碩 士 學 位 論 文

點化관계와 그 解法에 관한 硏究

指導敎授 朴 鎭 圓

濟州大學校 敎育大學院

數 學 敎 育 專 攻

鄭 裕 澈

2005年 8月

點化관계와 그 解法에 관한 硏究

指導敎授　　朴 鎭 圓

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함.

2005年　7月　　日

濟州大學校　敎育大學院 數學敎育專攻

提出者　　鄭　　裕　　澈

鄭裕澈의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함.

2005年　7月　　日

審 査 委 員 長 ____________________ 印

審　査　委　員 ____________________ 印

審　査　委　員 ____________________ 印

< 抄錄 >

點化관계와 그 解法에 관한 研究

鄭 裕 澈

濟州大學校 教育大學院 數學教育專攻

指導教授 朴 鎭 圓

본 논문에서는 이산수학에서 중요하게 다루는 수열의 일반항을 구하는 방법에 있어서 여러 가지 다양한 점화식에 관한 일반항을 구하는 방법을 다음과 같이 연구하였다.

첫째, 중등과정에서 다루는 이산수학에서의 점화관계를 소개하였다.

둘째, 선형점화 관계에 대한 해법으로 동차선형점화관계와 비동차 점화관계에 대한 해법을 연구하였다.

셋째, 비동차 점화관계에 있어서 보다 일반적인 지수함수와 다항식의 합과 곱에 대한 해법을 연구하였다.

넷째, 광범위한 형태의 조합문제를 모델화할 수 있는 생성함수를 소개하였다.[1)]

※ 본 논문은 2005년 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임.

목 차

I. 서론

1. 연구의 필요성

수학은 사회가 정보화 되어감에 따라 사회의 기본적 기능의 수행과 발전을 위해 핵심적인 역할을 담당하게 되었고 그에 따라 자연과학뿐만 아니라 그 외의 많은 분야에까지 이용되게 되었다. 특히 컴퓨터와 통신산업이 사회 여러 영역에서 이용되고 우리의 생활과도 밀접한 관계를 맺고 살아가고 있는 이 때에 새롭게 부각되고 있는 수학분야가 '이산수학'이다. 즉, 정보화 사회를 유발한 컴퓨터 과학과 기술 공학의 발전 및 산업과 경영에서 파급되는 정보의 폭발적 증가와 더불어 수학의 적용과 응용이 광범위해지면서 이산적인 수학이 급격히 발전하고 있는 것이다.

실제로 이산수학은 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 활용하여 실생활에서 일어나는 유한이나 불연속의 이산 상황의 문제를 수학적으로 분류하고, 논리적으로 사고하여 합리적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기르는데 도움을 주고 있으며, 수학 학습에서 습득된 지식과 기능을 활용하여 실생활의 여러 가지 이산적인 상황을 수학적으로 간결히 표현하고 처리하는 능력을 기르는데 목적을 두고 있다. 또한, 복잡한 계산이나 문제 해결을 위하여 계산기나 컴퓨터를 적극적으로 활용하는 것이 가능한 분야이다.

컴퓨터의 등장은 수학문제의 특성을 변화시키게 되었다. 과거에는 물리적 현상을 다루는 과정에서 연속량과 관계된 미적분학이 주로 응용되었으나 현대에는 컴퓨터가 널리 사용되어 여기에 요구되는 수학적인 지식으로 주로 이산수학이 된 것이다. 컴퓨터는 본질적으로 유한이고 이산적인 기계이다. 따라서 이산수학으로부터의 내용은 컴퓨터를 사용하는 문제해결에 필수적인 것이다. 현대에 들어와서 지식, 정보, 통신과 같은 것을 다루어야 할 필요성이 증가하면서 컴퓨터 알고리즘의 개발과 어떤 연구문제의 해결에 새로운 접근방법을 만들 수 있는 수학적 토대

를 이용하기 위한 필요성에 부응하여 이산수학의 중요성이 강조된 것이다.

미국에서도 이산수학이 대학의 교과 과정에 적극적으로 반영되기 전인 80년대 중반에 Alfred P. Sloan 재단이 "대학의 예과에서 이산수학이 미적분학과 같은 비중으로 다루어지는 새로운 교과 과정의 개발"이란 주제로 지원하여 플로리다 주립대등 6개 대학에서 1984-1986년 사이에 시범 운영을 했다. 미국수학교육학회(MAA)는 1989년 Anthony Ralston 교수 주관으로 그 결과를 보고하고 대안을 보고서인 "Discrete Mathematics in the first two years"을 통하여 제시하였다. 이에 의하면 미국에서도 당시 미국의 수학자들조차도 "이산수학이란 무엇인가?"라는 질문에 쉽게 답을 못하는 경우가 많았다고 한다. 사실 우리도 지금 이 질문에 대한 쉽고 간단한 답을 주기는 어렵다. 어떤 이들은 이산수학을 "연속수학(Continuous Mathematics)"의 여집합이라고 말하기도 하는데 우리가 잘 알고 있다시피 미적분학(Calculus)이 바로 연속수학의 한 예이다. 또한 미적분학은 물리학의 기초이며 물리학은 우리의 실생활에 기여한 공학적 경이로움의 기초가 됨을 잘 알고 있다. 그러나 컴퓨터의 발달로 이제는 이산수학의 중요성이 다시 강조되어지고 있다. 컴퓨터공학(computer science)에서는 이에 대해 "이산구조론(Discrete Structures)"이라는 과목을 개설하고 있으며, 경영학 혹은 사회과학분야에서도 "유한 수학(Finite Mathematics)"이라는 과목을 가르치고 있다.

이산수학은 이산적 대상물(discrete objects)을 연구하는 수학의 한 분야이다. 여기서 이산의 의미는 서로 다르던가 혹은 연결되어있지 않은 원소들로 구성하는 것을 의미하며, 일련의 단계로 구성된 과정과 관련 있다. 이것이 연속적인 변화과정에 대한 연구인 미적분학과 구별되어지는 것이다. 미적분학의 개념이 산업혁명이후의 과학과 기술의 발전에 기초가 되었다면 이산수학의 개념은 컴퓨터시대의 과학과 기술의 근간이 된다고 말할 수 있다.

현대수학과 과학의 많은 분야가 이산수학과목에서 시작된다는 것을 알고 있는 사람은 많지 않다. 조합론, 그래프이론, 이산구조론, 선형대수학, 수치해석, 디자인이론, 선형계획법, 조합적 행렬론, 최적화이론 등은 현대 수학과 과학에서 꼭 필요한 연구 분야이며, 이 모든 과목의 시작이 '이산수학'이다. 즉, 현대 수학 이론과 공학적 이용으로 이어지는 다리 역할을 이산수학이 하는 것이다.

그렇다고 이산수학이 전혀 생소하고 낯선 주제는 아니다. 현행 중등 교육과정중 집합, 행렬, 수열, 귀납법, 수형도, 순열, 조합, 확률, 통계, 논리 등 여러 영역에서 이산수학적 내용이 도입되고 있음을 알 수 있다. 특히, 이산수학이 이산량 또는 구조를 가진 대상에 대한 수학의 기초과목이라면 조합론은 이산수학이라는 기초 위에 세워진 보다 전문적인 것을 다루는 과목이며 개수를 세는 것을 중요한 과제로 다룬다.

이러한 조합론에서 주로 다루는 분야 중의 하나가 수열이라고 할 수 있다. 즉, 나열된 수들의 변화를 살피어 항과 항사이의 관계식을 찾고 관계식으로 표현된 수열에서의 일반항을 구하는 것은 매우 중요한 일일 뿐만 아니라 수학의 유용성을 일깨워주는 계기가 될 것이다.

이에 본 논문에서는 중등과정에서 다루고 있는 점화관계와 일반적인 점화수열의 유형별 일반해법을 고찰하고 개수를 세는 데 있어서 중요하게 다루는 생성함수에 대해서 알아보도록 하겠다.

2. 연구의 목적

수열을 다루는 문제에 있어서 일반항을 구하는 문제는 매우 중요한 문제이면서도 또한 그렇게 간단한 문제는 아니다. 그리고 이산수학에 있어서의 많은 문제들이 수열의 점화식을 이용하여 해결될 수 있다. 따라서 점화식으로 나타난 수열의 일반항을 구하는 문제는 매우 중요한 문제이다.

이에 본 논문에서는 중등과정에서 다루고 있는 점화관계와 일반적인 선형점화수열의 유형별 일반해법을 고찰하려고 한다. 그리고 개수를 세는 데 있어서 중요하게 다루는 생성함수를 사용하여 점화관계를 해결하는 방법에 대해서도 알아보려고 한다.

II. 본론

1. 귀납적 정의와 점화관계

논증의 증명방법 중 자연수에 관한 명제를 증명하는데 매우 유용하게 쓰이는 것이 수학적 귀납법이다. 수학적 귀납법이란 자연수 n 에 관한 명제 $p(n)$ 에 대하여

(1) $n=1$ 일 때 $p(1)$ 이 참이고

(2) 임의의 자연수 k 에 대하여 $p(k)$ 가 참이라고 가정했을 때 $p(k+1)$ 이 참이면

모든 자연수 n 에 대하여 $p(n)$ 은 참이라는 것이다. 이 원리는 자연수에 관한 페아노의 공리들 중 다섯 번째 것이다. 수학적 귀납법의 개념은 자연수에 관한 정의를 내리는 데에도 사용된다.

일반적으로 수열은 다음과 같이 정의된다.

정의. 정의역이 자연수의 집합인 함수를 수열이라고 한다.

예를 들어 함수 $f: N \to R$, $f(n)=a_n$ 는 실수에서의 수열이며, 이 수열은 각 n 에 대한 함수 f 의 함수값을 배열하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\cdots$, $f(n)$, $\cdots$ 과 같이 나타낸다. 여기서 $f(1)$ 을 제 1항, $f(2)$ 를 제 2항, $\cdots$, 그리고 $f(n)$ 을 제 n 항 또는 일반항이라고 부른다. 보다 편리하게 수열을 나타내기 위하여 이와 같은 함수적 표현 대신에 a_1, a_2, a_3,$\cdots$, a_n, $\cdots$ 또는 $\langle a_n \rangle$의 형태를 사용하기도 한다. 또한 계산의 편리성을 위하여 앞으로는 제 1 항을 a_0 으로 하여

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

으로 나타내기로 한다.

그러나 수학적 귀납법의 원리를 사용하여 수열을 정의할 수도 있는데 점화식이 그 것이다.

정의. 수열 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 이 주어졌다고 하자. 이 때 적당한 양수 k 가 존재하여 k 보다 크거나 같은 모든 n 에 대하여 a_n 을 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 에 관계된 식으로 일정하게 표현할 수 있을 때 이 관계를 점화관계라고 한다.

점화관계에는 여러 가지의 형태가 있으나 가장 일반적이고 많이 나타나는 형태가 선형점화관계이다. 이 논문에서는 먼저 중등학교에서 나타나는 수열의 형태와 그 일반항을 구하는 방법에 대하여 알아보고, 일반적인 선형점화관계의 해법에 대하여 알아보려고 한다.

2. 중등교과과정에서 다루고 있는 점화관계의 유형

이 절에서는 먼저 중등 교과과정에서 다루고 있는 점화관계들의 유형을 살펴보고 그 해결 방법을 소개하려고 한다.

유형 1. $a_{n+1} = a_n + d$ (d는 상수)

(풀이) 이 점화식은 등차수열을 나타낸다. 등차수열이란 이웃하는 항간의 차가 일정한 수열을 말하는 것으로 주어진 식의 a_n 을 좌변으로 이항하면 $a_{n+1} - a_n = d$ 가 되어 두 이웃하는 항의 차가 일정하다는 것을 알 수 있다. 등차수열의 일반항은 $a_n = a_1 + (n-1)d$ (a_1: 첫째항, d: 공차)이다.

예. 수열 $\langle a_n \rangle$이 $a_1 = -5$, $a_{n+1} = a_n + 3$이라고 정의되었을 때 일반항을 구하여라.

(풀이) 첫째항이 $a_1 = -5$이고 공차가 3인 등차수열이므로 일반항은

$$a_n = -5 + 3(n-1) = 3n - 8$$

이다.

유형 2. $a_{n+1} = ra_n$ (r 은 0 이 아닌 상수)

(풀이) 이 점화식은 등비수열을 나타낸다. 등비수열이란 이웃하는 항간의 비가 일정한 수열을 말하는 것으로 주어진 식의 양변을 a_n으로 나누면 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ 이 되어 두 이웃하는 항의 비가 일정하다는 것을 알 수 있다. 등비수열의 일반항은 $a_n = a_1 r^{n-1}$ (a_1: 첫째항, r: 공차)이다.

예. 수열 $\langle a_n \rangle$이 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = -2a_n$이라고 정의되었을 때 일반항을 구하여라.

(풀이) 첫째항이 $a_1 = 3$이고 공비가 -2인 등차수열이므로 일반항은

$$a_n = 3(-2)^{n-1}$$

이다.

유형 3. $a_{n+1} = a_n + f(n)$

(풀이) $a_{k+1} = a_k + f(k)$ 이므로 $k = 1, 2, \cdots, n-1$ 에 대하여 변변 더하면

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

이다. 여기서 $\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_1$ 이므로 $a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ 이다. 따라서 일반항은 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ 이다.

참고. 등차수열은 (유형 3)의 특수한 경우이다.

예. 수열 $\langle a_n \rangle$이 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 6n$ 이라고 정의되었을 때 일반항을 구하여라.

(풀이) $a_{k+1} = a_k + 6k$ 이므로 $a_{k+1} - a_k = 6k$ 이다. 따라서,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} 6k$$

이다. 여기서 좌변은 $a_n - a_1$ 이므로 $a_n - a_1 = 3n(n-1)$ 이다. 따라서 일반항은

$$a_n = 3(n^2 - n + 1)$$

이다.

유형 4. $a_{n+1} = f(n) a_n$

(풀이) $a_{k+1} = f(k) a_k$ 이므로 $k = 1, 2, \cdots, n-1$ 에 대하여 변변 곱하면

$$a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_n = f(1) f(2) f(3) \cdots f(n-1) a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1}$$

이다. 이 식의 양변을 $a_2a_3\cdots a_{n-1}$으로 나누면 $a_n = f(1)f(2)f(3)\cdots f(n-1)a_1$ 이다.

참고. 등비수열은 (유형 4)의 특수한 경우이다.

예. 수열 $\langle a_n \rangle$ 이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3^{2n}a_n$ 이라고 정의되었을 때 일반항을 구하여라.
(풀이) $a_{k+1} = 3^{2k}a_k$ 이므로 $k = 1, 2, \cdots, n-1$ 에 대하여 변변 곱하면

$$a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n = 3^2 3^4 3^6 \cdots 3^{2(n-1)}a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}$$

이다. 이식의 양변을 $a_2a_3\cdots a_{n-1}$ 으로 나누면 $a_n = 3^{\sum_{k=1}^{n-1}2k}a_1$ 이다. 따라서 일반항은 $a_n = 3^{n(n-1)}$ 이다.

유형 5. $a_{n+1} = pa_n + q$ (p, q는 0이 아닌 상수)
(풀이) (방법 1) $a_{n+1} = pa_n + q$ 이므로 $a_n = pa_{n-1} + q$ 이다. 두 식을 변변 빼면 $a_{n+1} - a_n = p(a_n - a_{n-1})$ 이다. $b_n = a_{n+1} - a_n$ 이라 두면 $b_n = pb_{n-1}$ 이 되어서 등비수열의 형태가 된다. 따라서 $b_n = b_1p^{n-1} = (a_2 - a_1)p^{n-1}$이고

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

이므로 $a_{n+1} - a_n = (a_2 - a_1)p^{n-1}$이다.
여기서 $(a_2 - a_1)p^{n-1} = f(n)$ 이라 두면 (유형 3)의 점화식과 같은 형태이므로

$a_n = a_1 + \sum_{k=0}^{n-1}(a_2 - a_1)p^{n-1}$ 이다.

참고. 이 방법은 $a_{n+1} = pa_n + q$ 에서 상수 q 가 존재함으로 해서 일반항을 구하는데 문제점이 된다는 것에 착안하여 q 를 소거해 일반항을 구하는 방법이다.

$p \neq 1$ 인 경우는 다음과 같이 생각할 수 있다.

(방법 2) $a_{n+1}=pa_n+q$ 의 양변에 상수 k 를 더하여 정리하면

$a_{n+1}+k=p(a_n+\frac{q+k}{p})$이다. $k=\frac{q}{p-1}$ 라 두면 $k=\frac{k+q}{p}$ 이고 주어진 점화식은 $a_{n+1}+k=p(a_n+k)$ 이 된다. $b_n=a_n+k$ 로 두면 $b_{n+1}=pb_n$ 이 되어 기본적인 등비수열이 된다. 따라서 $b_n=(a_1+k)p^{n-1}$ 이다. 그러므로

$$a_n=-k+(a_1+k)p^{n-1}(\ k=\frac{q}{p-1})$$

이다.

예. 수열 $\langle a_n\rangle$ 이 $a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n-2$ 이라고 정의되었을 때 일반항을 구하여라.

(풀이) (방법1) $a_{n+1}=3a_n-2$ 에서 $a_n=3a_{n-1}-2$ 이다. 두 식을 변변 빼면

$$a_{n+1}-a_n=3(a_n-a_{n-1})$$

이다. 여기서 $b_n=a_{n+1}-a_n$ 이라고 하면 $a_2=3a_1-2=4$ 이므로 $b_1=2$,

$$b_n=3b_{n-1}$$

이다. 따라서 수열 $\langle b_n\rangle$ 은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이 되어 일반항은 $b_n=2\cdot 3^{n-1}$ 이다. 여기서 $b_n=a_{n+1}-a_n$ 이므로 $a_{n+1}-a_n=2\cdot 3^{n-1}$ 이다.

그러면 $\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot 3^{k-1}$ 에서 $a_n-a_1=3^{n-1}-1$ 이다. 따라서, 일반항은 $a_n=3^{n-1}+1$이다.

(방법2) $a_{n+1}=3a_n-2$ 의 양변에 상수 k 를 더하여 정리하면

$$a_{n+1}+k=3(a_n+\frac{k-2}{3})$$

이다. 이때 $k=\frac{k-2}{3}$ 로 두면 $k=-1$ 이다. 그러면 $a_{n+1}-1=3(a_n-1)$ 이 되고 $b_n=a_n-1$로 두면 $b_{n+1}=3b_n$ $(b_1=1)$ 이 되어 수열 $\langle b_n\rangle$ 은 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열이다. 따라서 $b_n=3^{n-1}$ 이다. 그런데 $b_n=a_n-1$ 이므로

$$a_n - 1 = 3^{n-1}$$

이다. 따라서 $a_n = 3^{n-1} + 1$ 이다.

유형 6. $a_{n+1} = qa_n^p$ $(a_n > 0)$

(풀이) $a_{n+1} = qa_n^p$ 의 양변에 상용로그를 취하면 $\log a_{n+1} = p\log a_n + \log q$ 이다. $b_n = \log a_n$이라 두면 $b_{n+1} = pb_n + \log q$ 가 되어 (유형 5)의 형태가 된다. 따라서 $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_2 - b_1)p^{k-1}$ 이고 $\log a_n = \log a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(\log a_2 - \log a_1)p^{k-1}$을 얻는다. 그러므로 일반항은 $a_n = 10^{\log a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} p^{k-1} \log \frac{a_2}{a_1}}$ 이다.

참고. 거듭제곱꼴을 변형하기 위해서 로그를 이용하는 방법이다. 참고로 상용로그가 아닌 밑이 다른 로그를 취해서 일반항을 구해도 틀린 것은 아니다.

예. 수열 $\langle a_n \rangle$ 이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n^2$ 이라고 정의되었을 때 일반항을 구하여라.

(풀이) $a_{n+1} = 2a_n^2$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면 $\log_2 a_{n+1} = 2\log_2 a_n + 1$이다. $b_n = \log_2 a_n$ 이라고 두면 $b_{n+1} = 2b_n + 1$ 가 되어 (유형5)의 형태가 된다. 따라서 수열 $\langle b_n \rangle$의 일반항은 $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_2 - b_1)2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} b_2 2^{k-1}$ 이다.

$b_1 = \log_2 a_1 = 0$ 이고 $a_2 = 2a_1 = 2$ 에서 $b_2 = \log_2 2 = 1$이다. 따라서 수열 $\langle b_n \rangle$의 일반항 $b_n = \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2^{n-1} - 1$ 이다. 그런데 $b_n = \log_2 a_n$ 이므로

$$\log_2 a_n = 2^{n-1} - 1$$

이고, 따라서 일반항은 $a_n = 2^{2^{n-1}-1}$ 이다.

유형 7. $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{p+qa_n}$ (p, q 는 0 이 아닌 상수, $a_n > 0$)

(풀이) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{p+qa_n}$ 의 양변을 역수를 취하면 $\dfrac{1}{a_{n+1}} = p\dfrac{1}{a_n} + q$ 이다.

$$b_n = \frac{1}{a_n}$$

이라 두면 $b_{n+1} = pb_n + q$ 이 되어 (유형 5)의 형태가 된다. 따라서

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_2 - b_1)p^{k-1}$$

이고 $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a_1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)p^{k-1}$를 얻는다. 그러므로

$$a_n = \frac{1}{\dfrac{1}{a_1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)p^{k-1}}$$

이다.

참고. 분자의 a_n 에 상수가 곱해진 경우도 마찬가지 방법으로 일반항을 구할 수 있다.

예. 수열 $\langle a_n \rangle$ 이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{5-a_n}$ 이라고 정의되었을 때 일반항을 구하여라.

(풀이) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{5-a_n}$ 의 양변을 역수를 취하면 $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{5}{a_n} - 1$ 이다. $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ 이라고 두면 $b_{n+1} = 5b_n - 1$ 이 되어 (유형 5)의 형태가 된다. 따라서

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_2 - b_1)5^{k-1}$$

이다. $b_1 = \dfrac{1}{a_1} = 1$ 이고 $b_2 = 5b_1 - 1 = 4$ 이므로 $b_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 4 \cdot 5^{k-1} = 5^{n-1}$ 이

다. 그런데 $b_n = \frac{1}{a_n}$ 이므로 $\frac{1}{a_n} = 5^{n-1}$ 이다. 따라서, 일반항은 $a_n = \frac{1}{5^{n-1}}$ 이다.

유형 8. $pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0 \quad (p+q+r=0)$

(풀이) $p+q+r=0$ 이므로 $q=-(p+r)$ 이다. 따라서 주어진 점화식은 $pa_{n+2} - (p+r)a_{n+1} + ra_n = 0$ 이고 $p(a_{n+2} - a_{n+1}) = r(a_{n+1} + ra_n)$를 얻는다. 여기서 $b_n = a_{n+1} - a_n$ 이라 두면 $b_{n+1} = \frac{r}{p} b_n$ 이고 이 식은 등비수열의 형태이다. 따라서 $b_n = b_1 (\frac{r}{p})^{n-1}$ 이고 $b_n = a_{n+1} - a_n$이므로

$$a_{n+1} - a_n = (a_2 - a_1)(\frac{r}{p})^{n-1}$$

을 얻는다. $f(n) = (a_2 - a_1)(\frac{r}{p})^{n-1}$이라고 두면 생각하면 (유형 3)의 형태이므로 $a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (a_2 - a_1)(\frac{r}{p})^{k-1}$ 이다. 즉 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_2 - a_1)(\frac{r}{p})^{k-1}$을 얻는다.

예. 수열 $\langle a_n \rangle$ 이 $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $2a_{n+2} - 5a_{n+1} + 3a_n = 0$ 으로 정의되었을 때 일반항을 구하여라.

(풀이) $2a_{n+2} = 5a_{n+1} - 3a_n$ 에서 $2(a_{n+2} - a_{n+1}) = 3(a_{n+1} - a_n)$ 이다.

$b_n = a_{n+1} - a_n$ 이라고 두면 $b_{n+1} = \frac{3}{2} b_n$ 이다. 수열 $\langle b_n \rangle$ 은 $b_1 = a_2 - a_1 = 1$ 이고 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열이 되어 $b_n = (\frac{3}{2})^{n-1}$ 이다. $b_n = a_{n+1} - a_n$이므로 $a_{n+1} - a_n = (\frac{3}{2})^{n-1}$ 이다. $f(n) = (\frac{3}{2})^{n-1}$ 이라고 두면 (유형 3)의 형태이므로

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_2 - a_1)(\frac{3}{2})^{k-1} = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (\frac{3}{2})^{k-1} = 2(\frac{3}{2})^{n-1}$$

이다.

3. 선형점화관계의 정의와 예

이 절에서는 점화관계의 특수한 형태인 선형점화관계에 대하여 알아보고 몇 가지 예를 살펴보려고 한다.

정의. 수열 $< a_n >$ 이 적당한 상수 $c_1,\ c_2, c_3,\ \cdots\ c_k\ (c_k \neq 0)$ 에 관하여

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + g(n) \quad (n \geqq k)$$

과 같은 점화식을 만족할 때 선형점화관계를 만족한다고 한다. 여기서 $g(n)$은 n에 관한 함수이다. $g(n) = 0$ 일 때 동차 선형점화관계라 하고, $g(n) \neq 0$ 일 때 비동차 선형점화관계라고 한다.

정의. 상수 $c_1,\ c_2, c_3,\ \cdots\ c_k\ (c_k \neq 0)$ 에 관하여 점화식

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + g(n) \quad (n \geqq k)$$

이 주어졌다고 하자. 이 점화식을 만족하는 모든 해가 어떤 식 $f(n)$ 으로부터 만들어질 수 있을 때 $f(n)$ 을 이 점화식의 일반해라고 한다.

예. (피보나치 수열) 한 쌍의 토끼가 결혼을 하여 정확하게 두 달 후 암수 한 쌍의 토끼를 낳는다. 그리고 매 달 이와 같은 방법으로 새끼를 낳는다. 그리고 새로 태어난 한 쌍의 토끼도 마찬가지로 2 개월 후부터 시작하여 매 달 암수 한 쌍의 토끼를 낳는다. a_n 을 n 개월 후의 토끼의 쌍의 수라 하면

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

로 표현된다.

예. 0 과 1 로 이루어진 길이가 n 인 수열 중에서 중 다음과 같은 것들의 수에 관한 점화관계를 구하여라.

(1) 0 이 연속하여 나오는 경우가 없는 수열

(2) 0 이 세 개 이상 연속하여 나오는 경우가 없는 수열

(풀이) (1) 0 이 연속하여 나오는 경우가 없는 수열의 수를 a_n 이라 하자. 이 수열은 두 가지 경우로 나누어 생각할 수가 있는데 먼저 1 로 시작하는 경우이고 다음은 0 으로 시작하는 경우이다. 1 로 시작하는 수열의 수는 나머지 $n-1$ 자리에 0 이 연속하여 나오지 않는 수열의 수와 같으므로 a_{n-1} 이다. 그리고 0 으로 시작하는 수열의 수는 나머지 $n-1$ 자리에 첫째 자리는 반드시 1 로 시작하고 나머지 $n-2$ 자리에 0 이 연속하여 나오지 않는 수열의 수와 같다. 따라서 a_{n-2} 이다. 결국 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 이다.

(2) 0 이 세 개 이상 연속하여 나오는 경우가 없는 수열의 수를 b_n 이라 하자. 먼저 1 로 시작하는 수열의 수는 나머지 $n-1$ 자리에 0 이 세 개 이상 연속하여 나오지 않는 수열의 수와 같으므로 b_{n-1} 이다. 그리고 0 으러 시작하는 경우는 다음의 두 경우로 나누어서 생각할 수 있는데 첫째는 01 로 시작하는 경우이고 둘째는 001 로 시작하는 경우이다. 01 로 시작하는 수열의 수는 나머지 $n-2$ 자리에 0 이 세 개 이상 연속하여 나오지 않는 수열의 수와 같으므로b_{n-2} 이다. 그리고 001 로 시작하는 수열의 수는 나머지 $n-3$ 자리에 0 이 세 개 이상 연속하여 나오지 않는 수열의 수와 같으므로 b_{n-3} 이다. 따라서 $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$ 이다.

예. 평면에 n 개의 직선이 서로 나란하지도 않고 세 점에서 만나는 경우도 없이 놓여 있다. 나뉘어진 평면의 개수에 관한 점화관계를 구하여라.

(풀이) a_n 을 n 개의 직선에 의하여 나뉘어진 평면의 개수라 하자. 그러면

$$a_1 = 2, a_2 = 4$$

이다. 일반적으로 $n-1$ 개의 직선이 놓여 있다고 하자. 여기에 직선을 하나 추가하면 기존의 직선에 의하여 이 직선은 n 개의 선분으로 나뉘어진다. 이 n 개의 선분에 의하여 기존에 있던 면 중 n 개의 면이 두 개로 잘라지므로

$$a_n = a_{n-1} + n$$

이다.

예. 한 아이가 매일 가게에 가서 2 원짜리 과자를 사 먹거나 1 원짜리 사탕을 사 먹는다. 사탕은 두 가지 종류가 있다. 이 아이가 가게에서 n 원을 사용할 수 있는 방법의 수에 관한 점화관계를 구하여라.

(풀이) a_n 을 n 원을 사용할 수 있는 방법의 수라 하자. 제일 마지막에 산 물건에 대하여 생각해 보자. 만일 아이가 마지막에 과자를 샀다면 그 이전에 $n-2$ 원을 썼으므로 a_{n-2} 가지의 방법이 있다. 그리고 마지막에 사탕을 샀다면 그 이전에 $n-1$ 원을 썼으므로 a_{n-1} 가지의 방법이 있다. 그런데 사탕은 두 가지가 있으므로 $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ 이다.

4. 동차 선형점화관계의 해법

이 절에서는 동차 선형점화관계의 해법에 대하여 알아보려고 한다.

정의. 주어진 동차 선형점화관계

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \, (c_k \neq 0)$$

에 대하여 다음의 방정식

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k = 0$$

을 특성방정식이라 한다.

위의 방정식은 특성근이라고 불리는 k 개의 근 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 을 갖는다. 이 근은 서로 같은 수도 있고 복소수일 수도 있다. 그러나 $c_k \neq 0$ 이므로 0 은 아니다.

정리 1. $a_n = r^n$ 이 동차 선형점화관계의 해가 되기 위한 필요충분조건은 r 이 특성방정식의 해가 되는 것이다.

(증명) $a_n = r^n$이 동차 선형점화관계 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$의 해가 된다고 하자. 그러면 $r^n - c_1 r^{n-1} - c_2 r^{n-2} - \cdots - c_k r^{n-k} = 0$ 이다. r^{n-k} 로 나누면 $r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0$ 이고 따라서 r 은 특성방정식의 해이다.

역으로 r 을 특성방정식의 해라고 하자. 즉, $r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0$ 라고 하자. 양 변에 r^{n-k} 를 곱하면 $r^n - c_1 r^{n-1} - c_2 r^{n-2} - \cdots - c_k r^{n-k} = 0$ 이고 따라서 $r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}$ 이다. 즉, $a_n = r^n$ 은 동차선형점화관계의 해이다.

정리 2. 수열 $X = < x_n >$ 와 $Y = < y_n >$ 가 주어진 동차 선형점화관계의 해이면 $p_1 X + p_2 Y$ $(p_1,\ p_2$는 상수)도 해이다.

(증명) 수열 $\langle x_n \rangle$과 $\langle y_n \rangle$이 선형점화관계의 해이면

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_p x_{n-k}$$
$$y_n = c_1 y_{n-1} + c_2 y_{n-2} + \cdots + c_k y_{n-k}$$

이다. 이때 $a_n = p_1 x_n + p_2 y_n$ 이라고 두면

$$\begin{aligned} a_n &= p_1 x_n + p_2 y_n \\ &= p_1 (c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}) + p_2 (c_1 y_{n-1} + c_2 y_{n-2} + \cdots + y_{n-k}) \\ &= c_1 (p_1 x_{n-1} + p_2 y_{n-1}) + c_2 (p_1 x_{n-2} + p_2 y_{n-2}) + \cdots + c_k (p_1 x_{n-k} + p_2 y_{n-k}) \\ &= c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \end{aligned}$$

이므로 $a_n = p_1 x_n + p_2 y_n$ 도 해가 된다. 따라서, 수열 $X = < x_n >$ 와 $Y = < y_n >$ 가 주어진 동차 선형점화관계의 해이면 $p_1 X + p_2 Y$ (p_1, p_2는 상수)도 해이다.

따름정리. $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 를 특성방정식의 근이라 하자. 그러면 위의 정리에 의하여 $a_n = r_i^n \, (i = 1, 2, \cdots, k)$ 은 각각 주어진 점화관계를 만족시킨다. 또 위의 정리에 의하여 임의의 상수 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 이 대하여

$$a_n = p_1 r_1^n + p_2 r_2^n + \cdots + p_k r_k^n$$

도 점화관계를 만족시킨다.

특성방정식이 서로 다른 특성근을 갖는 경우 다음의 정리를 얻을 수 있다.

정리 3. 동차 선형점화관계

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} (c_k \neq 0, a_1 = b_1, \cdots, a_{k-1} = b_{k-1})$$

가 주어졌다고 하자. 그리고 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 을 특성방정식의 서로 다른 해라고 하자. 그러면 $a_n = p_1 r_1^n + p_2 r_2^n + \cdots + p_k r_k^n$ 은 주어진 점화관계의 일반해이다.

(증명) 적당한 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 가 존재하여 다음의 연립방정식

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = b_0$$

$$p_1 r_1 + p_2 r_2 + \cdots + p_k r_k = b_1$$

$$p_1 r_1^2 + p_2 r_2^2 + \cdots + p_k r_k^2 = b_2$$

$$\cdots$$

$$p_1 r_1^{k-1} + p_2 r_2^{k-1} + \cdots + p_k r_k^{k-1} = b_{k-1}$$

이 만족된다는 사실만 보이면 된다.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_k^2 \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_k^{k-1} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{k-1} \end{pmatrix}$$

로 두면 연립방정식은 $AX = C$ 와 같이 표현할 수 있다. 임의로 주어진 초기값 벡터 C 에 대하여 $AX = C$ 를 만족하는 X 가 존재한다는 것은 A 가 가역행렬이라는 사실과 동치이다. 이를 증명하기 위하여 A 의 행들이 일차독립임을 보이자. A 의 행들이 일차종속이라고 하면, 영벡터가 아닌 k-벡터

$$(s_0,\ s_2, \cdots,\ s_{k-1})$$

가 존재하여

$$s_0(1,\ 1, \cdots,\ 1) + s_1(r_1,\ r_2, \cdots,\ r_k) + \cdots$$

$$+ s_{k-1}(r_1^{k-1},\ r_2^{k-1}, \cdots,\ r_k^{k-1}) = (0,\ 0, \cdots,\ 0)$$

이다. 따라서

$$\begin{gathered} s_0 + s_1 r_1 + \cdots + s_{k-1} r_1^{k-1} = 0 \\ s_0 + s_1 r_2 + \cdots + s_{k-1} r_2^{k-1} = 0 \\ \vdots \\ s_0 + s_1 r_k + \cdots + s_{k-1} r_k^{k-1} = 0 \end{gathered}$$

이 성립한다.

$g(x) = s_0 + s_1 x + \cdots + s_{k-1} x^{k-1}$ 으로 두면 위의 k 개의 등식으로부터

$$g(r_1) = g(r_2) = \cdots = g(r_k) = 0$$

임을 알 수 있다. $g(x)$ 는 $k-1$차 이하의 다항식으로서 k 개의 서로 다른 근인 $r_1,\ r_2,\ r_3,\ \cdots,\ r_k$ 를 가지므로 $g(x)$ 는 항등적으로 0, 즉 $s_0 = s_1 = \cdots = s_k = 0$이 된다. 이것은 $(s_0,\ s_2, \cdots,\ s_{k-1})$ 이 영벡터가 아니라는 것에 모순이다. 따라서 행렬

A 의 행들은 일차독립이다. 따라서 연립방정식을 만족하는 해가 존재한다.

예. 수열 $\langle a_n \rangle$이 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ 이라고 정의되었을 때 일반항을 구하여라.

(풀이) 점화식의 특성방정식을 생각하면 $x^2 = 4x - 1$ 이다. 따라서 특성근은

$$x = 2 \pm \sqrt{3}$$

이다. 여기서 $a_n = p(2+\sqrt{3})^n + q(2-\sqrt{3})^n$ (p, q는 상수)라고 두면

$a_1 = 1$, $a_2 = 3$ 에 의해서

$$\begin{cases} p(2+\sqrt{3}) + q(2-\sqrt{3}) = 1 \\ p(2+\sqrt{3})^2 + q(2-\sqrt{3})^2 = 3 \end{cases}$$

이다. 이 연립방정식을 풀면 $p = \frac{1}{6}(135 - 77\sqrt{3})$, $q = \frac{1}{6}(5\sqrt{3} - 9)$ 이다.

따라서 일반항은

$$a_n = \frac{1}{6}(135 - 77\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n + \frac{1}{6}(5\sqrt{3} - 9)(2-\sqrt{3})^n$$

이다.

정리 4. 동차 선형점화관계 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ 가 주어졌다고 하고 r 을 특성방정식의 m 중근이라 하자. 그러면 r^n, $nr^n, n^2 r^n, \cdots, n^{m-1} r^n$ 은 주어진 점화관계의 해가 된다.

(증명) r 이 특성 방정식 $f(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k$의 m 중근이라하자. 그러면 $f(x) = (x-r)^m q(x)$ 이다. 그리고

$$\begin{aligned} F(x) &= x^{n-k} f(x) \\ &= x^n - c_1 x^{n-1} - c_2 x^{n-2} - \cdots - c_k x^{n-k} \end{aligned}$$

라 두자. 양변을 미분하면

$$F'(x) = (n-k) x^{n-k-1} f(x) + x^{n-k} f'(x)$$

$$= nx^{n-1} - c_1(n-1)x^{n-2} - c_2(n-2)x^{n-3} - \cdots - c_k(n-k)x^{n-k-1}$$

이다. 그리고 양변에 x 를 곱하면

$$xF'(x) = nx^n - c_1(n-1)x^{n-1} - c_2(n-2)x^{n-2} - \cdots - c_k(n-k)x^{n-k}$$

이다. 양 변에 $x = r$ 을 대입하면

$$rF'(r) = nr^n - c_1(n-1)r^{n-1} - c_2(n-2)r^{n-2} - \cdots - c_k(n-k)r^{n-k}$$

이다. 그런데 $f(r) = f'(r) = 0$ 이므로 $F'(r) = 0$ 이다. 따라서

$$nr^n = c_1(n-1)r^{n-1} + c_2(n-2)r^{n-2} + \cdots + c_k(n-k)r^{n-k}$$

이 되므로 nr 도 주어진 점화식의 해가 됨을 알 수 있다.

이 방법을 반복해서 생각하면 $0 \le i \le m-1$ 에 대하여

$$n^i r^n = c_1(n-1)^i r^{n-1} + c_2(n-2)^i r^{n-2} + \cdots + c_k(n-k)^i r^{n-k}$$

임을 알 수 있다. 따라서 r 이 m 중근인 경우에 $r^n,\ nr^n,\ n^2r^n, \cdots,\ n^{m-1}r^n$도 점화식의 해가 됨을 알 수 있다.

예. 수열 $\langle a_n \rangle$ 이 $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 20,\ a_{n+3} = 2a_{n+2} + 4a_{n+1} - 8a_n$ 으로 정의되었을 때 일반항을 구하여라.

(풀이) 점화식의 특성방정식을 생각하면 $x^3 = 2x^2 + 4x - 8$ 이다. 방정식을 정리하면 $(x-2)^2(x+2) = 0$ 이 되어 특성근은 중근 2 와 다른 한 근 -2가 된다.

$a_n = p2^n + qn2^n + r(-2)^n$ 이라고 두면 $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 20$ 에 의해서

$$\begin{cases} 2p + 2q - 2r = 1 \\ 4p + 8q + 4r = 2 \\ 8p + 24q - 8r = 20 \end{cases}$$

이다. 연립방정식을 풀면 $p = -1,\ q = 1,\ r = -\dfrac{1}{2}$ 이다. 따라서 점화식의 일반항은 $a_n = -2^n + n2^n + (-2)^{n-1}$ 이다.

5. 비동차 선형점화관계의 해법

정의. 비동차 선형점화관계식

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + g(n) \ \ (n \geqq k) \qquad ①$$

에 대하여 $g(n)$ 을 0 으로 놓은 동차 선형점화식

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

을 부속동차점화식이라고 한다.

정리 5. $c_1,\ c_2, c_3,\ \cdots\ c_k$ 는 상수이고 $g(n) \neq 0$ 일 때 점화식

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + g(n) \ \ (n \geqq k)$$

에서 이 점화식을 만족하는 특수해를 $p(n)$, 부속동차점화식의 일반해를 $q(n)$이라고 하면 일반항은 $a_n = p(n) + q(n)$ 이다.

(증명) $p(n)$이 점화식의 특수해이므로 $a_n = p(n)$ 을 대입하면

$$p(n) = c_1 p(n-1) + c_2 p(n-2) + \cdots + c_k p(n-k) + g(n) \qquad ②$$

이다. 이때 ①식과 ②식을 변변 빼서 정리하면

$$a_n - p(n) = c_1(a_{n-1} - p(n-1)) + \cdots + c_k(a_{n-k} - p(n-k))$$

이다. $b(n) = a_n - p(n)$ 이라고 두면 $b_n = c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-2} + \cdots + c_k b_{n-k}$ 이 되어서 $b(n) = q(n)$ 이다. 따라서 점화식의 일반항은 $a_n = p(n) + q(n)$ 이다.

여기서 비동차 선형점화관계식의 일반항을 구하는 방법은 다음과 같음을 알 수 있다.

첫째, 부속동차점화식의 일반해 $q(n)$ 을 구한다.

둘째, 비동차점화식의 특수해 $p(n)$ 을 구한다.

셋째, $p(n)$, $q(n)$ 을 결합하여 비동차점화식의 일반항을 구한다.

이제 일반항을 어떻게 구할 것인지에 대해서 구체적으로 알아보도록 하겠다.
여기서 일반항을 구하는데 문제가 되는 것은 비동차 선형점화관계식의 특수해를

구하는 것이 될 것이다. 부속동차점화식의 일반해를 구하는 것은 앞의 동차선형점화식의 방법으로 구하면 되기 때문이다.

비동차점화식의 특수해를 구하는 방법은 비동차 선형점화관계식에서 $g(n)$ 이 어떤 식인가에 따라 달라지므로 다음과 같이 구분해서 생각해 보도록 하겠다.

(1) $g(n)$ 이 다항식인 경우

$g(n)$ 이 m 차 다항식이라고 가정하면

$$p(n) = t_m n^m + t_{m-1}n^{m-1} + t_{m-2}n^{m-2} + \cdots + t_1 n + t_0$$

이라고 놓고 a_n 대신에 $p(n)$ 을 대입하여 양변을 정리한 후 각 항의 계수를 비교하여 상수 $t_0,\ t_2, t_3,\ \cdots,\ t_m$ 를 구하면 된다.

예. 수열 $\langle a_n \rangle$ 이 $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 4a_{n+1} - 8a_n + 2n + 3$ 을 만족하고 $a_1 = \dfrac{1}{9}$, $a_2 = -\dfrac{17}{9}$, $a_3 = \dfrac{37}{9}$ 일 때 일반항을 구하여라.

(풀이) 점화식의 특수해를 $p(n) = sn + t$ 이라고 두고 a_n 대신에 $p(n)$을 대입하자. 그러면

$$s(n+3) + t = 2\{s(n+2) + t\} + 4\{s(n+1) + t\} - 8(sn+t) + 2n + 3$$

이다. 이 식을 n 에 관하여 내림차순으로 정리하면 $(3s-2)n - 5s + 3t - 3 = 0$이다. 이 식은 임의의 자연수 n 에 대하여 항상 성립해야 하므로

$$s = \frac{2}{3},\ t = \frac{19}{9}$$

이다. 따라서 특수해는 $p(n) = \dfrac{2}{3}n + \dfrac{19}{9}$ 이고 부속 동차점화식의 일반해는

$$q(n) = p2^n + qn2^n + r(-2)^n$$

이므로 $a_n = p2^n + qn2^n + r(-2)^n + \dfrac{2}{3}n + \dfrac{19}{9}$ 이라고 두자. 그러면,

$$a_1 = \frac{1}{9},\ a_2 = -\frac{17}{9},\ a_3 = \frac{37}{9}$$

에서

$$\begin{cases} 2p + 2q - 2r = -\frac{8}{3} \\ 4p + 8q + 4r = -\frac{16}{3} \\ 8p + 24q - 8r = 0 \end{cases}$$

이다. 연립방정식을 풀면 $p = -2,\ q = \frac{2}{3},\ r = 0$ 이다. 따라서 점화식의 일반항은

$$a_n = (\frac{1}{3}n - 1)2^{n+1} + \frac{2}{3}n + \frac{19}{9}$$

이다.

(2) $g(n)$이 지수 함수인 경우

$g(n) = cr^n$ ($c \neq 0$ 인 상수)이라고 하자.

(i) r 이 부속동차점화식의 특성근이 아닌 경우

$p(n) = tr^n$ 이라고 놓고 a_n 대신에 $p(n)$ 을 대입하여 양변을 정리한 후 상수 t를 구하면 된다.

일반적으로 $p(n) = t_1 n^m r^n$ ($m \neq 0$인 정수)인 경우는 점화식의 특수해가 되지 않음을 보일 수 있다. tr^n 은 점화식의 특수해이므로

$$tr^n - tc_1 r^{n-1} - tc_2 r^{n-2} - \cdots - tc_k r^{n-k} - cr^n = 0$$

이다. 이를 정리하면

$$(t-c)r^n = tr^{n-k}(c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \cdots + c_k) \qquad ③$$

이다. $p(n) = t_1 n^m r^n$ 이 점화식의 특수해가 된다고 가정하면

$$t_1 n^m r^n - t_1\{c_1(n-1)^m r^{n-1} + c_2(n-2)^m r^{n-2} + \cdots + c_k(n-k)^m r^{n-k}\} - cr^n = 0$$

이 식을 정리하면

$$\begin{aligned}(t_1n^m - c)r^n &= t_1r^{n-k}\left\{c_1(n-1)^m r^{k-1} + c_2(n-2)^m r^{k-2} + \cdots + c_k(n-k)^m\right\} \\ &= t_1r^{n-k}[(c_1r^{k-1} + c_2r^{k-2} + \cdots + c_k)n^m + \cdots \\ &\quad + \left\{(-1)^m c_1 + (-2)^m c_2 + \cdots + (-k)^m c_k\right\}]\end{aligned}$$

이다. ③식에서 $c_1r^{k-1} + c_2r^{k-2} + \cdots + c_k = \dfrac{(t-c)r^k}{t}$ 을 얻을 수 있고 이 식을위 식에 대입하면

$$\begin{aligned}(t_1n^m - c)r^n &= t_1r^{n-k}[\frac{(t-c)r^k}{t}n^m + \cdots + \left\{(-1)^m c_1 + (-2)^m c_2 + \cdots + (-k)^m c_k\right\}] \\ &= \frac{(t-c)t_1n^m r^n}{t} + \cdots + \left\{(-1)^m c_1 + (-2)^m c_2 + \cdots + (-k)^m c_k\right\}t_1r^{n-k}\end{aligned}$$

이다. 여기서 계수 비교를 하면 $\dfrac{(t-c)}{t} = 1$ 이 되어 $c = 0$ 가 된다. 이는 $c \neq 0$ 인 상수이라는 가정에 모순이 된다. 따라서 $p(n) = t_1n^m r^n$ ($m \neq 0$ 인 정수)는 점화식의 특수해가 될 수 없다.

예. 수열 $<a_n>$ 이 $a_1 = -\dfrac{7}{12}$, $a_2 = \dfrac{29}{12}$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n + \dfrac{5^n}{2}$ 으로 정의되었을 때 일반항을 구하여라.

(풀이) 점화식의 특수해를 $p(n) = t5^n$ 이라고 두고 a_n 대신에 $p(n)$ 을 대입하면 $t5^{n+2} = 4t5^{n+1} - t5^n + \dfrac{5^n}{2}$ 이다. 이 식을 정리하면 $6t5^n = \dfrac{5^n}{2}$ 이 되어 $t = \dfrac{1}{12}$ 이다. 따라서 특수해는 $p(n) = \dfrac{5^n}{12}$ 이다. 부속 동차점화식의 일반해는

$$q(n) = p(2+\sqrt{3})^n + q(2-\sqrt{3})^n$$

이므로 점화식의 일반항은 $a_n = p(2+\sqrt{3})^n + q(2-\sqrt{3})^n + \dfrac{5^n}{12}$ 이다.

$a_1 = -\dfrac{7}{12}$, $a_2 = \dfrac{29}{12}$ 에서

$$\begin{cases} p(2+\sqrt{3})+q(2-\sqrt{3})=-1 \\ p(2+\sqrt{3})^2+q(2-\sqrt{3})^2=2 \end{cases}$$

이다. 연립 방정식을 풀면 $p=-\frac{1}{6}(18-11\sqrt{3})$, $q=-\frac{1}{6}(18+11\sqrt{3})$ 이다. 따라서 점화식의 일반항은

$$a_n=-\frac{1}{6}(18-11\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n-\frac{1}{6}(18+11\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n+\frac{5^n}{12}$$

이다.

(ii) r 이 부속동차점화식의 m 중근인 경우

$p(n)=tn^m r^n$ 이라 놓고 a_n 대신에 $p(n)$ 을 대입하여 양변을 정리한 후 상수 t 을 구하면 된다.

이제 $p(n)=t_1 n^{m-1} r^n$ 은 점화식의 특수해가 될 수 없음을 보이자.

r 가 부속동차점화식의 m 중근이라고 하면

$$n^{m-1}r=c_1(n-1)^{m-1}r^{n-1}+c_2(n-2)^{m-1}r^{n-2}+\cdots+c_k(n-k)^{m-1}r^{n-k} \quad ④$$

을 만족한다. $p(n)=t_1 n^{m-1} r^n$이 점화식의 특수해가 된다고 가정하면

$$t_1 n^{m-1}r^n-t_1\{c_1(n-1)^{m-1}r^{n-1}+c_2(n-2)^{m-1}r^{n-2}+ \\ \cdots+c_k(n-k)^{m-1}r^{n-k}\}-cr^n=0$$

이다. 위 식에 ④식을 대입하여 정리하면 $(tn^{m-1}-c)r^n=tn^{m-1}r^n$이 되어 $c=0$ 이다. 이는 $c\neq 0$ 인 상수라는 가정에 모순이 된다.

따라서 $p(n)=t_1 n^{m-1} r^n$ 는 점화식의 특수해가 될 수 없다.

예. 수열 $<a_n>$ 이 $a_{n+3}=2a_{n+2}+4a_{n+1}-8a_n+5\cdot 2^n$ 을 만족하고 $a_1=-\frac{7}{16}$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{21}{4}$ 일 때 일반항을 구하여라.

(풀이) $g(n)=5\cdot 2^n$에서 2가 부속 동차점화식의 중근이므로 특수해를

$$p(n) = tn^2 2^n$$

이라고 두고 a_n 대신에 대입하면

$$t(n+3)^2 2^{n+3} = 2t(n+2)^2 2^{n+2} + 4t(n+1)^2 2^{n+1} - 8tn^2 2^n + 5 \cdot 2^n$$

이다. 이 식을 정리하면 $(32t-5)2^n = 0$이다. 따라서 $t = \frac{5}{32}$가 되어 특수해는 $p(n) = \frac{5}{32} n^2 2^n$이고 부속 동차점화식의 일반해는 부속 동차점화식의 일반해는 $q(n) = p2^n + qn2^n + r(-2)^n$ 이다. 그러므로 주어진 점화식의 일반항은

$$a_n = p2^n + qn2^n + r(-2)^n + \frac{5}{32} n^2 2^n$$

이라고 두자. $a_1 = -\frac{7}{16}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{21}{4}$ 이므로

$$\begin{cases} 2p + 2q - 2r = -1 \\ 4p + 8q + 4r = -2 \\ 8p + 24q - 8r = -6 \end{cases}$$

이다. 연립방정식을 풀면 $p = -\frac{5}{16}$, $q = -\frac{1}{8}$, $r = \frac{1}{16}$ 이다. 따라서 점화식의 일반항은 $a_n = -7 \cdot 2^{n-4} - n2^{n-3} + (-2)^{n-4} + 5n^2 2^{n-5}$ 이다.

(3) $g(n)$ 이 다항식과 지수 함수의 합으로 이루어진 경우

$g(n)$ 이 다항식과 지수 함수의 합으로 이루어진 경우를 생각하자.

정리 6. $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + g(n)$ 이고 $g(n) = h(n) + l(n)$ 이라 하자. 여기서 $h(n)$ 은 다항식이고 $l(n)$ 은 지수함수이다. $p_1(n)$ 을

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + h(n)$$

의 특수해라 하고 $p_2(n)$ 을 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + l(n)$ 의 특수해라고 하자. 그러면 $p_1(n) + p_2(n)$ 은

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + g(n)$$

의 특수해이다.

(증명) $p_1(n)$ 이 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + h(n)$ 의 특수해이고 $p_2(n)$ 이 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + l(n)$ 의 특수해이므로

$$p_1(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i p_1(n-i) + h(n),\ p_2(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i p_2(n-i) + l(n)$$

이다. 두 식의 양 변을 서로 더하면

$$p_1(n) + p_2(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \left(p_1(n-i) + p_2(n-i)\right) + h(n) + l(n)$$

이다. 따라서 $p_1(n) + p_2(n)$ 은 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + g(n)$ 의 특수해이다.

위 정리에 의하여 다음과 같은 방법으로 특수해를 구할 수 있다.

(i) r 이 부속동차점화식의 특성근이 아닌 경우

$$p(n) = t_{m+1} r^n + t_m n^m + t_{m-1} n^{m-1} + t_{m-2} n^{m-2} + \cdots + t_1 n + t_0$$

이라고 놓고 a_n 대신에 $p(n)$ 을 대입하여 양변을 정리한 후 각 항의 계수를 비교하여 상수 $t_0,\ t_2, t_3,\ \cdots,\ t_m,\ t_{m+1}$ 을 구하면 된다.

예. 수열 $\langle a_n \rangle$ 이 $a_1 = -\frac{1}{12}$, $a_2 = \frac{1}{12}$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n + \frac{5^n}{2} - 3n + 7$ 으로 정의되었을 때 일반항을 구하여라.

(풀이) 점화식의 특수해를 $p(n) = a5^n + bn + c$ 이라고 두고 a_n 대신에 $p(n)$ 을 대입하면

$$a5^{n+2} + b(n+2) + c = 4\{a5^{n+1} + b(n+1) + c\} - (a5^n + bn + c) + \frac{5^n}{2} - 3n + 7$$

이다. 이 식을 정리하면 $(6a - \frac{1}{2})5^n + (2b-3)n + 2b - 2c + 7 = \frac{1}{2}$ 이 되어

$$a = \frac{1}{12},\ b = \frac{3}{2},\ c = 5$$

이다. 따라서 특수해는 $p(n) = \frac{5^n}{12} + \frac{3}{2}n + 5$ 이다.

부속 동차점화식의 일반해는 $q(n) = s(2+\sqrt{3})^n + t(2-\sqrt{3})^n$ 이므로 점화식의 일반항은 $a_n = s(2+\sqrt{3})^n + t(2-\sqrt{3})^n \frac{5^n}{12} + \frac{3}{2}n + 5$ 라고 두자. 그러면

$a_1 = -\frac{1}{12},\ a_2 = \frac{1}{12}$ 이므로

$$\begin{cases} s(2+\sqrt{3}) + t(2-\sqrt{3}) = -4 \\ s(2+\sqrt{3})^2 + t(2-\sqrt{3})^2 = -10 \end{cases}$$

이다. 연립방정식을 풀면 $s = -\frac{1}{3}(33-16\sqrt{3})$, $t = \frac{1}{3}(15+8\sqrt{3})$이다. 따라서 점화식의 일반항은

$$a_n = -\frac{1}{3}(33-16\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n + \frac{1}{3}(15+8\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n + \frac{5^n}{12} + \frac{3}{2}n + 5$$

이다.

(ii) r 이 부속동차점화식의 l 중근인 경우

$$p(n) = t_{m+1}n^l r^n + t_m n^m + t_{m-1}n^{m-1} + t_{m-2}n^{m-2} + \cdots + t_1 n + t_0$$

이라고 놓고 a_n 대신에 $p(n)$ 을 대입하여 양변을 정리한 후 각 항의 계수를 비교하여 상수 $t_0,\ t_2, t_3,\ \cdots,\ t_m,\ t_{m+1}$ 을 구하면 된다.

예. 수열 $\langle a_n \rangle$ 이 $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 4a_{n+1} - 8a_n + 5\cdot 2^n + 2n + 3$ 을 만족하고 $a_1 = -\frac{2}{9},\ a_2 = \frac{13}{9},\ a_3 = \frac{37}{9}$ 일 때 일반항을 구하여라.

(풀이) $5\cdot 2^n$ 에서 2가 부속 동차점화식의 중근이므로 특수해를

$$p(n) = an^2 2^n + bn + c$$

이라고 두고 a_n 대신에 대입하면

$$a(n+3)^2 2^{n+3}+b(n+3)+c=2\{a(n+2)^2 2^{n+2}+b(n+2)+c\}$$
$$+4\{a(n+1)^2 2^{n+1}+b(n+1)+c\}-8(an^2 2^n+bn+c)+5\cdot 2^n+2n+3$$

이다. 이 식을 정리하면 $(32a-5)2^n+(3b-2)n-5b+3c-3=0$이다. 따라서 $a=\frac{5}{32}$, $b=\frac{2}{3}$, $c=\frac{19}{9}$가 되어 특수해는 $p(n)=\frac{5}{32}n^2 2^n+\frac{2}{3}n+\frac{19}{9}$이고 부속 동차점화식의 일반해는 $q(n)=s2^n+tn2^n+r(-2)^n$이므로 일반항은

$$a_n=s2^n+tn2^n+r(-2)^n+\frac{5}{32}n^2 2^n+\frac{2}{3}n+\frac{19}{9}$$

이라고 두자. 그러면 $a_1=-\frac{2}{9}$, $a_2=\frac{13}{9}$, $a_3=\frac{37}{9}$ 이므로

$$\begin{cases} 2s+2t-2r=-\frac{53}{16} \\ 4s+8t+4r=-\frac{9}{2} \\ 8s+24t-8r=-\frac{45}{4} \end{cases}$$

이다. 연립방정식을 풀면 $s=-\frac{101}{64}$, $t=\frac{1}{8}$, $r=\frac{13}{64}$ 이다. 따라서 점화식의 일반항은 $a_n=-101\cdot 2^{n-6}+n2^{n-3}+13(-2)^{n-6}+5n^2 2^{n-5}+\frac{2}{3}n+\frac{19}{9}$ 이다.

(4) $g(n)$ 이 다항식과 지수 함수의 곱으로 이루어진 경우

$g(n)$ 이 다항식과 지수 함수의 곱으로 이루어진 경우를 생각하자.

점화식이 $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_ka_{n-k}+r^n n^m$ $(m\neq 0)$ 으로 주어졌다고 하자. 점화식의 양변을 r^n 으로 나누면

$$\frac{a_n}{r^n}=\frac{c_1}{r}\frac{a_{n-1}}{q_{n-1}}+\frac{c_2}{r^2}\frac{a_{n-2}}{r^{n-2}}+\cdots+\frac{c_k}{r^k}\frac{a_{n-k}}{r^{n-k}}+n^m$$

이다. 여기서 $b_n=\frac{a^n}{r^n}$, $c_i{}'=\frac{c_i}{r^i}$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 이라 하자. 그러면

$$b_n = c_1{}'b_{n-1} + c_2{}'b_{n-2} + \cdots + c_k{}'b_{n-k} + n^m$$

이다. $p(n)$ 을 위 점화식의 특수해라고 하면

$$p(n) = c_1{}'p(n-1) + c_2{}'p(n-2) + \cdots + c_k{}'p(n-k) + n^m$$

이다. 양변에 r^n 을 곱하면

$$r^n p(n) = c_1 r^{n-1} p(n-1) + c_2 r^{n-2} p(n-2) + \cdots + c_k r^{n-k} p(n-k) + r^n n^m$$

이다. 따라서 $r^n p(n)$ 은

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + g(n)$$

의 특수해이다.

위 결과에 의하여 다음 정리에서의 방법으로 특수해를 구할 수 있다.

정리 7. 비동차 선형점화관계식

$$a_{n_i} = c_1 a_{n_i-1} + c_2 a_{n_i-2} + \cdots + c_k a_{n_i-k} + r^n n^m$$

이 주어졌다고 하자. 그러면 이 선형점화관계식의 특수해는

$$p(n) = (t_0 + t_1 n + t_2 n^2 + \cdots + t_{m-1} n^{m-1}) r^n$$

형태이다.

정리 8. 비동차 선형점화관계식

$$a_{n_i} = c_1 a_{n_i-1} + c_2 a_{n_i-2} + \cdots + c_k a_{n_i-k} + (r_1^n + r_2^n + \cdots + r_m^n) n^s$$

이 주어졌다고 하자. 이 때 모든 $1 \le i \le m$ 에 대하여 $p_i(n)$ 를

$$a_{n_i} = c_1 a_{n_i-1} + c_2 a_{n_i-2} + \cdots + c_k a_{n_i-k} + r_i^n n^s$$

의 특수해라 하자. 그러면 $p_1(n) + p_2(n) + \cdots + p_m(n)$ 은 주어진 비동차 선형점화관계의 특수해이다.

예. 수열 $\langle a_n \rangle$ 이 $a_{n+1} = 6a_n + 2n(2^{n+1} + 3^{n+1})$ 으로 정의되었을 때 특수해를

구하여라.

(풀이) $b_{n+1}=6b_n+(2n)2^{n+1}$ 에서 양변을 2^{n+1} 으로 나누면

$$\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}=3\frac{b_n}{2^n}+2n$$

이고 $x_n=\frac{b_n}{2^n}$ 이라고 두면 $x_{n+1}=3x_n+2n$ 이다. 수열 $\langle x_n \rangle$ 의 특수해를

$$p_1(n)=u_1n+v_1$$

이라고 두고 x_n 대신에 $p_1(n)$ 을 대입하자. 그러면

$$u_1(n+1)+v_1=3(u_1n+v_1)+2n$$

이다. 이 식을 정리하면 $(2u_1+2)n-u_1+2v_1=0$이므로 $u_1=-1$, $v_1=-\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $p_1(n)=-n-\frac{1}{2}$ 이다. 그러므로 $b_{n+1}=6b_n+(2n)2^{n+1}$ 의 특수해는

$$\left(-n-\frac{1}{2}\right)2^n$$

이다.

마찬가지 방법으로 $c_{n+1}=6c_n+3^{n+1}2n$ 에서 양변을 3^{n+1} 으로 나누면

$$\frac{c_{n+1}}{3^{n+1}}=2\frac{c_n}{3^n}+2n$$

이고 $y_n=\frac{c_n}{3^n}$ 이라고 두면 $y_{n+1}=2y_n+2n$ 이다. 수열 $\langle y_n \rangle$ 의 특수해를

$$p_2(n)=u_2n+v_2$$

이라고 두고 y_n 대신에 $p_2(n)$ 을 대입하자. 그러면

$$u_2(n+1)+v_2=2\{u_2n+v_2\}+2n$$

이다. 이 식을 정리하면 $(u_2+2)n-u_2+v_2=0$ 이므로 $u_2=-2$, $v_2=-2$ 이다.

따라서 $p_2(n)=-2n-2$ 이다. 그러므로 $c_{n+1}=6c_n+3^{n+1}2n$의 특수해는

$$(-2n-2)3^n$$

이다. 결국 주어진 점화관계의 특수해는 $\left(-n-\frac{1}{2}\right)2^n+(-2n-2)3^n$ 이다.

예. 수열 $\langle a_n \rangle$ 이 $a_1=3$, $a_{n+1}=6a_n+(2^{n+1}+3^{n+1})(2n-3)$으로 정의되었을 때 일반항을 구하여라.

(풀이) $b_{n+1}=6b_n+2^{n+1}(2n-3)$에서 양변을 2^{n+1}으로 나누면

$$\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}=3\frac{b_n}{2^n}+2n-3$$

이고 $x_n=\frac{b_n}{2^n}$이라고 두면 $x_{n+1}=3x_n+2n-3$이다. 수열 $\langle x_n \rangle$의 특수해를

$$p_1(n)=u_1n+v_1$$

이라고 두고 x_n 대신에 $p_1(n)$을 대입하자. 그러면

$$u_1(n+1)+v_1=3\{u_1n+v_1\}+2n-3$$

이다. 이 식을 정리하면 $(2u_1+2)n-u_1+2v_1-3=0$이므로 $u_1=-1$, $v_1=1$ 이다. 따라서 $p_1(n)=-n+1$ 이다.

수열 $\langle x_n \rangle$의 특성방정식은 $x=3$ 이 되어 부속 동차점화식의 일반해는

$$q_1(n)=k3^n$$

이다. 따라서 $x_n=\frac{b_n}{2^n}=k3^n-n+1$이므로 $b_n=k6^n-(n-1)2^n$이다.

$c_{n+1}=6c_n+3^{n+1}(2n-3)$에서 양변을 3^{n+1}으로 나누면

$$\frac{c_{n+1}}{3^{n+1}}=2\frac{c_n}{3^n}+2n-3$$

이고 $y_n=\frac{c_n}{3^n}$이라고 두면 $y_{n+1}=2y_n+2n-3$이다. 수열 $\langle y_n \rangle$의 특수해를

$$p_2(n)=u_2n+v_2$$

이라고 두고 y_n 대신에 $p_2(n)$을 대입하자. 그러면

$$u_2(n+1)+v_2=2\{u_2n+v_2\}+2n-3$$

이다. 이 식을 정리하면 $(u_2+2)n-u_2+v_2-3=0$이므로 $u_2=-2$, $v_2=1$ 이다. 따라서 $p_1(n)=-2n+1$ 이다.

수열 $\langle y_n \rangle$의 특성방정식은 $x=2$ 가 되어 부속 동차점화식의 일반해는

$$q_2(n)=t2^n$$

이다. 따라서 $y_n=\frac{c_n}{3^n}=t2^n-2n+1$이므로 $c_n=t6^n-(2n-1)3^n$이다.

따라서 점화식의 일반항은 $a_n=(k+t)6^n-(n-1)2^n-(2n-1)3^n$이다.

또한 $a_1=3$이므로 $k+t=1$이다. 따라서 $a_n=6^n-(n-1)2^n-(2n-1)3^n$이다.

생성함수는 중복조합이나 중복순열의 수를 구하는데 매우 유용하게 사용되는 방법이다. 이 생성함수를 이용하여 점화관계를 해결할 수도 있다.

정의. 수열 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 에 대하여 다음과 같은 멱급수 형태

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

을 이 수열의 생성함수라고 한다.

예. 수열 1, 1, 1,$\cdots$의 생성함수는

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

이다.

예. 수열 $\langle a_n \rangle$ 이 $a_0=1$, $a_1=-2$, $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ $(n \geq 0)$ 으로 정의 되었을 때 일반항을 구하여라.

(풀이) 수열 $\langle a_n \rangle$ 의 생성함수를 $g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 이라고 하자. 그러면

$$g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

$$-5xg(x) = -5a_0x - 5a_1x^{2-5a_2}x^3 - \cdots$$

$$6x^2g(x) = 6a_0x^2 + 6a_1x^3 + 6a_2x^4 + \cdots$$

이다. 세 식을 변변 더하여 정리하면

$$(1-5x+6x^2)g(x) = a_0 + (a_1 - 5a_0)x = 1 - 7x$$

이다. 따라서

$$g(x) = \frac{(1-7x)}{(1-5x+6x^2)} = \frac{5}{1-2x} - \frac{4}{1-3x} = 5\sum_{k=0}^{\infty}2^kx^k - 4\sum_{k=0}^{\infty}3^kx^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(5 \cdot 2^k - 4 \cdot 3^k)x^k$$

이다. 따라서 $a_n = 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n$ ($n \geqq 0$)이다.

예. 수열 $\langle a_n \rangle$ 이 $a_0 = 1$, $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ ($n \geqq 1$) 으로 정의 되었을 때 일반항을 구하여라.

(풀이) 수열 $\langle a_n \rangle$ 의 생성함수를 $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 이라고 하자. 그러면

$$g(x) - a_0 = \sum_{k=1}^{\infty}(8a_{k-1} + 10^{k-1})x^k = 8\sum_{k=1}^{\infty}a_{k-1}x^k + \sum_{k=1}^{\infty}10^{k-1}x^k$$
$$= 8x\sum_{k=1}^{\infty}a_{k-1}x^{k-1} + x\sum_{k=1}^{\infty}10^{k-1}x^{k-1} = 8x\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k + x\sum_{k=0}^{\infty}10^kx^k$$
$$= 8xg(x) + \frac{x}{1-10x}$$

이다. 따라서 $g(x) = \dfrac{1-9x}{(1-8x)(1-10x)}$ 이므로

$$g(x) = \frac{1}{2(1-8x)} + \frac{1}{2(1-10x)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}8^kx^k + \sum_{k=0}^{\infty}10^kx^k\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}(8^k + 10^k)x^k$$

이다. 따라서 $a_n = \dfrac{1}{2}(8^n + 10^n)$ ($n \geqq 0$) 이다.

III. 결론

사회구조가 정보화 산업으로 전환되면서 사회변화의 추세에 맞추어 학교수업도 많은 변화와 새로운 학습방법을 시도하고 있다. 컴퓨터나 계산기와 같은 교육매체를 활용 및 도입에 대한 연구가 계속되어 오고 있는 것이다. 이에 앞서 논리적인 사고력과 수학적 추론능력의 향상을 위해 이산수학의 도입은 매우 중요하게 생각되어진다. 이러한 이산수학에 있어서의 많은 문제들이 수열의 점화식을 이용하여 해결될 수 있다.

수열은 극한과 연속의 내용을 포함하는 기본 개념이며 해석학을 이해하는 데 기초가 되는 내용이므로 문제 분석 능력과 논리적인 사고력을 기르는 데 도움이 되는 학습내용 중의 하나이다.

본 논문에서는 중등교과에서 이산수학 과정에 나오는 점화식과 관련된 문제들을 알아보고 그 해법을 알아보았다. 그리고 좀 더 일반적인 형태의 점화식 문제에 대한 해법을 연구하여 보았다.

이에 따른 기대되는 성과로는 일반적인 해법을 학습하게 되므로 여러 가지 다양하고 복잡한 문제가 제시 되어도 그 문제의 해결이 가능하고, 해법의 알고리즘이 단계적이고 기계적인 계산에 의하여 답을 구할 수 있으므로 문제를 해결하는 소요 시간이 단축되며, 다양한 점화수열의 학습을 통하여 점화수열의 중요성을 인식하게 할 수 있다.

참 고 문 헌

정관훈(2003), 점화식 수열의 효과적인 지도 방안, 석사학위 논문,

충북대학교 교육대학원.

서영(1999), 점화수열의 지도에 관한 연구, 석사학위 논문,

충북대학교 교육대학원.

김향선(1998), 이산수학의 한 분야인 점화관계에 관한 연구, 석사학위 논문,

전남대학교 교육대학원.

이규섭(1994), 수열의 점화식에 관한 연구, 석사학위 논문,

한양대학교 교육대학원.

황대훈(2000), 「이산수학」, 생능출판사 .

최설희·윤영진(2001), 「조합수학」, 경문사.

황석근 외(2001), 「이산수학」, (주)블랙박스.