. 결국 $\mathcal{Z}_\mathcal{D} \subseteq E$ 이다.

(정리5.3) $\mathcal{D} = (D, +, \times)$ 를 정역이라 할 때, $E \subseteq D$ 는 다음의 세가지 조건을 만족한다.

1. $1_D \in E$
2. $x, y \in E \Rightarrow x -_D y \in E$
3. $x, y \in E \Rightarrow x \times y \in E$

이 때 임의의 $x, y \in E$ 에 대하여 $x \oplus y = x + y$ 이고 $x \odot y = x \times y$ 라 정의하면 $\mathcal{E} = (E, \oplus, \odot)$ 는 $\mathcal{D}$ 의 부분정역이 된다.

(증명) (1) 과 (2)에 의하면 $0_D = 1_D - 1_D$ (*) 이다. 따라서 모든 $x \in E$ 에

대하여 $x \oplus 0_D = x + 0_D = x \quad (**)$ 이다.

그리고 $y \in E$ 이면 $-y = 0_D - y \in E$ 이 성립한다. 따라서 임의의 $x, y \in E$ 에 대해서 $x + y = x - (-y) \in E$ 이다. 즉 E 는 $+$ 에 대하여 닫혀 있다. 그리고 (3)에 의하면 E 는 $\times$ 에 대해서도 닫혀있다. 그러므로 $\oplus$ 와 $\otimes$ 는 E 에서의 이항연산이다. 이제 $\mathcal{E} = (E, \oplus, \otimes)$ 가 정역의 공리들을 만족하는지를 보이자.

$\oplus$ 와 $\otimes$ 는 $+$ 와 $\times$ 를 E 에 한정시킨 것이므로 제2장 정역의 공리 1,2,4,5 와 7은 만족한다. 그리고 (*) 와 (**) 에 의하여 $x \oplus 0_D = x + 0_D = x$, $x \oplus (-x) = x + (-x) = 0_D$ 이므로 $0_D = 0_E$) 가 되어 공리 3a, 3b 가 성립한다. (1) 과 (3) 에 의하면 $x \otimes 1_D = x \times 1_D = x$ 이므로 공리 6 도 만족한다. 마지막으로 $0_E = 0_D$ 라는 사실과 $\mathcal{D}$ 가 정역이므로 공리 8 은 만족한다.

$\mathcal{D} = (D, +, \times, <)$ 가 순서정역일 때 $\mathcal{D}$ 의 임의의 부분정역 $\mathcal{E} = (E, \oplus, \otimes)$ 위에서 순서관계 $<_E$ 를 E 에 대한 $<$ 의 한정으로 정의하면, 즉, 모든 $x, y \in E$ 에 대하여 $\quad x <_E y \Leftrightarrow x < y$ 라 정의하면, $\mathcal{E} = (E, \oplus, \otimes, <_E)$ 는 순서정역이 된다.

(정의5.4) $\mathcal{D} = (D, +, \times), \mathcal{D}^* = (D^*, +^*, \times^*)$ 를 두개의 정역이라 하자. D 에서 D^* 로의 전단사함수 Φ 가 존재하여 다음의 두가지 조건을 만족하면 $\mathcal{D}$ 와 $\mathcal{D}^*$ 는 서로 동형(Isomorphic)이라 하고, 함수 Φ 를 $\mathcal{D}$ 에서 $\mathcal{D}^*$ 로의 동형사상(Isomorphism)이라 한다. 임의의 $x, y \in D$ 에 대해서

1. $\Phi(x + y) = \Phi(x) +^* \Phi(y)$ 이고,
2. $\Phi(x \times y) = \Phi(x) \times^* \Phi(y)$ 이다.

(정리5.5) Φ 가 $\mathcal{D} = (D, +, \times)$ 에서 $\mathcal{D}^* = (D^*, +^*, \times^*)$ 로의 동형사상이면, 임의의 $x, y \in D$ 에 대해서 다음의 성질들이 만족된다.

a. $\Phi(0_D) = 0_{D^*}$.

b. $\Phi(1_D) = 1_{D^*}$.

c. $\Phi(-x) = -_*\Phi(x)$.

d. $\Phi(x - y) = \Phi(x) -_* \Phi(y)$.

e. $\Phi(nx) = n\Phi(x)$ (단, $n \in P$)

(증명) (a) $\Phi(0_D) = \Phi(0_D + 0_D) = \Phi(0_D) +^* \Phi(0_D)$.

따라서 $\Phi(0_D) = 0_{D^*}$ 이다.

(b) $\Phi(1_D) = \Phi(1_D \times 1_D) = \Phi(1_D) \times^* \Phi(1_D)$

경우1. $\Phi(1_D) \neq 0_{D^*}$ 이면 소거법칙에 의하여 $1_{D^*} = \Phi(1_D)$ 이다.

경우2. $\Phi(1_D) = 0_{D^*}$ 이면 (a)에 의하여 $\Phi(0_D) = 0_{D^*}$ 이고 Φ 가 전단사함수이므로 $D = \{0_D\}$ 가 되고 $D^* = \{0_{D^*}\}$ 이다. 따라서 $0_{D^*} = 1_{D^*}$ 이고 $\Phi(1_D) = 0_{D^*} = 1_{D^*}$ 이다.

(c) $\Phi(x) +^* \Phi(-x) = \Phi(x + (-x)) = \Phi(0_D) = 0_{D^*}$ 이다.

따라서 $\Phi(-x) = -_*\Phi(x)$ 이다.

(d) $\Phi(x - y) = \Phi(x + (-y)) = \Phi(x) +^* \Phi(-y) = \Phi(x) +^* (-_*\Phi(y)) = \Phi(x) -_* \Phi(y)$.

(e) 임의의 $x \in D$ 에 대하여 집합 $A = \{n \in P \mid \Phi(nx) = n\Phi(x)\}$ 라 하면 $\Phi(1x) = \Phi(x) = 1\Phi(x)$ 이므로 $1 \in A$ 이다.

이제 $n \in A$라 가정하면 $\Phi(nx) = n\Phi(x)$ 이다.

그런데 $\Phi((n+1)x) = \Phi(nx+x) = \Phi(nx) +^{*} \Phi(x) = n\Phi(x) +^{*} \Phi(x) = (n+1)\Phi(x)$ 이다. 즉 $n+1 \in A$.

결국 $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ 이므로 수학적귀납법에 의하여 $A = P$ 이다.

다음 정리 (5.6) 에 의하면 표수 0인 정역으로부터의 정수와 정수체계는 근본적으로 같은 것임을 알 수 있다.

(정리5.6) $\mathcal{D} = (D, +, \times)$ 를 임의의 정역이라 하고, $\oplus$ 와 $\otimes$ 를 $\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}$ 에 대한 $+$ 와 $\times$ 의 한정으로 정의하면

a. $\mathcal{Z} = (Z_{\mathcal{D}}, \oplus, \otimes)$ 는 $\mathcal{D}$ 의 부분정역이다.

b. $\mathcal{D}$ 의 표수가 0 이면 $(Z, +_z, \times_z)$ 와 $(Z_{\mathcal{D}}, \oplus, \otimes)$ 는 동형이다.

(증명) (a) 정리 (4.12) 와 정리 (5.3)에 의하면 $\oplus$ 와 $\otimes$ 는 $Z_{\mathcal{D}}$ 에서의 이항연산이 되고, $\mathcal{Z}$ 는 $\mathcal{D}$ 의 부분정역이 된다.

(b) 모든 $\alpha \in Z$ 에 대하여 $\Phi(\alpha) = \alpha 1_D$ 라 하자.

그러면 정리4.11 에 의하여 $\Phi : Z \longrightarrow Z_{\mathcal{D}}$ 는 전사함수(onto)이다.

그리고 보조정리 (4.9)에 의하면 임의의 $\alpha, \beta \in Z$ 에 대해서 $\Phi(\alpha +_z \beta) = (\alpha +_z \beta)1_D = \alpha 1_D \oplus \beta 1_D = \Phi(\alpha) \oplus \Phi(\beta)$ 이고, $\Phi(\alpha \times_z \beta) = (\alpha \times_z \beta)1_D = \alpha 1_D \otimes \beta 1_D = \Phi(\alpha) \otimes \Phi(\beta)$ 이다.

이제 Φ 가 $1-1$ 임을 보이자. 만일 Φ 가 $1-1$ 함수가 아니라고 가정하면,

적당한 $\alpha,\ \beta \in Z$ 에 대하여 $\alpha \neq \beta$ 이고 $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$ 이다.

그러므로 $\alpha <_z \beta$ 또는 $\beta <_z \alpha$ 이다. 만일 $\alpha <_z \beta$ 이면 $0 <_z \beta -_z \alpha$ 이다.

그러면 $\Phi(\alpha) \oplus \Phi(\beta -_z \alpha) = \Phi(\alpha +_z (\beta -_z \alpha)) = \Phi(\beta)$ 이고, $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$

이므로 $\Phi(\beta -_z \alpha) = 0_D$ 이다. 즉, 적당한 $n \in P$ 에 대하여 $n = \beta -_z \alpha$ 이고, $n1_D = \Phi(n) = \Phi(\beta -_z \alpha) = 0_D$ 이다. 그러나 이것은 $\mathcal{D}$ 의 표수가 0 이라는 사실에 모순이다. $\beta <_z \alpha$ 인 경우도 마찬가지이다.
따라서 Φ 는 $1-1$ 함수이고, 결국 Φ 는 동형사상이다.

이제 동형사상의 개념을 순서정역으로 확장하기 위하여 다음의 정의를 살펴보자.

(정의5.7) $\mathcal{D} = (D, +, \times, <)$ 와 $\mathcal{D}^* = (D^*, +^*, \times^*, <^*)$ 을 두개의 순서정역이라 하자.
D 에서 D^* 로의 전단사함수 Φ 가 존재하여 다음의 세 가지 조건을 만족하면 $\mathcal{D}$ 와 $\mathcal{D}^*$ 를 서로 동형(Isomorphic)이라 하고, 함수 Φ 를 $\mathcal{D}$ 에서 $\mathcal{D}^*$ 로의 동형사상(Isomorphism)이라 한다. 임의의 원소 $x, y \in D$ 에 대하여

1. $\Phi(x+y) = \Phi(x) +^* \Phi(y)$ 이고,
2. $\Phi(x \times y) = \Phi(x) \times^* \Phi(y)$ 이고,
3. $x < y \Leftrightarrow \Phi(x) <^* \Phi(y)$ 이다.

(정리5.8) $\mathcal{D} = (D, +, \times)$ 를 표수 0 을 갖는 정역이라 할 때, $\oplus$ 와 $\odot$ 를 $\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}$ 에 대한 $+$ 와 $\times$ 의 한정으로 정의하고, $\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}$ 에서의 순서 관계 $<_Z$ 를 $x <_Z y \Leftrightarrow y - x \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 라 정의 하면

a. $(\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}, \oplus, \odot, <_Z)$ 는 순서정역이고,

b. $(Z, +_z, \times_z, <_z)$ 와 $(\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}, \oplus, \odot, <_Z)$ 는 서로 동형이다.

(증명) (a) 정리 5.6 에 의하여 $(\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}, \oplus, \odot)$ 는 정역이다.

이제 순서 공리 $(O1) \sim (O5)$ 가 성립함을 보이자.

$(O1)$ 모든 $x \in \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}$ 에 대하여 $x - x = 0_D \notin \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$) 이므로 $x \not<_Z x$ 이다.

$(O2)$ 모든 $x,\ y,\ z \in \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}$ 에 대하여

$x <_Z y$ 이고 $y <_Z z$ 라 하면 $y - x \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 이고 $z - y \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 이다.

따라서 정리 (4.7) 에 의하여 $z - x = (y - x) + (z - y) \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 이다. 즉 $x <_Z z$ 이다.

$(O3)$ $x,\ y \in \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}$ 라 하자. 그러면 정리 (4.12) 에 의하여 $y - x \in \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}$ 이다. 따라서 $\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}$ 의 정의에 의하면 $y - x \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 이거나 $y - x = 0_D$ 이거나 $-(y - x) \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 중 어느 하나이다.

따라서 $x <_Z y$ 이거나 $x = y$ 이거나 $y <_Z x$ 이다.

$(O4)$ $x,\ y,\ z \in \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}$ 이고 $x <_Z y$ 라 가정하자. 그러면 $y - x \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 이다.

그런데 $(z + y) - (z + x) = y - x \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 이므로 $z + x <_Z z + y$ 이다.

$(O5)$ $x,\ y,\ z \in \mathcal{Z}_{\mathcal{D}}$ 이고 $x <_Z y$ 이고 $0_D <_Z z$ 라 가정 하자. 그러면 $y - x \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 이고 $z = z - 0_D \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 이다. 정리 4.7 에 의하여 $(y - x) \otimes z \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 이다. 그런데 $(y - x) \otimes z = (y \otimes z) - (x \otimes z)$ 이다. 따라서 $x \otimes z <_Z y \otimes z$ 이다.

(b) 정리 5.6 의 증명에서 $\Phi(\alpha) = \alpha 1_D$ 는 $(Z, +_z, \times_z)$ 에서 $(\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}, \oplus, \otimes)$ 로의 동형사상임을 보였다.

이제 모든 $\alpha,\ \beta \in Z$ 에 대하여 $\alpha <_z \beta \Leftrightarrow \Phi(\alpha) <_Z \Phi(\beta)$ 임을 보이자. 즉 $\alpha <_z \beta \Leftrightarrow \beta 1_D - \alpha 1_D \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 또는 $0_z <_z \beta -_z \alpha \Leftrightarrow (\beta -_z \alpha) 1_D \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 임을 보이자. 이것은 임의의 $\gamma \in Z$ 에 대하여 $0_z <_z \gamma \Leftrightarrow \gamma 1_D \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 임을 보이면 된다.

따름정리 (4.5) 에 의하여 $0_z <_z \gamma \Rightarrow \gamma 1_D \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ 이다.

역증명을 위하여 $0_z \not<_z \gamma$ 라 가정하자. 그러면 $\gamma \leq_z 0_z$ 이다.

경우1. $\gamma = 0_z$ 이면 정리4.8에 의하여 $\gamma 1_D = 0_D \notin \mathcal{N}_\mathcal{D}$.

경우2. $\gamma <_z 0_z$ 이면 $0_z <_z (-\gamma)$ 이다. 따라서 $(-\gamma)1_D \in \mathcal{N}_\mathcal{D}$ 이다.

즉, $-(\gamma)1_D \in \mathcal{N}_\mathcal{D}$ 이다. 그러면 $\gamma 1_D \notin \mathcal{N}_\mathcal{D}$ 이어야 한다. 만약 그렇지않고 $\gamma 1_D \in \mathcal{N}_\mathcal{D}$ 라고 한다면 $0_D = (\gamma 1_D) \oplus (-(\gamma 1_D)) \in \mathcal{N}_\mathcal{D}$ 가 되어 모순이다.

결국 $0_z \not< \gamma \Rightarrow \gamma 1_D \notin \mathcal{N}_\mathcal{D}$ 이다. 즉, $\gamma 1_D \in \mathcal{N}_\mathcal{D} \Rightarrow 0_z <_z \gamma$ 이다.

Ⅵ. 결　론

수(Numbers) 와 숫자(Numerals) 를 명확히 구분하여 수의 개념을 이해해야 한다. 수의 개념은 쉽게 정의할 수 없는 추상적인 개념이다. 종이 위에 그려놓은 어떤 표시가 숫자는 될 수 있지만 수는 아니다. 수를 나타내는 수단에 불과한 것이다. 수의 개념을 구체화하고 발전시키는 데에는 수를 나타내는 수단인 숫자가 중요한 역할을 한다. 수를 말로써 나타낸 것이 수사이고, 기호로 나타낸 것이 숫자이다. 세계 여러 민족이 문자가 각각 다른 것처럼 숫자도 여러가지 방법으로 표시된다. 이를테면 이집트 숫자, 그리이스 숫자, 로마 숫자, 마야의 숫자, 한자의 숫자, 인도의 숫자, 쐐기형 문자로 나타내는 바빌로니아 숫자 등이다. 오늘날 세계적으로 널리 사용되고 있는 숫자는 인도에서 발달되어 온 것으로서 아라비아 숫자로 불린다. 아라비아 숫자의 기수법은 10 을 기저로 하는 십진법을 이용한다.

본 연구는 수학교육에 있어서 가장 중요한 수의 체계 중에서 정수 체계에 대한 개념과 이론적 배경을 조사하였다. 그러나 중등 수학교육에 있어서는 엄밀한 이론적 전개과정을 지도하려는 것이 아니라, 다만 교육현장에 임하는 교사 개개인이 지도 내용에 대한 이론적 배경으로 삼아 학생이 장차 더 높은 수준의 수학적 지식을 습득하는 데에 큰 저항이 없도록 기본적 지식을 함양한다는 점에 유의하여야 하겠다.

제 3 장에서 자연수의 체계에서 정수의 체계로 확장을 하여 이 정수의 체계가 표수가 0인 순서정역의 대수적 구조를 갖는다는 사실을 논리적으로 밝혔으며, 정수의

체계는 자연수의 체계를 포함하면서 여러가지 대수적 성질들을 그대로 보존시켜 주는 확장된 체계임을 보였다. 제 4 장에서는 표수가 0인 순서정역으로부터 새롭게 정수를 도입하였고, 제 5 장에서 이들 두 정수의 체계가 서로 동형임을 보임으로써 정수체계의 유일성을 밝혔다. 그러나 정수체계에서는 곱셈에 대한 역연산인 나눗셈은 어려움이 따르므로 정수체계에서 더욱 확장된 유리수. 실수의 체계에 관해서도 이론적 전개가 필요하다.

참 고 문 헌

[1] 김응태, 박승안 (1983),「현대 대수학」, 이우출판사.

[2] 양성호 (1986),"자연수 체계의 지도법에 관한 연구," 「논문집」,제22집,제주대학교.

[3] 하대연, 박재균 (1984),「수학 영한 사전」, 형설출판사.

[4] 대한수학회 (1992),「한글수학용어 기초자료집」.

[5] Elliott Mendelson (1973), *Number System and The Foundations of Analysis*, Academic Press, New York and London.

[6] Solomon Feferman (1964), *The Number Systems/ Foundations of Analysis*. Addison - Wesley Publishing Company. Inc. Palo Alto and London.

<Abstract>

A STUDY ON THE STRUCTURE OF THE SYSTEM OF INTEGERS

Kim, Yong-Jun

Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Cheju, Korea

Supervised by professor Yang, Sung-Ho

In this thesis, we study the structure of the system of integers.

First, the properties of the system of natural numbers and the basic structure of algebra is introduced.

In Chapter 3, we extend the system of natural numbers to the system of integers and prove logically the basic properties which are taken for granted intuitively and also prove that the system of integers has various properties of the ordered integral domain. On the other hand, we derive the system of integers from the ordered integral domain in Chapter 4.

Finally, we show the uniqueness of the system of integers by proving that the extened system of integers in Chapter 3 and the system of integers derived from the ordered integral domain are isomorphic each other.

---

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in Partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 1993 .

감사의 글

하나의 과정을 마친다는 것, 더군다나 한 편의 논문을 완성한다는 것이 이렇게 많은 노력과 시간을 필요로 하는 것인지를 절실하게 깨달았습니다. 이제 이 논문을 대하면서 더욱 교수님들이 존경스럽고, 한편으론 성취감으로 마음 뿌듯함을 느낍니다.

이 논문이 완성되기까지 세심한 학문 지도는 물론 TEX의 이용 방법까지 자세하게 지도해 주신 양성호 교수님께 진심으로 감사를 드립니다. 그리고, 그동안 깊은 관심을 가지고 지도와 충고, 격려를 아끼지 않으신 수학교육과, 수학과 교수님들께도 고마운 말씀을 드립니다.

또한 함께 고생하고 의지했던 홍성규, 홍택용, 양창홍 선생님의 앞날에도 항상 행운이 함께하길 빌겠습니다.

아울러 학교 수업진행의 어려움 속에서도 대학원 과정을 마칠 수 있도록 배려해 주신 제주상업고등학교 부택환 교장선생님을 비롯한 여러 선생님께 감사드리며, 주위에서 성원해 주신 모든 분들께도 감사를 드립니다.

자나깨나 자식을 위해 헌신해 오시는 어머님, 많은 어려움을 불평없이 이겨내며 내조해 준 사랑하는 아내 명자, 항상 말벗이 되어준 귀여운 딸 민정이와 이 성취의 기쁨을 함께 나누고자 합니다.

1993년 8월

김 용 준 드림