

碩士學位論文

有限要素技法을 利用한
港灣 靜穩度の 數值解析



濟州大學校 大學院

土木海洋工學科

許 伶 宅

2002年 12月

有限要素技法을 利用한 港灣 靜穩度の 數値解析

指導教授 金 南 亨

許 伶 宅

이 論文을 工學 碩士學位 論文으로 提出함



許伶宅의 工學 碩士學位 論文을 認准함

審査委員長	_____	印
委 員	_____	印
委 員	_____	印

濟州大學校 大學院

2002年 12月

Numerical Analysis of Harbor Calmness by Finite Element Technique

Young-Teck Hur

(Supervised by professor Nam-Hyeong Kim)



A thesis submitted in partial fulfillment of the requirement for the
degree of Master of Engineering

Department of Civil & Ocean Engineering
GRADUATE SCHOOL
CHEJU NATIONAL UNIVERSITY

目 次

Summary	1
I. 서 론	3
1. 연구배경	3
1-1. 연구 필요성	3
1-2. 이론적 배경	4
2. 연구목적	5
3. 논문의 구성	5
II. 수치 모형의 기본방정식	6
1. 기본 방정식	6
2. 부분흡수 경계조건	8
3. 해저면 마찰	9
4. 외해영역에서의 해석해	13
5. 범함수의 유도	15
III. 유한요소 정식화	22
1. 유한요소법의 개요	22
2. 근사와 보간함수	22
3. 범함수의 산정	24
3-1. I_1 의 적분	24
3-2. I_2 와 I_6 의 적분	26
3-3. I_4 와 I_5 의 적분	27
3-4. I_3 의 적분	29
4. 수치계산의 최적화	31
4-1. 수심에 따른 격자최적화 기법	31

4-2. 밴드폭 최적화 기법	31
IV. 정온도 해석 및 검증	33
1. 직사각형 모형항만	33
2. 임의형상 모형항만	38
3. 제주항의 정온도 해석	43
V. 결론	50
VI. 참고문헌	51



Summary

Recently, our country need an extension of the existing harbor to efficiently use and construct a big new harbor according the exchange amount through harbor increases. Also, harbor calmness is kept so that safe anchoring of ship have smooth loading and unloading will be available. It is important that the secondary undulation phenomenon by long period wave and the wave height ratio by short period wave should be analyzed very correctly.

This paper executed a numerical experiment to calculate secondary undulation analysis and wave height ratio about Jeju Harbor that is situated on the Jeju Island of Korea. Numerical model expresses interior using finite element and outside using series value of eigenfunction, and they were united in the imagination border to find value. Basis equation of numerical model used mile-slope equation in which bottom friction was included by Chen and Mei (1974). So, it was available analysis of long period wave and short period wave. Boundary condition of solid used portion absorption because perfection reflection displays greatly resonance amplification ratio. And, it used method that was presented to explain integral calculus of functional and simultaneous equations by Chen and Mei (1974).

Also, though when do numerical calculation, required computing time and computer storage capacity decreased, the reason is because minimized band width and element division that consider water depth by pretreatment technique.

The result of this numerical model is compared with hydraulic model experiment's result about rectangular harbor to verify the validity of developed

numerical model. Also, it is compared with numerical analysis result and experiment value for arbitrary shape harbor that Kashiwama (1993), Sato (1988), Saito (1993) was used. By the result, it was in very good agreement with others.

This numerical model was applied to Jeju Harbor and computed resonance cycle. Also, in case of short period wave, the wave height distribution was calculated changing condition of incident wave variously. And the transfer form of water particle was displayed.



I. 서 론

1. 연구배경

1-1. 연구 필요성

최근의 우리나라의 대외 수출·입 물동량이 크게 증가되고 있으며, 이러한 수출·입 물동량의 80% 이상은 항만을 통해 이루어지고 있다. 그러나 증가하는 물동량을 처리하기 위한 기존의 항만 시설 용량의 부족과 항내정온도의 미확보로 인한 경제적 손실이 날로 증가되고 있다. 이러한 문제해결 대책의 일환으로 기존 항만의 확장 및 효율적인 운용과 대규모 신항만의 계획, 설계 및 시공 등이 계속 요청되고 있다.

항만이란 선박이 안전하게 출입·정박할 수 있는 시설을 의미하며, 출·입항을 위해서는 항내의 수면을 정온하게 유지하는 것이 필요하다. 이러한 항내 수면의 정온한 정도를 항만 정온도라고 부르고 있다. 이러한 항내 정온도는 선박의 입출항의 안전성 및 물양장, 안벽에서의 하역 가동율의 관점에서 결정된다. 항만의 계획에 있어서는 소요의 정온도를 확보하기 위하여 항 입구에서 직접파랑이 입사하지 않도록 해야 하며, 또한 다중반사가 일어나지 않도록 항내 형상이 계획됨과 동시에 반사파를 저감하기 위한 구조형식이 선정되어야 한다. 항내 정온도를 산정 할 때에는 다방향 불규칙파의 회절과 반사를 높은 정도로 계산할 수 있는 것이 중요하다. 또, 항내의 수심 변화가 현저한 경우에는 굴절, 천수변형, 쇄파변형도 고려해야 하는 경우도 있다.

항만 정온도에 영향을 미치는 인자로는 과거에는 주기가 수십 초미만으로서 그 시간적 변화가 눈에 보이는 단주기파를 대부분의 항내 수면교란 현상의 주된 원인으로 생각하였다. 그러나 수천 톤 이상의 중·대형 선박의 운동에는 바람과 단주기파 외에 장주기파도 큰 영향을 미친다는 것이 알려지게 되었다. 따라서, 이를 위해서는 단주기파에 대한 해석과 아울러 장주기파에 의한 항내 부진동 현상에 대한 정확한 파악이 필요하다.

1-2. 이론적 배경

항만 정온도에 관한 현상의 연구로는 일반적으로 현장관측, 수리모형실험 및 수치모형실험의 세 가지 방법을 이용한다.

현장관측은 대상해역에 관측기계를 설치하여 일정 기간동안 현상을 관측하고 수집된 자료를 분석하는 방법으로서 실제현상의 분석, 수치 및 수리모형의 입력 및 검증자료로 활용된다.

수리모형실험에 의한 방법에서는 대상항만을 일정한 축척에 따라 축소된 모형을 제작하고 상사법칙에 기준하여 실제 현상을 재현한다. 그러나 대상으로 하는 실험이 3차원인 경우 실험설비의 제약을 받는 경우가 많다. 또한, 경우에 따라 왜곡모형을 사용할 때는 실험결과의 신뢰도가 상당히 저하되고 경비 및 시간이 많이 소요되며 대책안별 비교가 수치모형실험에 비해 상대적으로 어렵다.

수치모형실험은 물리법칙을 수식화한 지배방정식과 경계조건을 풀어서 컴퓨터를 이용하여 해를 구하는 방법으로 여러 가지 대책안에 대해서 적용이 용이하며 경비와 시간도 적게 소요된다. 그러나 물리현상의 수식화 및 수치계산시에 여러 가지 가정이 도입되고 경계면 처리기법이 완전하지 못하므로 정확한 결과를 얻기 위해서는 검증 과정을 통해 수치모형의 정확성이 확보되어야 한다.

본 연구에서는 경계의 처리에 장점을 지닌 유한요소법을 수치해석기법으로 선정하였다. 해양과의 경우 일반적인 구조해석의 경우와는 달리 대상영역이 무한하므로 효율성을 위해 통상적인 기법을 약간 수정하는 것이 필요하다. 즉, 유체영역을 실제로 해석해야 할 내부영역과 이를 둘러싼 외부영역으로 나누고 내부영역만을 유한요소법으로 계산하는 것이 계산시간의 단축이라는 관점에서 유리하다.

외부영역과 내부영역의 접합에는 Chen과 Mei(1974)가 제시한 변분원리를 이용하였다. 한편, 천수심에 대해 Mei와 Chen(1975)이 제안한 반사계수에 의한 부분흡수 경계조건 및 Heaps(1969)가 순환류에서 사용한 해지면 마찰을 고려하여 산란과의 경계치 문제를 수식화 하였다.

2. 연구목적

우리나라에서의 항만부진동 현상은 조석 현상으로 인하여 서해안보다 동·남해안에 있는 항만들이 부진동의 영향을 상당히 받을 것으로 예상된다. 그 예로, 컨테이너 하역작업을 하던 선박의 동요로 인한 선박의 피해와 하역 불능 등의 문제 등이 있고, 항내 정온의 미확보로 인한 마리나 시설에 대한 피해 및 정박 중인 소형선박의 피해와 화물선 등의 하역작업이 곤란 등이 발생할 수가 있다.

그중에서 제주도에 위치한 제주항은 반 폐쇄적 항만으로서 항내의 길이가 폭에 비해 다소 긴 형태의 항만이며, 대형선박의 접안을 위해 거의 모든 접안벽이 연직안벽으로 되어 있다. 이러한 항만은 항내 정온확보가 다소 어렵고, 부진동 문제가 발생하기 쉬운 환경을 갖추고 있으며, 시설의 확장이나 항만 하역 능력의 제고를 위한 시설의 확장을 위해서는 많은 조사와 연구가 필요하다. 따라서 본 연구는 물동량이 현저하게 증가하고 있는 제주항을 선택하여, 수치모형실험을 통해 제주항의 정온도 문제를 해석하여 개선 대책의 기초 자료를 제공하고자 한다.

3. 논문의 구성

본 논문에서는 우선 II장에서는 수치모형의 기본방정식을 유도하기 위하여 부분흡수 경계조건과 해저면 마찰을 고려하고 외해영역에서의 해석을 한 후에 범함수를 유도한다. 다음으로 III장에서는 유한요소 정식화로써 근사와 보간 함수를 이용하여 범함수를 정식화 하며 수치계산의 최적화 작업으로써 자동요소 분할법과 밴드폭 최소화 기법을 설명한다. IV장에서는 정온도 해석 및 검증으로써 먼저 직사각형 모형항만에 대한 공진주기와 파고비를 계산 및 비교 하고 다음으로 임의형상 모형항만에 대한 파고비를 계산 및 비교한다. 이러한 검증이 이루어진 후에 제주항에 대한 정온도 해석을 한다. 마지막으로 V장에서는 결론으로써 본 논문에서 얻어진 결론들을 종합적으로 서술하고 있다.

II. 수치모형의 기본방정식

1. 기본 방정식

대상유체는 비점성, 비압축성이고 비회전류라고 가정하였을 때 완만한 해저경사면 위를 전파하는 미소진폭파에 대한 파동장은 다음 식으로 표현할 수 있다.(Berkhoff, 1972).

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \Phi) + \frac{C_g}{C} w^2 \Phi = 0 \quad (1)$$

여기서,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j$$

C_g : 군속도

C : 파속

$h(x, y)$: 수심

w : 각주파수

$\Phi(x, y, t)$: 2차원 복소 포텐셜 함수

를 나타내며 군속도 C_g 와 파속 C 는 각각 다음 식과 같다.

$$C_g = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (2)$$

$$C^2 = \frac{g}{k} \tanh kh \quad (3)$$

여기서, k 는 파수를 나타낸다.

Fig. 1에서는 직교좌표계 (x, y, z) 와 원통좌표계 (r, θ, z) 를 함께 사용하였다. 방파제와 해안선의 경계에서의 에너지 손실을 무시한다면 경계에서의 수직방향의 유속성분은 다음 식과 같이 영(0)이 된다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (4)$$

여기서, n 은 영역 A 에서 밖으로 향하는 단위 수직벡터이다.

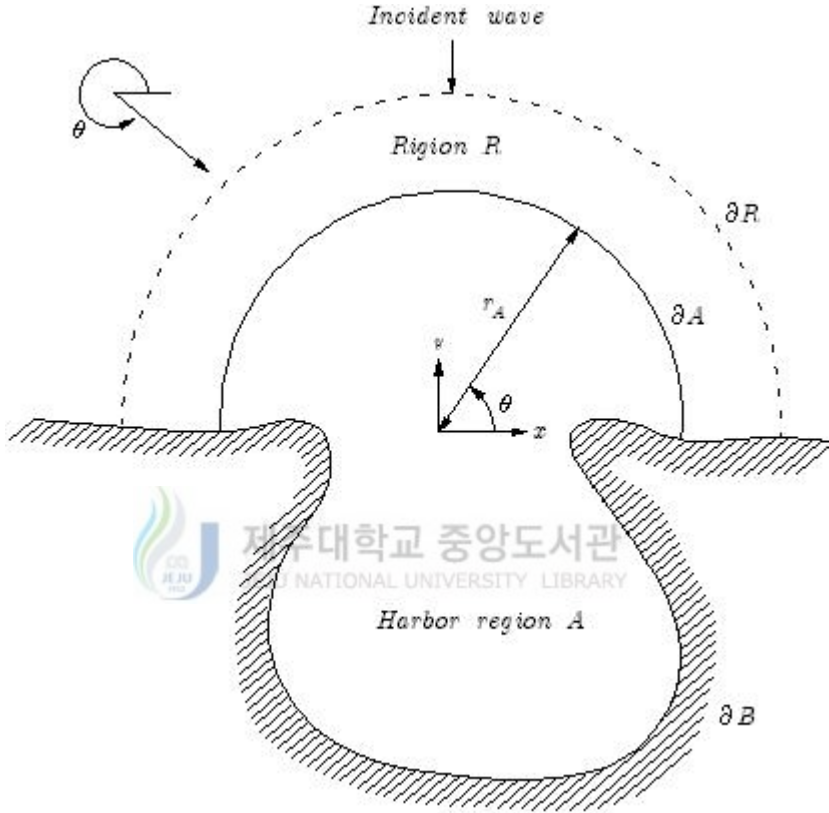


Fig. 1. Definition sketch

이제 유체영역을 모든 수평방향으로 무한원방 까지 확장하는 것으로 가정할 때 무한 원방에서는 어떠한 개방 경계조건을 부과해야 한다. 본 연구에서 사용한 방사조건은 Sommerfeld(1896) 방사조건의 특수한 경우로 다음과 같다

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right) \phi^S = 0 \quad (5)$$

윗 식은 산란파 ϕ^S 가 무한원방에서 방출파로서 거동해야 한다는 것을 나타내고 있다.

또한, 산란파 ϕ^S 는 전체파랑의 포텐셜 ϕ 에서 입사파의 포텐셜 ϕ^I 를 뺀 것으로 다음

과 같다.

$$\phi^S = \phi - \phi^I \quad (6)$$

2. 부분흡수 경계조건

방과제, 해안선 등은 일반적으로 파랑 에너지를 전부 흡수하거나 반사시키지 못한다. 부분흡수 경계조건을 고려하지 않고 완전반사로 가정한 경우는 자연 상태에서나 수리모형에서의 값보다 큰 값을 나타낸다. 특히, 공진주파수에서의 진폭은 더욱 과장된다. 따라서 경계에서의 부분흡수 경계조건이 필요하고 일반적으로 복소수인 반사계수에 의해 표현되며 이는 Mei와 Chen(1975), Berkhoff(1975), Chen(1984, 1986, 1990) 등이 사용한 바 있다. 본 연구에서 사용한 부분흡수 경계조건은 이들이 사용한 것과 동일한 것으로 하였다.

긴 직선형태의 해안선에 입사하는 천해파에 대해서 복소수 반사계수 K_r 을 구할 수 있다. 이 반사계수는 일반적으로 파랑의 주파수와 진폭, 해안선이나 방과제의 형태 및 공극율의 함수이다. x 방향으로 전파하는 파가 해안선에 대해 수직으로 입사하는 것으로 하면 입사파와 반사파를 합한 전체 파랑은 다음 식으로 주어진다.

$$\phi e^{-i\omega t} = -\frac{iga_0}{w} (e^{ikx} + K_r e^{-ikx}) e^{-i\omega t} \quad (7)$$

그리고 표면에 대한 수직경사는 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} e^{-i\omega t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} e^{-i\omega t} = \frac{ga_0 k}{w} (e^{ikx} - K_r e^{-ikx}) e^{-i\omega t} \quad (8)$$

위의 식들로부터 해안선이나 방과제 등의 고체 경계면에서는 다음 식이 성립한다.

$$\phi = -\frac{iga_0}{w} (1 + K_r) \quad (9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{ga_0 k}{w} (1 - K_r) \quad (10)$$

위 식을 연립하여 정리하면 다음 식이 된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \alpha \phi \quad \text{at} \quad x = 0 \quad (11)$$

여기서, $\alpha = ik \frac{1 - K_r}{1 + K_r}$

긴 소파성 방파제를 가진 항만에서는 음향학에서 임피던스조건이라고 부르고 있는 조건을 경계조건으로 취급할 수 있으며, 완전반사의 경우 다음 식이 된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad (12)$$

3. 해저면 마찰

부분흡수 경계조건과 마찬가지로 해저면에서의 마찰에 의해 파의 에너지 감소가 이루어진다. 이는 파랑의 진폭의 감소를 의미한다. 이러한 감소는 항만의 공진주파수에서 가장 민감하게 나타나며, 이는 물 입자의 속도와 전단응력이 그 지점에서 가장 크기 때문이다.

해저면 마찰을 고려하기 위해서 해저면에서의 전단응력은 같은 장소에서의 포텐셜 이론에 의한 물입자의 속도에 비례하는 것으로 가정하였다. 그리고 운동량 방정식에서 x 및 y 방향의 전단응력의 변화율이 z 방향에 비해 작고, z 방향의 전단응력의 변화율은 중력에 비해 작다고 가정하면, 연속방정식과 저면 마찰력을 포함한 운동량 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (15)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g \quad (16)$$

여기서, τ_{zx}, τ_{zy} 는 전단응력, (U, V, W) 는 x, y, z 방향의 유속성분, p 는 압력, g 는 중력가속도, 그리고 ρ 는 유체밀도를 나타낸다.

자유수면에서의 역학적 경계조건 및 운동학적 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = W \quad \text{at} \quad z = 0 \quad (17)$$

$$p = 0 \quad \text{at} \quad z = 0 \quad (18)$$

여기서, ζ 는 자유수면 변위이다.

포텐셜함수 Φ 는 선형화 된 Bernoulli 방정식을 만족시키는 것으로 정의하면 다음과 같다.

$$\frac{p}{\rho} + gz = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (19)$$

이 식을 x, y 에 대하여 미분하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} \quad (20)$$



$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} \quad (21)$$

수심이 변화하는 완전한 해저면상을 전파하는 주기성 미소진폭파에 대한 수심에 관한 함수는 다음과 같은 함수로 정의할 수 있다.

$$f = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (22)$$

여기서, k 는 파수, $h(x, y)$ 는 수심이다.

파랑이 각 진동수 w 를 가지고 시간에 대해 선형적인 것으로 가정하면 다음과 같이 시간과 공간의 함수로 분리할 수 있다.

$$U(x, y, z, t) = fu(x, y) e^{-iwt} \quad (23)$$

$$V(x, y, z, t) = fv(x, y) e^{-iwt} \quad (24)$$

$$W(x, y, z, t) = w(x, y, z) e^{-iwt} \quad (25)$$

$$\Phi(x, y, z, t) = f\phi(x, y, t) e^{-iwt} \quad (26)$$

$$\zeta(x, y, t) = \eta(x, y) e^{-iwt} \quad (27)$$

해지면 전단응력을 표시하는 방법으로 Heaps(1969)와 같이 해지면 전단응력이 해지면에서의 수평유속에 선형적으로 비례하는 것으로 단순화시켜 다음과 같은 식이 된다.

$$\tau_{zx} = -\epsilon\rho U \Big|_{z=-h} = \frac{\epsilon\rho u}{\cosh kh} e^{-i\omega t} \quad (28)$$

$$\tau_{zy} = -\epsilon\rho V \Big|_{z=-h} = \frac{\epsilon\rho v}{\cosh kh} e^{-i\omega t} \quad (29)$$

여기서, $\epsilon(x, y)$ 은 일반적으로 U, V 로부터 공간적 다양성과 위상차를 나타내는 복소 공간 마찰계수이다.

식 (20), (21)을 식 (13), (14)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\tau_{zx}}{\partial z} \quad (30)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\tau_{zy}}{\partial z} \quad (31)$$

식 (23), (24), (25), (26), (27)과 식 (28), (29)을 식 (30), (31)에 대입하고, 수심에 대해 적분하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$u \int f = \frac{\partial \phi}{\partial x} \int f + \frac{\epsilon u}{i\omega \cosh kh} \quad (32)$$

$$v \int f = \frac{\partial \phi}{\partial y} \int f + \frac{\epsilon v}{i\omega \cosh kh} \quad (33)$$

$$\text{여기서, } \int f = \int_{-h}^0 f dz = \frac{\tanh kh}{k} \quad (34)$$

위 식을 정리하면 다음과 같이 된다.

$$u = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (35)$$

$$v = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (36)$$

$$\text{여기서, } \lambda = \frac{1}{1 + \frac{i k \epsilon}{\omega \sinh kh}} \quad (37)$$

마찰계수 ϵ 는 Chen(1984)이 전단응력의 선형화된 형태로 무차원 공간 해지면 마찰계수 β 를 도입하여 다음과 같은 식으로 제시하였다.

$$\epsilon = \beta(\nu w)^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad (38)$$

여기서, ν 는 동점성계수이다. 해지면 마찰의 위상차($-\frac{\pi}{4}$)를 항 γ 로 치환한다. 그리

고 경험치로서 속도 축척 $\frac{wa_0}{kh}$ 에 의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon = \beta \frac{wa_0}{kh} e^{i\gamma} \quad (39)$$

따라서, 계수 ϵ 을 식 (37)에 대입하면 λ 는 다음 식이 된다.

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{i\beta a_0}{h \sinh kh} e^{i\gamma}} \quad (40)$$

따라서 식 (23), (24)은 식 (35), (36)에 의해 다음과 같은 식을 얻는다.

$$U(x, y, z, t) = \lambda f \frac{\partial \phi}{\partial x} e^{-i\omega t} \quad (41)$$

$$V(x, y, z, t) = \lambda f \frac{\partial \phi}{\partial y} e^{-i\omega t} \quad (42)$$

그리고 식 (19)을 z 에 대해 미분하고, 식 (16)과 식 (26)을 연립하여 정리하면 다음 식이 유도된다.

$$W(x, y, z, t) = f \frac{\partial \phi}{\partial z} e^{-i\omega t} \quad (43)$$

위 식 (41), (42), (43)들을 식 (13)에 대입하여 정리하면 최종적으로 다음 식을 얻게 된다.

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla f \phi) + \frac{\partial^2 f \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (44)$$

식 (44)을 수심에 대해 적분하고 분산방정식($w^2 = gk \tanh kh$)을 도입하면 다음과 같은 식이 구해진다.

$$\nabla \cdot (\lambda C C_g \nabla \phi) + \frac{C_g}{C} w^2 \phi = 0 \quad (45)$$

식 (45)은 마찰력을 포함한 환경사 방정식과 같다.

4. 외해영역에서의 해석해

직교좌표계에서 입사파가 일직선 해안에 진입할 때 입사파의 포텐셜은 Jacobi-Anger 전개에 의하여 다음과 같이 급수해로 주어진다.

$$\begin{aligned}
 \phi^I &= -\frac{iga_0}{w} e^{ikrcos(\theta-\theta^I)} \\
 &= -\frac{iga_0}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr) \cos n(\theta-\theta^I) \\
 &= -\frac{iga_0}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr) (\cos n\theta^I \cos n\theta + \sin n\theta^I \sin n\theta)
 \end{aligned} \tag{46}$$

여기서, ϵ_n 은 Newman 계수($\epsilon_n = 1 : n = 0$; $\epsilon_n = 2 : n = 1, 2, 3, \dots$)이다.

직선 해안선의 경우에는 다음과 같이 표현할 수 있는 반사파 ϕ^R 이 존재한다.

$$\begin{aligned}
 \phi^R &= -\frac{iga_0}{w} K_r e^{ikrcos(\theta+\theta^I)} \\
 &= -\frac{iga_0}{w} K_r \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr) \cos n(\theta+\theta^I) \\
 &= -\frac{iga_0}{w} K_r \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr) (\cos n\theta^I \cos n\theta - \sin n\theta^I \sin n\theta)
 \end{aligned} \tag{47}$$

입사파와 반사파의 합은 다음 식으로 제시될 수 있다.

$$\phi^I + \phi^R = -\frac{iga_0}{w} (e^{ikrcos(\theta-\theta^I)} + K_r e^{ikrcos(\theta+\theta^I)}) \tag{48}$$

식 (46)과 (47)를 식 (48)에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 \phi^I + \phi^R &= -\frac{iga_0}{w} (1 + K_r) \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr) \cos n\theta^I \cos n\theta \\
 &\quad + (1 - K_r) \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr) \sin n\theta^I \sin n\theta
 \end{aligned} \tag{49}$$

외해 영역 R 에서의 수심 h 가 일정한 것으로 가정 하였으므로 다음의 Helmholtz 방정식을 이용할 수가 있다.

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0 \quad (50)$$

원통좌표계에서 Helmholtz 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + k^2\phi = 0 \quad (51)$$

위 Helmholtz 방정식의 일반해는 다음과 같다.

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{cases} \quad (52)$$

$$R(r) = \begin{cases} H_n^{(1)}(kr) \\ H_n^{(2)}(kr) \end{cases} \quad (53)$$

여기서, $H_n^{(1)}(kr)$ 과 $H_n^{(2)}(kr)$ 은 각각 제 1종과 제 2종의 n 차 Hankel 함수로써 다음 식으로 표시된다.

$$H_n^{(1)}(kr) = J_n(kr) + iY_n(kr) \quad (54)$$

$$H_n^{(2)}(kr) = J_n(kr) - iY_n(kr) \quad (55)$$

여기서, $Y_n(kr)$ 은 제 2종 Bessel 함수이다.

식 (54), (55)에서 n 이 고정되고 $|kr| \rightarrow \infty$ 일 때 Hankel 함수를 점근 전개하면 다음 근사식을 얻는다.

$$H_n^{(1)}(kr) = \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad 0 < \theta < \pi \quad (56)$$

$$H_n^{(2)}(kr) = \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\left(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad -\pi < \theta < 0 \quad (57)$$

따라서, 무한 영역 R 은 반원형태이므로 $H_n^{(2)}(kr)$ 은 제외 되어야 한다.

수심을 일정하게 가정한 무한영역 R 에서의 해저면 영향을 무시하면, 복소변수를 가진 Hankel 함수의 계산을 피할 수 있을 뿐만 아니라 입사파도 쉽게 입사시킬 수 있다. 원해역에서의 산란파에 대한 해석해는 다음과 같다.

$$\phi^S = -\frac{iga_0}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(kr)}{H_n(kr_A)} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \quad (58)$$

여기서 $\alpha_n = 0, 1, 2, \dots$ ($n = 1, 2, \dots$), $\beta_n = 0, 1, 2, \dots$ ($n = 1, 2, \dots$)로서 결정되어야 할 상수이고, r_A 는 Fig. 1에 나타낸 것처럼 근해역 A 의 반경이다. 반무한 원해역에서 산란파가 직선 해안선에 완전반사를 가정하면, 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\phi^S = -\frac{iga_0}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(kr)}{H_n(kr_A)} \alpha_n \cos n\theta \quad (59)$$

5. 범함수의 유도

Fig. 1에서 근해역 A 는 유한요소 근사를, ∂A 와 연결된 원해역 R 과의 접합조건이 만족되도록 적절한 범함수를 갖는 변분원리에 의하여 경계치 문제를 직접 푸는 대신에 관련된 범함수 $F(\phi)$ 가 가지는 등가 문제($\delta F = 0$)를 만족시키는 조건으로 전환하여 풀 수 있다. 이러한 문제에 대한 범함수는 복소 변분 $\delta\phi$ 에 의해 지배방정식을 가중적분하고 Green의 제 1정리와 발산정리를 도입하여 경계조건을 선적분 또는 면적분에 대입함으로써 유도될 수 있다.

영역 R 은 ∂A 외측의 모든 원해영역을 포함한다. 편의상 경계 ∂A 는 반원을 선택하였고 수심이 이들을 가로질러서 연속적이며, 영역 R 에서는 수심이 일정한 것으로 한다. 그리고 경계 ∂B 가 육지 경계면을 나타낼 때 경계치 문제는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nabla \cdot (\lambda C C_g \nabla \phi) + \frac{C_g}{C} w^2 \phi = 0 \quad \text{in } A, R \quad (60)$$

$$\phi_R = \phi_A \quad \text{on } \partial A \quad (61)$$

$$\left(\lambda C C_g \frac{\partial \phi}{\partial n_A} \right)_R = \left(\lambda C C_g \frac{\partial \phi}{\partial n_A} \right)_A \quad \text{on } \partial A \quad (62)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial B \quad (63)$$

아래첨자 A, R 은 각각 영역 A, R 에서의 값을 나타내며, \vec{n}_A 는 영역 A 에서 외향인 단위수직벡터이다. 이하에서는 모든 면적적분에서 면적요소에 대한 기호 dA 와 모든 선적분에서 선 요소에 대한 기호 dL 을 생략하기로 한다.

$$\begin{aligned} \delta F(\phi) = & - \iint_A \left(\nabla \cdot (\lambda C C_g \nabla \phi) + \frac{C_g}{C} w^2 \phi \right) \delta \phi \\ & + \int_{\partial B} \lambda C C_g \frac{\partial \phi_A}{\partial n_A} \delta \phi_A \\ & + \int_{\partial A} \left(\left(\lambda C C_g \frac{\partial \phi}{\partial n_A} \right)_A - \left(\lambda C C_g \frac{\partial \phi}{\partial n_A} \right)_R \right) \delta \phi_A \\ & + \int_{\partial A} \lambda C C_g (\phi_R - \phi_A) \frac{\partial \delta \phi_R}{\partial n_A} = 0 \end{aligned} \quad (64)$$

이는 임의의 $\delta \phi$ (즉, $\delta \phi_A$ 와 $\delta \phi_R$)에 대해 δF 가 0이 됨을 나타낸다. 여기서 식 (60)이 영역 A 에서 Euler 방정식임을, (62) 및 (63)는 자연 경계조건임을 의미하는 형태로 기술되었다. 적분 앞의 부호는 식 (64)의 좌변이 $\delta\{\}$ 로 변형될 수 있도록 적절히 선택하였다.

한편, 다음과 같이 ϕ_R 이 식 (60)과 방사조건을 각각 만족하는 것으로 가정한다.

$$\nabla \cdot (\lambda C C_g \nabla \phi_R) + \frac{C_g}{C} w^2 \phi_R = 0 \quad \text{in } R \quad (65)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right) \phi_R^S = 0 \quad \text{along } \partial R \quad (66)$$

식 (65)과 (66)의 변분을 취함으로써 F 을 찾으면 다음과 같다.

$$\iint_R (\phi - \phi^I) \left(\nabla \cdot (\lambda C C_g \nabla \delta(\phi - \phi^I)) + \frac{C_g}{C} w^2 \delta(\phi - \phi^I) \right) = 0 \quad (67)$$

$$- \int_{\partial R} \lambda C C_g (\phi - \phi^I) \left(\frac{\partial \delta(\phi - \phi^I)}{\partial n_R} - ik \delta(\phi - \phi^I) \right) = 0 \quad (68)$$

여기서, ϕ^I 는 입사파 포텐셜이므로 $\delta\phi^I = 0$ 이고, 산란파 포텐셜 $\phi^S = \phi - \phi^I$ 임에 주의해야 한다. 식(67)과 (68)를 식 (64)에 더하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\delta F(\phi) = & - \iint_A \left(\nabla \cdot (\lambda CC_g \nabla \phi) + \frac{C_g}{C} w^2 \phi \right) \delta\phi \\
& + \iint_R (\phi - \phi^I) \left(\nabla \cdot (\lambda CC_g \nabla \delta(\phi - \phi^I)) + \frac{C_g}{C} w^2 \delta(\phi - \phi^I) \right) \\
& + \int_{\partial B} \lambda CC_g \frac{\partial \phi_A}{\partial n_A} \delta\phi_A \\
& + \int_{\partial A} \left[\left(\lambda CC_g \frac{\partial \phi}{\partial n_A} \right)_A - \left(\lambda CC_g \frac{\partial \phi}{\partial n_A} \right)_R \right] \delta\phi_A \\
& + \int_{\partial A} \lambda CC_g (\phi_R - \phi_A) \frac{\partial \delta\phi_R}{\partial n_A} = 0 \\
& - \int_{\partial R} \lambda CC_g (\phi - \phi^I) \left(\frac{\partial \delta(\phi - \phi^I)}{\partial n_R} - ik\delta(\phi - \phi^I) \right) = 0
\end{aligned} \tag{69}$$

발산정리를 적용하면 다음 식들을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\delta \iint_{A'} \frac{1}{2} \lambda CC_g (\nabla \phi)^2 & = \iint_{A'} \lambda CC_g \nabla \phi \cdot \nabla \delta\phi \\
& = \iint_{A'} [\nabla \cdot (\lambda CC_g \delta\phi \nabla \phi) - \delta\phi \nabla \cdot (\lambda CC_g \nabla \phi)] \\
& = - \iint_{A'} \delta\phi \nabla \cdot (\lambda CC_g \nabla \phi) + \int_{\partial A'} \delta\phi \lambda CC_g \frac{\partial \phi}{\partial n} \\
& = \iint_{A'} [\nabla \cdot (\lambda CC_g \phi \nabla \delta\phi) - \phi \nabla \cdot (\lambda CC_g \nabla \delta\phi)] \\
& = - \iint_{A'} \phi \nabla \cdot (\lambda CC_g \nabla \delta\phi) + \int_{\partial A'} \phi \lambda CC_g \frac{\partial \delta\phi}{\partial n}
\end{aligned} \tag{70}$$

여기서, A' 는 경계로서 $\partial A'$ 를, 그리고 외향 단위수직벡터로 \bar{n} 를 가지는 임의의 영역이다.

따라서, A' 에 대한 면적적분은 식 (70)과 같이 2개의 다른 형태로 나타낼 수가 있다.

이제 식 (70)을 영역 A 와 R 상의 면적적분에 대해 적용한다. 그러면, 다음 식들이 구해진다.

$$\begin{aligned}
& - \iint_A \left(\nabla \cdot (\lambda C C_g \nabla \phi) + \frac{C_g}{C} w^2 \phi \right) \delta \phi + \int_{\partial A + \partial B} \lambda C C_g \frac{\partial \phi_A}{\partial n_A} \delta \phi_A \\
& = \delta \iint_A \frac{1}{2} \left(\lambda C C_g (\nabla \phi)^2 - \frac{C_g}{C} w^2 \phi^2 \right)
\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_R (\phi - \phi^I) \left(\nabla \cdot (\lambda C C_g \nabla \delta(\phi - \phi^I)) + \frac{C_g}{C} w^2 \delta(\phi - \phi^I) \right) \\
& - \int_{\partial R + \partial A} \lambda C C_g \frac{\partial(\phi_R - \phi^I)}{\partial n_R} \delta(\phi_R - \phi^I) + \int_{\partial R} ik\lambda C C_g \delta(\phi - \phi^I)^2 \\
& = -\delta \int_R \frac{1}{2} \left(\lambda C C_g [\nabla \cdot (\phi - \phi^I)]^2 - \frac{C_g}{C} w^2 (\phi - \phi^I)^2 \right)
\end{aligned} \tag{72}$$

$$+ \int_{\partial R} ik\lambda C C_g \delta(\phi - \phi^I)^2$$

식 (71), (72)과 아래의 사실들을 이용하면

$$\frac{\partial}{\partial n_A} = -\frac{\partial}{\partial n_R} \quad \text{along } \partial A \tag{73}$$

$$\frac{\partial}{\partial n_A} = -\frac{\partial}{\partial n_B} \quad \text{along } \partial B \tag{74}$$

식 (69)로부터 다음 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\delta F(\phi) & = \delta \iint_A \frac{1}{2} \left(\lambda C C_g (\nabla \phi)^2 - \frac{C_g}{C} w^2 \phi^2 \right) \\
& - \delta \iint_R \frac{1}{2} \left(\lambda C C_g [\nabla \cdot (\phi - \phi^I)]^2 - \frac{C_g}{C} w^2 (\phi - \phi^I)^2 \right) \\
& - \delta \int_{\partial A} \lambda C C_g (\phi - \phi^I) \frac{\partial \phi_R}{\partial n_A} \\
& + \delta \int_{\partial R} \frac{ik\lambda C C_g}{2} (\phi - \phi^I)^2
\end{aligned} \tag{75}$$

식 (75)을 구하는 데는 $\delta \phi^I = 0$ 가 이용되었다. 식(75)으로부터 범함수 F 는 다음과 같

다.

$$\begin{aligned}
 \delta F(\phi) &= \iint_A \frac{1}{2} \left(\lambda C C_g (\nabla \phi)^2 - \frac{C_g}{C} w^2 \phi^2 \right) \\
 &\quad - \iint_R \frac{1}{2} \left(\lambda C C_g [\nabla \cdot (\phi - \phi^I)]^2 - \frac{C_g}{C} w^2 (\phi - \phi^I)^2 \right) \\
 &\quad - \int_{\partial A} \lambda C C_g (\phi_A - \phi^I) \frac{\partial \phi_R}{\partial n_A} \\
 &\quad + \int_{\partial R} \frac{ik\lambda C C_g}{2} (\phi_R - \phi^I)^2
 \end{aligned} \tag{76}$$

식(76)의 제 2항에 Green의 제 1정리를 적용하면 다음 식이 나타내어진다..

$$\begin{aligned}
 &\iint_R \frac{1}{2} \left(\lambda C C_g [\nabla \cdot (\phi - \phi^I)]^2 - \frac{C_g}{C} w^2 (\phi - \phi^I)^2 \right) \\
 &= \int_{\partial A + \partial R} \frac{1}{2} \lambda C C_g (\phi_R - \phi^I) \frac{\partial (\phi_R - \phi^I)}{\partial n_R}
 \end{aligned} \tag{77}$$

식 (77)를 식 (76)에 대입하고 방사조건에 대한 식 (68)을 사용하면 범함수를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \delta F(\phi) &= \iint_A \frac{1}{2} \left(\lambda C C_g (\nabla \phi)^2 - \frac{C_g}{C} w^2 \phi^2 \right) \\
 &\quad + \iint_{\partial A} \lambda C C_g \left(\frac{1}{2} (\phi_R - \phi^I) - (\phi_A - \phi^I) \right) \frac{\partial \phi_R}{\partial n_A} \\
 &\quad - \int_{\partial A} \frac{1}{2} \lambda C C_g (\phi_R - \phi^I) \frac{\partial \phi^I}{\partial n_A}
 \end{aligned} \tag{78}$$

또는 상기 식의 좌변 제 2항과 제 2항을 정리하면 동일하게 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\delta F(\phi) = & \iint_A \frac{1}{2} \left(\lambda C C_g (\nabla \phi)^2 - \frac{C_g}{C} w^2 \phi^2 \right) \\
& + \iint_{\partial A} \frac{1}{2} \lambda C C_g (\phi_R - \phi^I) \frac{\partial(\phi_R - \phi^I)}{\partial n_A} \\
& - \int_{\partial A} \lambda C C_g \phi_A \frac{\partial(\phi_R - \phi^I)}{\partial n_A} \\
& - \int_{\partial A} \lambda C C_g \phi_A \frac{\partial \phi^I}{\partial n_A} \\
& + \int_{\partial A} \lambda C C_g \phi^I \frac{\partial(\phi_R - \phi^I)}{\partial n_A} \\
& + \int_{\partial A} \lambda C C_g \phi^I \frac{\partial \phi^I}{\partial n_A}
\end{aligned} \tag{79}$$

모든 적분들이 A 의 내부 혹은 ∂A 를 연하여 산정되는 점이 강조되며, 따라서 변분원리는 국부적인 원리이다.

변분 수식화에서 경계면에서의 에너지 흡수를 설명하기 위해서는 다음과 같은 항이 포함되어야 한다.

$$- \int_{\partial B} \frac{1}{2} C C_g \alpha \phi^2 \tag{80}$$

따라서 최종적인 범함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
F(\phi) &= \iint_A \frac{1}{2} \left(\lambda C C_g (\nabla \phi)^2 - \frac{C_g}{C} w^2 \phi^2 \right) & I_1 \\
&+ \iint_{\partial A} \frac{1}{2} \lambda C C_g (\phi_R - \phi^I) \frac{\partial(\phi_R - \phi^I)}{\partial n_A} & I_2 \\
&- \int_{\partial B} \frac{1}{2} C C_g \alpha \phi^2 & I_3 \\
&- \int_{\partial A} \lambda C C_g \phi_A \frac{\partial(\phi_R - \phi^I)}{\partial n_A} & I_4 \quad (81) \\
&- \int_{\partial A} \lambda C C_g \phi_A \frac{\partial \phi^I}{\partial n_A} & I_5 \\
&+ \int_{\partial A} \lambda C C_g \phi^I \frac{\partial(\phi_R - \phi^I)}{\partial n_A} & I_6 \\
&+ \int_{\partial A} \lambda C C_g \phi^I \frac{\partial \phi^I}{\partial n_A} & I_7
\end{aligned}$$

차후 영역 A 는 유한요소로 세분되게 된다. 각 요소내의 근사해가 미지절점 포텐셜로 이루어진 보간함수에 의해 구해지게 된다. 반면, 영역 R 에서는 파랑 포텐셜이 미지계수에 의해 해석적으로 구해지게 된다.

Ⅲ. 유한요소 정식화

1. 유한요소법의 개요

유한요소법이란 영역을 요소라 부르는 유한한 크기를 갖는 도형의 집합으로 치환하여, 미분 방정식의 근사해를 얻는 수치계산법의 일종이다. 대상영역이 1차원이라면 유한 길이의 선 요소, 2차원이라면 유한 크기의 3각형 요소로 영역을 치환한 후 개개의 요소 내에서 미분 다항식에 의해서 해의 근사가 이루어진다. 각 요소 내에서의 근사가 완성되면 개개의 요소를 서로 연결하여 전체의 근사 모델을 작성한다. 이 근사 모델은 연립 대수 방정식으로 되어 있고, 이것을 풀어서 미분 방정식으로 주어진 경계치 문제의 근사해를 구할 수 있다. 또한 유한요소법의 이용기술의 특징은 정식화로부터 프로그래밍까지의 순서가 풀어야 할 문제에 관계없이 일관되어 있다는 것이다. 실제로 푸는 방정식은 연립 방정식의 형태를 하고 있기 때문에 이해하기 쉽고, 프로그램의 작성도 간단하다. 이 때문에 비교적 범용성이 높은 프로그램의 작성이 가능하고, 흐름 해석의 Package화도 가능하게 된다.

2. 근사와 보간함수

Fig. 1에서의 영역 R에서는 급수해를 가진 계수형 요소를 선택한다. 이제 영역 A를 3개의 절점을 가진 미소삼각형 요소로 분할한다. Fig. 2의 e 번째 요소에 삼각형 요소를 선정한다. 삼각형의 꼭지점을 절점으로 택하여 반 시계방향으로 각각 ϕ_1^e , ϕ_2^e , ϕ_3^e 으로 번호를 붙인다. 각 절점번호에 대응하는 좌표를 (x_1^e, y_1^e) , (x_2^e, y_2^e) , (x_3^e, y_3^e) 로 한다. 삼각형 e 상의 함수 ϕ_i^e 를 x 와 y 의 1차식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\phi_i^e = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (82)$$

여기서 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 은 각 요소마다 결정되는 계수이고, 각 절점마다의 연립방정식을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \phi_1^e \\ \phi_2^e \\ \phi_3^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (83)$$

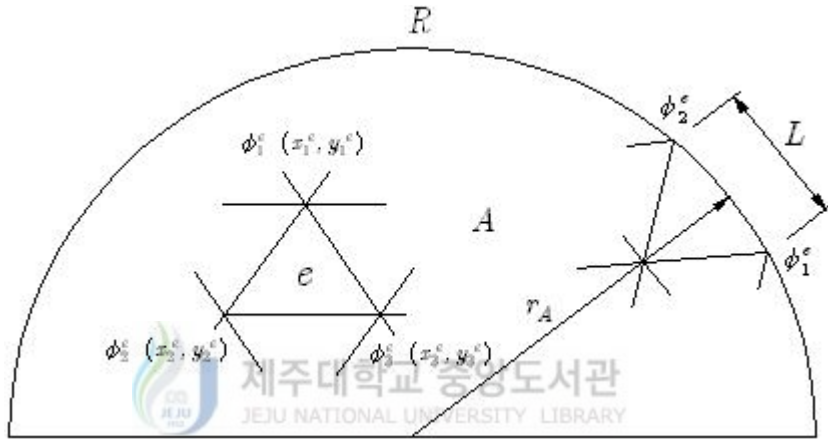


Fig. 2. Typical boundary and interior elements

여기서, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 에 대하여 풀기 위해서 행렬 $\begin{Bmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{Bmatrix}$ 의 역행렬을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{Bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2\Delta^e} \begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Bmatrix} \quad (84)$$

여기서,

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e & b_1 &= y_2^e - y_3^e & c_1 &= x_3^e - x_2^e \\ a_2 &= x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e & b_2 &= y_3^e - y_1^e & c_2 &= x_1^e - x_3^e \\ a_3 &= x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e & b_3 &= y_1^e - y_2^e & c_3 &= x_2^e - x_1^e \end{aligned} \quad (85)$$

또, Δ^e 는 삼각형의 면적이다.

$$\Delta^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix} \quad (86)$$

역행렬을 식 (83)의 양변에 곱하면, 다음과 같이 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta^e} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^e \\ \phi_2^e \\ \phi_3^e \end{bmatrix} \quad (87)$$

이렇게 하여 얻어진 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 을 식 (82)에 대입하면, 삼각형 요소 e 상의 미지수는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \phi^e &= \frac{1}{2\Delta^e} (a_1 + b_1x + c_1y)\phi_1^e \\ &+ \frac{1}{2\Delta^e} (a_2 + b_2x + c_2y)\phi_2^e \\ &+ \frac{1}{2\Delta^e} (a_3 + b_3x + c_3y)\phi_3^e \end{aligned} \quad (88)$$

식 (88)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi^e = N_1\phi_1^e + N_2\phi_2^e + N_3\phi_3^e \quad (89)$$

여기서 보간함수는 다음과 같다.

$$N_i^e = \frac{(a_i + b_i x + c_i y)}{2\Delta^e} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (90)$$

위 설명에서 (x_i^e, y_i^e) 는 Fig. 2에서의 요소의 절점 i 의 좌표이다. 보간함수 N_i^e 는 좌표계에서 선형함수이고 영역 A에서 각각의 3절점 삼각형 요소의 해를 근사화 하는데 사용된다.

3. 범함수의 산정

3-1. I_1 의 적분

식 81에서 I_1 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \iint_A \frac{1}{2} \lambda CC_g (\nabla \phi)^2 - \frac{C_g}{C} w^2 \phi^2 dA \\
 &= \sum_{e \in A} \iint_e \frac{1}{2} \lambda CC_g (\nabla \phi)^2 - \frac{w^2}{\lambda C^2} \phi^2 dA \\
 &= \sum_{e \in A} \iint_e \frac{1}{2} (\lambda CC_g)^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \nabla N_i^e \cdot \nabla N_j^e - \frac{w^2}{\lambda C^2} N_i N_j \phi_i^e \phi_j^e dA \quad (91) \\
 &= \sum_{e \in A} \frac{1}{2} \{\phi^e\}^T [K_1^e] \{\phi^e\} \\
 &= \frac{1}{2} \{\phi\}^T [K_1] \{\phi\}
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\iint_e \nabla N_i^e \cdot \nabla N_j^e dA = \frac{1}{4\Delta^e} (b_i b_j + c_i c_j) \quad (92)$$

$$\iint_e N_i N_j dA = \begin{cases} \frac{1}{6} \Delta^e & (i=j) \\ \frac{1}{12} \Delta^e & (i \neq j) \end{cases} \quad (93)$$

일반적으로 수심 h 는 요소 내에서 (x, y) 의 함수가 될 수 있으며 선행되는 적분은 수치적으로 수행될 수 있다.

$$\iint_{\Delta^e} h dA = \frac{\Delta^e (h_i + h_j + h_k)}{3} \quad (94)$$

와 λCC_g 항을 적분의 바깥에 위치시킬 수 있다. 미분과 적분을 수행하면 $[K_1^e]$ 를 얻을 수 있다.

$$[K_1^e] = \frac{\lambda CC_g}{4\Delta^e} K_{1ij}^e \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (95)$$

여기서,

$$K_{1ij} = \begin{cases} b_i^2 + c_i^2 - \frac{2(\Delta^e)^2}{3} \frac{w^2}{\lambda C^2} & (i=j) \\ b_i b_j + c_i c_j - \frac{(\Delta^e)^2}{3} \frac{w^2}{\lambda C^2} & (i \neq j) \end{cases} \quad (96)$$

행렬 $[K_1^e]$ 는 구조역학에서 요소강성행렬이라고 하며, 대칭이다.

3-2. I_2 와 I_6 의 적분

식 (81)에서의 적분 I_2 와 I_6 를 계산하는 데는 식 (59)으로 주어지는 보간함수를 사용한다. 한편, 해저면 마찰은 계산 과정에 큰 영향을 미치지 않을 것으로 가정하여 무시한다. 그리고 $n = S$ 로 무한급수의 수를 제한하였다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi_R - \phi^I)}{\partial n_A} &= \frac{\partial(\phi_R - \phi^I)}{\partial r} \\ &= \left(-\frac{iga_0}{w}\right) k \alpha_0 \frac{H'_0(kr)}{H_0(kr_A)} + \sum_{n=1}^S \alpha_n \frac{H'_n(kr)}{H_0(kr_A)} \cos n\theta \end{aligned} \quad (97)$$

수치계산시에는 $S = 8$ 로 하였다.

식 (46), (49), (59) 와 (97)를 범함수의 I_2 의 적분에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\partial A} \frac{1}{2} \lambda CC_g (\phi_R - \phi^I) \frac{\partial(\phi_R - \phi^I)}{\partial n_A} ds \\ &= \frac{r_A k \lambda CC_g}{2} \left(-\frac{iga_0}{w}\right)^2 \int_0^\pi \left(\alpha_0 \frac{H'_0}{H_0} + \sum_{n=1}^S \alpha_n \frac{H'_n}{H_n} \cos n\theta \right) \left(\alpha_0 + \sum_{n=1}^S \alpha_n \cos n\theta \right) d\theta \\ &= \frac{\pi r_A k \lambda CC_g}{2} \left(-\frac{iga_0}{w}\right)^2 \alpha_0^2 \frac{H'_0}{H_0} + \sum_{n=1}^S \frac{\alpha_n^2}{2} \frac{H'_n}{H_n} \\ &= \frac{1}{2} \{\mu\}^T [K_2] \{\mu\} \end{aligned} \quad (98)$$

여기서, $H_n = H_n(kr_A)$, $H'_n = H'_n(kr_A)$ 는 Hankel 함수 및 이의 도함수이다. 또한 산란파를 나타내는 다음의 행벡터를 도입하였다.

$$\{\mu\}^T = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_S\}$$

이는 $M = S + 1$ 개의 성분을 가지며, $[K_2]$ 는 대각행렬로 다음과 같다.

$$[K_2] = \pi r_A \lambda C C_g \left(-\frac{ig a_0}{w} \right)^2 \text{diag} \left(\frac{H'_0}{H_0}, \frac{1}{2} \frac{H'_1}{H_1}, \frac{1}{2} \frac{H'_2}{H_2}, \dots, \frac{1}{2} \frac{H'_n}{H_n} \right) \quad (99)$$

명백히 I_2 는 미지벡터 $\{\mu\}$ 에서 쌍 1차이다.

같은 방법으로 식 (46), (49), (59)와 (97)를 범함수의 I_6 적분에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_{\partial A} \lambda C C_g \phi^I \frac{\partial(\phi_R - \phi^I)}{\partial n_A} ds \\ &\approx r_A k \lambda C C_g \left(-\frac{ig a_0}{w} \right)^2 \int_0^\pi (1 + K_r) \sum_{n=0}^S \epsilon_n (i)^n J_n \cos n\theta \cos n\theta^I \\ &\quad + (1 - K_r) \sum_{n=0}^S \epsilon_n (i)^n J_n \sin n\theta \sin n\theta^I \quad \alpha_0 \frac{H'_0}{H_0} - \sum_{n=1}^S \frac{H'_n}{H_n} \alpha_n \cos n\theta \quad d\theta \\ &= \pi r_A k \lambda C C_g \left(-\frac{ig a_0}{w} \right)^2 (1 + K_r) J_0 \alpha_0 \frac{H'_0}{H_0} + \sum_{n=1}^S (i)^n J_n \frac{H'_n}{H_n} \alpha_n (1 + K_r) \cos n\theta \\ &= -\{Q_2\}^T \{\mu\} \end{aligned} \quad (100)$$

여기서, $\{Q_2\}^T$ 는 다음과 같은 $1 \times (S + 1)$ 행벡터이다.

$$\begin{aligned} \{Q_2\}^T &= \left(-\pi r_A k \lambda C C_g \right) \left(-\frac{ig a_0}{w} \right)^2 \\ &\quad (1 + K_r) J_0 \frac{H'_0}{H_0}, i J_1 \frac{H'_1}{H_1} (1 + K_r) \cos \theta^I, \dots, (i)^S J_S \frac{H'_S}{H_S} (1 + K_r) \cos S\theta^I \end{aligned} \quad (101)$$

3-3. I_4 와 I_5 의 적분

I_4 와 I_5 의 적분에 대해서는 반원 ∂A 을 P 개의 절점에 의해 $(P - 1)$ 개의 작고 동일한 선분으로 분할하여, ∂A 상의 절점치를 다음과 같이 행벡터로 표시한다.

$$\{\bar{\phi}\}^T = \{\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_P\} \quad (102)$$

각 선분의 길이는 다음과 같다.

$$L_A = \frac{1}{2} \frac{2\pi r_A}{(P - 1)} = \frac{\pi r_A}{(P - 1)} \quad (103)$$

L_A 의 값을 매우 작게 취하면 ∂A 의 각 선 요소에 대해 ϕ_A 을 2개의 절점에서의 ϕ_A 의

평균에 의해 근사화 하게 되고, 적분 범위를 L_A 로, 그리고 $(\phi_R - \phi^I)$ 에서의 θ 값을 선요소의 중앙 점에서의 값인 θ_e 로 대체하게 된다. 따라서 I_4 는 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned}
 I_4 &= - \int_{\partial A} \lambda CC_g \phi_A \frac{\partial(\phi_R - \phi^I)}{\partial n_A} ds \\
 &\approx - k\lambda CC_g \left(-\frac{iga_0}{w} \right) L_A \sum_{e=1}^P \frac{1}{2} (\bar{\phi}_e + \bar{\phi}_{e+1}) \alpha_0 \frac{H'_0}{H_0} + \sum_{n=1}^S \alpha_n \frac{H'_n}{H_n} \cos n\theta_e \\
 &= \{\bar{\phi}\} [K_4] \{\mu\} \\
 &= \frac{1}{2} \{\bar{\phi}\}^T [K_4] \{\mu\} + \frac{1}{2} \{\bar{\phi}\}^T [K_4] \{\bar{\phi}\}
 \end{aligned} \tag{104}$$

여기서, $[K_4]$ 는 다음 식으로 주어지는 직사각형의 $P \times (S+1)$ 행렬이다.

$$[K_4] = -\frac{1}{2} k\lambda CC_g L_A \left(-\frac{iga_0}{w} \right) \begin{bmatrix} \frac{H'_0}{H_0} & \cdots & \frac{H'_n}{H_n} \cos n\theta_1 & \cdots \\ 2\frac{H'_0}{H_0} & \cdots & \frac{H'_n}{H_n} (\cos n\theta_1 + \cos n\theta_2) & \cdots \\ 2\frac{H'_0}{H_0} & \cdots & \frac{H'_n}{H_n} (\cos n\theta_{P-2} + \cos n\theta_{P-1}) & \cdots \\ 2\frac{H'_0}{H_0} & \cdots & \frac{H'_n}{H_n} \cos n\theta_{P-1} & \cdots \end{bmatrix} \tag{105}$$

여기서, $n=1, 2, \dots, S$ 이다. $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{P-1}$ 은 각각 ∂A 상의 첫 번째, 두 번째, ..., $P-1$ 번째 선 요소에 대한 θ_e 의 값을 나타낸다. I_4 는 A 에서의 절점 미지수와 R 에서의 계수 미지수사이의 상관관계를 제시한다.

식 (81)에서의 적분 I_5 와 I_7 을 산정하는 데는 식 (46), (49)로 주어지는 보간함수를 사용한다. I_4 와 I_5 적분에 대해서는 원 ∂A 상의 절점치를 행벡터로 표시한다.

적분 I_5 는 유한영역의 절점 미지수와 무한 영역에서의 적분계수 미지수와 상관관계를 제시한다. 무한영역에서의 직선 해안선에 의한 입사파와 반사파의 합의 ∂A 에 대한 법선 미분은 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi^I}{\partial n_A} &= \frac{\partial \phi^I}{\partial r_A} \\
 &= -\frac{iga_0}{w} [ik \cos(\theta - \theta^I) e^{ikr_A \cos(\theta - \theta^I)} + K_r(ik) \cos(\theta + \theta^I) e^{ikr_A \cos(\theta - \theta^I)}]
 \end{aligned} \tag{106}$$

앞에서 제시한 것과 유사한 방법을 사용하면 식 (47), (49) 및 (59)에 의해 I_5 적분이

다음 식과 같이 제시된다.

$$\begin{aligned}
 I_5 &= - \int_{\partial A} \lambda CC_g \phi_A \frac{\partial \phi^I}{\partial n_A} ds \\
 &\approx - \lambda CC_g \left(- \frac{iga_0}{w} \right) L_A \sum_{e=1}^{P-1} \frac{1}{2} (\bar{\phi}_e + \bar{\phi}_{e+1})(ik) \\
 &\quad [\cos(\theta_e - \theta^I) e^{ikr_A \cos(\theta_e - \theta^I)} + K_r \cos(\theta_e + \theta^I) e^{ikr_A \cos(\theta_e - \theta^I)}] \\
 &= \{Q_1\}^T \{\bar{\phi}\}
 \end{aligned} \tag{107}$$

여기서, 하중 벡터 $\{Q_1\}^T$ 는 다음과 같은 $1 \times P$ 행벡터이다.

$$\{Q_1\}^T = \lambda CC_g \left(- \frac{iga_0}{w} \right) \frac{kL_A}{2} \{q_1, q_1 + q_2, q_2 + q_3, \dots, q_{P-2} + q_{P-1}, q_{P-1}\} \tag{108}$$

여기서,

$$q_e = i \cos(\theta_e - \theta^I) e^{ikr_A \cos(\theta_e - \theta^I)} + iK_r \cos(\theta_e + \theta^I) e^{ikr_A \cos(\theta_e + \theta^I)} \tag{109}$$

여기서, $e = 1, 2, \dots, P - 1$ 이다.

3-4. I_3 의 적분



적분 I_3 는 nB 에서 하나의 정점을, 그리고 경계에서 하나의 측면을 가지는 요소들의 경계측면을 연하여 산정되어야 한다. 흡수 경계조건에 의한 기지값들을 전체 강성행렬에 재배치하기 위하여 ϕ_{nB} 에 관한 적분 I_3 의 1차 변분을 내부 절점인 각각의 절점 n 에 대해 유도해야 한다. nB 는 고정경계 ∂B 의 절점이다.

$$\frac{\partial I_3}{\partial \phi_{nB}} = - \int_{\partial B} N_{nB} \lambda CC_g \alpha \phi_{nB} ds \tag{110}$$

식 (81)의 I_3 적분을 다음과 같이 2개의 분할적분으로 분리한다.

$$\begin{aligned}
 &- \int_{\partial B} N_{nB} \lambda CC_g \alpha \phi_{nB} ds \\
 &= - \left\{ \int_{nB-1}^{nB} N_{nB} (\lambda CC_g \alpha)_{nB} \phi_{nB} ds + \int_{nB}^{nB+1} N_{nB} (\lambda CC_g \alpha)_{nB} \phi_{nB} ds \right\}
 \end{aligned} \tag{111}$$

이제 적분 I_3 의 1차 변분을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial I_3}{\partial \phi_{nB}} = - \sum_{nB=1}^{B-1} \left\{ L_L \frac{(\lambda CC_g \alpha)_{nB}}{6} (\phi_{nB-1} + 2\phi_{nB}) + L_R \frac{(\lambda CC_g \alpha)_{nB}}{6} (2\phi_{nB} + \phi_{nB+1}) \right\} \quad (112)$$

여기서, L_L 과 L_R 은 각각 nB 의 좌측과 우측까지의 측면 길이이다. 그리고 B 는 흡수 경계 ∂B 상의 전체 절점수를 나타낸다. 계산된 값은 전체 강성행렬에 할당된다. 범함수의 마지막 적분(I_7)은 상수이며, 따라서 중요하지 않다.

식 (81)의 범함수에서 모든 적분을 요약하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} F(\phi, \mu) = & \frac{1}{2} \sum_{\epsilon \in A} \{\phi^\epsilon\}^T [K_1^\epsilon] \{\phi^\epsilon\} \\ & + \frac{1}{2} \{\mu\}^T [K_2] \{\mu\} + \frac{1}{2} \{\bar{\phi}\}^T [K_4] \{\mu\} \\ & + \frac{1}{2} \{\mu\}^T [K_4]^T \{\bar{\phi}\} \\ & \{Q_1\}^T \{\bar{\phi}\} - \{Q_2\}^T \{\mu\} + Constant \end{aligned} \quad (113)$$

여기서, $[K_1^\epsilon]$ 은 대칭이며, $[K_2]$ 는 대각행렬이다. 모든 $\{\phi^\epsilon\}$ 의 집합인 전체 절점벡터 $\{\phi\}$ 을 정의하고 요소행렬 $[K_1^\epsilon]$ 을 단일 전체행렬 $[K]$ 로 모은다. 그리고 ∂A 상의 모든 경계 절점치 $\{\bar{\phi}\}$ 가 $\{\phi\}$ 의 부분집합임에 주의해야 한다. 이제 Global vector array $\{\phi\}$ 에서 마지막 P 위치에 $\{\bar{\phi}\}$ 을 할당한다. 다음에는 절점 미지수와 미지계수를 결합하고 전체 미지벡터 $\{\psi\}$ 을 다음 식으로 정의한다.

$$\begin{aligned} \{\psi\}^T = & \{ \{\phi\}^T, \{\mu\}^T \} \\ = & \{ \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_E, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{S+1} \} \end{aligned} \quad (114)$$

여기서, $N = E + (S + 1)$ 으로 미지수의 전체 개수이다. 식 (113)을 다음과 같이 쓸 수 있음이 분명하다.

$$F\{\psi\} = \frac{1}{2} \{\psi\}^T [K] \{\mu\} + \{Q\}^T \{\psi\} + constant \quad (115)$$

여기서, 전체 계수행렬 $[K]$ 가 대칭임을 강조한다. 전체하중벡터 $\{Q\}^T$ 는 다음과 같다.

$$\{Q\}^T = \{ \{0\}^T, \{Q_1\}^T, \{Q_2\}^T \} \quad (116)$$

여기서, 영요소의 행렬에 대해서는 $[0]$, 그리고 영성분의 벡터에 대해서는 $\{0\}^T$ 의 기

호를 사용하였다. 마지막으로 범함수 F 의 정류성은 다음 식을 의미한다.

$$\frac{\partial F}{\partial \psi_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (117)$$

이는 식 (115)을 고려하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$[K] \{\psi\} = \{Q\} \quad (118)$$

이것은 여러 가지 방법에 의해 풀 수 있는 N 개의 미지수에 대한 N 개의 선형 단위 대수방정식이다. 통상 이러한 대수방정식은 Gauss 소거법을 이용하여 푼다.

유한요소법에 의한 계산의 정확도는 파장, 경계형상 및 문제의 특성 등에 의존하며, 요소의 크기는 최단파장 및 최소 곡률반경 보다 작아야 한다. Chen과 Mei(1974)는 수치실험결과에 근거하여 $\frac{l^e}{L} \leq 0.1$ (l^e 는 삼각형 요소의 변의 길이, L 은 파장)을 기준으로 하였다.

4. 수치계산의 최적화



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

4-1. 수심에 따른 격자최적화 기법

본 연구에서 전처리 기법으로 사용한 자동요소분할법(김 등, 2000)을 사용하여 유한요소망을 생성하는 경우 상대적 요소분할이 가능하다. 즉, 입력절점의 다소에 의해 분할밀도를 다르게 할 수 있다. 그러나 이러한 분할은 수심에 따른 정확한 분할이 이루어지지 않고, 과도한 분할을 생성시킬 우려가 있다. 이러한 문제로 인하여 본 연구에서는 각 절점에서의 수심을 이용하여 그 절점에서의 파장을 계산한 후 사용자가 입력한 분할개수 만큼 분할이 이루어 졌는지 확인 후 만족할 때 까지 분할과 결함을 병행하여 최적의 요소크기로 분할이 이루어지도록 계량하였다. 이로써, 불필요한 요소분할이 최소화 되었고, 이에 따라 계산용량과 계산속도가 현저히 개선되었다.

4-1. 밴드폭 최적화 기법

본 연구에서 전처리 기법으로 사용한 자동요소분할법(김 등, 2000)은 Delaunay 삼각분할법을 기본으로 한다. 이 분할법을 사용하여 유한요소망을 생성하는 경우 요소와 절점번호가 불규칙하게 배열되므로 이로부터 얻어지는 강성행렬은 밴드폭이 매우 큰 희소행렬이 되므로 이를 실제해석에 사용하는 것은 비효율적이다. 따라서 이러한 요소망은 밴드폭 최소화 기법을 사용하여 밴드폭을 최소한으로 줄여야 한다. 이를 위하여 본 연구에서는 현재 널리 쓰이고 있는 Reverse-Cuthill Mckee의 방법을 사용하였다. 이 방법에서는 사용자가 요소망 구성시 사용한 가장자리를 시작절점으로 하며, 밴드폭을 최적화 시켜 얻은 결과는, 기존에 부여된 절점번호 자체를 처음부터 재배열한다. 이렇게 재배열된 후의 강성행렬의 밴드폭은 상당히 작게 나타났고, 이로 인해 수치계산용량 및 계산시간이 현저하게 단축되었다.



IV. 정온도 해석 및 검증

정온도 해석에 대한 타당성을 조사하기 위해서 직사각형 모형항만과 임의형상 모형항만에 대해 본 수치기법에 의한 계산값과 다른 연구자들의 계산값 및 실험값과 비교를 하였다. 결과 타당성이 검증되었고 이를 토대로 본 수치기법을 이용하여 제주항에 대해 계산을 하여 보았다.

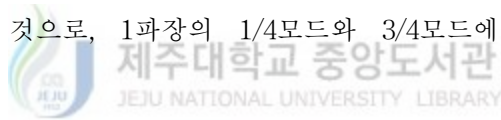
1. 직사각형 모형항만

수치모의를 검증하기 위한 간단한 모델로서, Fig. 3에 보이는 일정 수심의 직사각형 항만의 공진해석을 하였다. 수치모의에 이용한 직사각형 항만모델은 Goda와 Ippen(1963), Lee(1969)와 Chen(1986)이 사용한 똑같은 직사각형 항만모델로 폭 B 가 6.04cm이고, 길이 L 이 31.11cm이며, 수심은 25.72cm이며, 원호의 반경 r 은 항만 폭의 2배인 12.09cm이다.

Fig. 4는 해석영역을 삼각형 유한요소를 이용하여 요소수 3,655개, 절점수 1,962개로 분할한 것이다. 또, 유한요소 분할은 입사파 중에서 주기가 가장 짧은 파 ($kL=5.0$)의 1파장에 58개의 요소가 포함 되도록 분할 함으로써 Chen과 Mei(1974)가 제시한 1파장에 10개의 절점이 필요한 조건을 만족하였다. Ippen과 Goda(1963)와 Lee(1969)가 실시한 수리모형실험과 수치모형실험은 모두 해저면에서는 마찰로 인한 손실이 없고 경계면에서는 파가 완전 반사되는 것으로 가정하였다. 그러나 실제 수리 실험의 경우 모형항만의 해저면이 콘크리트로 제작되는 점을 감안하면 어느 정도 마찰로 인한 손실이 존재하고 직립안벽에서도 약간의 에너지 흡수가 존재하므로 완전 반사가 거의 불가능하다. 따라서 본 수치모형에서는 반사계수 $K_r = 0.98$, 저면에서의 마찰로 인한 에너지 손실이 없는 것으로 가정하여 마찰계수는 $\beta = 0$ 로 하여 수리

모형 실험결과와 비교 분석하였다. 파향은 정선에 직각으로 입사하는 것으로 하였고, 입사파의 진폭 a_0 는 0.127cm로 주었다.

Fig. 5은 Fig. 3의 항만 제일 안쪽 P점에서의 계산된 공진 주기를 Ippen과 Goda(1963) 및 Lee(1969)의 실험값과 Chen(1986)의 수치해석결과와 비교한 것이다. Fig. 5의 횡축은 파수 k 에 항의 길이 L 을 곱한 무차원화 된 파수 (kL)이며, 종축은 수면변위 (η)를 입사파의 진폭 ($2a_0$)로 나눈 증폭비 $\left(\frac{\eta}{2a_0}\right)$ 을 나타내었다. 수치모의는 횡축의 무차원 계수 kL 을 0.025부터 5.0까지 0.01간격으로 주어 계산하였다. 계산 결과를 보면, 제1공진주기 ($kL = 1.33$)와 제2공진주기 ($kL = 4.18$)부근에서의 증폭비는 실험값과 거의 같은 크기를 나타내고 있으며, 수리모형실험 결과와 매우 일치함을 알 수 있다. 그리고 수치계산결과를 살펴보면 입사파의 파장이 길어짐에 따라 증폭비가 작은 공진이 나타남을 알 수가 있다. Fig. 6은 Fig. 3에 나타난 P점에서 증폭비가 가장 큰 제1공진 주기와 두 번째로 큰 제2공진 주기에서의 파고 증폭비를 2차원 및 3차원으로 도시한 것으로, 1파장의 1/4모드와 3/4모드에 상당하는 알 수 있다.



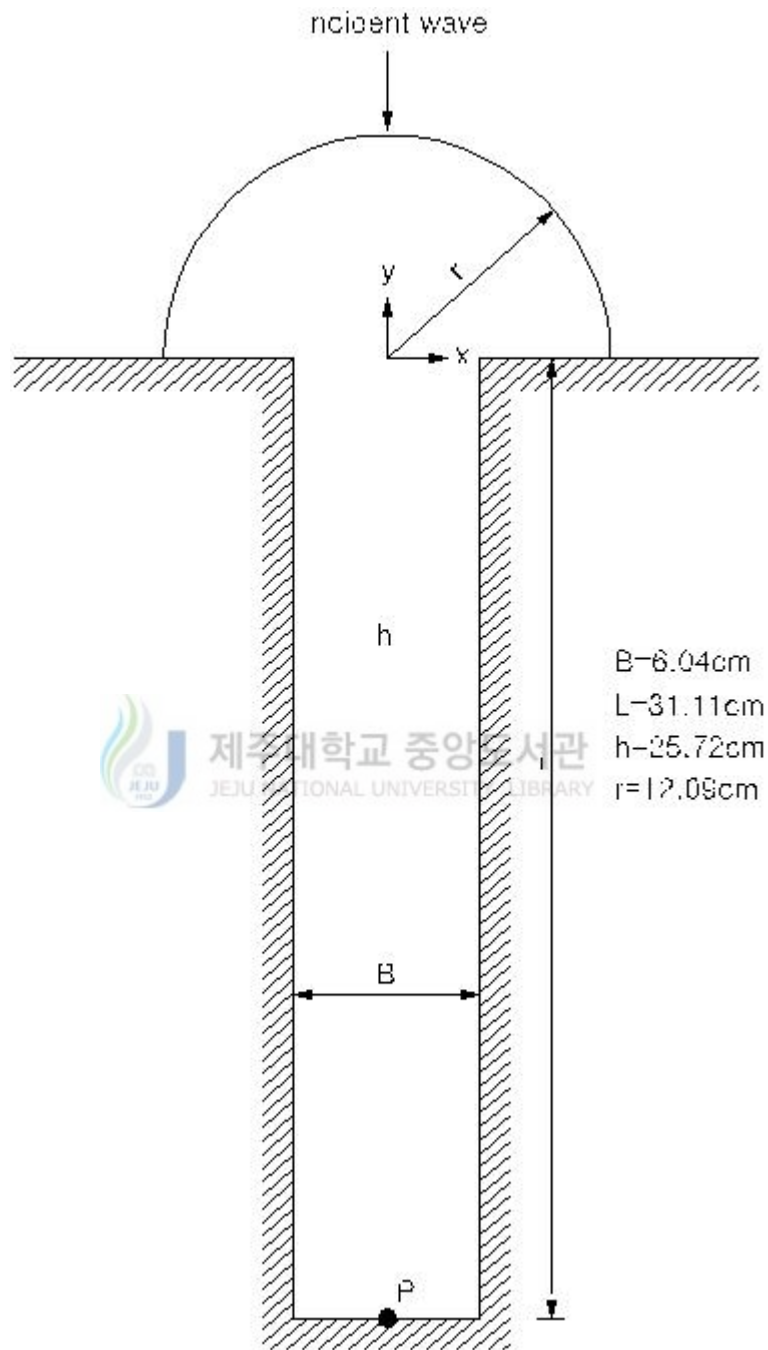


Fig. 3. Definition sketch for full open rectangular harbor



Fig. 4. Finite element mesh for full open rectangular harbor

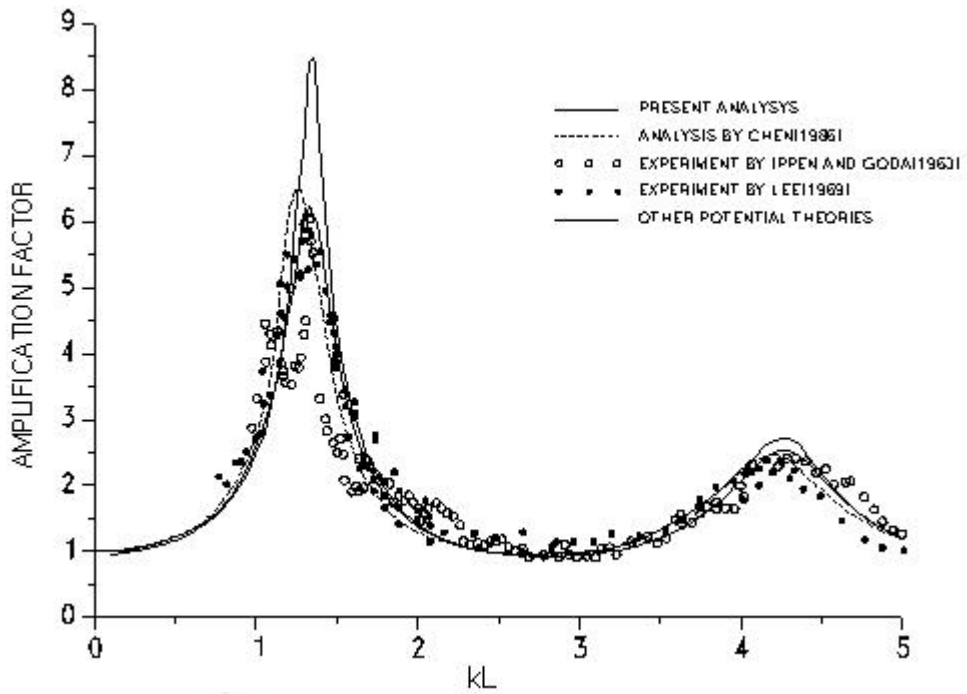


Fig. 5. Comparison of response curves at point in fully open rectangular harbor

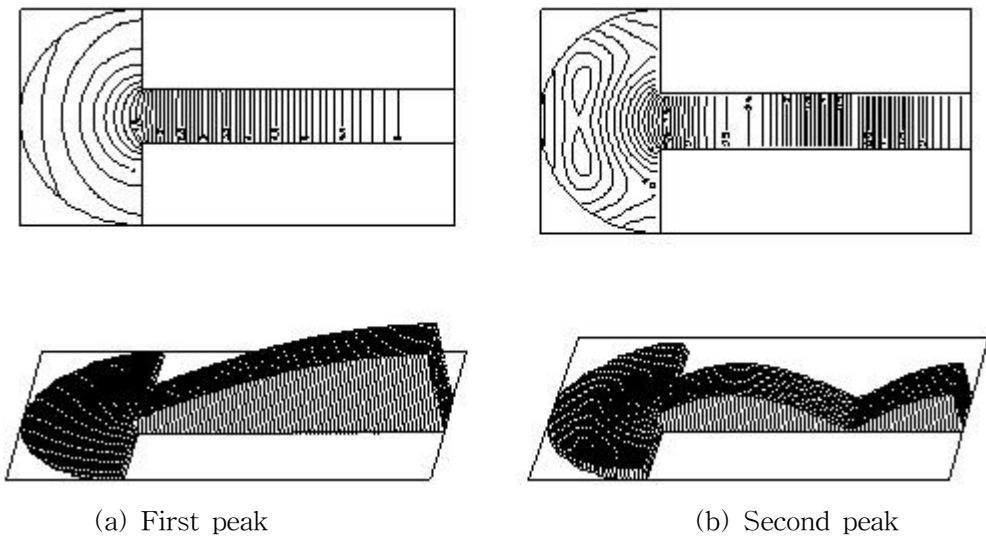


Fig. 6. Wave amplification ratios for full open rectangular harbor

2. 임의형상 모형항만

기하학적 형태의 항만이 아닌 임의 형상항만에 대한 본 수치모형의 타당성을 검토하기 위하여, Kashiya(1993), Sato 등(1988)와 Saito 등(1993)이 실시한 것과 동일한 형태의 항만을 사용하여 항내 정온결과를 비교하였다(Fig. 7). 수치계산 조건으로는 항 입구에서의 입사파의 반사를 저감하기 위하여 항내측의 일부는 소파구조로 했다. 반사율은 습田(1990)을 참고로 소파구조의 경우 0.4, 직립구조의 경우 0.9로 했다. 입사파랑의 조건으로, 파고는 1.0m, 주기는 10sec를 주었고, 수심은 해석영역 전체를 7m로 일정하게 주었다.

Fig. 8는 삼각형 유한요소를 이용하여 해석영역을 분할한 것을 나타낸 것으로, 삼각형 유한요소의 절점수는 35,967개, 요소수는 70,791개이다. 방파제 선단으로부터 경계까지의 거리는 75m 로, 이것은 입사파의 파장 78.92m 와 거의 같다. 요소의 크기는 파장과 요소 크기의 비율이 1/20이 되도록 4m 정도로 일정하게 했다.

Fig. 9 는 입사각 270°의 파랑에 대한 수치계산 결과 중 항내 수역만을 사용하여, 본 계산값과 다른 수치해석결과 (Sato 등 1988; Kashiya, 1993)와 실험결과 (Saito 등 1993)를 비교한 것이다. Fig. 9 에서 종축은 파고비를 나타낸 것이며, 횡축은 모델 항만의 거리를 나타낸 것이다. Fig. 9 에 비교한 단면은 항내측 방향으로 Line-1, Line-2, 연안방향으로 Line-3, Line-4 등 모두 4개의 단면이다. 먼저 Line-1, Line-2의 항내측 방향에 관해서 검토해 보면, 공진조건에 의한 배와 절이 거의 일치하고 있고, Line-2에서 주방파제와 부방파제 사이에서 배와 절의 구분이 약간 일치하고 있지 않으나 대체로 양호한 것을 알 수 있다. Line-3, Line-4의 연안방향에 관해 검토해 보면, Line-3에서 실험값이 주방파제 부근에서 약간 크게 나오지만 계산값 자체는 거의 일치하고 있는 것을 알 수 있다. Line-4에서는 Sato 등(1988)의 방법이 약간 큰 값을 나타내지만, 공진현상을 나타내는 배와 절은 대체로 양호하게 일치하고 있다.

Fig. 10 는 Fig. 9 에 나타낸 계산 값을 이용하여 파고를 3차원으로 시각화한 것으로 항외와 항내의 파고분포를 잘 나타내고 있다.

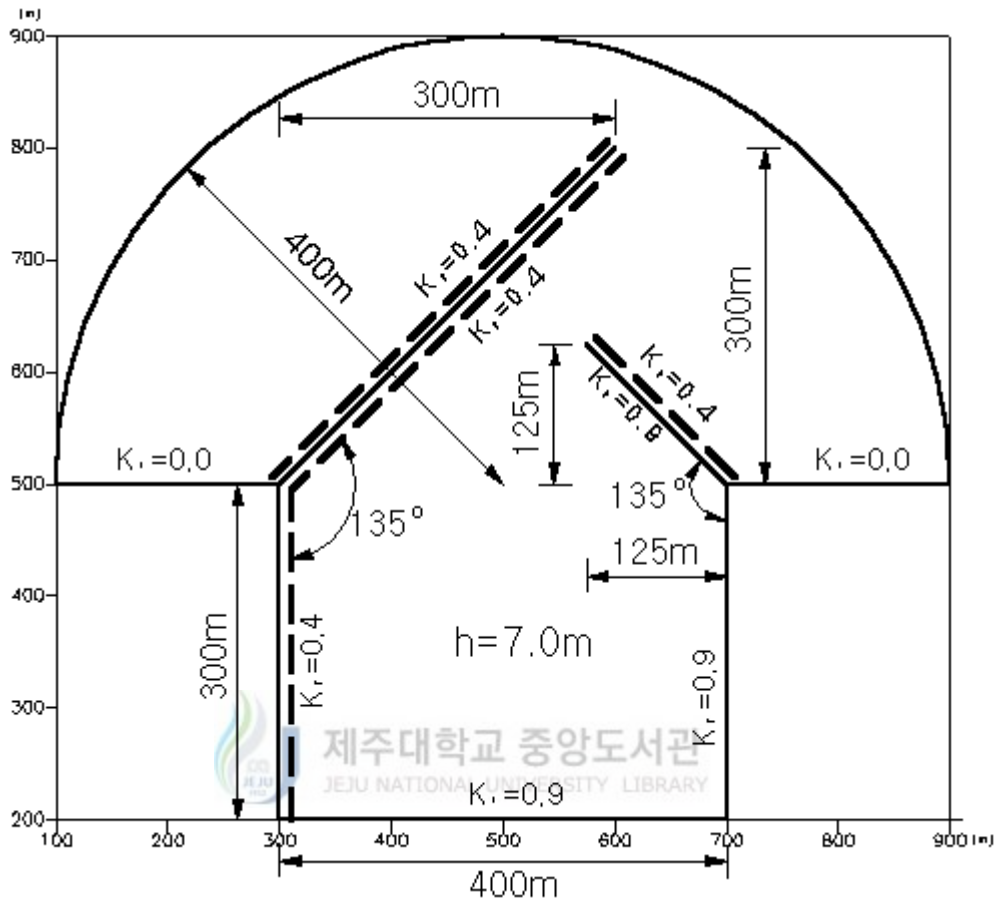


Fig. 7. Definition sketch for arbitrary shape harbor

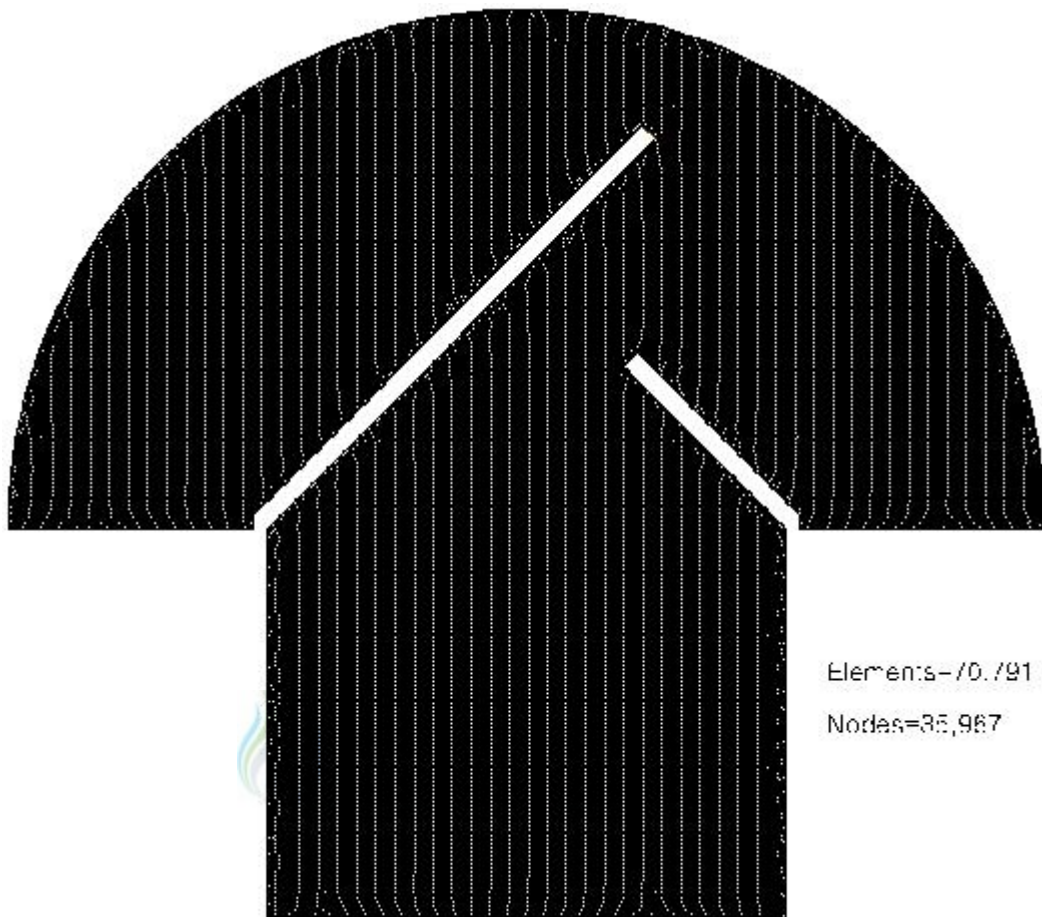


Fig. 8. Finite element mesh for arbitrary shape harbor

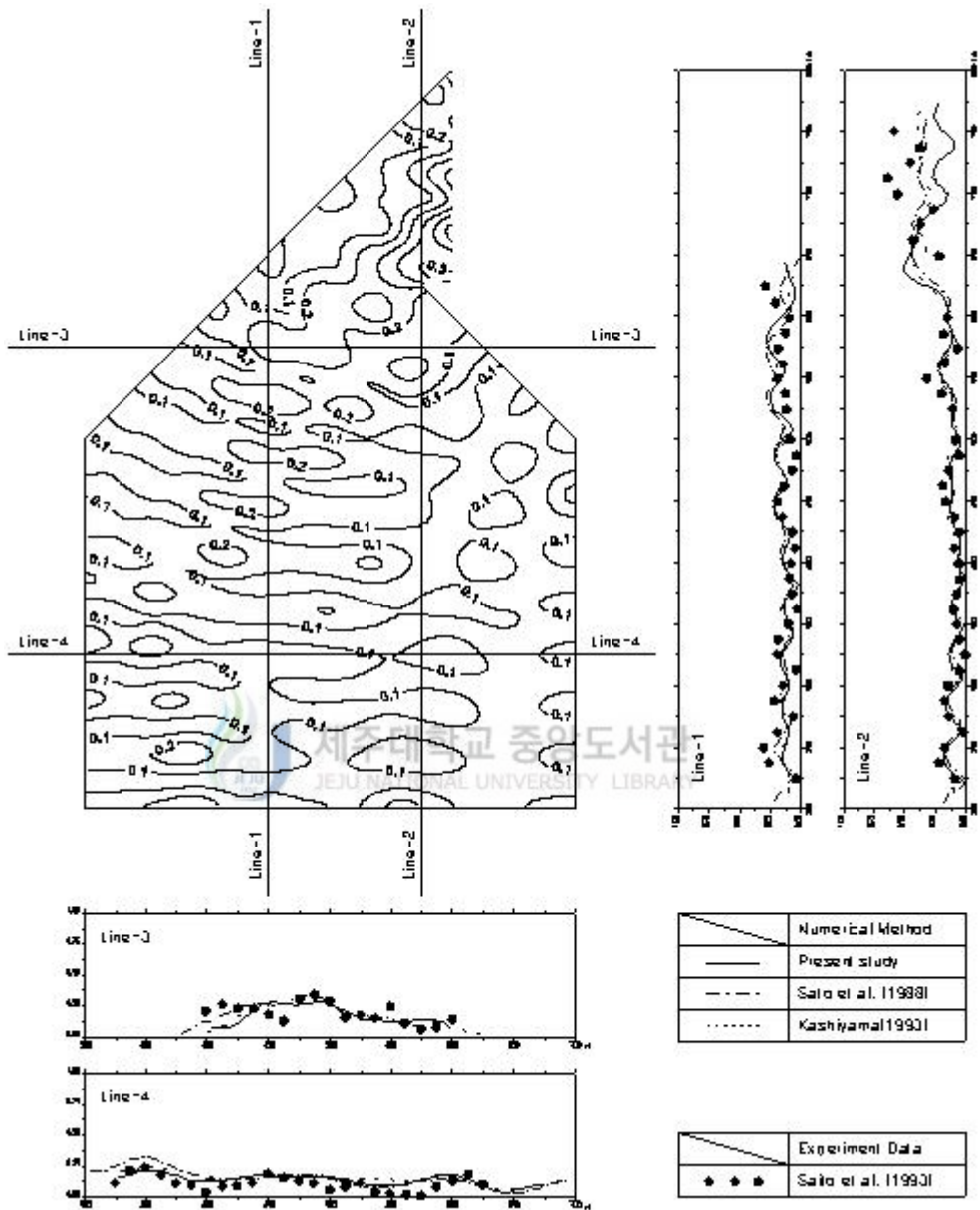


Fig. 9. Comparison of relative wave height for arbitrary shape harbor

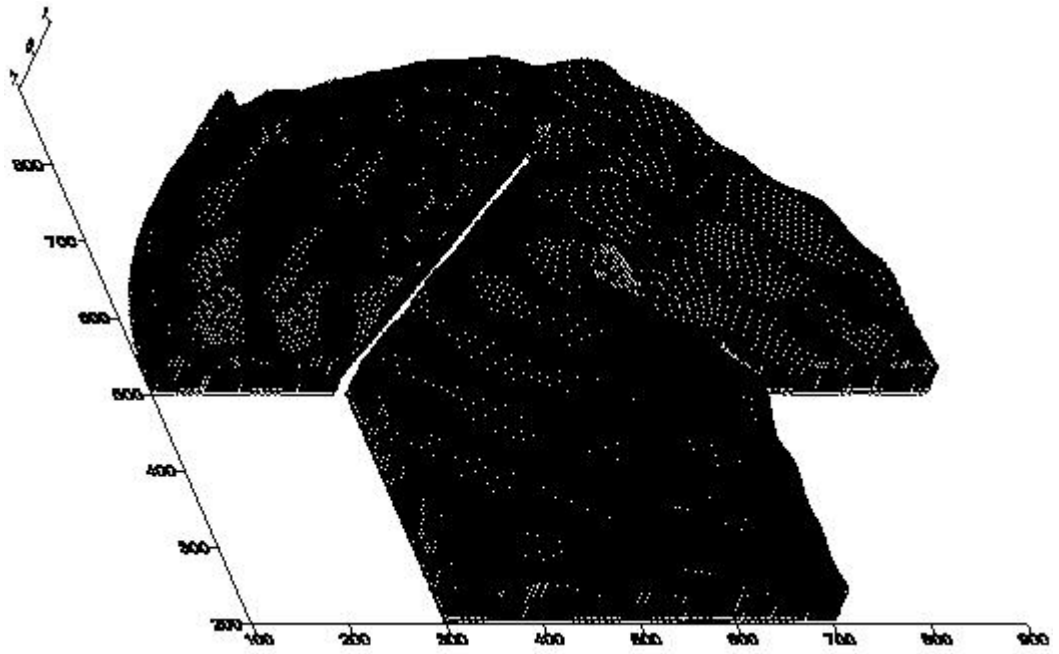


Fig. 10. Three dimensional wave profiles for arbitrary shape harbor

3. 제주항의 정온도 해석

제주항은 제주도의 북쪽에 자리잡고 있으며, 연간하역능력 2,135,000ton, 동시접안능력 24척, 최대접안능력은 20,000ton인 제주도의 관문항이다. Fig. 11에서 볼 수 있듯이 제주항은 돌출항으로 동서로 1.5km, 남북1.8km이며, 항내의 수심은 2~11m로 비교적 완만하다. 외해와의 경계에는 방파제 2,969m(동방파제 979m와 서방파제 1,990m)가 있고, 항내의 수면적은 790,000m²이다.

현재 제주항은 태풍시 또는 외해에서 발달된 고파랑 내습시 서방파제를 통한 월파가 광범위한 범위에 걸쳐 일어나고 있는 실정이다. 또한 항 입구를 통해 내습한 파랑은 서방파제 항 내측을 따라 연파형태로 높은 파고의 파랑이 항내로 전파되고 있다.

제주항의 항내 입사파에 의한 정온현상을 예측하기 위하여 Fig. 12과 같이 삼각형 유한요소로 분할하였다. 최적의 분할이 이루어 질 수 있도록 항의 제일 안쪽 부분에 대한 수심이 2m인 것과 항외부분이 13~25m인 것을 고려하여 수심이 얇은 부분은 격자간격이 작은 소분할이 되도록 하고 수심이 상대적으로 깊은 부분은 격자간격이 큰 대분할이 되도록 차등 분할을 실시하였다. 분할된 유한요소의 절점수는 35,967개, 요소수는 70791개이다. 요소의 분할은 Kashiyama와 Sakuraba(1994)가 제안하고 있는 파장과 요소크기의 비율이 10보다 커야한다는 조건을 만족하도록 분할하였다.

본 계산은 Table. 1과 같이 제주항의 심해 설계파 조건에서 제시된 각 파형별 가장 큰 입사파고와 주기를 가진 파를 선별하여 각 case별로 실시하였다(정 등, 2000).

Table. 1. Incident wave condition

Cases	Wave height (m)	Period (sec)	Direction
1	4.7	9.0	NE
2	7.0	11.0	NNW

반사율은 소파구조에서의 반사계수 K_r 은 0.4, 사석경사제에서의 반사계수 K_r 은 0.6, 직립구조에서의 반사계수 K_r 은 0.9로 했으며, 해저면 마찰계수 β 는 계산값에 큰 영향을 주지 않는 것을 고려하여 0으로 했다.

Fig. 13, 14는 위의 조건을 이용하여 제주항에 대해 case별 계산된 항내 파고 분포를 나타내고 있다. 그림에서 알 수 있듯이 case 1이 case 2에 비해 다소 높은 파고 분포를 나타내고 있는데 이러한 현상은 case 1에서의 입사파고가 4.7m로 case 2에서의 파고 7.0m보다 비교적 작게 부여 되었지만 case 1에서는 입사파 방향이 NE방향이기 때문에 파가 항 입구를 통해 직접 입사되고 서방과제 항 내측 배후면을 따라 연파형태의 파가 발생되기 때문인 것으로 사료된다. 또한, 이 결과를 해양수산부(1999) 설계기준의 항내 파고 0.5~1.0m의 값과 비교하면, 제4부두와 제5부두, 제6부두는 설계기준에 비해 비교적 파고가 크며, 제1부두, 제2부두, 제3부두 등은 비교적 작은 파고를 나타내고 있는 것을 알 수 있다. 계산값 중 각 부두별 파고 분포를 Table. 2에 나타내었다.

Table. 2. Computed relative wave height(unit: m)

Cases	Pier 1	Pier 2	Pier 3	Pier 4	Pier 5	Pier 6
1	0.3	0.3	0.7	2.5	1.5	1.5
2	0.2	0.2	0.7	1.7	1.7	1.0

Fig. 15, 16은 각 case별 수면변위를 3차원으로 나타낸 것이다. Fig. 15, 16에서는 파의 진행방향과 회절현상 그리고 굴절현상들이 잘 나타나 있기 때문에 육안으로도 쉽게 파의 진행 상황을 파악할 수 있다. Fig. 17, 18은 각각 case 1, 2의 계산결과 중 물입자의 속도를 이용하여 벡터화 하였다. 그림에서 파의 배와 절 부분을 포함하여 물입자의 거동에 대해 잘 나타내고 있다.

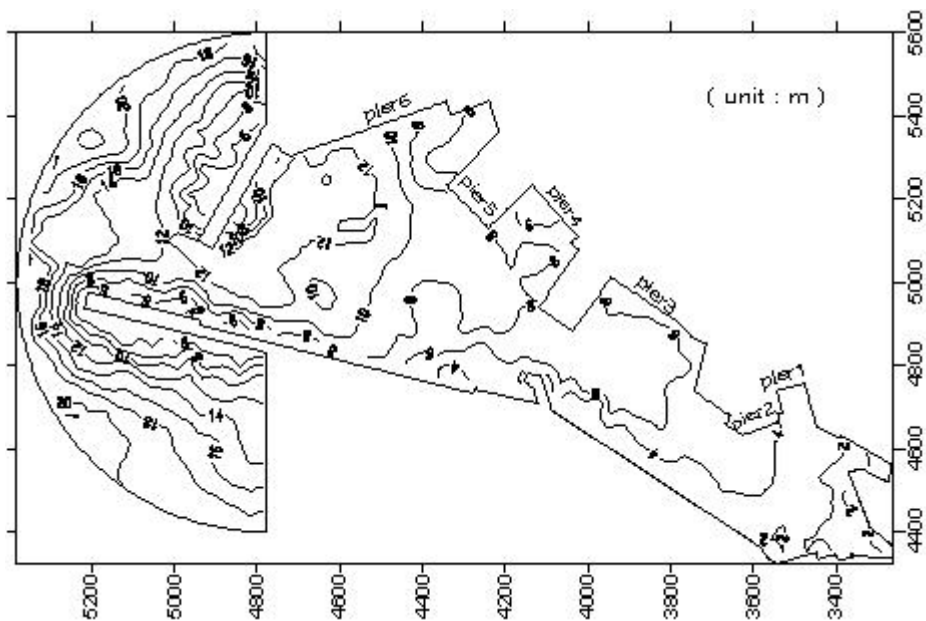


Fig. 11. Water depth diagram for Jeju Harbor

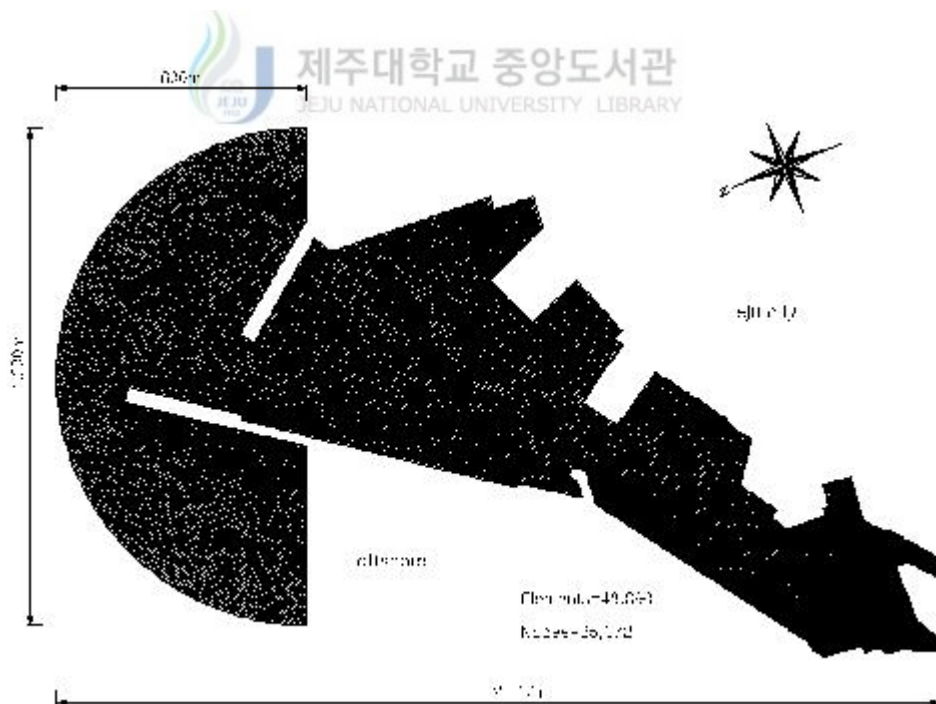


Fig. 12. Finite element mesh for Jeju Harbor

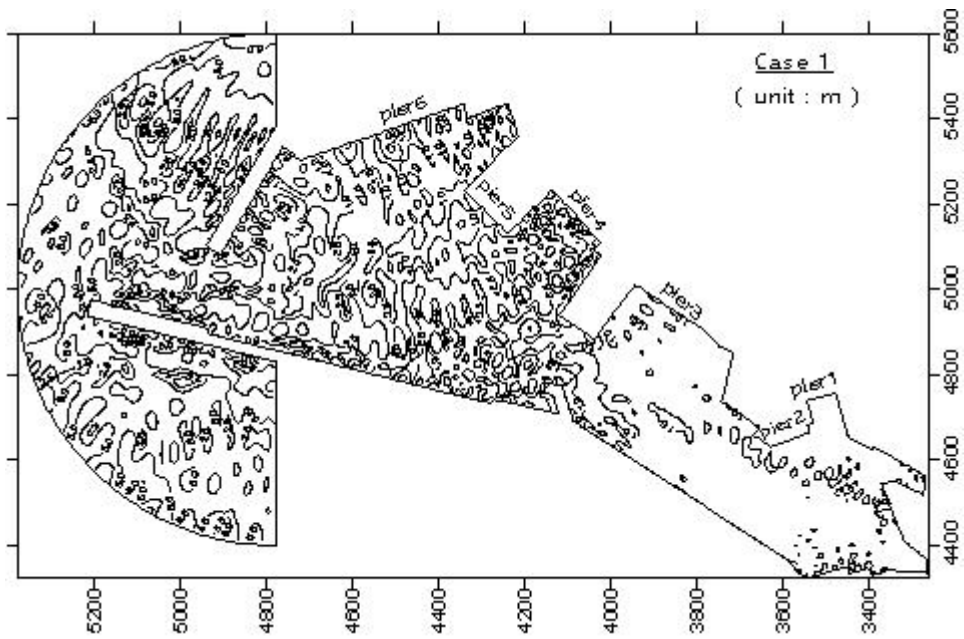


Fig. 13. Computed relative wave height for Jeju Harbor(case 1)



Fig. 14. Computed relative wave height for Jeju Harbor(case 2)

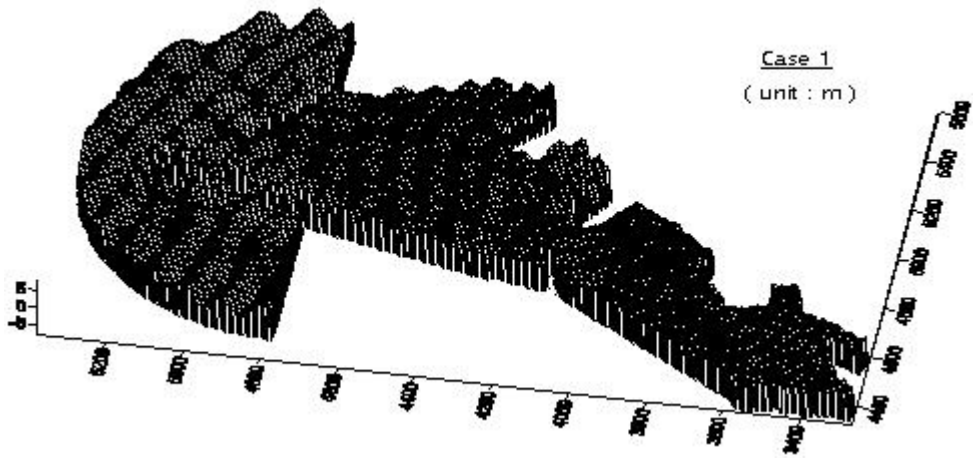


Fig. 15. Three dimensional wave height distribution for Jeju Harbor(case 1)

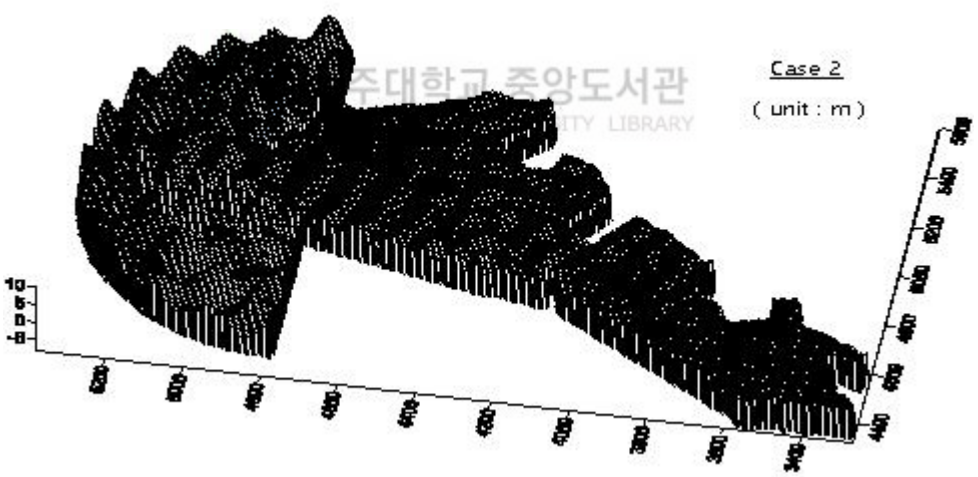


Fig. 16. Three dimensional wave height distribution for Jeju Harbor(case 2)

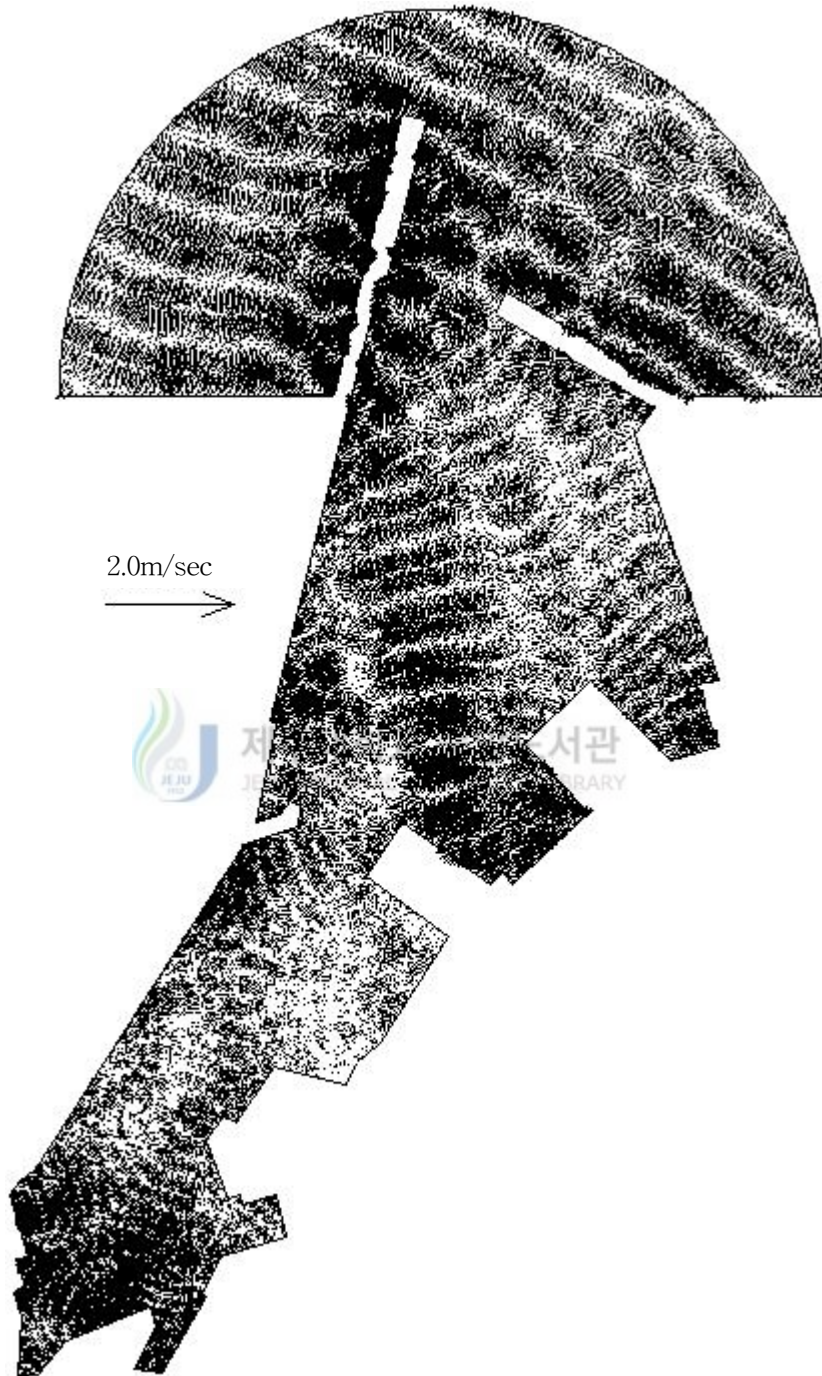


Fig. 17. Vector map of wave particles for Jeju Harbor(case 1)

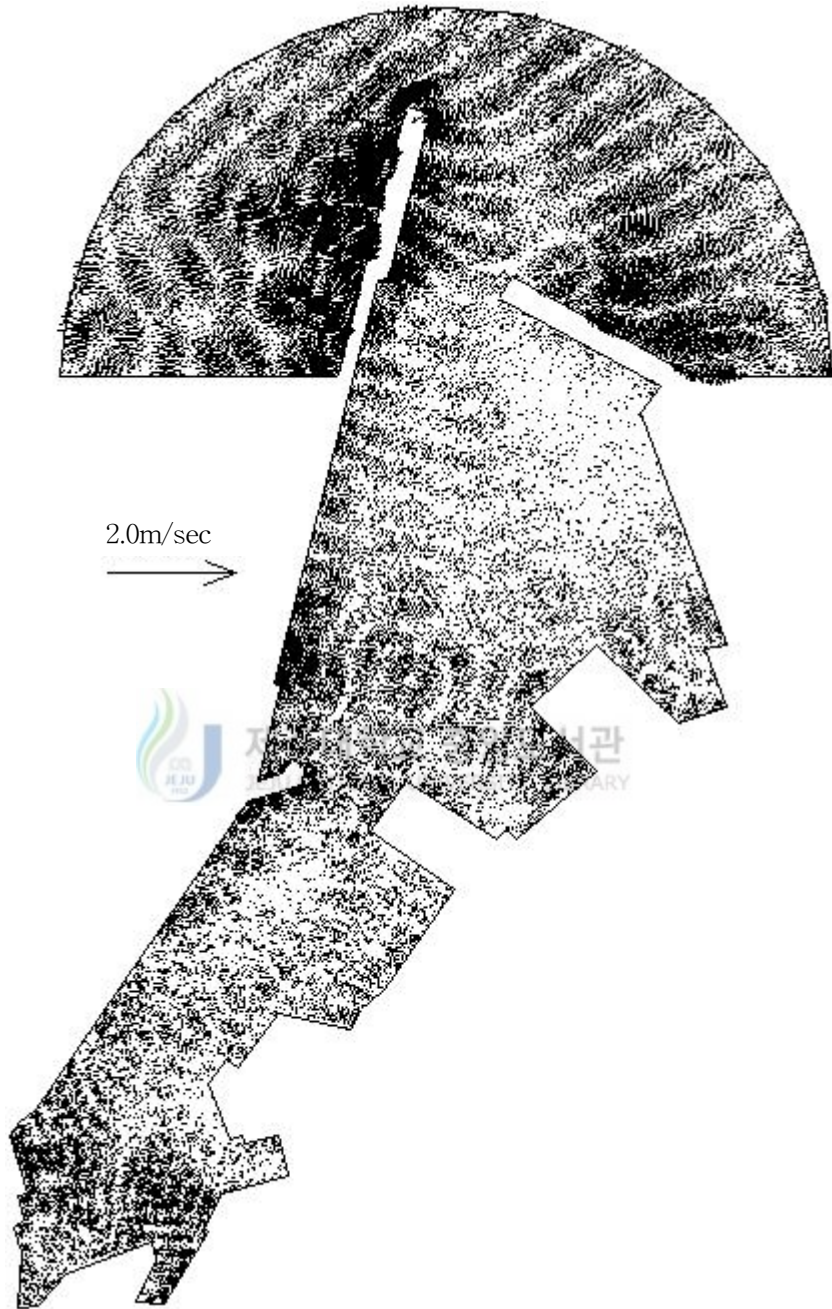


Fig. 18. Vector map of wave particles for Jeju Harbor(case 2)

V. 결 론

유체의 성질에 관한 수치해석은 비단 토목공학 분야만이 아니라 많은 이공학 분야에서 널리 행해지고 있다. 컴퓨터의 발달과 전산유체역학의 발달로 실제로는 관찰하기 힘들거나 직접적인 실험을 하기 어려운 자연 현상도 해석 및 예측이 가능하게 되었다. 본 연구에서는 항만의 정온에 관한 수치모의를 하기 위하여 기본 방정식으로 마찰을 포함한 환경사방정식을 이용 하였고, 유한요소 기법을 이용하여 해석을 실시하였다. 또한 모의결과를 2차원 및 3차원으로 나타내어 항만 정온도를 쉽게 파악할 수 있도록 하였다.

① 본 논문의 타당성을 검토하기 위하여 Ippen과 Goda(1963)가 실시한 완전 개방된 직사각형 항만에 입사하는 장주기파의 증폭현상에 대해 비교, 분석하였다. 그 결과 다른 수치 계산 결과와 수리 모형실험 결과와 비교 하였을 때 매우 좋은 일치를 보였다.

② 임의형상 항만에 대한 검증으로서 Kashiyama(1993), Sato 등(1988)와 Saito 등. (1993)이 실시한 것과 동일한 조건으로, 동일한 모델항만의 수치해석 결과와 실험값과의 비교를 하였다. 그 결과, 본 수치모의의 타당성이 검증되었다.

③ 제주항에 대해 수치모의를 실시한 결과 case 2에 대해서는 다소 양호한 정온상태를 보였지만, case1에 대해서는 입사파에 의한 연파형태의 파가 발생하여 다소 높게 나타났고, 모든 case에 대한 각 부두별 정온상태는 제4, 5, 6부두에서 높게 나타났고, 제1, 2, 3부두에서는 다소 양호하게 나타났다.

④ 본 연구에서 수행한 수치모의는 실제의 항만의 정온도 해석에 대한 결과를 잘 나타내기 때문에 차후 항만의 확장이나, 신설시 본 수치모의의 방법을 이용하여 정온도를 예측하고, 그 결과를 가시화할 수 있을 것으로 사료되며, 그 활용도가 기대된다.

VI. 참고문헌

- 김남형역. 1995, 유한요소법유체해석, 원창출판사, 268 pp.
- 김남형역. 2002, 수치유체역학, 원기술, pp. 819-823.
- 김남형 · 박제선역. 1996, 유한요소법, 원창출판사, 273 pp.
- 김남형, 허영택, 2000, 유한요소법에 의한 항만 정온도의 수치모의, 한국해양공학회 제16권1호, pp.22-26.
- 김남형 · 양정필 · 박상길. 2000, 수심을 고려한 천해역에서의 자동요소 생성법, 한국항만학회, 제14권, 제1호, pp. 97-105.
- 김영재, 1999, 복합요소법을 이용한 감천항의 부진동 해석, 동아대학교 석사학위논문.
- 박우선 · 전인식 · 정원무. 1994, Infinite Element for the Analysis of Harbor Resonances, 한국해안 · 해양공학회지, 제6권, 제2호, pp. 139-149.
- 서승남 · 연영진. 1994, Galerkin 유한요소법에 의한 항내 정온도 모형, 한국해안 · 해양공학회지, 제6권, 제4호, pp. 439-451.
- 이철웅 · 이길성. 1994, 항만 및 해안공학과군에 따른 장주기파와 항만의 진동, 대한토목학회 논문집, 제14권, 제3호, pp. 607-618.
- 정원무, 1991, 복합요소법에 의한 항내 파랑 침입 · 변형 연구, 명지대학교 석사학위논문.
- 정원무 · 편종근 · 정신탉 · 정경태. 1992, 복합요소법을 이용한 항내 파랑 응답 수치해석, 한국해안 · 해양공학회지, 제4권, 제1호, pp. 34-44.
- 정원무 · 박우선. 1996, 항만공진에 대한 복합요소 수치모형의 민감도 분석, 한국해안 · 해양공학회지, 제8권, 제2호, pp. 174-184.
- 정원무 · 이길성 · 박우선 · 정경태. 1998, 항입구 손실과 저면 마찰을 고려한 항만 부진동 유한요소 모형, 해양연구, 제20권, 제3호, pp. 285-306.
- 정태욱 · 김종인 · 류청노. 2000, 제주해역 항만 시설물의 수리환경적 특성에 관한 연구, 한국해양공학회지, 제14권, 제3호, pp. 1-10.
- 허명규 · 이중우. 2001, 공진 방과제를 이용한 항만 부진동의 저감, 한국항만학회지,

- 제15권 제2호, pp. 191-200.
- 해양수산부. 1999, 항만 및 어항 설계기준, 상권, pp. 117-129.
- Berkhoff, J. C. W. 1972, Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th International Conference on Coastal Engineering, ASCE, pp. 471-490.
- Berkhoff, J. C. W. 1975, Linear wave propagation problems and the finite element method, Finite Elements in Fluids, Vol. 1, edited by R. H. Gallagher, et al., London, pp. 251~280.
- Chen, H. S. 1984, Hybrid element modelling of harbor resonance, 4th International Conference on Applied Numerical Modelling, pp. 312-316.
- Chen, H. S. 1986, Effects of bottom friction and boundary absorption on water wave scattering, Applied Ocean Research, Vol.8, No.2, pp. 99-104.
- Chen, H. S. 1990, Infinite elements for water wave radiation and scattering, Intern. J. for Numerical Methods for Fluids, Vol. 11, pp.555~569.
- Chen, H. S. and Houston, J. R. 1987, Calculation of water oscillation in coastal harbors: HARBS and HARBD user's manual, Instruction Report CERC-87-2, U.S Army Corps of Engineers, Waterway Experiment Station, 31 pp.
- Chen, H. S. and Mei, C. C. 1974, Oscillations and wave forces on an offshore harbor, Report 190, R. M. Parsons Lab. for Water Resourced and Hydrodynamics, MIT, Cambridge, MA.
- Houston, J. R. 1981, Combined refraction and diffraction of short waves using the finite element method, Applied Ocean Research, Vol.3, No.4, pp. 163-170.
- Heaps, N. S. 1969, A two-dimensional numerical model. Royal Society of London, Philosophical Transactions, Series A, 265, 1160, pp. 93~137.
- Ippen, A. T. and Goda, Y. 1963, Wave induced oscillations in harbor: The solution for a rectangular harbor connected to the open sea, Report 59, Hydrodynamics Laboratory, MIT, 90 pp.
- Kashiyama, K. 1993, Numerical accuracy of a simplified finite element model for wave diffraction-refraction, Computational. Fluid Dynamics, Vol.1, pp.

305-320.

- Kashiyama, K. and Sakuraba, M. 1994, Adaptive boundary-type finite element method for wave diffraction-refraction in harbor, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.112, pp. 185-197.
- Kashiyama, K. and Kawahara, M. 1988, A boundary-type finite element model for water surface wave problems, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.8, pp. 65-79.
- Lee, J. J. 1969, Wave induced oscillations in harbors of arbitrary shape, Report KH_R_20, W. M. KECK Lab. of Hydrodynamics and Water Resources, California Institute of Technology, Terminal Island, CA, 256 pp.
- Mei, C. C. 1975, Hybrid-element method for water wave, *Proceeding of Symposium on Modeling Techniques*, San Fransisco.
- Sommerfeld, A. 1896, *The theory of diffraction, Optics Lectures on Theoretical Physics*, Vol. IV, Academic Press.
- 近藤浩右・清水琢三・山田耕一. 1987, グリーン関数法を用いた港内波方向スペクトル計算法, 第34回海岸工学講演會論文集, pp. 106-110.
- 西西村仁嗣・松岡道南・松本郎・篠田伸昌. 1993, グリーン関数法を用いた港内静穏度解析, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 51-55.
- 齊藤榮一・沖政和・清水琢三・鵜飼亮行・磯部雅彦. 1993, 港灣模型を用いた波の變形に特性する關研究, 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 56-60.
- 佐藤典之・磯部雅彦・泉宮尊司. 1988, 任意港灣形狀に對する不規則波の港内波高分布の計算法の改良, 第35回海岸工学講演會論文集, pp. 257-261.
- 合田良實. 1990, 港灣構造物の耐波設計, 鹿島出版會, 333 pp. (김남형역. 1993, 항만구조물의 내파설계, 구미서관, 404 pp.)

감사의 글

부족한 점이 많았던 저에게 학문적 기본소양과, 연구 자세를 가르쳐 주시고, 논문을 끝까지 마칠 수 있도록 지도편달을 아끼지 않으셨던 지도교수 김남형 교수님에게 진심으로 감사를 드리며, 논문심사를 맡아 세심하게 검토하고 지적하여 주신 양성기 교수님, 조일형 교수님께도 진심으로 감사를 드립니다. 그리고 학부에서부터 대학원을 마치는 동안 많은 가르침을 주신 남정만 교수님, 이병걸 교수님, 박상렬 교수님, 김상진 교수님, 고희성 교수님께도 감사드립니다.

논문이 완성되기까지 항상 같이 생활하면서 격려와 힘을 주었던 남국형, 지훈, 현우, 순보에게도 고마움을 전합니다. 그리고 곁에서 격려를 해주었던 영호형, 재관, 창훈형, 영웅, 태우, 현수, 동일, 용철, 승희, 건, 영범, 덕철, 그리고 영임에게도 앞으로 좋은 미래가 펼쳐지길 기원 합니다.

끝으로 오늘이 있기까지 이끌어 주시고 보살피 주신 부모님께 감사드리며, 공부를 끝까지 할 수 있도록 항상 나를 믿고, 용기를 주었던 사랑하는 아내에게 이 논문으로 써나마 고마운 마음을 전합니다.

2002 년 12월

허영택

발표논문 리스트

(1) 학회지 발표논문

- ①. “유한요소법에 의한 제주항 정온도 모의”, 제주대학교 해양과환경연구소연구논문집, 제25권, pp 69~77, 2001.
- ②. “유한요소법에 의한 항만 정온도의 수치모의”, 한국해양공학회, 한국해양공학회지, 제16권 제1호, pp 22~26, 2002.
- ③. “Calmness Analysis of Jeju Harbor by Finite Element Technique”, 한국해양공학회, 한국해양공학회지, 2003.



(2) 학술 강연회 발표논문

- ①. “임의 형상 항만에서 부진동의 유한요소 모의”, 제1회 대학원생 학술발표회 발표요약집, 제주대학, pp 46~49, 2002.
- ②. “임의 형상 항만에서 부진동의 유한요소 모의”, 한국해양환경공학회, 2002년도 춘계학술대회 논문집, pp 183~186, 2002.
- ③. “제주항 정온도의 유한요소모의”, 대한토목학회, 2002년도 학술발표회.