碩士學位 請求論文

整數 體系에 관한 研究

指導敎授 梁 成 豪

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

宋 壬 權

1994 年 8 月 日

整數 體系에 관한 研究

指導敎授 梁 成 豪

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함

1994 年 6 月 日

濟州大學校 敎育大學院 數學敎育專攻

提出者 宋 壬 權

宋壬權의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

1994 年 7 月 日

審査委員長

審 査 委 員 양 성 호

審 査 委 員 송 석 준

<초 록>

정수 체계에 관한 연구

송 임 권

제주대학교 교육대학원 수학교육전공

지도교수 양 성 호

본 연구에서는 자연수와 일대일 대응관계에 있는 집합을 이용하여 정수 체계를 도입하고 그의 합, 곱, 순서관계에 관한 성질들이 성립함을 논리적으로 증명함으로써 자연수 체계에서의 대수적 성질들이 보존됨을 밝힌다.

그리고 동치류를 이용한 정수 체계와 일대일 대응함수를 이용한 정수 체계의 두 순서정역이 서로 동형임을 밝힌다.

목 차

I. 서 론

인간은 수와 밀접한 관계를 갖고 있으며 일상생활을 하는 데 수를 자연스레 만나게 된다. 인간은 출생에서부터 언제나 수와 함께 존재하고 있기 때문이다. 그리고 급속도로 첨단화, 기계화된 현대 과학문명 속에서도 수의 편의성을 느끼지 않을 수 없으며, 인간의 생활은 수를 외면하고 존재할 수 없는 운명에 있다.

수에는 여러 종류가 있지만 우리와 밀접한 관계를 맺고 있는 자연수를 Peano는 순서수적으로 Peano 체계를 출발점으로 하여 자연수론을 전개하였다.
0과 음의 정수는 역사의 문헌에서 보면 비교적 늦게 수학에 소개되었다. 물론 여러 응용분야에서 잘 알려져 있는 것처럼 다양한 영역에서 0과 음의 정수는 보편적으로 잘 쓰인다.
우리는 자연수 (즉, 페아노 체계) 로부터 정수를 구성하는 법을 설명하고 정수의 기초적이고 유사한 성질들을 더듬어 보아야 할 필요성을 느끼게 된다.
각 자연수 x에 대하여 새로운 원소 0과 새로운 원소 $-x$를 결합함으로써 정수를 생각해낼 수 있다. 그 때에 객관적인 산술적 연산과 관계를 정의해야만 하며 정수의 기본적인 성질들을 유도해야 한다.

본 논문에서는 정수의 체계를 다음과 같이 전개하고자 한다.
제 2 장에서 페아노 체계의 정의와 동치류를 이용한 정수 체계의 기본적인 정의, 정리들을 증명없이 요약하여 소개한다.
제 3 장에서는 페아노 체계를 근거로 자연수와 일대일 대응되는 집합 P^-를 도입하여 정수 체계 $(J, +_J, \times_J, <_J)$에 대한 정의와 기본적인 정리들을 논리적으로 증명한다.
제 4 장에서는 제 2 장의 정수 체계 $(Z, +_z, \times_z, <_z)$와 제 3 장에서 전개한 정수 체계 $(J, +_J, \times_J, <_J)$가 서로 동형임을 밝히고자 한다.

Ⅱ. 동치류를 이용한 정수 체계의 전개

이 장에서는 페아노 체계 (Peano System)의 정의, 자연수 체계에 대한 기본적인 성질들과 동치류를 이용한 정수 체계에서의 정의, 정리들을 증명없이 요약하여 전개하고자 한다.

정의 2.1 (페아노 체계 : Peano System)
집합 P와 P에 속하는 특정한 원소 1과 P에서 P로의 함수 S가 다음의 세 조건을 만족할 때 페아노 체계라 하고, 기호 $(P, S, 1)$로 나타낸다.

P1. 1은 P의 어떤 원소 x의 후자(Successor), 즉 $S(x)$가 될 수 없다.

P2. P의 서로 다른 원소는 각기 다른 후자를 갖는다.

P3. P는 수학적 귀납법이 만족된다.

(즉, $(\forall A)\ ([A \subseteq P \wedge 1 \in A \wedge (\forall x)(x \Rightarrow S(x) \in A)] \Longrightarrow P = A.)$

페아노 체계의 존재성을 가정할 때 유일하게 존재하며, 이렇게 유일하게 존재하는 페아노 체계 $(P, S, 1)$를 자연수 체계라 하면 P의 원소들을 자연수 (Natural Number)라 한다. 그리고 그 자연수들을

$S(1) = 2,\ S(2) = 3,\ S(3) = 4, \cdots$ 등으로 나타내기로 한다.

이제, 자연수에서의 이항연산 $+$ 와 $\times$는 유일하게 존재하고 각각 합, 곱이라 부르며 이들에 대한 다음의 성질들이 성립한다.

정리 2.2 (자연수에서의 합과 곱에 대한 성질)
모든 자연수 x, y, z에 대하여

(a) $x + (y + z) = (x + y) + z$

(b) $x + y = y + x$

(c) $y \neq x + y$

(d) $x = y$이거나 $x = y + u$이거나 $y = x + v$ 중 어느 하나의 경우이다.

(적당한 자연수 u, v에 대하여)

(e) $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$

(f) $x \times y = y \times x$

(g) $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$

(h) $x \times z = y \times z \Longleftrightarrow x = y$

서로 다른 임의의 원소 $x, y \in P$에 대하여 자연수에서의 순서관계를

$$x < y \Longleftrightarrow (\exists z)(y = x + z)$$

와 같이 정의하며 다음의 성질들이 성립한다.

정리 2.3 (순서관계에 대한 성질)

임의의 원소 $x, y, z \in P$에 대하여

(a) $x < x + y$

(b) $x < y \Longleftrightarrow x + z < y + z$

(c) $x < y \Longleftrightarrow x \times z < y \times z$

정의 2.4 정역 $(R, +, \times)$와 R에서의 이항관계 $<$가 다음 조건을 만족하면 $(R, +, \times, <)$을 순서정역 (Ordered Integral Domain)이라 한다.

O1. $x \not< x$

O2. $[x < y,\ y < z] \Longrightarrow x < z$

O3. $x < y$ 또는 $x = y$ 또는 $y < x$

O4. $x < y \Longrightarrow x + z < y + z$

O5. $[x < y,\ 0 < z] \Longrightarrow x \times z < y \times z$

정리 2.5 순서정역 $(R, +, \times, <)$에 대하여 다음의 성질들이 성립한다.

(a) $x < y \Longrightarrow 0 < y - x$

(b) $x < y \Longrightarrow x - y < 0$

(c) $0 < y \Longrightarrow -y < 0$

(d) $x < 0 \Longrightarrow 0 < -x$

(e) $x < y \Longrightarrow -y < -x$

(f) $[x < y,\ z < 0] \Longrightarrow y \times z < x \times z$

(g) $[0 < x,\ 0 < y] \Longrightarrow 0 < x + y \wedge 0 < x \times y$

(h) $[x < 0,\ y < 0] \Longrightarrow 0 < x \times y$

(i) $[0 < x,\ y < 0] \Longrightarrow x \times y < 0$

같은 정수를 나타내는 순서쌍 $(n,\ k)$들은 모두 동치(Equivalent)가 되도록 취급되어야 하므로 $P \times P$ 위에서의 관계(Relation)을 다음과 같이 정의한다.

정의 2.6 집합 P의 임의의 원소 $n,\ j,\ k,\ i$에 대하여 $P \times P$ 위의 관계 (Relation) $\sim$를 $n + i = k + j$일 때, $(n, j) \sim (k, i)$으로 정의한다. (단, P는 자연수의 집합)

정리 2.7 $P \times P$ 위에서의 관계 $\sim$은 동치관계(Equivalent Relation)이다. 즉, 집합 P의 원소 $h,\ i,\ j,\ k,\ m,\ n$에 대하여

(a) $(h,i) \sim (h,i)$; 반사성 (reflexivity),

(b) $(h,i) \sim (j,k) \Longrightarrow (j,k) \sim (h,i)$; 대칭성 (symmetry),

(c) $(h,i) \sim (j,k),\ (j,k) \sim (m,n) \Longrightarrow (h,i) \sim (m,n)$;

추이성(transitivity)이 성립한다.

$P \times P$는 동치류로 분류할 수 있으며, (n,j)를 포함하는 동치류를 $[(n,j)]$로 나타낸다.

즉, $[(n,j)] = \{(k,i) \in P \times P \mid (n,j) \sim (k,i)\}$이다.
관계 $\sim$에 관한 동치류의 집합 Z의 원소들을 정수(Integer)라 부르며, 그리이스 소문자 $\alpha,\ \beta,\ \gamma, \cdots$ 등으로 표시한다.

정의 2.8 두 정수 $\alpha,\ \beta$에 대하여 $(n,j) \in \alpha,\ \ (k,i) \in \beta$일 때,
$\alpha +_z \beta = [(n+k,\ j+i)]$로 정의한다.

정리 2.9 (합에 대한 성질)
집합 Z의 모든 원소 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$에 대하여 다음의 성질들이 성립한다.

(a) $\alpha +_z \beta = \beta +_z \alpha$ (교환법칙)

(b) $\alpha +_z (\beta +_z \gamma) = (\alpha +_z \beta) +_z \gamma$ (결합법칙)

(c) $\alpha +_z 0_z = \alpha$

(d) $(\exists_1 \delta)(\alpha +_z \delta = 0_z)$

(여기서 $\delta = -_z\alpha$이고, $(k,i) \in \alpha \Longrightarrow (i,k) \in -_z\alpha$

정의 2.10 임의의 두 정수 $\alpha,\ \beta$에 대하여 $(n,j) \in \alpha,\ \ (k,i) \in \beta$일 때,
$\alpha \times_z \beta = [((n \times k) + (j \times i), (j \times k) + (n \times i))]$로 정의한다.

정리 2.11 (곱에 대한 성질)

임의의 정수 α, β, γ에 대하여 다음의 성질들이 성립한다.

(a) $\alpha \times_z \beta = \beta \times_z \alpha$ (교환법칙)

(b) $\alpha \times_z (\beta \times_z \gamma) = (\alpha \times_z \beta) \times_z \gamma$ (결합법칙)

(c) $\alpha \times_z (\beta +_z \gamma) = (\alpha \times_z \beta) +_z (\alpha \times_z \gamma)$ (분배법칙)

(d) $\alpha \times_z 1_z = \alpha$

정리 2.12 임의의 정수 α, β에 대하여
$\alpha \neq 0_z$, $\beta \neq 0_z$이면 $\alpha \times_z \beta \neq 0_z$이다.

위의 정리로부터 정수의 집합이 영인자(Zero Divisor)를 갖지 않음을 알 수 있고, 정수의 집합은 정역(Integral Domain)을 이루고 있음을 알 수 있다.

보조정리 2.13 임의의 정수 α에 대하여 $(n, j) \in \alpha$, $(k, i) \in \alpha$라 하면
$j < n \Longleftrightarrow i < k$이다.

정의 2.14 $\mathcal{P}_z = \{\alpha \in Z | (n, j) \in \alpha \Longrightarrow j < n\}$.
즉, 모든 $(n, j) \in \alpha$에 대하여 $\alpha \in \mathcal{P}_z \Longleftrightarrow j < n$.

보조정리 2.15 $\mathcal{P}_z$는 다음을 만족한다.

(a) $0_z \notin \mathcal{P}_z$.

(b) 모든 $\alpha \in Z$에 대하여 $\alpha \in \mathcal{P}_z$이거나 $-_z\alpha \in \mathcal{P}_z$.

(c) $\alpha \in \mathcal{P}_z,\ \beta \in \mathcal{P}_z \Longrightarrow \alpha +_z \beta \in \mathcal{P}_z$.

(d) $\alpha \in \mathcal{P}_z,\ \beta \in \mathcal{P}_z \Longrightarrow \alpha \times_z \beta \in \mathcal{P}_z$.

정의 2.16 $\beta -_z \alpha = \beta +_z (-_z\alpha)$ 그리고 $\alpha <_z \beta \Longleftrightarrow \beta -_z \alpha \in \mathcal{P}_z$.

위의 보조정리 2.15, 정의 2.16으로부터 정수의 집합은 순서정역(Ordered Itegral Domain)의 구조를 갖고 있음을 알 수 있다.

정리 2.17 $(Z, +_z, \times_z, <_z)$는 순서정역이고 $\mathcal{P}_z$는 양의 원소의 집합이다.

정리 2.18 페아노 체계 $\mathcal{P}_z$에서 정의되는 합과 곱, 그리고 순서 관계를 $\oplus, \otimes, <_p$라 하면 임의의 $\alpha,\ \beta \in \mathcal{P}_z$에 대하여 다음이 성립한다.

(a) $\alpha \oplus \beta = \alpha +_z \beta$

(b) $\alpha \otimes \beta = \alpha \times_z \beta$

(c) $\alpha <_p \beta \Longleftrightarrow \alpha <_z \beta$.

정수의 체계는 자연수의 체계를 포함하면서 합과 곱의 이항연산과 순서관계 및 여러 가지 대수적 성질들을 그대로 보존시키는 확장된 체계임을 알 수 있다.

정의 2.19 $\mathcal{D} = (D, +, \times)$를 정역이라 하자. $x \in D$이고 $\alpha \in Z$에 대하여 다음과 같이 정의한다.

$$\alpha x = \begin{cases} \alpha x & (0_z <_z \alpha\text{일 때}) \\ 0_D & (\alpha = 0_z\text{일 때}) \\ (-\alpha)(-x) & (\alpha <_z 0_z\text{일 때}) \end{cases}$$

보조정리 2.20 임의의 두 정수 α, β와 정역 D의 두 원소 x, y에 대하여 다음의 성질들이 성립한다.

(a) $(\alpha +_z \beta)x = \alpha x + \beta x$.

(b) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

(c) $\alpha(-x) = -(\alpha x)$.

(d) $(\alpha \times_z \beta)x = \alpha(\beta x)$.

(e) $\alpha(x \times y) = (\alpha x) \times y$.

(f) $(\alpha x) \times (\beta y) = (\alpha \times_z \beta)(x \times y)$.

(g) $(-\alpha)x = -(\alpha x)$.

(h) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$.

Ⅲ. 일대일 대응함수를 이용한 정수 체계의 전개

우리는 이미 알고 있는 페아노 체계 $(P, S, 1)$에서 시작하기로 한다.
P의 원소들은 자연수라 불리며 이제, P와 서로 소이고 P와 P^-사이에 일대일 대응 ψ이 존재하는 한 집합 P^-를 잡는다. P에 속하는 각 x에 대하여 $\psi(x)$를 x^-로 나타낸다.
0은 $P \cup P^-$에 속하지 않는다고 하자.
$J = P \cup P^- \cup \{0\}$이라고 하면, J를 정수의 집합이라 불린다.

정의 3.1

$$-x = \begin{cases} x^- & (\ x \in P\text{일 때}\ ) \\ 0 & (\ x = 0\text{일 때}\ ) \\ u & (\ x = u^- \in P^-\text{일 때}\ ) \end{cases}$$

따라서, $-x$는 각 정수 x에 대하여 정의되고, 그 값은 정수이다.

정리 3.2 다음이 성립한다.

(1) $-(-x) = x$

(2) $x = -y \Longleftrightarrow -x = y$

(3) $x = 0 \Longleftrightarrow -x = 0$

(4) $x \in P \Longleftrightarrow -x \in P^-$

(증명) (1) i) $x \in P$이면 $-x = x^-$이고 $x^- \in P^-$이다.

$-x = x^- = y$라 놓으면 $-y = x$가 된다.

따라서, $-(-x) = x$가 성립한다.

ii) $x = 0$이면 $-x = 0$. 그러므로 $-(-x) = 0 = x$.

iii) $x = u^-$이면 $-x = u$이고 $u \in P$. 따라서, $-(-x) = -u = u^- = x$.

i), ii), iii)에 의하여, $-(-x) = x$.

(2) $x = -y \Leftrightarrow -x = -(-y) \Leftrightarrow -x = y$

(3) ($\Longrightarrow$) $x = 0$일 때, 정의에 의하여 $-x = 0$.

($\Longleftarrow$) $-x = 0 \Rightarrow -(-x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

(4) ($\Longrightarrow$) $x \in P$일 때, 정의에 의하여 $-x = x^- \in P^-$. 따라서, $-x \in P^-$.

($\Longleftarrow$) $-x \in P^- \Rightarrow -x = u^-$, $u \in P \Rightarrow x = -(-x) = u \in P$.

정의 3.3

$$|x| = \begin{cases} x & (x \in P \text{ 또는 } x = 0\text{일 때}) \\ -x & (x \in P^-\text{일 때 }) \end{cases}$$

정리 3.4 다음이 성립한다.

(1) $|-x| = |x|$

(2) $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(3) 임의의 $x(\neq 0) \in J$에 대하여 $|x| \in P$이다.

(증명) (1) i) $x \in P \Rightarrow -x \in P^- \Rightarrow |-x| = -(-x) = x = |x|$.

ii) $x = 0 \Rightarrow -x = 0$

여기서, $|-x| = 0$이고 $|x| = 0$이므로 $|-x| = |x|$.

iii) $x \in P^- \Rightarrow -x \in P \Rightarrow |-x| = -x$

정의에 의하여, $x \in P^-$일 때 $|x| = -x$이므로 $|-x| = |x|$.

i), ii), iii)에 의하여, $|-x| = |x|$임을 알 수 있다.

(2) ($\Longleftarrow$) $x = 0$일 때, 정의에 의하여 $|x| = 0$이 성립한다.

($\Longrightarrow$) $x \neq 0$이라 가정하자. 그러면 $x \in P$ 또는 $x \in P^-$이다.

i) $x \in P$이면 $|x| = x \neq 0$이다.

ii) $x \in P^-$이면 $|x| = -x \neq 0$.

따라서, $|x| = 0$이면 $x = 0$임을 알 수 있다.

(3) i) $x \in P$이면 $|x| = x \in P$.

ii) $x \in P^-$이면 $|x| = -x \in P$.

(주의) $x,\ y \in P$이고 $x < y$이면 $x + v = y$를 만족하는 $v \in P$가 유일하게 존재한다.

이 v를 $y - x$로 나타낸다. 즉, $v = y - x$.

정의 3.5 $<_J$는 다음과 같이 정의된다.

(1) ($x \in P,\ y \in P,\ x < y$)이거나 ($y \in P$, ($x = 0$또는$x \in P^-$)) 또는

($x \in P^-,\ y = 0$) 또는 ($x \in P^-,\ y \in P^-,\ -y < -x$)

일 때, $x <_J y$라 정의하고

(2) $x <_J y$ 또는 $x = y$일 때 $x \leq_J y$라 한다.

정리 3.6 순서관계 $<_J$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $x \not<_J x$.

(2) $x <_J y,\ y <_J z \Longrightarrow x <_J z$.

(3) 두 정수 x, y사이에는 $x <_J y$, $x = y$, $y <_J x$ 중에서 반드시 하나만 성립한다.

(4) $x \in P \Longleftrightarrow 0 <_J x$.

(5) $x \in P^- \Longleftrightarrow x <_J 0$.

(6) $x <_J 0 \Longleftrightarrow 0 <_J -x$.

(7) $0 <_J x \Longleftrightarrow -x <_J 0$.

(8) $x \leq_J x$.

(9) $x \leq_J y,\ y <_J z \Longrightarrow x <_J z$.

(10) $x <_J y,\ y \leq_J z \Longrightarrow x <_J z$.

(11) $x \leq_J y,\ y \leq_J z \Longrightarrow x \leq_J z$.

(12) $x \leq_J y$ 또는 $y \leq_J x$.

(증명) (1) $x <_J x$가 성립한다고 가정하자.

i) $x \in P$일 때, $x < x$이 되어 $x = x$에 모순이다.

ii) $x = 0$일 때, $0 < 0$이 되어 $0 = 0$에 모순이다.

iii) $x \in P^-$일 때, $-x < -x$이 되어 모순이다.

따라서, i), ii), iii)에 의하여 $x \not<_J x$.

(2) i) $x \in P$, $y \in P$, $x < y$일 때 ,

$y \in P$이고 $y <_J z$이므로 $z \in P$, $y < z$.

따라서 $x < z$. 즉, $x \in P$, $z \in P$, $x < z$.

그러므로, $x <_J z$.

ii) $y \in P$이고 ($x = 0$ 또는 $x \in P^-$)일 때 ,

$y \in P$이고 $y <_J z$이므로 $z \in P$이다.

정의에 의하여 $x <_J z$이다.

iii) $x \in P^-$, $y = 0$일 때, $y = 0$이고 $y <_J z$이므로 $z \in P$.

그러므로, $x <_J z$.

iv) $x \in P^-$, $y \in P^-$, $-y < -x$일 때,

$y \in P^-$이고 $y <_J z$이므로 $z \in P^-$ 또는 $z = 0$ 또는 $z \in P$이다.

iv-1) $z \in P^-$인 경우 : $y <_J z$이므로 $-z < -y$이어야 한다.

그리고, $-z < -y$이고 $-y < -x$이므로 $-z < -x$이다.

따라서, $x <_J z$이다.

iv-2) $z = 0$ 또는 $z \in P$인 경우는 정의에 의하여 $x <_J z$이다.

(3) i) $(x \in P,\ y \in P)$이거나 $(x \in P^-, y \in P^-)$인 경우는 자연수에서의 삼분법칙에 의하여 성립한다.

ii) 그밖의 경우는 정의에 의하여 결과는 성립한다.

(4)와 (5)는 정의에 의하여 자명하다.

(6) $(\Longrightarrow)$ $x <_J 0$이므로 $x \in P^- \Rightarrow -x \in P$. 그러므로 $0 <_J -x$.

$(\Longleftarrow)$ $0 <_J -x$이기 때문에 $-x \in P \Rightarrow x \in P^-$. 그러므로 $x <_J 0$.

(7) $(\Longrightarrow)$ $0 <_J x$이므로 $x \in P \Rightarrow -x \in P^-$. 그러므로 $-x <_J 0$.

$(\Longleftarrow)$ $-x <_J 0$이므로 $-x \in P^- \Rightarrow x \in P$. 그러므로 $0 <_J x$.

(8) $x = x$이므로 당연히 $x \leq x$가 성립한다.

(9)

$$
\begin{aligned}
x \leq_J y \wedge y <_J z &\Rightarrow (x <_J y \text{ 또는 } x = y\ ) \wedge y <_J z \\
&\Rightarrow (x <_J y \wedge y <_J z\ ) \text{ 또는 } (x = y \wedge y <_J z\ ) \\
&\Rightarrow (x <_J z\ ) \text{ 또는 } (x <_J z\ ) \\
&\Rightarrow x <_J z.
\end{aligned}
$$

(10)

$$x <_J y \wedge y \leq_J z \Rightarrow x <_J y \wedge (y <_J z \vee y = z)$$
$$\Rightarrow (x <_J y \wedge y <_J z) \vee (x <_J y \wedge y = z)$$
$$\Rightarrow (x <_J z) \vee (x <_J z)$$
$$\Rightarrow x <_J z.$$

(11)

$$x \leq_J y \wedge (y <_J z \vee y = z) \Rightarrow (x \leq_J y \wedge y <_J z) \vee (x \leq_J y \wedge y = z)$$
$$\Rightarrow (x <_J z) \vee (x \leq_J z)$$
$$\Rightarrow x \leq_J z.$$

(12) (3)에 의하여 당연히 성립한다.

정의 3.7

$$x +_J y = \begin{cases} x + y & (x \in P,\ y \in P\text{일 때}) \\ x & (y = 0\text{일 때}) \\ y & (x = 0\text{일 때}) \\ -(|x| + |y|) & (x \in P^-, y \in P^-\text{일 때}) \\ |y| - |x| & (x <_J 0 <_J y,\ |x| < |y|\text{일 때}) \\ 0 & (x <_J 0 <_J y,\ |x| = |y|\text{일 때}) \\ -(|x| - |y|) & (x <_J 0 <_J y,\ |x| > |y|\text{일 때}) \\ y +_J x & (y <_J 0 <_J x\text{일 때}). \end{cases}$$

이 복잡한 정의는 정수의 덧셈에 대한 직관적인 개념과 일치한다.

정리 3.8 (덧셈에 대한 성질)

(1) $x +_J 0 = 0 +_J x = x$.

(2) $x +_J y = y +_J x$.

(3) $x +_J (-x) = 0$.

(4) $x +_J y = 0 \Longleftrightarrow x = -y$.

(5) $-(x +_J y) = (-x) +_J (-y)$.

(증명) (1) 정의에 의하여 자명하다.

(2) i) $x \in P,\ y \in P$일 때 , $x +_J y = x + y$이고 $y +_J x = y + x$이다.

$x + y = y + x$이므로, $x +_J y = y +_J x$.

ii) $y = 0$일 때 , $x +_J y = x$, $y +_J x = x$이므로 $x +_J y = y +_J x$.

iii) $x = 0$일 때, $x +_J y = y = y +_J x$.

iv) $x \in P^-$, $y \in P^-$일 때 , $x +_J y = -(|x| + |y|)$,

$y +_J x = -(|y| + |x|)$이다. $|x| + |y| = |y| + |x|$이므로

$x +_J y = y +_J x$.

v) $x <_J 0 <_J y$이거나 $y <_J 0 <_J x$일 때는 정의에 의하여 당연히 성립한다.

(3) i) $x \in P$일 때,

$(-x) <_J 0 <_J x$이고 $|-x| = |x|$이므로 $x +_J (-x) = 0$.

ii) $x = 0$일 때, $-x = 0$이므로 $x +_J (-x) = 0$.

iii) $x \in P^-$일 때,

$x <_J 0 <_J (-x)$이고 $|-x| = |x|$이므로 $x +_J (-x) = 0$.

(4) $(\Longleftarrow)$: $x = -y$이므로 $x +_J y = x +_J (-x) = 0$.

$(\Longrightarrow)$: $x \in P$이고 $y \in P$인 경우와 $x \in P^-$이고 $y \in P^-$인 경우는 일어나지 않는다. 왜냐하면, 그러한 경우에는 $x +_J y \neq 0$이므로 모순이 생긴다.

i) $x = y = 0$인 경우 : $x = 0 = -y$로 성립한다.

ii) $x <_J 0 <_J y$인 경우 : $x +_J y = 0$이기 위해서는 $|x| = |y|$이어야 한다.

즉, $-x = |x| = |y| = y$이다. 따라서, $x = -y$이다.

iii) $y <_J 0 <_J x$인 경우 : $x +_J y = y +_J x$이므로 ii)에 의하여 성립한다.

(5) $\{(-x) +_J (-y)\} +_J (x +_J y) = 0$임을 보인다면 (4)에 의하여 결과는 성립할 것이다.

i) $x \in P$이고 $y \in P$인 경우 : $-x \in P^-$이고 $-y \in P^-$이므로

$(-x) +_J (-y) = -(|-x| + |-y|) = -(|x| + |y|) = -(x + y)$이다.

그리고, $x +_J y = x + y$이므로 (3)에 의하여,

$\{(-x) +_J (-y)\} +_J (x +_J y) = 0$이다.

ii) $x = 0$이거나 $y = 0$인 경우는 당연히 성립한다.

iii) $x \in P^-$이고 $y \in P^-$인 경우 :

$-x \in P$이고 $-y \in P$이므로 $(-x) +_J (-y) = (-x) + (-y)$.

그리고 $x +_J y = -(|x| + |y|) = -\{(-x) + (-y)\}$이다. 따라서,

$\{(-x)+_J(-y)\}+_J(x+_J y) = \{(-x)+_J(-y)\}+_J[-\{(-x)+(-y)\}] = 0$

iv) $x <_J 0 <_J y$이고 $|x| < |y|$인 경우 :

$x +_J y = |y| - |x| = y - (-x)$이다.

$(-y) <_J 0 <_J (-x)$이고 $|-x| = |x| < |y| = |-y|$이므로

$(-x) +_J (-y) = -(|-y| - |-x|) = -(y - (-x))$이다.

따라서, $\{(-x)+_J(-y)\}+_J(x+_Jy) = -\{y-(-x)\}+_J\{y-(-x)\} = 0$이다.

v) $x <_J 0 <_J y$이고 $|x| = |y|$인 경우 :

$x +_J y = 0$이다. 그리고 $(-y) <_J 0 <_J (-x)$이고 $|-x| = |-y|$이므로

$(-x) +_J (-y) = 0$이다. 따라서 $\{(-x) +_J (-y)\} +_J (x +_J y) = 0$이다.

vi) $x <_J 0 <_J y$이고 $|y| < |x|$인 경우 :

$x +_J y = -(|x| - |y|) = -(-x - y)$이다. 그리고,

$(-y) <_J 0 <_J (-x)$이고 $|-y| = |y| < |x| = |-x|$이므로

$(-x) +_J (-y) = |-x| - |-y| = -x - y$이다.

따라서, $\{(-x) +_J (-y)\} +_J (x +_J y) = 0$이다.

vii) $y <_J 0 <_J x$인 경우는 $x +_J y = y +_J x$이므로

iv), v), vii)에 의하여 성립한다.

정의 3.9 $x -_J y = x +_J (-y)$.

(주의) x, $y \in P$ 이고 $y < x$일 때,

$x -_J y = x +_J (-y) = x - |y| = x - y$.

정리 3.10 (1) $x -_J x = 0$.

(2) $-(x -_J y) = y -_J x$.

(3) $x <_J y \Longleftrightarrow x -_J y <_J 0$.

(4) $x = y \Longleftrightarrow x -_J y = 0$.

(5) $x >_J y \Longleftrightarrow x -_J y >_J 0$.

(6) $x <_J y \Longleftrightarrow -y <_J -x$.

(7) $x = y \Longleftrightarrow -y = -x$.

(8) $(\forall x)\ (x \in J \Longrightarrow (\exists u)(\exists v)(u \in P,\ v \in P,\ x = u -_J v))$.

(9) $x = a -_J b$이고 $y = c -_J d$ (단, $a,\ b,\ c,\ d \in P$)이면

$x +_J y = (a + c) -_J (b + d)$.

(10) $(x +_J y) +_J z = x +_J (y +_J z)$.

(11) $x +_J y = z \Longleftrightarrow y = z -_J x$.

(증명) (1) $x -_J x = x +_J (-x) = 0$.

(2) $-(x -_J y) = -(x +_J (-y)) = (-x) +_J (-(-y))$

$= (-x) +_J y = y +_J (-x) = y -_J x$.

(3) $(\Longrightarrow)$

i) $x \in P,\ y \in P,\ x < y$일 때,

$-y \in P^-$이고 $|x| = x < y = |y| = |-y|$이므로

$x -_J y = x +_J (-y) = -(|-y| - x) = -(y - x) <_J 0$.

ii) $x = 0,\ y \in P$일 때, $-y \in P^-$이므로

$x -_J y = x +_J (-y) = -y <_J 0$.

iii) $x \in P^-,\ y \in P$일 때, $-y \in P^-,\ |x| = -x,\ |-y| = y$이므로

$x -_J y = x +_J (-y) = -(|x| + |-y|) = -((-x) + y) <_J 0$.

iv) $x \in P^-,\ y = 0$일 때, $-y = 0$이므로

$x -_J y = x +_J (-y) = x <_J 0$.

v) $x \in P^-,\ y \in P^-,\ -y < -x$일 때, $-y \in P,\ |-y| > |x|$이므로

$x -_J y = x +_J (-y) = -(|x| - |-y|) = -(-x - (-y)) <_J 0$.

$(\Longleftarrow)$

$x -_J y <_J 0$이고 $x \not<_J y$이라 가정하자.

i) $y <_J x$일 때, $y -_J x < 0$이 되어 $x -_J y <_J 0$에 모순이다.

ii) $x = y$일 때, $x -_J y = 0$이 되어 모순이다.

(4) $(\Longrightarrow)$ $x = y$이면 $x -_J y = x +_J (-y) = y +_J (-y) = 0$.

$(\Longleftarrow)$ $x -_J y = 0$이면 $x +_J (-y) = 0$이다. 따라서, $x = -(-y) = y$이다.

(5) 위의 (2), (3)과 정리 3.6의 (5), (6)에 의하여 성립함이 자명하다 .

(6)

$$\begin{aligned} x <_J y &\Longleftrightarrow x -_J y <_J 0 \\ &\Longleftrightarrow 0 <_J -(x -_J y) \\ &\Longleftrightarrow 0 <_J -\{x +_J (-y)\} \\ &\Longleftrightarrow 0 <_J (-x) +_J (-(-y)) \\ &\Longleftrightarrow 0 <_J ((-x) -_J (-y)) \\ &\Longleftrightarrow -y <_J -x. \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned} x = y &\Longleftrightarrow x -_J y = 0 \\ &\Longleftrightarrow -(x -_J y) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (-x) -_J (-y) = 0 \\ &\Longleftrightarrow -y = -x. \end{aligned}$$

(8) $\forall x,\ x <_J 0,\ x = 0,\ 0 <_J x$ 중의 어느 하나가 반드시 성립한다.

i) $0 <_J x$일 때, $x+1 \in P,\ 1 \in P$이고 $|-1| = 1 < x+1$이므로

$u = x+1,\ v = 1$이라 놓으면

$u -_J v = (x+1) +_J (-1) = (x+1) - |-1| = (x+1) - 1 = x.$

ii) $x = 0$일 때 , $u = v = 1$이라 놓으면 $u = v \in P$이고

$u -_J v = 1 +_J (-1) = 0 = x$이다.

iii) $x <_J 0$일 때, $-x \in P$이므로 $-x+1 \in P$이다. 그리고

$1 < -x+1 = |-x+1| = |-(-x+1)|$이므로 $u = 1,\ v = -x+1$이라 놓으면

$u -_J v = 1 +_J (-(-x+1)) = -\{(-x+1) - 1\} = -(-x) = x.$

(9) i) $x \in P,\ y \in P$일 때,

$x = a -_J b = a - b = u,\ y = c -_J d = c - d = v$라 하자.

그러면, $a = b + u,\ c = d + v$이므로 $a + c = (b+d) + (u+v)$이다.

따라서, $x +_J y = x + y = u + v = (a+c) - (b+d) = (a+c) -_J (b+d).$

ii) $y = 0$일 때,

$0 = y = c -_J d = c +_J (-d)$이므로 $c = |-d| = d$이다.

ii-1) $x \in P$일 때, $x = a -_J b = a - b = u$라 하면

$a = b + u.$ 즉, $a + c = (b+d) + u$이다.

$x +_J y = x = u = (a+c) - (b+d) = (a+c) -_J (b+d).$

ii-2) $x = 0$일 때, $0 = x = a -_J b = a +_J (-b)$이므로 $a = |-b| = b$이다.

그러면, $a + c = b + d$이므로

$(a+c) -_J (b+d) = 0 = x +_J y$이다.

ii-3) $x \in P^-$일 때, $a < b$이므로 $b = a + u$라 하자. (단, $u \in P$). 그러면

$x = a -_J b = a +_J (-b) = -(b-a) = -u$이고 $b+d = (a+c)+u$이므로

$x +_J y = x = -u = -\{(b+d)-(a+c)\} = -\{(b+d) -_J (a+c)\}$

$= (a+c) -_J (b+d).$

iii) $x = 0$일 때는 $x +_J y = y +_J x$이므로 ii)에 의하여 성립한다.

iv) $x \in P^-$, $y \in P^-$일 때, $a < b$, $c < d$이므로

$b = a+u$, $d = c+v$ $(u,\ v \in P)$라 하자. 그러면, ii-3)에서와 같이

$x = -u$, $y = -v$이고 $b+d = (a+c)+(u+v)$이다. 따라서,

$x +_J y = -(|x|+|y|) = -(u+v) = -\{(b+d)-(a+c)\}$

$= -\{(b+d) -_J (a+c)\} = (a+c) -_J (b+d).$

v) $x \in P^-$, $y \in P$일 때, $b = a+u$, $c = d+v$ $(u,\ v \in P)$라 하자.

그러면, $x = -u$, $y = v$이다.

v-1) $u < v$일 때, $v = u+w$ $(w \in P)$라 하면

$(a+c)+u = b+c = (b+d)+v = (b+d)+u+w.$

즉, $(a+c) = (b+d)+w$ 이다. 따라서,

$x +_J y = v-u = w = (a+c)-(b+d) = (a+c) -_J (b+d).$

v-2) $u = v$일 때, $(a+c)+u = (b+d)+v$이므로, $a+c = b+d$.

따라서, $x +_J y = 0 = (a+c) -_J (b+d).$

v-3) $v < u$일 때, $u = v+w$ $(w \in P)$라 하면

v-1)과 비슷하게 $(a+c)+w = b+d$를 얻을 수 있다. 그러면,

$x +_J y = -(u-v) = -w = -\{(b+d)-(a+c)\}$

$= -\{(b+d) -_J (a+c)\} = (a+c) -_J (b+d).$

vi) $x \in P,\ y \in P^{-}$일 때, $x +_J y = y +_J x$이므로 성립한다.

(10) $x = a -_J b,\ y = c -_J d,\ z = u -_J v$ (단, $a, b, c, d, u, v \in P$)라 하자.

$$\begin{aligned}(x +_J y) +_J z &= \{(a+c) -_J (b+d)\} +_J (u -_J v) \\ &= \{(a+c)+u\} -_J \{(b+d)+v\} \\ &= \{a+(c+u)\} -_J \{b+(d+v)\} \\ &= (a -_J b) +_J \{(c+u) -_J (d+v)\} \\ &= x +_J (y +_J z).\end{aligned}$$

(11) ($\Longrightarrow$)

$$\begin{aligned}x +_J y = z &\Longrightarrow (x +_J y) +_J (-x) = z +_J (-x) \\ &\Longrightarrow x +_J (y +_J (-x)) = z +_J (-x) \\ &\Longrightarrow x +_J ((-x) +_J y) = z +_J (-x) \\ &\Longrightarrow (x +_J (-x)) +_J y = z -_J x \\ &\Longrightarrow 0 +_J y = z -_J x \\ &\Longrightarrow y = z -_J x.\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$)

$$\begin{aligned}y = z -_J x \Longrightarrow y +_J x &= (z -_J x) +_J x \\ &= z +_J ((-x) +_J x)) \\ &= z +_J 0 \\ &= z.\end{aligned}$$

그러므로 $x +_J y = z$.

정의 3.11

$$x \times_J y = \begin{cases} x \times y & (\ x,\ y \in P\text{일 때}) \\ 0 & (\ x = 0 \text{ 또는 } y = 0\text{일 때}) \\ |x| \times |y| & (\ x \in P^-,\ y \in P^-\text{일 때}) \\ -(|x| \times |y|) & (\ x, y\text{중 한 원소는 } P\text{에, 다른 원소는 } P^-\text{에 속할 때 }). \end{cases}$$

정리 3.12 (곱에 대한 성질)

(1) $x \times_J y = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ 또는 $y = 0$.

(2) $x \times_J y = y \times_J x$.

(3) $|x \times_J y| = |x| \times_J |y|$.

(4) $x \times_J 1 = x$.

(5) $(x \neq 0,\ y \neq 0)$일 때,

$$x \times_J y = \begin{cases} |x| \times |y| & (\ (x \in P,\ y \in P) \text{ 또는 } (x \in P^-,\ y \in P^-)) \\ -(|x| \times |y|) & (\ (x \in P,\ y \in P^-) \text{ 또는 } (x \in P^-,\ y \in P)). \end{cases}$$

(6) $(-x) \times_J y = x \times_J (-y) = -(x \times_J y)$.

(7) $(-x) \times_J (-y) = x \times_J y$.

(8) $(x \times_J y) \times_J z = x \times_J (y \times_J z)$.

(9) $u,\ v,\ w \in P$일 때, $u \times_J (v -_J w) = (u \times v) -_J (u \times w)$.

(10) $x \times_J (y +_J z) = (x \times_J y) +_J (x \times_J z)$.

(11) $x \times_J (y -_J z) = (x \times_J y) -_J (x \times_J z)$.

(12) $0 <_J z$일 때, $x <_J y \Longleftrightarrow (x \times_J z <_J y \times_J z)$.

(13) $z <_J 0$일 때, $x <_J y \Longleftrightarrow (x \times_J z >_J y \times_J z)$.

(증명) (1) ($\Longleftarrow$) 정의에 의하여 성립한다 .

($\Longrightarrow$) $x \neq 0$이고 $y \neq 0$이라 가정하자.

i) $x \in P,\ y \in P$일 때, $x \times_J y = x \times y \in P$이 되어 모순이다.

ii) $x \in P^-, y \in P^-$일 때, $x \times_J y = |x| \times |y| \in P$이 되어 모순이다.

iii) $x \in P,\ y \in P^-$일 때, $x \times_J y = -(|x| \times |y|) \in P^-$이 되어 모순이다.

iv) $x \in P^-, y \in P$일 때, $x \times_J y = -(|x| \times |y|) \in P^-$이 되어 모순이다.

그러므로 $x = 0$ 또는 $y = 0$이다.

(2) 두 자연수의 곱은 교환법칙이 성립하므로 정의에 의하여 성립한다.

(3) i) $x,\ y \in P$일 때, $|x \times_J y| = x \times y = |x| \times |y| = |x| \times_J |y|$.

ii) $x = 0$ 또는 $y = 0$일 때, $|x| = 0$ 또는 $|y| = 0$이므로

$|x \times_J y| = |0| = 0 = |x| \times_J |y|$.

iii) $x \in P^-,\ y \in P^-$일 때,

$|x \times_J y| = ||x| \times |y|| = |x| \times |y| = |x| \times_J |y|$.

iv) $(x \in P,\ y \in P^-)$이거나 $(x \in P^-,\ y \in P)$ 일 때,

$|x \times_J y| = |-(|x| \times |y|)| = |x| \times |y| = |x| \times_J |y|$.

(4) i) $x \in P$일 때, $x \times_J 1 = x \times 1 = x$.

ii) $x = 0$일 때, $x \times_J 1 = 0 = x$.

iii) $x \in P^-$일 때, $|x| = -x$이므로

$x \times_J 1 = -(|x| \times 1) = -|x| = -(-x) = x.$

i), ii), iii)에 의하여 $x \times_J 1 = x.$

(5) $x \in P$일 때, $|x| = x$이므로 정의에 의하여 성립한다.

(6) i) $x \in P,\ y \in P$일 때, $-x \in P^-,\ -y \in P^-$이므로

$(-x) \times_J y = -(|-x| \times |y|) = -(x \times y).$

$x \times_J (-y) = -(|x| \times |-y|) = -(x \times y).$

$-(x \times_J y) = -(x \times y).$

ii) $x = 0$ 또는 $y = 0$일 때, $-x = 0,\ -y = 0$이므로

$(-x) \times_J y = x \times_J (-y) = -(x \times_J y) = 0.$

iii) $x \in P^-,\ y \in P^-$일 때, $-x \in P,\ -y \in P$이므로

$(-x) \times_J y = -(|-x| \times |y|) = -(|x| \times |y|).$

$x \times_J (-y) = -(|x| \times |-y|) = -(|x| \times |y|).$

$-(x \times_J y) = -(|x| \times |y|).$

iv) $(x \in P,\ y \in P^-)$ 또는 $(x \in P^-,\ y \in P)$일 때,

$(-x) \times_J y = |x| \times |y|. \quad x \times_J (-y) = |x| \times |y|.$

$-(x \times_J y) = -(-(|x| \times |y|)) = |x| \times |y|.$

(7) 위의 (6)에 의하여 $(-x) \times_J (-y) = -\{x \times_J (-y)\}$

$= -\{-(x \times_J y)\} = x \times_J y$이다.

(8) i) $x = 0$이거나 $y = 0$이거나 $z = 0$일 때는 양변이 모두 0이므로 성립한다.

ii) $x,\ y,\ z \in P$일 때는 명백하게 성립한다.

iii) $x,\ y \in P$이고 $z \in P^-$일 때,

$(x \times_J y) \times_J z = -\{(x \times y) \times (-z)\} = -\{x \times (y \times (-z))\}$

$= x \times_J \{-(y \times (-z))\} = x \times_J \{y \times_J (-(-z))\} = x \times_J (y \times_J z)$

iv) x, $z \in P$이고 $y \in P^-$인 경우와 y, $z \in P$이고 $x \in P^-$인 경우도 iii)의 경우와 비슷하게 증명된다.

v) $x \in P$이고 y, $z \in P^-$일 때,

$(x \times_J y) \times_J z = (x \times (-y)) \times (-z) = x \times \{(-y) \times (-z)\}$

$= x \times_J \{(-y) \times_J (-z)\} = x \times_J (y \times_J z)$.

vi) $z \in P$이고 x, $y \in P^-$일 때도 v)의 경우와 비슷하게 증명된다.

vii) $y \in P$이고 x, $z \in P^-$일 때,

$(x \times_J y) \times_J z = \{(-x) \times y\} \times (-z) = (-x) \times \{y \times (-z)\}$

$= (-x) \times_J \{y \times_J (-z)\} = (-x) \times_J \{-(y \times_J z)\} = x \times_J (y \times_J z)$.

viii) x, y, $z \in P^-$일 때,

$(x \times_J y) \times_J z = \{(-x) \times (-y)\} \times_J z = -\{((-x) \times (-y)) \times (-z)\}$

$= -\{(-x) \times ((-y) \times (-z))\} = -\{(-x) \times_J ((-y) \times_J (-z))\}$

$= -\{(-x) \times_J (y \times_J z)\} = -\{-(x \times_J (y \times_J z))\} = x \times_J (y \times_J z)$.

(9) i) $v < w \in P$일 때, $w = v + a$ $(a \in P)$라 하자. 그러면,

$u \times w = u \times (v + a) = (u \times v) + (u \times a)$이고

$v -_J w = v +_J (-w) = -(w - v) = -a$이므로

$u \times_J (v -_J w) = u \times_J (-a) = -(u \times a) = -\{(u \times w) - (u \times v)\}$

$= -\{(u \times w) -_J (u \times v)\} = (u \times v) -_J (u \times w)$.

ii) $v = w$일 때, $u \times v = u \times w$이므로

$u \times_J (v -_J w) = u \times_J 0 = 0 = (u \times v) -_J (u \times w)$.

iii) $w < v$일 때, $v = w + b$ $(b \in P)$라 하자. 그러면,

$u \times v = u \times (w+b) = (u \times w) + (u \times b)$이고

$v -_J w = v - w = b$이므로

$u \times_J (v -_J w) = u \times_J b = u \times b = (u \times v) - (u \times w)$

$= (u \times v) -_J (u \times w)$.

(10) $y = a -_J b,\ z = c -_J d\ (a,\ b,\ c,\ d \in P)$라 하자.

$x \times_J (y +_J z) = x \times_J \{(a+c) -_J (b+d)\}$.

i) $x \in P$일 때, (9)에 의하여

$$\begin{aligned} x \times_J (y +_J z) &= \{x \times (a+c)\} -_J \{x \times (b+d)\} \\ &= \{(x \times a) + (x \times c)\} -_J \{(x \times b) + (x \times d)\} \\ &= \{(x \times a) -_J (x \times b)\} +_J \{(x \times c) -_J (x \times d)\} \\ &= \{x \times_J (a -_J b)\} +_J \{x \times_J (c -_J d)\} \\ &= (x \times_J y) +_J (x \times_J z). \end{aligned}$$

ii) $x \in P^-$일 때, $-x = u \in P$라 하면, i)에 의하여

$x \times_J (y +_J z) = (-u) \times_J (y +_J z) = -\{u \times_J (y +_J z)\}$

$= -\{(u \times_J y) +_J (u \times_J z)\} = \{-(u \times_J y)\} +_J \{-(u \times_J z)\}$

$= \{(-u) \times_J y\} +_J \{(-u) \times_J z\} = (x \times_J y) +_J (x \times_J z)$.

iii) $x = 0$일 때,

$x \times_J (y +_J z) = 0 \times_J (y +_J z) = 0 = 0 +_J 0 = (0 \times_J y) +_J (0 \times_J z)$

$= (x \times_J y) +_J (x \times_J z)$.

(11) 위의 (10)에 의하여

$x \times_J (y -_J z) = x \times_J \{y +_J (-z)\} = (x \times_J y) +_J \{x \times_J (-z)\}$

$$= (x \times_J y) +_J \{-(x \times_J z)\} = (x \times_J y) -_J (x \times_J z).$$

(12) $0 <_J z$일 때,

$$\begin{aligned} x <_J y &\Longleftrightarrow 0 <_J y -_J x \\ &\Longleftrightarrow 0 <_J z \times_J (y -_J x) \\ &\Longleftrightarrow 0 <_J (z \times_J y) -_J (z \times_J x) \\ &\Longleftrightarrow z \times_J x <_J z \times_J y \\ &\Longleftrightarrow x \times_J z <_J y \times_J z. \end{aligned}$$

(13) $z <_J 0$일 때, $0 <_J -z$이므로

$$\begin{aligned} x <_J y &\Longleftrightarrow x \times_J (-z) <_J y \times_J (-z) \\ &\Longleftrightarrow -(x \times_J z) <_J -(y \times_J z) \\ &\Longleftrightarrow (x \times_J z) >_J (y \times_J z). \end{aligned}$$

정리 3.13 $(J, +_J, \times_J, <_J)$는 순서정역이다.

(증명) 정리 3.8과 정리 3.12에 의하여 $(J, +_J, \times_J)$는 정역이다.

(O_1) 정리 3.6의 (1)에 의하여 $x \not<_J x$.

(O_2) 정리 3.6의 (2)에 의하여 $(x <_J y,\ y <_J z) \Longrightarrow x <_J z$.

(O_3) 정리 3.6의 (3)에 의하여 $x <_J y$ 또는 $x = y$ 또는 $y <_J x$.

(O_4) 정리 3.10의 (10)과 (11)에 의하여

$$\begin{aligned} x +_J z <_J y +_J z &\Longleftrightarrow x <_J (y +_J) z -_J z \\ &\Longleftrightarrow x <_J y +_J (z -_J z) \\ &\Longleftrightarrow x <_J y +_J 0 = y. \end{aligned}$$

(O_5) 정리 3.12의 (12)에 의하여 $[x <_J y,\ 0 <_J z] \Longrightarrow x \times_J z <_J y \times_J z$.

$$\begin{aligned} 0 <_J z,\ x <_J y &\Longrightarrow 0 <_J y -_J x \\ &\Longrightarrow 0 <_J z \times_J (y -_J x) \\ &\Longrightarrow 0 <_J (z \times_J y -_J z \times_J x) \\ &\Longrightarrow z \times_J x <_J z \times_J y \\ &\Longrightarrow x \times_J z <_J y \times_J z. \end{aligned}$$

Ⅳ. 정수 체계의 동형성

이 장에서는 제 2 장에서의 동치류를 이용한 정수 체계 $(Z, +_z, \times_z, <_z)$와 제 3 장에서 전개한 정수 체계 $(J, +_J, \times_J, <_J)$가 동형임을 보이고자 한다.

정의 4.1 $\mathcal{D} = (D, +, \times, <)$와 $\mathcal{D}^* = (D^*, +^*, \times^*, <^*)$ 를 두 개의 순서정역이라 하자.

D 에서 D^*로의 전단사함수 Φ가 존재하여 다음의 세 가지 조건을 만족하면 $\mathcal{D}$와 $\mathcal{D}^*$를 서로 동형 (Isomorphic)이라 하고, 함수 Φ를 $\mathcal{D}$에서 $\mathcal{D}^*$로의 동형사상 (Isomorphism)이라 한다. 임의의 원소 x, $y \in D$에 대하여

1. $\Phi(x + y) = \Phi(x) +^* \Phi(y)$이고 ,
2. $\Phi(x \times y) = \Phi(x) \times^* \Phi(y)$이고 ,
3. $x < y \Longleftrightarrow \Phi(x) <^* \Phi(y)$이다.

정리 2.17와 정리 3.13에서 두 정수 체계 $(Z, +_z, \times_z, <_z)$와 $(J, +_J, \times_J, <_J)$가 순서정역임을 알았다.

이제, 두 정수 체계가 동형임을 밝혀 보자.

정리 4.2 두 순서정역 $(J, +_J, \times_J, <_J)$와 $(Z, +_z, \times_z, <_z)$에 대하여 J에서 Z로의 함수 Φ를 다음과 같이 정의하자.

$$\Phi(x) = \begin{cases} [(x, 0)] & (\ x \in P\text{일 때 }) \\ 0_z & (\ x = 0\text{일 때 }) \\ [(0, |x|)] & (\ x \in P^-\text{일 때 }) \end{cases}$$

그러면, Φ는 동형사상이다. 즉, Φ는 다음을 만족한다.

(1) Φ는 일대일 함수이다.

(2) Φ는 전사함수이다.

(3) J의 임의의 원소 x, y에 대하여 $\Phi(x +_J y) = \Phi(x) +_z \Phi(y)$.

(4) J의 임의의 원소 x, y에 대하여 $\Phi(x \times_J y) = \Phi(x) \times_z \Phi(y)$.

(5) J의 임의의 두 원소 x, y에 대하여 $x <_J y \Longleftrightarrow \Phi(x) <_z \Phi(y)$.

(증명) (1) $\Phi(x) = \Phi(y)$라 가정하자.

i) $x \in P$이고 $y \in P$인 경우 :

$[(x,0)] = [(y,0)]$이므로 $x + 0 = y + 0$ 즉, $x = y$이다.

ii) $x \in P$이고 $y = 0$인 경우 :

$[(x,0)] = 0_z = [(1,1)]$이므로 $x + 1 = 1 + 0$이다.

즉, $x = 0$이 되어 $x \in P$에 모순이다.

iii) $x \in P$이고 $y \in P^-$인 경우 :

$[(x,0)] = [(0,|y|)] = [(0,-y)]$이므로 $x + (-y) = 0$이다.

즉, $x = y$이므로 $x \in P$, $y \in P^-$에 모순이 된다.

iv) $x = 0$이고 $y \in P$인 경우 : ii)의 경우와 비슷하게 증명할 수 있다.

v) $x = 0$이고 $y = 0$인 경우 : 당연히 $x = y$가 성립한다.

vi) $x = 0$이고 $y \in P^-$인 경우 :

$[(1,1)] = 0_z = [(0,|y|)] = [(0,-y)]$이므로 $1 + y = 1$이다.

즉, $y = 0$으로 모순이다.

vii) $x \in P^-$이고 $y \in P$인 경우 : iii)의 경우와 비슷하다.

viii) $x \in P^-$이고 $y = 0$인 경우 : vi)의 경우와 비슷하다.

ix) $x \in P^-$이고 $y \in P^-$인 경우 : $[(0,|x|)] = [(0,|y|)]$

즉, $[(0,-x)] = [(0,-y)]$이므로 $-x = -y$이다. 따라서, $x = y$이다.

(2) 임의의 $[(x,y)] \in Z$에 대하여

$x < y$이거나 $x = y$이거나 $y < x$이다.

i) $x < y$인 경우 : $y = x + u, \ \ u \in P$.

그러면 $(x,y) \sim (0,u)$이므로 $[(x,y)] = [(0,u)]$이다.

$u \in P$이므로 $-u \in P^-$이다.

그리고 $\Phi(-u) = [(0,|-u|)] = [(0,|u|)] = [(0,u)] = [(x,y)]$.

ii) $x = y$인 경우 : $[(x,y)] = 0_z$이므로 $\Phi(0) = 0_z = [(x,y)]$이다.

iii) $y < x$인 경우 : $x = y + v, \ v \in P$이므로 $[(x,y)] = [(v,0)]$이다.

그리고 $\Phi(v) = [(v,0)] = [(x,y)]$ 이다.

(3) J의 임의의 원소 x, y에 대하여

i) $x \in P, \ \ y \in P$인 경우 :

$\Phi(x +_J y) = \Phi(x+y) = [(x+y,0)] = [(x,0)] +_z [(y,0)] = \Phi(x) +_z \Phi(y)$.

ii) $x = 0$이거나 $y = 0$인 경우 :

우선, $x = 0$인 경우를 먼저 생각하자.

$\Phi(x +_J y) = \Phi(y) = 0_z +_z \Phi(y) = \Phi(0) +_z \Phi(y) = \Phi(x) +_z \Phi(y)$이다.

$y = 0$인 경우도 비슷하게 증명된다.

iii) $x \in P^-$이고 $y \in P^-$인 경우 : $x +_J y = -(|x| + |y|) \in P$이므로

$\Phi(x +_J y) = [(0,|-(|x|+|y|)|)] = [(0,|x|+|y|)] = [(0,|x|)] +_z [(0,|y|)]$

$= \Phi(x) +_z \Phi(y)$이다.

iv) $x <_J 0 <_J y, \ \ |x| < |y|$인 경우 :

그러면 정리 3.6의 (4), (5)에 의하여 $x \in P^-$, $y \in P$ 이다.

이제, $x +_J y = |y| - |x| = y - |x| \in P$이므로

$\Phi(x +_J y) = \Phi(y - |x|) = [(y - |x|, 0)] = [(y, |x|)] = [(0, |x|)] +_z [(y, 0)]$

$= \Phi(x) +_z \Phi(y)$이다.

v) $x <_J 0 <_J y$이고 $|x| = |y|$인 경우 : $x \in P^-$이고 $y \in P$, $y = -x$이다.

$\Phi(x +_J y) = \Phi(0) = 0_z = [(y, -x)] = [(0, -x)] +_z [(y, 0)]$

$= [(0, |x|)] +_z [(y, 0)] = \Phi(x) +_z \Phi(y)$이다.

vi) $x <_J 0 <_J y$이고 $|x| > |y|$인 경우 :

$x \in P^-$, $y \in P$이고 $x +_J y = -(|x| - |y|) = -(|x| - y) \in P^-$이므로

$\Phi(x +_J y) = \Phi(-(|x| - y)) = [(0, |-(|x| - y)|)] = [(0, |x| - y)]$

$= [(y, |x|)] = [(0, |x|)] +_z [(y, 0)] = \Phi(x) +_z \Phi(y)$이다.

vii) $y <_J 0 <_J x$인 경우는 $x +_J y = y +_J x$이므로

iv), v), vi)의 경우에 의하여 성립한다.

(4) i) x, $y \in P$일 때, $x \times_J y = x \times y \in P$이므로

$\Phi(x \times_J y) = \Phi(x \times y) = [(x \times y. 0)] = [(x, 0)] \times_z [(y, 0)]$

$= \Phi(x) \times_z \Phi(y)$.

ii-1) $x = 0$일 때, $x \times_J y = 0$이다.

$\Phi(x \times_J y) = \Phi(0) = 0_z = 0_z \times_z \Phi(y) = \Phi(x) \times_z \Phi(y)$.

ii-2) $y = 0$일 때, $x \times_J y = 0$이다.

$\Phi(x \times_J y) = \Phi(0) = 0_z = \Phi(x) \times_z 0_z = \Phi(x) \times_z \Phi(y)$.

iii) $x \in P^-$, $y \in P^-$일 때, $x \times_J y = |x| \times |y| \in P$이므로,

$\Phi(x \times_J y) = \Phi(|x| \times |y|) = [(|x| \times |y|, 0)] = [(0, |x|)] \times_z [(0, |y|)]$

$= \Phi(x) \times_z \Phi(y)$.

iv-1) $x \in P,\ y \in P^-$일 때, $\Phi(x) = [(x, 0)],\ \ \Phi(y) = [(0, |y|)]$ 이고,

$x \times_J y = -(|x| \times |y|) \in P^-$이므로,

$\Phi(x \times y) = \Phi(-|x| \times |y|) = [(0, |x| \times |y|)] = [(|x|, 0)] \times_z [(0, |y|)]$

$= [(x, 0)] \times_z [(0, |y|)] = \Phi(x) \times_z \Phi(y)$이다.

iv-2) $x \in P^-,\ y \in P$일 때도 $x \times_J y = y \times_J x$이므로 iv-1)에 의하여 성립한다.

(5) J의 임의의 원소 x, y에 대하여 정리 3.6의 (4)와 정리 3.10 의 (5)에 의하면,

$x <_J y$이기 위한 필요충분조건은 $y -_J x \in P$이다.

이제, $y -_J x \in P$이면 $y -_J x = u,\ \ u \in P$이다.

$\Phi(y) -_z \Phi(x) = \Phi(y) +_z (-_z \Phi(x)) = \Phi(y) +_z \Phi(-x) = \Phi(y +_J (-x))$

$= \Phi(y -_J x) = \Phi(u) = [(u, 0)] = [(u+1, 1)] \in \mathcal{P}_z$이므로, $\Phi(x) <_z \Phi(y)$.

역으로, $\Phi(x) <_z \Phi(y)$라 가정하자.

그리고 $\Phi(y -_J x) = [(a, b)]$라 하면,

$[(a, b)] = \Phi(y -_J x) = \Phi(y) -_z \Phi(x) \in \mathcal{P}_z$ 이므로 $b < a$이다.

즉, $a = b + v,\ \ v \in P$이다.

그러면, $\Phi(v) = [(v, 0)] = [(a, b)] = \Phi(y -_J x)$이다.

그런데, Φ는 일대일 함수이므로 $v = y -_J x \in P$이다.

즉, $x <_J y$이다.

V. 결 론

오늘날 각급학교에서 연구의 대상으로써 수학의 기초가 되는 기본적인 개념과 집합의 개념을 연관짓는 것에 대하여 많은 연구를 하고 있다. 수학의 기본적인 개념은 수 또는 수체계로부터 출발하여 발전된다고 볼 수 있다. 수체계에 대한 우리의 지식은 물리적 세계의 직관에 의해 상당부분을 유추해낼 수도 있다. 현대대수학에서 접하게 되는 많은 이론들 가운데서 가장 기본이 되는 것은 자연수의 체계에 관한 이론이다. 이 보다 좀 더 넓은 수체계는 정수의 체계 Z이며, 정수 체계에서의 여러 가지 성질들은 현대대수학에서 기본적인 이론이 되고 있다. 정수의 기본 구조는 덧셈과 곱셈 및 순서 관계에 의하여 구성된다.

제 2 장에서는 자연수와, 자연수의 순서쌍으로 이루어진 동치류를 이용한 정수 체계에서의 기본적인 성질들을 증명없이 요약하여 소개하였고,

제 3 장에서는 페아노 체계를 근거로 하여 새로운 원소 0과 자연수와 일대일 대응되는 수의 집합 P^-를 도입한 후, 정수 J 를 구성하여 확장된 정수 체계에서의 합, 곱에 대한 성질, 순서관계에 대한 성질이 성립함을 보여 자연수 체계에서의 대수적 성질들이 보존됨을 밝혔으며,

제 4 장에서는 두 순서정역 $(Z, +_z, \times_z, <_z)$와 $(J, +_J, \times_J, <_J)$이 서로 동형임을 밝혔다.

자연수 체계에서는 덧셈과 곱셈에 대하여 닫혀 있고, 뺄셈에 대하여 닫혀 있지 않으나, 정수 체계로 확장하면 뺄셈을 자유롭게 할 수 있다. 그러나, 정수 체계에서는 나눗셈에 대하여 닫혀 있지 않으므로 정수 체계에서 확장된 수체계에 대한 이론적 전개가 필요하다.

참 고 문 헌

[1]. 김용준 (1993), "정수 체계의 구조에 관한 연구",석사학위논문, 제주대학교 교육대학원.

[2]. 양성호 (1986), "자연수 체계의 지도법에 관한 연구", [제주대학교 논문집], 제22집, 제주대학교.

[3]. 하대연 ,박재균 (1984), 「 수학영한사전 」, 형설출판사.

[4]. G.Birkhoff, S.Maclane (1977), *A Survey of Modern Algebra* , New York and London.

[5]. A.G.Hamilton (1982), *Numbers, sets and axioms*, Cambridge University Press.

[6]. Elliott Mendelson (1973), *Number System and The Foundations of Analysis*, Academic Press, New York and London.

< Abstract >

A STUDY ON THE SYSTEM OF INTEGERS

Song, Im-Kweon

Mathematics Education Major

Graduate School of Education, Cheju National University

Cheju, Korea

Supervised by professor Yang, Sung-Ho

In this thesis, we study the structure of the system of integers.

First, in Chapter 2, the system of natural numbers and the system of integers which is derived from the Peano system by the equivalence relation and partition are introduced.

In Chapter 3, we derive the system of integers differently by a one-to-one correspondence and prove the basic properties which are taken for granted intuitively.

Finally, in Chapter 4, we show that the system of integers in Chapter 2 and 3 is isomorphic algebraically as the ordered integral domain.

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education. Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 1994.

감 사 의 글

이 한편의 논문이 완성되기까지 바쁘신 가운데도 세심한 배려와 지도를 하여 주신 양성호 교수님과, 그 동안 깊은 관심과 충고, 격려를 아끼지 않았던 수학교육과 및 수학과의 교수님들께 진심으로 고마운 말씀을 드립니다.

그리고 본 논문을 작성하는 과정에서 물심양면으로 협조해 주신 제주중앙여고 교장, 교감선생님을 비롯한 여러 동료 선생님들과, 주위에서 성원과 격려를 하여 주신 모든 분들께 깊은 감사를 드립니다.

아울러, 함께 고생하고 의지했던 김종석 선생님과 고연순, 문영봉 선생님의 앞날에 항상 건강과 행운이 함께 하길 빌겠습니다.

끝으로, 따뜻한 마음으로 보살펴 주신 부모님과, 많은 어려움도 불평없이 이겨내며 내조해 준 사랑하는 아내, 건강하고 착하게 자라는 내 아이들 운정, 지현, 은석이와 함께 이 조그마한 성취의 기쁨을 나누고자 합니다.

1994년 8월

송 임 권 드림