

碩 士 學 位 論 文

連繫된 Bar 構造物の 靜的 平衡에 關한 연구

指導教授 殷 熙 昌



濟州大學校 産業大學院
建設環境工學科
建築工學專攻
金 京 男

2003

連繫된 Bar 構造物の 靜的 平衡에 關한 연구

指導教授 殷 熙 昌

이 論文을 工學 碩士學位 論文으로 提出함

2003 년 6 월 일



濟州大學校 産業大學院
建設環境工學科
建築工學專攻
金 京 男

金京男의 工學 碩士學位論文을 認准함

2003 년 월 일

委員長 _____ 인

委 員 _____ 인

委 員 _____ 인

목 차

목 차	i
Summary	ii
Figure Contents	iii
I. 서 론	1
1. 연구 배경	1
2. 연구 목적	2
3. 연구 방법	3
II. 구속된 시스템의 운동	4
1. 일반화 좌표	4
2. 일반화된 힘	7
2.1 보존 시스템에 대한 일반화된 힘	9
2.2 Lagrange 방정식	9
2.3 구속이 있는 경우의 Lagrange 운동방정식	13
III. 일반화된 역행렬법	15
1. 구속 조건을 고려한 정적 평형	15
2. 단진자의 정적 평형 상태	18
3. 3개의 봉으로 연결된 구조물	20
4. 5개의 봉으로 연결된 구조체의 정적 평형	24
IV. 결 론	28
참고 문헌	29

A Study on Static Equilibrium of Linked Bar Structures

Kim, Kyung-Nam

Department of Construction and Environmental Engineering
Graduate School of Industry
Cheju National University
Supervised by Professor Eun, Hee-Chang

Summary

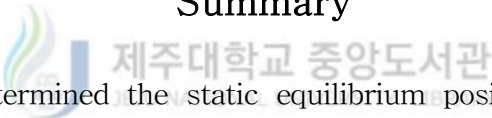
 This paper determined the static equilibrium positions of linked bar structures. The static equilibrium positions are defined as the ones to minimize the variation of potential energy and can be obtained from the equation of motion at freezing time. Assuming each bar of the structure as a rigid body, the equation of motion for the structure must satisfy its rigid body condition. In order to combine both the equation of motion and the constraint equation, it is necessary to numerically calculate a weighting matrix to minimize the variation of potential energy and the generalized inverse method gives an explicit weighting matrix. Thus, with the modification of the generalized inverse method to explicitly describe the constrained motion, this paper presented a simple method to determine the equilibrium positions of linked bar structures, and the validity of the method was illustrated by two simple bar structures.

Figure Contents

Fig. 1. A simple pendulum -----	19
Fig. 2. A three-joint link bar structure -----	21
Fig. 3. A five-joint link bar structure-----	24



I. 서 론

1. 연구 배경

모든 구조물이나 기계적인 장치들에 대한 동적인 해석은 기본적으로 정적 평형(static equilibrium) 상태에서부터 시작된다. 즉, 초기 상태들이 정적 평형 상태를 불만족할 경우에 그 구조물의 동적 해석은 불가능하게 된다. 동적 시스템의 정적 평형은 정지된 시간을 근거로 산정되므로 운동방정식에서 속도나 가속도 성분들은 제거된다.

최근의 구조물들은 대형화 및 장경간화 추세에 있으며, 이에 대한 동적 해석의 필요성이 대두되고 있다. 장경간 구조물은 지붕을 형성하는 부분으로 또한 경량화 추세에 있다. 그러므로 이들 경간 해당 부분에 휨 강성은 현저히 낮으므로 불안정한 상태에 있을 수 있으므로 안정화 과정(stabilizing process)에 의해 즉, 정적 평형 상태를 결정할 필요가 있다.

장경간 구조체를 이루는 각 bar 부재를 강체라고 가정한다면 이 조건을 만족하는 무한 경우의 정적인 상태가 존재한다. 이러한 강체 조건은 평형 방정식에 추가로 주어지는 식으로 미지의 변위 보다 지배하는 방정식의 수가 많으므로 그 해는 무한대가 된다. 즉 구속조건을 만족하기 위해 필요한 구속력을 일컫는다. 따라서, 가중 행렬(weighting matrix) 등을 사용하여 그 해를 결정하려는 많은 시도들이 있었다. 그러나 가중 행렬을 결정하는 대부분의 방법은 라그란지 승수법과 같이 수치 해석에 의한다. 특히 라그란지는 상태 변수와 시간에 관한 함수로 이를 명백한 수식으로 표현하지 못하므로 강체를 고려한 구조물의 정적 평형 상태를 결정하는데 어려움이 있다.

김 재열 등은 트러스의 각 부재가 강체(rigid body)라고 가정하고, 강체

조건을 만족하는 여러 해들 중에서 포텐셜 에너지(potential energy)의 변화량이 최소가 되는 점을 찾아 이를 정적 평형 상태로 결정하였다. 이 해석법은 일반화된 역행렬을 사용하여 포텐셜 에너지를 최소로 취하는 미지의 벡터를 수치 해석에 의하여 결정하며, 따라서 비선형의 관계식에서는 계산 과정도 복잡한 어려운 점이 있다. 또한 강체의 질량을 무시하여 그 해석법을 간략화하였다.

1992년 Udawadia와 Kalaba가 제안한 일반화된 역행렬법(generalized inverse method)은 라그랑지 승수를 도입하지 않고 제약 조건이 주어질 경우에 그 운동을 묘사할 수 있는 방법을 제시하였다. 이 방법은 명확한 2차 미분 방정식의 형태로 제약 조건이 주어질 경우에 그 역학적인 특성을 규명할 수 있는 큰 장점이 있다. 이 방법의 타당성과 유일성 등이 여러 면에서 검토되고 있다. 그러나 미분방정식을 수치 적분을 행한 그 결과들이 구속 조건을 불만족하는 오차들이 발생하는 것을 볼 수 있다. 따라서, 정적 평형을 위한 지배 방정식 및 그 해를 필요로 한다.

본 연구에서는 오차를 최소로 줄이기 위해 일반화된 역행렬법을 수정하여 정적 평형 상태를 결정하였다. 또한, 정적 평형 상태를 결정하는 에너지법, 평형 접근법, 그리고 동적 해석법 중에 강체의 질량에 의한 관성력을 포함하는 동적 해석법을 택하였으며, 강체의 기하학적 특성에 의한 제약 조건을 포함하였다. 유도된 식은 비선형의 연립방정식으로 그 풀이는 최적화(optimization)법에 의해 정적 평형 상태를 결정하였다. 또한, 경간 양단의 수직 레벨이 동일한 경우와 다른 경우에 bar 구조물의 정적 평형 상태를 예를 들어 적용하였으며, 그 타당성을 검증하였다.

2. 연구 목적

최근 들어 건축물은 경량화 및 장경간화하는 추세에 있다. 경량화 및 장경간화를 위해 사용되는 재료들은 그 휨 강성이 매우 작으므로 초기에 기하학적으로 불안정할 수 있으며, 따라서 동적인 외력의 작용으로 구조물 설계에 큰 오류를 범할 수 있을 것이다. 따라서, 본 연구에서는 자중이

매우 작으며, 휨 강성 또한 매우 작은 장경간 구조체에서 정적 평형 상태를 결정하는 방법을 제시하는데 연구의 목적이 있다. 기존의 설계 연구에 의하면 정적인 평형 상태를 결정하기 위하여 수치 해석에 의존하는 경향이 있으나, 본 연구에서는 명확한 수식으로 이를 결정하는 방법을 제시한다. 이 연구의 결과들은 이와 같은 구조물에 동적인 설계를 행할 경우에 그 필요성이 있으며, 그 적용은 광범위하여 연구나 실무에서 그 활용도가 매우 크리라 판단된다.

3. 연구 방법

경량 및 장경간인 구조물은 기하학적으로 비선형이므로 그 해를 얻는데 컴퓨터 해석에 의존할 수 밖에 없다. 구조물이 경량임을 감안하여 자중을 무시할 수 있으나 본 연구에서는 미세한 자중을 고려하였다. 구조물의 정적 평형을 나타내는 방정식을 기존의 연구 중에 Udwardia와 Kalaba가 제안한 일반화된 역행렬법을 사용하여 얻었다. 정적 해석이므로 속도와 가속도 성분 즉 시간에 관한 함수들을 무시하여 정적 평형 상태 방정식을 구한다. 이를 MATLAB의 비선형 방정식의 해를 구하는 방법을 사용하여 정적 평형을 얻었다. 제안한 방법의 타당성을 검증하기 위하여 양단의 수직 차가 있는 경우와 없는 경우를 구분하였으며, 제안한 방법의 용이함을 입증하였다.

II. 구속된 시스템의 운동

1. 일반화 좌표

공간에서 입자의 위치는 3개의 좌표로 규정된다. 이들은 직각좌표, 구좌표, 원통좌표 또는 실제에 있어서 임의로 적당히 선택된 세 개의 파라미터일 수도 있다. 만약에 입자가 평면에 고정된 표면에서 움직이도록 구속되어 있다면, 입자의 위치를 확정시키는데는 단지 2개의 좌표계가 필요하지만 입자가 직선상이나 또는 고정된 곡선에 따라 운동할 때에는 한 개의 좌표계이면 충분하다.

n 개의 입자로 이루어진 계의 경우에는 일반적으로 모든 입자의 동시적인 위치—시스템의 배위(configuration)—를 완전히 규정시키는데는 $3n$ 보다 작다. 예로서, 시스템이 강체이면 배위를 규정하기 위해서는 물체의 어떤 편리한 위치(예를 들면 질량중심)와 공간에서의 물체의 방위만을 주면 될 것이다. 이 경우에는 6개의 좌표—3개는 기준점에 대한 것, 또 다른 3개 (소위 Euler 각) 는 방위에 대한 것 — 만이 필요하다.

일반적으로 주어진 시스템의 배위를 규정하기 위해서는 어떤 최소수 n 개의 좌표가 요구된다. 이와같은 좌표를 기호

$$q_1, q_2, \dots, q_n \quad (2.1)$$

으로 나타내고, 이들을 일반화 좌표(generalized coordinates)라고 부른다. 어떤 주어진 좌표 q_k 는 각도일 수도 있고 거리일 수도 있다. 시스템의 배위를 결정하는데 덧붙여서 각 좌표가 서로간에 독립적으로 변할 수 있다면, 이러한 시스템을 홀로노믹(holonomic)이라고 한다. 이 경우의 좌표

의 수 n 은 시스템의 자유도(degree of freedom)의 수이기도 하다.

비홀로노믹(nonholonomic) 시스템에서는 좌표는 모두가 독립적으로 변하지는 않는다. 즉 자유도의 수는 배위를 규정하는데 필요한 최소의 좌표의 수보다 적다. 비홀로노믹 시스템의 하나의 예로서, 아주 거칠은 평면 위에서 구르도록 구속이 된 구의 경우이다. 그의 배위를 규정하는데 5개의 좌표—구의 중심의 위치에 대한 2개와 방위에 대한 3개—가 있어야 한다. 그러나 이들 좌표는 모두가 독립적으로 변하지는 않는다. 왜냐하면 구가 구를 경우 최소한 2개의 좌표가 변해야 하기 때문이다.

만약에 구가 단일입자라고 하면 직각좌표는 다음의 일반화좌표의 함수로서 표현할 수가 있다.

$$\begin{aligned}
 x &= x(q) \\
 x &= x(q_1, q_2) \\
 y &= y(q_1, q_2) \\
 x &= x(q_1, q_2, q_3) \\
 y &= y(q_1, q_2, q_3) \\
 z &= z(q_1, q_2, q_3)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

q 가 (q_1, q_2, \dots) 에서 δq 만큼 $(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots)$ 로 변분되었다고 가정하자. 직각좌표에서 대응되는 이 변분은 다음으로 표현된다.

$$\begin{aligned}
 \delta x &= \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots \\
 \delta y &= \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

여기서, 편도함수 $\frac{\partial x}{\partial q_1}$ 등은 또한 벡터 q 의 함수이다. 구체적인 예로서,

평면 위에서 입자의 운동을 고려하자. 이때에 일반화 좌표는 다음으로 가정될 수 있다.

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta \quad (2.4)$$

그러므로 직각 좌표계에 의해 다음으로 좌표 변환된다.

$$\begin{aligned} x &= x(r, \theta) = r \cos \theta \\ y &= y(r, \theta) = r \sin \theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

또한 그 변분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x}{\partial r} \delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta} \delta \theta = \cos \theta \delta r - r \sin \theta \delta \theta \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial r} \delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta} \delta \theta = \sin \theta \delta r + r \cos \theta \delta \theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

여기서, r 과 θ 의 증분은 x 와 y 의 증분에 대응된다.

여러 개의 입자로 구성되는 시스템을 고려하면 이 시스템은 자유도 n 을 갖고 있어 일반화 좌표를

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

으로 표현할 수 있다. 배위 (q_1, q_2, \dots, q_n) 에서 증분된 배위 $(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots)$ 까지의 변화는 대표절점 i 가 점 (x_i, y_i, z_i) 에서 증분점 $(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i)$ 까지 운동하는 것이 된다. 여기서

$$\begin{aligned}\delta x_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k \\ \delta y_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \delta q_k \\ \delta z_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k\end{aligned}\quad (2.7)$$

가 된다. 편도함수는 다시 벡터 q 들의 함수가 된다. 직각좌표에 대한 표시는 아래 첨자 i 로, 아래 첨자 k 는 일반화 좌표를 뜻한다. 또 기호 x_i 는 임의의 직각좌표를 나타낸다. 즉 n 개 입자의 시스템에 대해서는 i 는 1과 $3n$ 사이의 값을 취하게 된다.

2. 일반화된 힘(generalized force)

한 입자가 힘 F 의 작용하에 변위 δr 를 일으킨다면, 이 때 이 힘에 의한 일은 다음과 같다.

$$\delta W = F \cdot \delta r = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z \quad (2.8)$$

식(2.8)은 다음의 기호로 표현이 가능하다.

$$\delta W + \sum_i F_i \delta x_i \quad (2.9)$$

식(2.9)는 단일 입자에 대해서 뿐만 아니라, 여러 개의 입자로 된 시스템에 대해서도 성립한다. 한 개의 입자에 대하여 i 는 1에서 3까지가 포함되므로 n 개 입자에 대해서 i 는 1에서 $3n$ 까지가 포함된다. n 개 입자에 대해서 i 는 1에서 $3n$ 까지 포함된다. 식(2.9)에 증분을 취하면 다음의 수식으로 표현된다.

$$\begin{aligned}\delta W &= \sum_i \left(F_i \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) \\ &= \sum_i \left(\sum_k F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k \right)\end{aligned}\quad (2.10)$$

식(2.10)은 또한 다음으로 표현된다.

$$\delta W = \sum_i \left(\sum_k F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) \quad (2.11a)$$

$$\delta W = \sum_k Q_k \delta q_k \quad (2.11b)$$

여기서

$$Q_k = \sum_i \left(F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right). \quad (2.12)$$

여기서 정의한 양 Q_k 는 좌표 q_k 에 연관되는 일반화된 힘이라고 한다. $Q_k \delta q_k$ 는 일(work)의 차원을 갖기 때문에 Q_k 는 q_k 가 거리이면 힘의 차원이 되고, q_k 가 각도라면 토크(torque)의 차원을 갖는다.

Q_k 의 실제값을 계산하기 위해서 식(2.12)를 쓰는 것은 불필요하거나 비실용적이다. 오히려 각 일반화된 힘 Q_k 는 좌표 q_k 가 δq_k 만큼 변할 때 (다른 일반화좌표는 상수로 있으면서)인 $Q_k \delta q_k$ 만큼 변할 때 (다른 일반화좌표는 상수로 있으면) $Q_k \delta q_k$ 가 외력에 의해서 시스템에 행해진 일이라는 사실에서 직접적으로 구한다. 예를 들면 시스템이 강체일 때, 주어진 축둘레를 각도 $\delta\theta$ 만큼 물체를 회전시켰을 때, 외력이 물체에 한 일은 $L_\theta \delta\theta$ 가 된다. 여기서 L_θ 는 축에 대한 모든 힘의 총 모멘트의 크기이다. 이 때 L_θ 는 좌표 θ 에 연관되는 일반화된 힘이 된다.

2.1 보존 시스템에서 일반화된 힘

보존 시스템에서 입자에 작용한 힘의 직각성분은 다음과 같이 정의된다.

$$F_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (2.13)$$

여기서 V 는 퍼텐셜 에너지함수이다. 따라서 일반화된 힘에 대한 식은

$$Q_k = - \left(\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \quad (2.14)$$

가 된다. 괄호 안의 표현은 q_k 에 대한 함수 V 의 편도함수이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

$$Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (2.15)$$

예를 들면 $q_1 = r$, $q_2 = \theta$ 인 극좌표를 쓸 때, 일반화된 힘 $Q_k = - \frac{\partial V}{\partial r}$; $Q_\theta = - \frac{\partial V}{\partial \theta}$ 가 된다. 만약에 V 가 r 만의 함수(중심력)일 때는 $Q_\theta = 0$ 이다.

2.2 Lagrange 방정식 (Lagrange's equation)

일반화 좌표에 의한 미분운동방정식은 다음으로 정의된다.

$$F_i = m_i \ddot{x}_i \quad (2.16)$$

식(2.16)은 일반화 좌표 q 에 의해 표현될 수 있다. 직각좌표에 의한 운동에너지 T 를 계산한 후, 이것을 일반화좌표와 이들의 시간 도함수의 함수로 나타낼 수가 있다. 즉 n 개 입자로 이루어진 시스템의 운동에너지 T 는 다음으로 쓸 수 있다.

$$T = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right] \quad (2.17a)$$

$$T = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \quad (2.17b)$$

직각좌표 x_i 는 일반화좌표 q_k 의 함수이다. 일반성을 유지하지 위하여 x 와 q 간의 함수관계 및 시간 t 에 관한 함수로 표현이 가능하다. 이와 같은 사실은 이미 정해진 방법들로 움직이는 면상에서의 입자의 운동과 같이 운동하는 구속이 있는 경우이다. 이를 다음으로 표현할 수 있다.



제주대학교 중앙도서관
JEJU NATIONAL UNIVERSITY LIBRARY

$$x_i = (q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (2.18)$$

식(2.18)을 시간에 관해 한 번 미분을 취하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (2.19)$$

위의 식으로부터 운동에너지를 일반화좌표와 그들의 시간 도함수, 그리고 시간의 함수로 볼 수 있다.

식(2.19)로부터

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad (2.20)$$

이 된다. 식(2.20)의 양 변에 x_i 를 곱하고, 시간 t 로 미분하면 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) &= \frac{d}{dt} \left(x_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \\ &= \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} \end{aligned} \quad (2.21a)$$

또는

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{\dot{x}_i^2}{2} \right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\dot{x}_i^2}{2} \right) \quad (2.21b)$$

을 얻는다. 양 변에 m 을 곱하고 $m_i \ddot{x}_i = F_i$ 로 놓으면

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(m_i \frac{\dot{x}_i^2}{2} \right) = F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} \right) \quad (2.22)$$

으로 쓸 수 있다. 따라서 i 에 대해서 합하면 전체 시스템에 대한 운동방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_N \left(F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad (2.23)$$

최종적으로 일반화력 Q_k 의 정의에서 다음 결과를 얻게 된다.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad (2.24)$$

이 방정식은 일반화 좌표계에서의 미분운동방정식으로서 Lagrange운동방정식이라고 한다. 운동 보존적인 경우 Q 는 식(2.15)로 주어지기 때문에

Lagrange방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (2.25)$$

이 방정식은 Lagrange함수

$$L = T - V \quad (2.26)$$

로 알려진 함수 L을 정의함으로써 더욱 간결하게 쓸 수 있다. 단 T와 V는 일반화 좌표를 써서 나타낸 것이다. 즉, $V=V(q)$, $-\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0$ 이기 때문에

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - 0 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \quad (2.27)$$

이다. 따라서 Lagrange방정식은 다음과 같이 써진다.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (2.28)$$

일반화된 힘의 일부분, 가령, Q_k 가 비보존적(nonconservative)이고 나머지가 퍼텐셜함수 V로부터 도출된다면 다음으로 수정된다.

$$Q_k = \dot{Q}_k - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (2.29)$$

Lagrange함수 $L = T - V$ 를 정의하여 다음과 같이 미분운동방정식을 쓸 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = Q'_k + \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (2.30)$$

이 형식은 마찰력이 있는 경우와 같은 예에서 편리하게 사용할 수 있다.

2.3 구속이 있는 경우의 Lagrange 운동방정식

실제로 요구되는 것보다 더 많은 좌표를 써서 구속체계의 미분방정식을 표현하는 것이 편리한 때가 있다. 이 미분방정식은 다음과 같은 조건방정식의 형식으로 된 구속방정식과 양립하여야 한다.

$$g(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \quad (2.31)$$


이 식을 미분함으로써, 다음과 같이 구속 조건의 미분형을 얻는다.

$$\sum_k \frac{\partial g}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \quad (2.32)$$

또한 다음과 같은 형의 미분관계가 성립하는 구속 식도 있다.

$$\sum_n h_k \delta q_k = 0 \quad (2.33)$$

그러나 이들 방정식 $f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$ 형의 조건방정식을 얻기 위해서 적분이 불가능하다. 이와 같은 구속을 비홀로노믹이라고 한다. 반면에 식(2.31)의 구속 식을 홀로노믹이라고 한다.

그러나 홀로노믹이든 비홀로노믹이든 어떤 경우에도 미정계수법을 써서

Lagrange 형태의 미분운동방정식을 얻을 수가 있다. 이것을 적용할 때 Hamilton의 변분원리를 쓰는 것이 편리하다. 구속 미분방정식(2.33)에 승수(multiplier) λ 를 곱하고 변분적분의 피적분함수에 합하여 다음으로 표현될 수 있다.

$$\int_{t_2}^{t_1} \sum_n \left(-\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \lambda h_k \delta q_k \right) dt = 0 \quad (2.34)$$

구속 때문에 n 개의 양 δq_k 중에서 $n-1$ 개만을 독립으로 볼 수 있다. 식(2.34)에서 괄호 안의 한 개의 항, 가령 첫째 항이 없어지도록 λ 의 값을 택하면 나머지 $n-1$ 개는 독립으로 볼 수 있다. 결과적으로 괄호 안의 나머지 항도 0이 되어야 한다. 즉,

$$-\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \lambda h_k = 0, (k=1, 2, \dots, n) \quad (2.35)$$

$$\sum_N h_k \dot{q}_k = 0 \quad (2.36)$$

식(2.36)은 구속의 미분 방정식 (2.33)을 δt 로 나누어서 얻어진다. 그러므로 모두 $n+1$ 개의 미분방정식이 있다. 따라서 $n+1$ 개의 양 $q_1, q_2, \dots, q_n, \lambda$ 를 구할 수 있다.

이와 같은 방법은 단 하나의 구속방정식 보다 여러 개의 구속 조건을 갖는 경우로 확장시킬 수 있고, 더 많은 미정계수를 대등되는 h 에 곱해서 Lagrange방정식에 합하면 된다. 위에 주어진 바와 같은 운동방정식은 운동하는 구속이 있을 때에도 적용된다는 것을 알 수 있다.

이상에서 보는 바와 같이 구속 조건이 주어질 경우에 운동방정식은 Lagrange 승수에 의해 수치 해석에 의할 경우로 요약된다.

Ⅲ. 일반화된 역행렬법

1. 구속 조건을 고려한 정적 평형

여러 부재들로 이루어진 구조체는 이들 부재들의 자유도에 의해 운동을 묘사한다. 이 운동방정식은 일반적으로 라그랑지 역학이나 뉴우튼 역학에 의해 다음과 같은 형태로 유도된다. n 개의 변위 $q=[q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$ 로 그 운동이 묘사되는 시스템의 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = F(t) \quad (3.1)$$

여기서, 질량 행렬 M 은 $n \times n$ 대칭행렬을, C 와 K 는 각각 감쇠 및 강성 행렬을 나타내며, 외력 벡터 F 는 $n \times 1$ 열벡터이다.

만약 이 구조물의 각 부재가 강체라고 가정한다면 동적 거동을 하는 동안 이들 모든 부재의 길이에 변화가 없으며, 이를 제약 조건으로 볼 수 있다. 이 제약 조건은 다음과 같은 형태로 정의된다.

$$\phi_i(q, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad m < n \quad (3.2)$$

이 제약 조건들은 부재들의 거동을 묘사하는 총 자유도의 수 보다 작으며 이 조건들은 비선형 관계에 있다. 많은 제어 이론들에 의하면 비선형 시스템을 선형화하여 그 계산을 단순화시킨다. 식(3.2)의 조건을 만족하는 변위들의 수는 방정식의 수 보다 많으므로 그 조건을 만족하는 해는 무한대이며, 비선형 관계일 경우에는 그 접근법이 매우 복잡하다.

일반화된 역행렬법은 Gauss 원리를 근거로 구속되지 않은 시스템의 가

속도 성분과 구속 조건으로부터 산정된 가속도 사이의 차를 최소화 하는 값을 구속된 시스템의 가속도로 정의하였다. 식(3.2)의 조건을 가속도 성분으로 표현하기 위하여 시간에 관해 각각 두 번 미분을 취하면 다음의 식을 얻는다.

$$\ddot{\phi}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \phi_i}{\partial t} = 0 \quad (3.3a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_l \dot{q}_j + \\ &\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.3b)$$

$i=1, 2, \dots, m$

Udwadia와 Kalaba가 제안한 일반화된 역행렬법은 가속도 성분인 식(3.3b)만을 사용하여 구속된 시스템의 운동방정식을 2차 미분방정식으로 제안하고 있다. 그러나 이 미분방정식을 수치 적분한 결과들은 식(3.2)의 조건을 만족하지 않는 경향이 있다. 식(3.3b)외에 식(3.2)와 (3.3a)를 충족시키기 위하여 다음과 같이 이들 식들을 조합할 수 있다.

$$\ddot{\phi}_i + \dot{\phi}_i + \phi_i = 0 \quad (3.4)$$

식(3.4)를 사용할 경우에 제약 조건을 불만족하는 오차들은 줄어들게 된다. 따라서, 보다 정밀한 해를 얻기 위하여 일반화된 역행렬법을 수정하여, 식(4)를 다음과 같은 형태의 행렬로 표현하였다.

$$A(q, \dot{q}, t) \ddot{q} = b(q, \dot{q}, t) \quad (3.5)$$

여기서, 계수 행렬 A는 $m \times n$ 의 장방형 행렬이 되며, 식(3.5)를 가속도 벡터에 관한 풀이는 실제의 가속도가 되나 그 해는 무한하게 존재한다. 따

라서, Gauss의 원리를 사용하여 식(3.1)의 구속되지 않은 시스템의 가속도와 식(3.5)의 구속 조건식을 조합하여 제약 조건이 주어졌을 경우에 그 구조물의 운동방정식은 다음으로 유도된다.

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{a}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{M}^{-1/2}(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1/2})^+(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{a}) \quad (3.6)$$

여기서, ‘+’는 일반화된 역행렬¹⁾(generalized inverse)을 나타내며, 식(3.1)에서 $\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\mathbf{q})$ 으로 구속 되지 않은 시스템의 가속도를 나타낸다. 이 식에서 $\mathbf{M}^{1/2}(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1/2})^+$ 는 자유 진동시에 가속도 성분과 제약 조건을 만족하는 가속도와 차에 대한 가중 행렬로 이는 Gauss의 원리로부터 얻을 수 있다.

정적 평형 상태는 포텐셜 에너지의 변화량이 최소인 점으로 안정 상태를 일컫는다. 따라서, 포텐셜 에너지와 관련이 있는 변위 벡터와 강성 행렬의 곱 형태에서 산정된다. 그러므로 $\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{q})$ 를 식(3.6)에 사용하고, 동적 해석법에 의해 정적 평형 상태를 결정할 수 있다. 즉, 정적인 상태의 방정식은 다음으로 표현된다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{q}) \\ & + \mathbf{M}^{-1/2}(\mathbf{A}_1\mathbf{M}^{-1/2})^+(\mathbf{b}_1 - \mathbf{A}_1\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{q})) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

여기서, 행렬 \mathbf{A}_1 과 벡터 \mathbf{b}_1 는 변위들만에 의해 이루어진다. 식(3.7)은 정적인 상태에서 식(3.1)의 운동방정식과 식(3.2)의 제약 조건을 동시에 설명하는 정적 평형인 상태에 해당된다. 식(7)의 정적 평형 상태는 다음과 같은 방정식으로도 표현된다.

1) $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$, $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$,
 $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$

$$K^*q = F^* \quad (3.8)$$

여기서,

$$K^* = [I - M^{1/2}(A_1M^{-1/2})^+ A_1M^{-1}]K$$

$$F^* = [I - M^{1/2}(A_1M^{-1/2})^+ A_1M^{-1}]F + M^{1/2}(A_1M^{-1/2})^+ b_1.$$

식(3.8)의 풀이는 정적 평형 상태에 해당된다. 다음에서는 단진자에 대해 위의 방법을 사용하여 정적 평형 상태를 결정한다.

2. 단진자의 정적 평형 상태

단진자의 정적 평형 상태는 진자가 지면과 수직을 이루는 것으로 진자가 연직 상하의 두 위치에서 정적 평형 상태를 이룬다. 이를 위에 제시한 방법에 의해 그 타당성을 검증한다.

Fig. 1에서와 같은 단진자는 뉴우튼 역학에 의해 다음과 같은 운동방정식으로 쓸 수 있다.

$$ma_x = m\ddot{x} = 0 \quad (3.9a)$$

$$ma_y = m\ddot{y} = -mg \quad (3.9b)$$

여기서, a_x 와 a_y 는 각각 x 와 y 방향으로의 가속도 성분을 나타내며, g 는 중력 가속도를 나타낸다. 이 진자는 길이가 l 이며 질량을 무시할 수 있는 봉에 의해 연결되었다 가정하면 진자의 운동은 다음과 같은 조건에 의해 그 운동이 제약될 것이다.

$$x^2 + y^2 = l^2 \quad (3.10)$$

식(3.10)을 적절하게 미분을 하여 식(3.4)의 형태로 다음과 같이 유도할

수 있다.

$$2x\ddot{x} + 2y\ddot{y} = -x^2 - y^2 + l^2 - 2x\dot{x} - 2y\dot{y} - 2\dot{x}^2 - 2\dot{y}^2 \quad (3.11)$$

식(3.9)와 (3.11)에 각 계수들을 식(3.8)에 사용하여 다음과 같은 정적 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$A_1 = [x \ y], \quad b_1 = \frac{1}{2}(-x^2 - y^2 + l^2), \quad K^* = 0,$$

$$F^* = \frac{-1}{2l^2} \begin{bmatrix} x(-2yg - x^2 - y^2 + l^2) \\ 2x^2g - x^2y - y^3 + yl^2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$F^* = 0$ 으로부터 정적 평형 상태는 $x=0$ 과 $y=\pm l$ 로 계산된다.

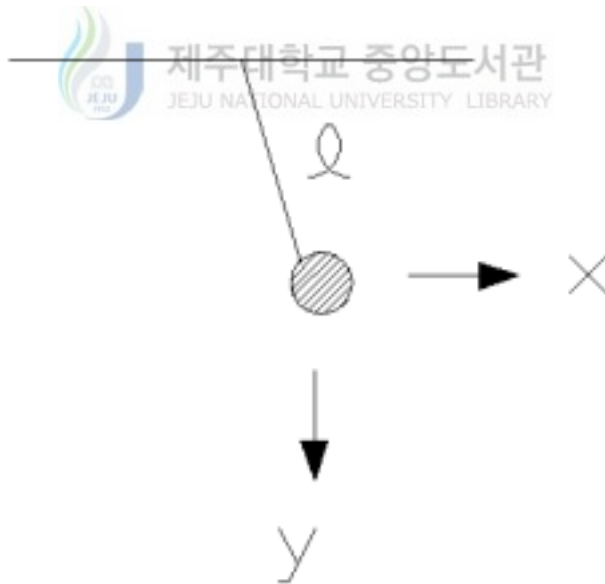


Fig. 1 A simple pendulum

Fig. 1과 같은 단진자의 운동은 일반적으로 θ 에 의해 그 운동을 묘사한다. 여기서, $x=l\sin\theta$ 와 $y=l\cos\theta$ 이므로, 정적 평형 상태는 $\theta=0, 180^\circ$ 에 해당하며, 좌표 θ 는 자유도의 수를 줄일 수 있으며, 제약 조건을 동시에 만족할 수 있는 일반화된 좌표(generalized coordinates)로 볼 수 있다.

이 예로부터 식(3.8)을 사용하여 정적 평형 상태를 명확히 결정할 수 있음을 보였다. 이와 같이 정적 평형 상태는 구속 조건을 동시에 만족하여야 한다. 다음에서는 bar 구조물의 정적 평형 상태로 확대 적용한다.

3. 3개의 봉으로 연결된 구조물

Fig. 2에서와 같이 3개의 봉이 연결된 구조물의 정적 평형 상태를 고려하자. 그림의 구조체의 좌측으로부터 1, 2, 3번으로 명명하고, 각 부재의 질량을 m_1, m_2, m_3 라 하고, 길이를 l_1, l_2, l_3 , 질량에 관한 단면 2차 모멘트 I_1, I_2, I_3 , 그리고 각 부재의 회전각을 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 라 하면 이 시스템의 운동방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_1 & B_1C_{12} & B_2C_{31} \\ B_1C_{12} & A_2 & B_3C_{23} \\ B_2C_{31} & B_3C_{23} & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{\theta}_3 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & B_1S_{12} & -B_2S_{31} \\ -B_1S_{12} & 0 & B_3S_{23} \\ B_2S_{31} & -B_3S_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1^2 \\ \bar{\theta}_2^2 \\ \bar{\theta}_3^2 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} C_1+C_2 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & C_2+C_3 & -C_3 \\ 0 & -C_3 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1\cos\theta_1 \\ G_2\cos\theta_2 \\ G_3\cos\theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3.13)

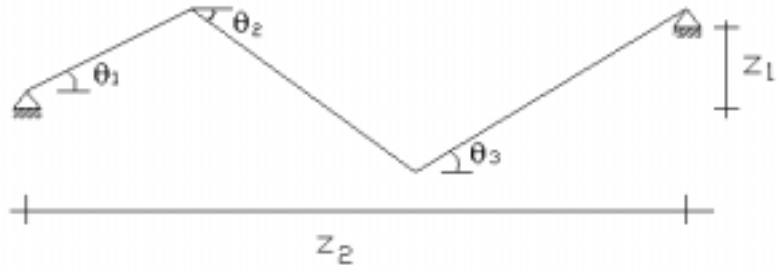


Fig. 2 A three-joint link bar structure

여기서

$$A_1 = I_1 + \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 \right) l_1^2,$$

$$A_2 = I_2 + \left(\frac{m_2}{4} + m_3 \right) l_2^2,$$

$$A_3 = I_3 + \frac{m_3}{4} l_3^2,$$

$$B_1 = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) l_1 l_2,$$

$$B_2 = \frac{m_3}{2} l_1 l_3,$$

$$B_3 = \frac{m_3}{2} l_2 l_3,$$

$$G_1 = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 \right) g l_1,$$

$$G_2 = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 \right) g l_2,$$

$$G_3 = \frac{m_3}{2} g l_3$$

$$C_{ij} = \cos(\theta_i - \theta_j),$$

$$S_{ij} = \sin(\theta_i - \theta_j).$$



이들 운동방정식으로부터 비선형 관계에 있음을 볼 수 있으나, 선형화를 취하지 않고 운동을 묘사할 수 있다.

이 구조물은 양단부에 단순지지되어 있으므로 부재의 전체 길이와 수직 높이가 제약될 것이다. 그러므로 이들은 다음과 같은 수식으로 정의된다.

$$l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 = z_2 \quad (3.14a)$$

$$l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 = z_1 \quad (3.14b)$$

만약 지점의 수직 높이에 차이가 없다면 $z_1=0$ 이 된다.

식(3.14)는 Fig. 2에서와 같은 구조물의 운동을 제약하는 조건으로 이를 시간에 관해 두 번 미분을 취하여 다음과 같은 $A\ddot{\theta} = b$ 형태의 방정식을 얻는다.

$$A = \begin{bmatrix} l_1 \sin \theta_1 & l_2 \sin \theta_2 & l_3 \sin \theta_3 \\ l_1 \cos \theta_1 & l_2 \cos \theta_2 & l_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (3.15a)$$

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} + b_{12} + b_{13} \\ b_{21} + b_{22} + b_{23} \end{bmatrix} \quad (3.15b)$$

$$b_{11} = -l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 - l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 - l_3 \cos \theta_3 \ddot{\theta}_3$$

$$b_{12} = l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3$$

$$b_{13} = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 - z_2$$

$$b_{21} = l_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \sin \theta_2 \ddot{\theta}_2 + l_3 \sin \theta_3 \ddot{\theta}_3$$

$$b_{22} = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3$$

$$b_{23} = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 - z_1$$

$A_1 = A$, $b_1 = [b_{13} \ b_{23}]^T$ 및 $K^* = 0$ 을 식(3.8)에 사용하고 다음의 정의와 $F^* = 0$ 에 의해 정적 평형 상태를 결정할 수 있다.

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_{12} & B_2 C_{31} \\ B_1 C_{12} & A_2 & B_3 C_{23} \\ B_2 C_{31} & B_3 C_{23} & A_3 \end{bmatrix},$$

$$F = - \begin{bmatrix} G_1 \cos \theta_1 \\ G_2 \cos \theta_2 \\ G_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix}$$

(3.16)

정적 평형은 $F^*=0$ 를 만족하는 값으로 이 식은 비선형의 연립방정식으로, 그 해를 결정하기 위해서는 적절한 수치 해석 기법을 요한다. 그리하여 본 연구에서는 비선형 해석 프로그램인 MATLAB의 optimization 프로그램을 사용하여 얻었다. 수치 해를 얻기 위하여 Fig. 2의 구조물에 대한 물리적인 특성을 다음으로 가정하였다.

$$g=9.8, \quad m_1 = m_3 = 2, \quad m_2 = 3$$



$$l_1 = 1000, \quad l_2 = 2000, \quad l_3 = 500$$

(3.17)

또한 초기 불안정한 상태에서 각 봉의 각과 이에 따른 수평 길이와 수직 높이는 다음과 같이 가정하였다.

$$\theta_1 = -\pi/3, \quad \theta_2 = \pi/3, \quad \theta_3 = \pi/3$$

$$l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 = 1750$$

$$l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 = 0 \tag{3.18}$$

식(3.17)과 (3.18)의 성질을 사용하고, 제약 조건으로 $z_1=0, z_2=1750$ 상태를 만족하는 정적 평형 상태를 결정하였다. 그 해석의 결과 정적 평형 상태는 다음으로 계산되었다.

$$\theta_1 = -1.6933, \quad \theta_2 = 0.251, \quad \theta_3 = 1.7014 \tag{3.19}$$

여기에서 보는 바와 같이 구속된 운동방정식으로부터 그 관계가 비선형일 지라도 정적 평형 상태에 관한 명확한 수식을 얻었으며, 이 수식을 비선형 방정식의 풀이에 의해 그 해를 얻을 수 있었다.

양단의 높이에 차이가 날 경우에도 매우 유용하게 적용될 수 있으며, 예를 들어 $z_1 = -500$, $z_2 = 1750$ 로 제약 조건을 부여한 경우에도 동일한 해석법에 의해 다음과 같은 정적 평형 상태를 얻을 수 있다.

$$\theta_1 = -1.7383, \theta_2 = -0.0035, \theta_3 = 1.7381 \quad (3.20)$$

4. 5개의 봉으로 연결된 구조체의 정적 평형

앞선 적용 예를 근거로 그림 3과 같은 5개의 봉으로 연결된 구조물의 정적 평형 상태를 결정하였다. 이 구조물의 운동방정식 또한 비선형 관계로 제약 조건은 다음으로 정의된다.

$$\begin{aligned} l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 + l_4 \cos \theta_4 + l_5 \cos \theta_5 &= z_2 \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 + l_4 \sin \theta_4 + l_5 \sin \theta_5 &= z_1 \end{aligned} \quad (3.21)$$

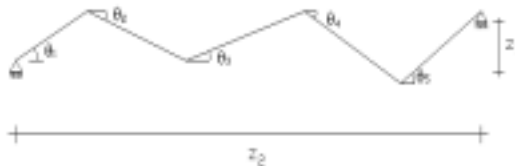


Fig. 3 A five-joint link bar structure

유사하게 이 구조물에 대한 정적 평형 방정식은 다음과 같은 식들에 의해 식(3.8)의 형태로 결정된다.

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_{12} & B_2 C_{31} & B_4 C_{41} & B_5 C_{51} \\ B_1 C_{12} & A_2 & B_3 C_{23} & B_6 C_{24} & B_7 C_{25} \\ B_2 C_{31} & B_3 C_{23} & A_3 & B_8 C_{34} & B_9 C_{35} \\ B_4 C_{41} & B_6 C_{24} & B_8 C_{34} & A_4 & B_{10} C_{45} \\ B_5 C_{51} & B_7 C_{25} & B_9 C_{35} & B_{10} C_{45} & A_5 \end{bmatrix}$$

$$F = - \begin{bmatrix} G_1 \cos \theta_1 \\ G_2 \cos \theta_2 \\ G_3 \cos \theta_3 \\ G_4 \cos \theta_4 \\ G_5 \cos \theta_5 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} l_1 \sin \theta_1 & l_2 \sin \theta_2 & l_3 \sin \theta_3 & l_4 \sin \theta_4 & l_5 \sin \theta_5 \\ l_1 \cos \theta_1 & l_2 \cos \theta_2 & l_3 \cos \theta_3 & l_4 \cos \theta_4 & l_5 \cos \theta_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 + l_4 \cos \theta_4 + l_5 \cos \theta_5 - z_2 \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 + l_4 \sin \theta_4 + l_5 \sin \theta_5 - z_1 \end{bmatrix}$$

(3.22)

$$A_1 = I_1 + \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 \right) l_1^2,$$

$$A_2 = I_2 + \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_5 \right) l_2^2,$$

$$A_3 = I_3 + \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_5 \right) l_3^2,$$

$$A_4 = I_4 + \left(\frac{m_4}{4} + m_5 \right) l_4^2$$

$$A_5 = I_5 + \frac{m_5}{4} l_5^2$$

$$B_1 = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_5 \right) l_1 l_2,$$

$$B_2 = \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_5 \right) l_1 l_3,$$

$$B_3 = \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_5 \right) l_2 l_3,$$

$$B_4 = \left(\frac{m_4}{2} + m_5 \right) l_1 l_4,$$

$$B_5 = \frac{m_5}{2} l_1 l_5,$$

$$B_6 = \left(\frac{m_4}{2} + m_5 \right) l_2 l_4,$$

$$B_7 = \frac{m_5}{2} l_2 l_5,$$

$$B_8 = \left(\frac{m_4}{2} + m_5 \right) l_3 l_4,$$

$$B_9 = \frac{m_5}{2} l_3 l_5,$$

$$B_{10} = \frac{m_5}{2} l_4 l_5,$$

$$G_1 = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 \right) g l_1,$$

$$G_2 = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_5 \right) g l_2,$$

$$G_3 = \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_5 \right) g l_3,$$

$$G_4 = \left(\frac{m_4}{2} + m_5 \right) g l_4,$$

$$G_5 = \left(\frac{m_5}{2} \right) g l_5,$$

$$C_{ij} = \cos(\theta_i - \theta_j),$$

$$S_{ij} = \sin(\theta_i - \theta_j).$$



수치 결과를 얻기 위하여 다음과 같은 물리적인 특성과 초기 조건을 사용하였다.

$$g = 9.8, \quad m_1 = m_3 = 2, \quad m_2 = 3, \quad m_4 = 1.5, \quad m_5 = 1.2$$

$$l_1 = 500, \quad l_2 = 200, \quad l_3 = 500, \quad l_4 = 350, \quad l_5 = 130$$

$$\theta_1 = -\pi/3, \quad \theta_2 = \pi/10, \quad \theta_3 = \pi/5, \quad \theta_4 = -\pi/4, \quad \theta_5 = \pi/3$$

$$l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 + l_4 \cos \theta_4 + l_5 \cos \theta_5 = 1157$$

$$l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 + l_4 \sin \theta_4 + l_5 \sin \theta_5 = -212 \quad (3.23)$$

위의 조건들과 제약 조건에서 $z_1 = -212$, $z_2 = 1157$ 에 해당하는 정적 평형 상태는 다음과 같이 계산되었다.

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -1.011, \theta_2 = -0.735, \theta_3 = -0.210, \\ \theta_4 &= 0.2646, \theta_5 = 0.5724 \end{aligned} \quad (3.24)$$

또한 $z_1 = 0$, $z_2 = 1400$ 과 같이 양단의 지점의 수직 고저차가 없는 것을 제외하고 모든 것이 동일할 경우에 다음과 같은 해석 결과를 얻었다.

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -0.7864, \theta_2 = -0.3538, \theta_3 = 0.2574, \\ \theta_4 &= 0.6148, \theta_5 = 0.8087 \end{aligned} \quad (3.25)$$

이들 예제들에서 보는 바와 같이 질량을 무시하지 않은 구조체에 제약 조건이 주어질 경우에 제약 조건을 만족하는 정적 평형의 상태를 명확히 결정할 수 있음을 보였다. 이 방법은 명백한 평형방정식의 결정과 이 연립방정식의 풀이를 위한 수치 해석 기법을 요한다. 이는 제약 조건이 주어졌을 경우에 기존의 수치 해석법과 접근 방법이 다르다. 특히 그 관계 조건식이 비선형일 경우에도 용이하게 접근할 수 있음을 보였다.

IV. 결 론

정적 평형은 포텐셜 에너지의 변화량이 최소로 되는 상태이다. 정적 평형 상태는 동적 해석에 의해 결정이 가능하다. 만약 이러한 동적 해석에 제약 조건이 주어질 경우에 이들 조건을 충족하는 새로운 정적 평형 상태가 존재한다. 그러나 새로운 정적 평형 상태는 무한의 경우가 있으며, 따라서 포텐셜 에너지의 변화량이 최소로 되는 점을 찾기 위하여 대부분이 수치 해석 기법에 의한다.

그러나 본 연구에서는 제약 조건이 주어질 경우에 그 구속된 운동방정식을 명확히 묘사할 수 있는 일반화된 역행렬법을 수정하여 정적 평형 상태를 명확히 결정할 수 있는 식을 제안하였다. 이 방법에 의해 정적 평형 상태를 나타내는 지배 방정식을 유도할 수 있으며, 단지 그 해를 얻기 위해 수치 해석 기법을 사용하였다. 이를 적용한 bar 구조물의 정적 평형 상태를 결정하였으며, 그 과정에 의해 제시된 방법의 타당성 및 용이함을 보였다.

참 고 문 헌

1. 김 진우, 김 재열, 권 택진, “일반역행렬을 이용한 불안정 Link 구조물의 형태 해석에 관한 연구,” 대한건축학회 학술발표논문집, 제14권 제1집, 2001. 4, pp.183-186.
2. 김 재열, 김 진우, 권택진, “일반역행렬을 이용한 불안정 트러스 구조물의 최적 안정화 이행 과정에 관한 연구,” 대한건축학회 논문집, 제17권 9호, 2001. 9, pp133-142.
3. Udwadia, F. E and Kalaba, R. E., “A New Perspective on Constrained Motion,” Peoceedings of the Royal Society of London, 1992, pp. 407-410.
4. 은 희창, 정 현수, “구속된 시스템 운동방정식의 수치 해석에 관한 연구,” 한국소음진동공학회지, 제7권 5호, 1997. 10, pp.773 -780
5. H.C. Eun, K.H. Yang, and H.S. Chung, “Dynamic optimization algorithm of constrained motion,” KSME International Journal, Vol. 16, No. 8, 2002, pp. 1072~1078.
6. F.E. Udwadia, R.E. Kalaba, H.C. Eun, “Equations of Motion for constrained Mechanical Systems and the Extended D’Alembert’s Principle,” Quarterly of applied mathematics, Vol. LV, No. 2, 1997, pp. 321 ~ 331.
7. Pellegrino S, Calladine CR., “Matrix analysis of statically and kinematically undeterminate frameworks,” Int J Solids Struct, 1986, pp.409-428
8. Pellegrino S., “Analysis of prestressed mechanisms,” Int J Solids Struct., 1990, pp. 1329-1350
9. Vassart N, Laport R, Motro R., “Determination of mechanisms order

for kinematically and statically undetermined systems," *Int J Solids Struct*; accepted for publication.

10. Argyris JH, Sharps DW., "Large deflection analysis of prestressed networks," *J Struct*; accepted for publication.

11. Motro R., " Formes et forces dans les systemes constructifs; cas des systems reticules spatiaux autocontraints," These d'Etat, Universite' des Sciences et Techniques du Languedoc. Montpellier, 1983.

12. Bathe KJ, Ramm E, "Wilson E. Finite element formulations for large deformation dynamic analysis," *Int J Num Methods Eng.*, 1975, pp. 353-386.

13. Bathe KJ, Cimento AP., "Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equations," *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1980, pp. 59-85.

14. Bathe KJ, "Finite element procedures," Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1986.

15. Leu LJ, Yang YB., "Effects of rigid body and stretching on nonlineat analysis of trusses," *J Struct Eng*, 1990, pp. 2582-2597.

16. Yang YB, Chiou HT., "Rigid body motion test for nonlinear analysis with beam elements," *J Eng Mech ASCE* 1987, pp.1404-1419.

17. Blanford GE., "Large deformation analysis of inelastic space truss structures," *J Struct Eng*, 1996, pp.407-415.