碩士學位論文

수학사를 활용한 교수학습 자료 개발

-수학 7-가를 중심으로-

濟州大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

秦　　貞　　淑

2007年　8月

수학사를 활용한 교수학습 자료 개발

-수학 7-가를 중심으로-

指導教授 梁 永 五

秦 貞 淑

이 論文을 敎育學 碩士學位 論文으로 提出함.

2007年 8月 日

秦貞淑의 敎育學 碩士學位 論文을 認准함

審 查 委 員 長 ________________ 印

委 員 ________________ 印

委 員 ________________ 印

濟州大學校 敎育大學院

2007年 8月 日

<초록>

수학사를 활용한 교수학습 자료 개발
-수학 7-가를 중심으로-

진 정 숙

제주대학교 교육대학원 수학교육전공

지도교수 양 영 오

입시 위주의 교육영향으로 많은 학생들은 수학을 어렵고 지루한 과목으로 그리고 단순히 문제를 푸는 과목으로 생각하는 경향이 있다. 또한 많은 학생들은 수학에 대한 흥미를 잃고 수학을 실생활과 무관한 과목으로 여기고 있다. 따라서 학생들이 수학에 대한 흥미와 내적 학습동기를 유발시키고 수학의 가치와 응용을 인식시킬 수 있는 방법이 강구되어야 한다고 본다. 그리고 많은 학자들은 수학사를 교수-학습 자료로 이용해야 한다고 제안하고 있다.

이에 본 논문은 수학사를 활용한 학습자료 개발을 통해 학생들의 수학에 대한 흥미와 학습동기 유발에 도움을 주고자 하는데 그 목적이 있다. 이 본문에서는 제7차 교육과정의 수학 7-가 교과서 3종을 수학사와 관련하여 단원별로 내용을 비교 분석하고, 교과서 각 단원별로 학생들이 자연스럽게 의문을 가질 수 있는 질문을 작성하였다. 아울러 수학 7-가의 교수-학습 자료로 수학자의 전기와 일화, 이론의 역사적 배경, 그리고 제기한 질문에 대한 이론적 근거와 답을 제시하였다. 이 자료는 학생들이나 수학교사들에게 교수-학습 자료로 활용가치가 높다고 본다.

* 본 논문은 2007학년도 8월 제주대학교 교육대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임

목　　차

표 목 차

그 림 목 차

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

많은 학생들이 수학을 공부 하면서 한번쯤은 다음과 같은 의문을 가질 것이다. 왜 이렇게 어려운 수학을 배우는지 모르겠다? 수학이 우리 생활과 무슨 관계가 있는가? 한 예로 누가 어떠한 이유로 집합을 만들었으며 숫자가 없었던 옛날에는 어떻게 셈을 하였는가? 아라비아 숫자는 누가 만들었을까? … 등등.

이처럼 많은 궁금증을 갖지만, 속 시원한 대답을 못 찾고 그냥 막연히 시간과 공부에 쫓겨 지나갔을 것이다. 그런데, 현행 교과서는 이러한 궁금증을 풀어 주고, 나아가 흥미와 관심을 유발시켜 줄 수 있는 수학사의 내용이 빈약한 실정이며, 다른 수학사 자료를 참고 하자면 너무 양이 방대하며 이해하기 어려운 내용을 포함하고 있다.

주영희(1997)[1]는 수학사를 활용한 수업은 학생들의 흥미와 호기심을 자극 할 수 있다. 즉 수학사를 앎으로써 완벽한 수학체계 앞에서 사고의 자유를 잃은 학생에게 수학의 시행착오적 발달과정을 보여 줌으로써 정서적인 친밀감을 높일 수 있고 수학의 필요성을 이해하고 학습동기와 의욕을 가질 수 있다. 또한 학습에서 흥미를 유발하여 학습효과를 높이고, 수학의 발견과정과 수학적 개념과 원리를 이해하고 자신감을 형성한다고 주장하였으며, 많은 연구 논문들이 수학사를 교수 -학습 자료로 이용해야 한다는 결론을 내리고 있다.

따라서 수학사에 관한 많은 문헌과 정보를 바탕으로 학습자의 흥미를 유발 시키고 궁금증을 풀어줄 수 있고 아울러 그들의 수준에 맞는 이해하기 쉬운 수학사를 활용한 자료 개발이 필요 하다고 생각된다.

이에 본 논문은 중학교 7-가 수학교과를 중심으로 각 단원별로 학생들이 가질 수 있는 의문점과 역사적 배경, 수학자의 전기와 일화, 시행착오 등 수학사가 가미된 학습자료 개발을 통해 학생들의 흥미와 호기심 유발에 도움을 주고자 하는데 그 목적이 있다.

---

1) 주영희, 수학교육에 있어 수학사 활용에 대한 교사들의 인식, 강원대 교육 대학원 석사학위 논문, 1997

2. 연구 내용

본 연구의 목적을 달성하기 위한 연구 내용은 다음과 같다.

1) 현행 7차 교육과정의 수학 교과서 7-가의 단원 분석과 각 단원별 수학사 관련 내용을 비교 분석하였다.

2) 집합과 자연수, 정수와 유리수, 문자와 식, 함수 등 단원별 이론의 역사적 출현 배경과 수학자의 전기, 꿈과 일화, 시행착오 등을 중심으로 연구하였다.

3) 단원별 내용을 중심으로 학생들이 가질 수 있는 궁금증, 실생활과 수학의 관련성을 찾아 학생들이 이해하기 쉽게 설명하였다.

3. 연구의 제한점

본 논문은 다음과 같은 제한점을 갖는다.

1) 본 논문은 현행 제7차 교육과정에서 제시하고 있는 국민 공통 기본 교육과정 중 7-가 수학 교과서를 중심으로 각 단원별 수학사 관련 연구로 제한한다.

2) 본 논문의 자료 개발은 중학교 학생이 이해할 수 있는 범위 내에서만 선택한다.

3) 본 논문은 수학교육에 있어 흥미와 관심을 유발 시키고, 여러 가지 궁금증을 해소 하는데 도움을 주고자 하는 의도를 전제로 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학사 지도의 필요성

우리나라 수학 교육의 변천사를 살펴보면 수학 교육은 학생들에게 수학의 직관을 키우고 논리적 추론을 배양하기 위한 교육과정으로 특징되어 진다. 즉 오늘날 수학교육은 단순 기능인 양성 보다는 자기 주도적 지적 가치를 창조하도록 자율적이고 창의적인 인간 육성에 역점을 두고 수학의 기본 지식과 기능의 습득, 교수-학습방법의 변화와 문제점 해결 전략에 의한 '수학적 힘'을 신장하도록 적절한 지도와 적응능력의 평가 등 새로운 수학교육계의 방향으로 전환하기 위한 대책 마련에 부심하고 있다. 그렇지만 우리나라의 수학교육에는 많은 문제점들이 대두되고 있다.

김동화 교수는 우리나라 수학 교육의 문제점을 다음과 같이 제시하고 있다.[2)] 지금껏 수학교과서 내용 지도는 실생활에 연관 지어 쉽게 접근하기 보다는 주로 알고리즘 위주로 내용을 제시하는 경향이 많으며, 학생들은 수학의 내적 동기 유발을 갖지 못하고 수학을 입시의 수단으로 학습해 왔으므로 대체로 수학내용의 수준이 높으며, 어렵다고 인식하고 있다. 그리하여 많은 학생들이 수학에 대한 확신이 서지 않고 불안요인이 가중되어 흥미와 자신감을 잃고 있으며, 심지어 학습을 포기하는 경향이 농후하여 학생들이 수학학습에 곤란을 겪고 있다. 그리고

연세대 자연과학부 민경찬 교수는 한국 수학 교육의 문제점[3)]에 대해 '즐거움을 외면한 정답 요구 형 교육'이라고 지적했다. 그는 오늘도 많은 학생들이 '도대체 이 많은 수식과 이론 따위가 살아가는 데 무슨 쓸모가 있다는 거야'라는 의문을 안은 채 수학 공부에 매달리고 있으며, 또 대학에 가기 위해 억지로 매달리는 공부 중 대표과목이 수학일 것이다. 따라서 학생들은 어려서부터 수학은 문제 푸는 과목, 어렵고 재미없는 것 등으로 인식해 온 것이 사실이며, 게다가 그동안 수학교육이 대개 수학 문제를 잘 푸는 학생들을 중심으로 이루어졌으며, 이 범주에

---

2) 김동화, 현 중등학교 및 대학 수학교육의 문제점과 개선방안, 교육이론과 실천, 제12권 제1호, 2002, p.221-232

3) 경향신문 2004-10-19

속하지 못한 대부분의 학생들에게는 관심이 부족했고 이로 인해 이들이 수학에 대해 부정적인 인식을 갖게 되었다고 본다고 밝혔다.

따라서 수학에 대한 학생들의 거부감을 해소시켜 그들의 관심과 흥미를 자연스럽게 유발 시키고 유발된 동기를 학습에 지속시켜 수학교육의 진정한 목표를 달성시킬 수 있는 방법이 강구되어야 하는데, 수학사와 관련된 수학교육에 대한 연구를 해왔던 대부분의 학자들은 수학사의 이용이 훌륭한 아이디어라는 생각에 긍정적인 반응을 보였으며, 또한 이와 관련된 많은 보고서가 발표되어 왔고 수학교육에 수학사를 활용해야 한다고 강조하고 있다.

백석윤(1990)은 수학사 지도의 필요성을 다음과 같이 말하고 있다.[4] 첫째, 수학 내용에 대한 역사적 의의를 알게 됨으로써 학생들의 수학에 대한 흥미, 적극적인 학습 의욕, 학습 노력을 불러일으킨다.

둘째, 수학적 개념이나 내용의 생성 변천 과정을 통하여 학생들의 잘못된 인식과 개념을 정립시킨다.

셋째, 수학에 대한 무미건조함을 해소시킨다. 즉, 수학 내용을 실생활과 연결시켜 의미를 찾아볼 수 있게 하는 계기를 마련하고 수학 내용이 실생활과 유리된 불필요한 과목이라는 잘못된 편견을 시정할 수 있는 계기를 마련한다.

넷째, 수학 형성의 배경, 수학자나 당시 사회와 관련된 흥미로운 에피소드(episode), 수학적 개념 내용의 발생과 변천 과정에 대한 재미있는 이야기 등으로 학생들의 잘못된 선입관, 편견을 바람직한 방향으로 시정 유도하게 한다. 이를 위하여 수학사가 제공하는 수학자들의 관련 일화는 수학의 인간적인 측면을 인식하게 할 수 있고, 수학의 엄밀성 완벽성에 대한 학생들의 거부감 해소에 도움이 된다.

다섯째, 수학의 발달과정은 자연과정의 발달과정과 밀접하게 연관되어 있으므로 수학은 편협한 과목이 아니라 일반적인 성격이 강하고 적용 범위가 넓은 기초 과학 과목이라는 폭 넓은 이해를 갖게 하는데 도움이 되며, 이러한 이해를 통하여 갖게 되는 수학에 대한 올바른 인식은 학생들의 수학 공부에 대한 올바른 태도를 가져다 줄 것으로 기대된다.

여섯째, 일선 교사의 적절한 방법을 통한 수학사의 응용은 학생들의 주의집중

4) 백석윤, 수학사와 수학교육과정, 제5회 교육학세미나집, 1990

과 변화를 가져오게 한다.

일곱째, 수학적 구조나 개념의 형성 발전 과정의 고찰은 학생의 수학적 구조나 개념의 형성에 도움이 되고, 수학 교육과정의 연구에도 중요한 참고 자료가 된다.

허민(1997)은 수학사 도입의 필요성을 다음과 같이 설명하고 있다.[5]

첫째, 수학의 유용성을 강조 할 수 있다. 수학의 외적, 내적 유용성(수학은 너무 깊은 곳에 잠복해 있기 때문에 수학을 보여 줄 수 없다.)을 알려 줄 수 있다.

둘째, 수학은 발전하는 학문임을 인식시킬 수 있다. 수학이 계속해서 변해왔고 현재도 발전하고 있으며 앞으로도 더욱 발전할 것이라는 생각을 심어 줄 수 있다.

셋째, 수학의 '인간화'를 도모할 수 있다. 수학자의 전기와 일화는 수학내용을 훨씬 더 흥미롭게 만들며 수학이 '인간적인' 과목임을 보여 줄 수 있다.

넷째, 현대 수학을 좀 더 친밀하게 이해시킬 수 있다. 수학의 많은 발전 단계는 유추에 의해 자극받고 효율적인 알고리즘에 의해 촉진되며 종종 불완전하고 때때로 잘못된 추측에 의해 지시된 귀납적 도약의 결과이다.

다섯째, 수학의 문화적 가치를 인식시킬 수 있다. 헤이스는 '수학을 문화적, 사회적, 철학적, 역사적 배경 없이 가르치려는 시도는 대단한 실수이고 전략적인 오류라고 나는 믿는다.'라고 말했다. 즉 수학은 누적되는 학문이다.

여섯째, 수학학습의 어려움을 이해할 수 있다. 수학은 인류역사에 비하면 최신 지식이고, 수천 년 동안 인류의 시행착오와 끊임없는 노력의 결과로 현재의 수학이 존재하며 이런 수학을 짧은 시간에 많이 배워야하는 학생에게는 어려움이 있다.

일곱째, 교수방법을 개선시킬 수 있다. 역사를 통해 수학의 발달은 특별한 예로부터 일반화로 향한다. 따라서 증명전달 방법 역시 먼저 예를 제시하고 증명을 직관적으로 파악하게 한 다음 엄밀한 방법을 제시하면 학생들로 하여금 증명문제의 본질을 깨닫게 하는데 큰 도움을 줄 수 있다.

여덟째, 수학에 대한 흥미를 유발시킬 수 있다. 수업 중 간단한 역사적 사실과 일화를 소개함으로써 학생들의 흥미를 유발 할 수 있다.

---

5) 허민, 수학사와 수학교육, 수학교육 프로시딩 제 6집, 1997

위의 학자들의 주장을 분석한 결과 수학사 도입의 필요성을 다음과 같이 요약할 수 있다.

① 역사적 사실과 의의를 알게 됨으로써 학생들의 흥미를 불러일으킨다.

② 수학 내용을 실생활과 연결시켜 의미를 찾아볼 수 있게 하는 계기를 마련함으로써 수학의 유용성을 강조할 수 있다.

③ 수학의 엄밀성과 완벽성에 대한 학생들의 거부감을 해소하여 수학은 발전하는 학문임을 인식시킬 수 있다.

이처럼 수학사를 수학교육에 도입하면 수학이란 학문도 오랜 세월을 거쳐 인간들의 재능에 의해서 많은 시행착오를 거쳐 이루어졌고, 수학이란 딱딱한 과목도 인간이 생활해 나가면서 필요에 의해서 창조, 수정, 다듬어져 현재와 같은 완성된 모습으로 갖추게 되었으며, 또한 앞으로도 계속 변천될 가능성을 갖고 있음을 알게 함으로써 학생들에게 수학에 대한 거부감을 어느 정도 해소해 주는 역할을 할 것이다. 아울러 학생들의 과심과 흥미유발이 가능한 자극제로서 도움이 될 것이다.

2. 수학사 활용방법

수학사를 수학교육에 도입해야 할 필요성과 그로인한 효과를 아무리 강조해도 실제로 학교현장에서 이러한 수학사를 활용하지 않는다면 아무 소용이 없다. 그러므로 우선적으로 기존의 수학 내용을 학생들이 보다 재미있고 충실하게 배울 수 있게 해주고 수학에 대한 흥미를 되찾을 수 있도록 하는 자료의 개발과 지도 방법이 필요하다.

가. 교재 개발 측면

김종명은 수학사를 활용한 교재 개발의 다양한 측면을 다음과 같이 분류하여 제시 하였다.[6]

첫째, 수학사를 전체적인 역사에서 시대의 분류와 흐름에 따라 접근 할 수 있

6) 김종명, 수학사를 도입한 수학교육, 수학사랑 15호, 1999

다.

둘째, 수학사를 인물 중심으로 접근할 수 있다. 수학자 개인들이 왜 수학을 연구하고 어떤 과정에서 수학을 창조하고, 정리하였는지, 수학자의 업적과 삶은 어떠하였는지 알아볼 수 있다. 예를 들면, 그리스의 수학자들, 아라비아 수학자들, 데카르트, 뉴턴, 라이프니츠, 가우스, 힐베르트, 칸토어 그리고 한국 수학자들 등이 있다.

셋째, 수학적 개념의 역사 순서대로 생각할 수 있다. 예를 들면, 수의 역사, 삼각함수의 역사, 기하학의 역사, 함수의 역사 등이 있다.

넷째, 수학사를 수학교육 방법적인 측면으로 접근할 수 있다. 예를 들면, 무리수의 발견과정, 십진법의 사용과정, 파이(π)의 발견과정, 수학의 기초와 계산, 피타고라스정리의 발견과 활용 등 많은 것들이 있다.

다섯째, 수학사의 내용을 학생 스스로 찾고 발표한다. 참고서나 인터넷 등으로 찾을 수 있는 역사적인 사실, 이야기의 내용과 자료 그리고 역사적 과정 등을 조사하여 발표하게 함으로써 학생들의 탐구정신과 창의성을 자극하고 성취감을 갖게 할 수 있다. 예를 들면, 역사적인 수학자들, 현대수학의 여러 분야들, 여러 가지 문제들과 풀이 과정 등을 찾아 발표하고 토론할 수 있다.

나. 지도 방법 측면

백석윤(1990)은 수학사 지도 방법을 다음과 같이 제시했다.[7]

첫째, 단원 내용과 관련된 수학 용어나 수학자의 생애와 업적, 일화, 시대적 배경 등 역사적 연계성이나 입체감을 학생들이 느끼게 함으로써 흥미를 유발시킨다.

둘째, 수학사에 등장했던 문제들을 학생들에게 제시하여 직접 풀어보게 하거나, 교사가 과거의 풀이 방법을 비교 설명함으로써 극적인 경험을 하게 된다.

셋째, 과거 수학자들이 미래 사회에서 필요로 하는 수학적 내용에 대한 예견이나 바로 그 예견이 현재 사회의 요구에 부합되고 있는 경우를 수학사에서 예를 들어 설명한다.

7) 백석윤, 전게서, 1990

넷째, 그 밖의 다양한 수학사적 참고 자료들은 단순히 학생들의 주의 환기나, 관심 집중을 위한 방법으로도 학습 현장에 이용될 수 있다.

다섯째, 이미 학습했거나 학습하게 될 수학 내용과 관련된 수학적 주제들의 목록을 제시하여 소위, 수학사 연대표를 학생들 스스로 만들어 보게 한다.

여섯째, 한 가지 문제에 대하여 수학사에 나오는 다양한 해결 방법을 소개하여 비교해 봄으로써 학생들의 문제 해결 능력의 증진과 함께 대개 수학 문제의 풀이 방법이 한 가지 뿐이라고 생각하는 선입관을 해소시키고 서로 다른 시대, 다른 장소에서 활동했던 사람들을 다양하고 창조적인 수학적 사고를 경험할 수 있는 기회를 제공한다.

위에서 살펴 본 수학사 활용 방법 중 수학사를 활용한 학습지도를 하기 위해서 많은 시간을 할애하는 것보다 수학이라는 학문을 이해하고 흥미를 유발할 수 있도록 다음과 같은 수학사 자료를 소개하는 것이 효과적이라 생각한다.

첫째, 수업과 직접 관련된 수학사적 자료를 소개한다. 예를 들면, 수 체계의 강의 중 중국, 바빌로니아, 로마의 수 체계를 소개하고, 이를 통해 인도-아라비아 수 체계의 장점과 유용성을 강조할 수 있다.

둘째, 수학자의 일화와 실례 등을 들어준다. 예를 들면, 피라미드의 높이를 구한 탈레스의 방법, 한붓그리기와 관련된 오일러의 통찰력 있는 해법 등을 소개할 수 있다. 그리고 불완전한 역사적 지적과 실패의 사례를 제시할 수 있다.

셋째, 과거에 관심이 있었던 문제를 제시하는 것이 효과적이라고 생각한다. 예를 들면, 약수와 배수를 가르칠 때는 자연수 n의 약수 중 n자신을 제외한 약수의 합이 n자신과 같게 될 때 n을 완전수라고 한다. 6은 약수 1, 2, 3, 6 가운데 6 자신을 제외한 1, 2, 3의 합이 6으로 자신과 같게 되어 완전수이다. 이는 기독교에서 6이란 숫자에 커다란 의미를 두는 것과 관계가 있는데 창세기에서의 천지창조가 6일 만에 완성되었기 때문이라는 이야기를 해준다. 소수를 가르칠 때 아직도 해결되지 않고 있는 문제인 “$p, p+2$ 꼴로 표시되는 소수의 쌍(쌍둥이 소수)은 무한히 많은가?”, “2보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 표현될 수 있는가?” 이런 문제는 수학이 완성된 과목이고 발전 가능성이 없다는 나쁜 인상 없애주는 한 가지 방법을 제공해 줄 수 있을 것이다.

Ⅲ. 수학 교과서 7-가 분석

1. 교과서 7-가의 구성

제7차 교육과정을 도입한 중학교 수학 교과서 7-가를 중심으로 13종의 교과서 중 3종의 교과서를 선택하여 교과서 7-가의 단원 구성을 조사하였다.

<표 Ⅲ-1> 교과서별 대단원 구성

대단원 \ 출판사	A	B	C
Ⅰ. 집합과 자연수	1. 집합 2. 자연수의 성질 3. 십진법과 이진법	1. 집합 2. 자연수의 성질 3. 십진법과 이진법	1. 집합 2. 자연수의 성질 3. 십진법과 이진법
Ⅱ. 정수와 유리수	1. 정수와 유리수 2. 유리수의 계산	1. 정수와 유리수 2. 정수와 유리수의 계산	1. 양수와 음수 2. 덧셈과 뺄셈 3. 곱셈과 나눗셈
Ⅲ. 문자와 식	1. 문자와 식 2. 등식 3. 일차방정식	1. 문자와 식 2. 일차방정식 3. 일차방정식의 활용	1. 문자의 사용과 식의 계산 2. 등식과 방정식 3. 일차방정식과 그 활용
Ⅳ. 함수	1. 함수 2. 함수의 그래프	1. 함수 2. 함수의 그래프 3. 함수의 활용	1. 함수 2. 함수의 그래프

A : 수학7-가, 강해고 외9명 저, (주)중앙교육진흥연구소, 2006년

B : 수학7-가, 강옥기, 정순영, 이환철 저, (주)두산, 2006년

C : 수학7-가, 이영하, 허민, 박영훈, 여태경 저, (주)교문사: , 2006년

선택한 중학교 수학 7-가 교과서를 Ⅰ.집합과 자연수, Ⅱ.정수와 유리수, Ⅲ.문자와 식, Ⅳ.함수의 네 개의 대단원으로 구분하여 분석해 본 결과 각 소단원의 제목에 있어서는 미미한 차이가 있었지만, 내용에 있어 별 차이가 없었다.

2. 단원별 수학사 관련 내용 비교분석

제7차 교육과정에 따른 중학교 수학 7-가 교과서는 집합과 자연수, 정수와 유리

수, 문자와 식, 함수의 네 개의 대단원으로 구성되어 있는데 집합과 자연수 단원은 소단원별로 그 이외 단원은 대단원별로 제시되어 있는 수학사적 내용을 토대로 비교 분석하였다. 지금부터 교과서 A, B, C는 앞 절에서 제시한 교과서를 말한다.

(1) 집합과 자연수

가. 집합

다음은 소단원인 집합과 관련된 역사적 출현 배경, 수학자의 전기 및 일화, 기호 및 문자 사용의 유래 등 수학사에 관한 내용을 분석한 표이다.

<표 Ⅲ-2> 집합 단원과 관련된 교과서별 수학사 내용 비교 분석

구분 \ 출판사	A	B	C
집합 이론의 역사적 출현배경	×	×	×
수학자의 전기 및 일화	×	○ (칸토어:집합의 정의)	×
기호 및 문자사용의 유래	○ (벤+벤 다이어그램: 벤다이어 그램은 1880년 영국의 수학자 벤에 의해 소개)	○ (벤 다이어그램)	×
수학사 관련문제	×	×	×
수학사 관련 내용 및 읽을거리	×	×	×

소단원 집합을 중심으로 분석하여 본 결과 다음과 같다. 교과서 A, B에서는 수학자 벤과 벤 다이어그램에 대한 내용이 제시되어 있다. 교과서 A에서는 벤의 사진과 함께 자세히 소개 되어진 반면, 교과서 B는 벤 다이어그램에서 벤(Venn)은 수학자의 이름이고, 다이어그램은(diagram)은 도형, 도표를 뜻하는 영어단어라는 간단한 설명뿐이다. 그리고 교과서 B에만 집합의 이론을 처음으로 도입한 사람은 독일의 수학자 칸토어(Georg Cantor, 1845~1918)로 집합을 ‘내용 규정이 명

확한 사물의 모임'이라고 정의하였다는 간단한 설명과 함께 그의 사진을 함께 소개하고 있다. 교과서 C에는 집합 단원에 수학사적 내용이 전혀 소개되어져 있지 않았다.

그러나 어느 교과서에도 칸토어가 왜 집합을 만들었는지(집합의 출현배경)에 대한 언급이 없었다. 따라서 이 단원에서는 집합의 출현배경과 함께 집합기호는 누가 만들었는지, 집합과 모임의 차이점에 대한 내용 등을 소개하였다.

나. 자연수의 성질

다음은 소단원인 자연수의 성질과 관련된 역사적 출현 배경, 수학자의 전기 및 일화, 기호 및 문자사용의 유래 등 수학사에 관한 내용을 분석한 표이다.

<표 Ⅲ-3> 자연수의 성질 단원과 관련된 교과서별 수학사 내용 비교 분석

구분 \ 출판사	A	B	C
이론의 역사적 출현배경	×	×	○ (수의 기원:옛날 사람이 수를 세는 방법-짝짓기)
수학자의 전기 및 일화	×	×	×
기호 및 문자사용의 유래	○ (에라토스테네스 체)	○ (에라토스테네스 체)	○ (에라토스테네스 체)
수학사 관련문제	×	×	×
수학사 관련 내용 및 읽을거리	×	○ (①수학의 노벨상 -필즈상)	○ (① 골드바흐의 추측)

소단원 자연수의 성질을 중심으로 분석하여 본 결과 다음과 같다. 교과서 A, B, C 모두 소수를 찾는 방법 중의 하나인 에라토스테네스 체에 대해 '고대 그리스의 수학자 에라토스테네스(Eratosthenes, 275~194 B.C.)가 소수를 구하는 방법으로 고안했다'는 간단한 설명이 들어 있다. 그리고 교과서 C에만 집합과 자연수라는 대단원의 도입 부분에 원시생활을 하는 사람들은 개수를 셀 때 모아 놓은 조개껍데기에 하나씩

대응 시키거나 나무, 뼈, 진흙 판에 칼로 긁은 개수로 나타내기 시작하였다(**1대 1대응의 원리**)는 이야기를 삽화와 함께 실고 있다. 또한 교과서 B에는 수학의 노벨상-필즈상을 교과서 C에는 소수에서의 미해결 문제인 '골드바하의 추측(4이상의 짝수는 모두 두 소수의 합으로 나타낼 수 있는가?)' 을 소개하고 있다.

교과서 C를 제외하고는 학생들의 관심을 끌만한 내용이 부족하다고 보여 지며 따라서 이 단원에서는 학생들이 가질 수 있는 궁금증을 중심으로 즉, 우리가 사용하고 있는 아라비아 숫자는 누가 언제 만들었는지, 가장 큰 소수가 존재하는지, 그리고 소수가 실생활에서 어디에 사용되는지 등에 대해 소개 하였다.

다. 십진법과 이진법

다음은 소단원인 십진법과 이진법과 관련된 역사적 출현 배경, 수학자의 전기 및 일화, 기호 및 문자사용의 유래 등 수학사에 관한 내용을 분석한 표이다.

<표 Ⅲ-4> 십진법과 이진법 단원과 관련된 교과서별 수학사 내용 비교 분석

구분 \ 출판사	A	B	C
이론의 역사적 출현배경	×	×	×
수학자의 전기 및 일화	×	×	×
기호 및 문자사용의 유래	×	×	×
수학사 관련문제	×	×	○ (고대 이집트와 로마의 수 나타내기)
수학사 관련내용 및 읽을거리	○ ① 여러나라의기수법 ② 이진법과 바코드	×	○ ①이진법과 컴퓨터, 이진법과 사진 ②고대이집트의 곱셈 ③상품번호와 바코드

소단원 십진법과 이진법을 중심으로 분석하여 본 결과 다음과 같다. 교과서 A는 단원 마지막 부분에 한 페이지를 하려해 이집트, 마야, 로마, 중국 등 여러 나라의 기수법을 간단히 소개하고 있으며, 교과서 C에서는 고대 이집트와 로마의 수 표현을 문제로 제시하고 있다. 그러나 교과서 B에는 수학사 관련 내용이 수록 되어있지 않

왔다. 그밖에 읽을거리로 교과서 A, C 모두 한 페이지를 하려해 교과서 A에서는 ‘이진법과 바코드’를 교과서 C는 ‘상품번호와 바코드’에 대한 내용을 다루고 있다. 그리고 교과서 C에서는 길지는 않지만 ‘이진법과 컴퓨터-컴퓨터에서는 이진법을 사용한다.’, ‘이진법과 사진-우주에서 찍은 사진 전송 시 이진법 사용’에 대한 내용을 언급하고 있으며 마지막 한 페이지씩을 하려해 ‘고대이집트의 곱셈’을 다루고 있다.

모든 교과서에는 십진법과 이진법에 대한 내용만을 다루고 있을 뿐, 다른 진법의 존재 여부에 대한 언급이 없다. 그러므로 이단원에서는 여러 가지 진법의 유래와 그 활용에 대해서 간단히 언급하였으며, 여러 나라 의 기수법에 대해 좀 더 자세히 다루었다.

(2) 정수와 유리수

다음은 정수와 유리수에 관련된 역사적 출현 배경, 수학자의 전기 및 일화, 기호 및 문자사용의 유래 등 수학사에 관한 내용을 분석한 표이다.

<표 Ⅲ-5> 정수와 유리수 단원과 관련된 교과서별 수학사 내용 비교 분석

구분 \ 출판사	A	B	C
이론의 역사적 출현배경	×	×	○ (분수와 음수의 필요성)
수학자의 전기 및 일화	×	×	×
기호 및 문자사용의 유래	○ (기호 +, −, ×, ÷의 유래)	○ (기호 +, −, ×의 유래)	○ (기호 +, −, =, >, <, ×, ÷, ∷, ∼의 유래)
수학사 관련문제	×	×	×
수학사 관련 내용 및 읽을거리	○ (음수의 유래-13세기경 인도에서 사용한 0보다 작은 수는 아라비아를 거쳐 이탈리아의 피보나치에 의해 유럽으로 전해짐)	○ ① 우리 조상이 사용한 수의 표현 방법-산목 ② 음수의 유래-자산과 부채를 양수와 음수로 설명 ③ 숫자 0의 의미-‘없다’는 의미와 ‘반대의 성질을 나누는 기준’)	○ (①층수계산-건물에서 0층은 없다)

정수와 유리수 단원을 중심으로 분석하여 본 결과 다음과 같다. 교과서 A는 기호 +, −, ×, ÷의 유래를 교과서 B에서는 기호 +, −, ×의 유래를 간단히 설명하고 있지만, 교과서 C에서는 한 페이지에 기호 +, −, =, >, <, ×, ÷, ∷, ∼의 유래를 비교적 자세히 설명하고 있다. 도입 부분에 교과서 A에서는 '음수의 유래-역사적으로 0보다 작은 수가 정당한 수로 인정받는 데에는 1500년 이상의 긴 시간이 걸렸으며, 13세기경 인도에서 사용한 0보다 작은 수는 아라비아를 거쳐 이탈리아의 피보나치에 의해 유럽으로 전해졌다.'는 간단히 이야기 해주고 있다.

교과서 B에서는 '우리조상이 사용한 수의 표현 방법-산목(음수는 마지막 자리의 숫자에 빗금을 그어 나타냄)'을, 교과서 C에서는 분수와 음수의 필요성과 고대 이집트의 분수에 대해 언급하고 있다. 그밖에 교과서 B에서는 '음수의 유래-자산과 부채를 양수와 음수로 설명'과 '숫자 0의 쓰임-「없다」라는 의미와「반대의 성질을 나누는 기준」이 된다.'을 간단히 설명해 주고 있다. 그리고 교과서 C에서는 간단히 '층수계산-건물에서 0층은 없다'의 내용이 수록되어 있다.

이 단원에서는 0의 탄생배경과 음수의 역사, 그리고 분수와 소수가 어떻게 사용되었는지 등에 대해 자세한 언급이 필요하다고 생각된다. 따라서 이러한 부분을 중심으로 소개하였다.

(3) 문자와 식

다음은 문자와 식에 관련된 역사적 출현 배경, 수학자의 전기 및 일화, 기호 및 문자사용의 유래 등 수학사에 관한 내용을 분석한 표이다.

<표 Ⅲ-6> 문자와 식 단원과 관련된 교과서별 수학사 내용 비교 분석

구분 \ 출판사	A	B	C
이론의 역사적 출현배경	○ (이집트 파피루스에 적혀 있는 '아하-알지 못하는 값' 문제)	○ (디오판토스에 의한 문자의 도입과 방정식이라는 용어의 유래)	×
수학자의 전기 및 일화	○ (디오판토스의 묘비)	○ (디오판토스의 묘비)	○ (디오판토스의 묘비)
기호 및 문자 사용의 유래	○ (미지수를 x로 사용한 이유)	○ (미지수를 x로 사용한 이유)	×
수학사 관련문제	×	×	×
수학사 관련 내용 및 읽을거리	×	○ (①사랑의 방정식 :Love=2□+2△+2∨+2〈)	○ (우리 나라의 방정식-구장산술)

문자와 식 단원을 중심으로 분석하여 본 결과 다음과 같다. 교과서 A, B, C 모두 '디오판토스의 묘비' 내용이 담겨있다. 그리고 도입 부분에 교과서 A는 이집트 파피루스에 적혀 있는 「아하 문제-'아하'와 '아하'의 $\frac{1}{7}$의합이 19일 때 그 '아하'를 구하여라.」를 소개하고 있으며, 교과서 B에서는 '디오판토스에 의한 문자의 도입과 방정식이라는 용어의 유래'를 간단히 언급하고 있다.

그밖에 교과서 A, B에만 '미지수를 x로 사용한 이유'에 대해 간단히 언급하고 있으며 교과서 B에서는 마지막 부분에 '사랑의 방정식 : Love=2□+2△+2∨+2〈'를 교과서 C는 '우리나라의 방정식-구장산술에 수록된 문제'를 다루고 있다.

이 단원에서는 문자와 기호의 유래에 대해 자세한 언급이 필요하다고 생각되어 그에 대해 설명하였으며 학생들의 흥미를 끌기 위하여 영국의 철학자이자 수학자였던 러셀이 어느 대학의 강연에서 "1=2 라면 세상의 모든 말이 다 참이다." 라고 주장했을 때, 한 학생이 "그렇다면 당신이 로마교황임을 증명해 주십시오." 라고 질문한 내용을 방정식 문제와 연관시켜 소개하였다. 그 외 수학의 답은 항

상 하나일까?, 일차 방정식의 해법을 다룬 사람은 누구일까? 등을 소개 하였다.

(4) 함수

다음은 함수에 관련된 역사적 출현 배경, 수학자의 전기 및 일화, 기호 및 문자사용의 유래 등 수학사에 관한 내용을 분석한 표이다.

<표 Ⅲ-7> 함수 단원과 관련된 교과서별 수학사 내용 비교 분석

구분 / 출판사	A	B	C
이론의 역사적 출현배경	×	×	×
수학자의 전기 및 일화	×	○ ① 라이프니츠- 함수의 개념을 정의하고 함수(function)라는 용어를 처음사용 ② 데카르트-좌표를 처음 도입	○ (데카르트-좌표를 도입)
기호 및 문자사용의 유래	×	×	×
수학사 관련문제	×	×	×
수학사 관련 내용 및 읽을거리	○ ①실생활 속의 반비례 - 보일의 법칙 ②데카르트와 좌표 이야기	○ ①썩은 계란 꾸러미를 찾아라 ②핸드폰과 PCS폰의 차이점 ③가운데 톱니바퀴의 역할은?	○ (컴퓨터 프로그램을 이용한 함수의 그래프)

함수 단원을 중심으로 분석하여 본 결과 다음과 같다. 좌표를 도입한 데카르트(Rene Descartes, 1596~1650)에 대한 내용은 모든 교과서에 수록되어 있다. 교과서 A에서는 데카르트가 침대에 누워 천장을 바라보고 있는 그림과 함께 교과서 C는 만화로 된 삽화와 함께 재미있게 제시하고 있다.

한편, 교과서 B는 데카르트의 사진과 함께 좌표를 처음 생각해 낸 사람은 데카르트라는 간단한 설명뿐이다. 교과서 A에서는 실생활 속의 반비례-보일의 법칙, 교과서 B는 라이프니츠에 대한 간단한 소개와 함께 '썩은 계란 꾸러미를 찾아라.' 등 다른 많은 읽을거리를 제공하고 있다. 교과서 C는 컴퓨터 프로그램을 이용한 함

수의 그래프를 소개하고 있다.

이 단원에서는 함수의 근원에 대한 설명이 필요하다고 생각되어 그에 대해 언급하였으며, 데카르트에 대해 보다 자세히 다루었다. 그리고 $f(x)$라는 표현은 누가 제일 먼저 썼는지, 학생들의 흥미를 끌기 위해 실생활에서 사용하는 '사다리 타기도 함수이다'라는 내용 등을 소개하였다.

Ⅳ. 수학사를 활용한 학습 자료 개발

수학 7-가 교과서는 집합과 자연수, 정수와 유리수, 문자와 식, 함수 이렇게 네 개의 대단원으로 구성되어 있다. 이에 본 자료개발은 각 단원별로 ① 각 단원마다 누구나 자연스럽게 가질 수 있는 기초적인 질문에 대한 답을 제시, ② 각 단원과 관련된 이론적 개념과 내용 소개, ③ 그 외 수학자의 전기 및 일화 그리고 재미있는 이야기 소개 등을 중심으로 다음 표와 같이 구성하였다.

<표 Ⅳ-1> 각 단원과 관련된 소개할 수학사 내용 목록

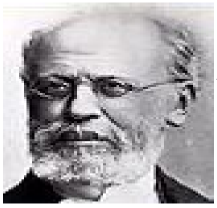
<table>
<tr><th colspan="2">단 원</th><th>내 용</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Ⅰ.
집
합
과
자
연
수</td><td>1) 집합</td><td>(1) 집합의 창시자 칸토어
(2) 집합은 왜 만들었을까?
(3) 수학자 벤에 대하여
(4) 벤 다이어그램은 누가 제일 먼저 사용 했을까?
(5) 집합 기호는 누가 만들었을까?
(6) 집합과 모임은 어떻게 다를까?
(7) 우리 생활에서 집합의 편리함은 어떤 것이 있을까?
(8) 무한집합 이야기(호텔 방 채우기-힐베르트 호텔)
(9) 짝수의 집합, 홀수의 집합, 그리고 자연수의 집합은 서로 짝짓기가 가능한가?
(10) 집합론의 패러독스(러셀의 패러독스)</td></tr>
<tr><td>2)자연수의 성질</td><td>(1) 인간은 어떻게 수를 셀 수 있게 되었나?
(2) 아라비아 숫자는 누가, 언제 만들었을까?
(3) 세상에서 가장 큰 수는?
(4) 가장 큰 소수는 무엇일까?
(5) 소수는 어디에 사용할까?
(6) 왜 공약수에서는 제일 큰 것을 말하고 공배수에서는 제일 작은 것을 말하는가?
(7) 친구수와 완전수
(8) 소수에 관한 두 가지 미해결 문제</td></tr>
<tr><td>3) 십진법과 이진법</td><td>(1) 옛날 여러 나라는 어떤 숫자를 사용 했을까?
(2) 여러 가지 진법(進法)의 유래와 그의 활용
(3) 태극기 속의 이진법
(4) 제주 정낭과 이진법</td></tr>
</table>

단원	내 용
Ⅱ. 정수와 유리수	(1) 0은 어떻게 탄생하게 되었을까? (2) 음수의 역사 (3) 재미있는 0이야기 (4) 수학기호 +, −, ×, ÷, = 는 언제 누가 만든 것일까? (5) 분수는 어떻게 사용하게 되었을까? (6) 소수는 누가 무엇 때문에 발명 했을까? (7) 단위 분수 이야기(노인의 유언)
Ⅲ. 문자와 식	(1) 문자와 기호는 어떻게 만들어 졌을까? (2) 아주 오랜 옛날에는 방정식을 어떻게 풀었을까? (3) 대수학의 아버지 ‘디오판토스’ (4) x는 누가 처음 사용 하였을까? (5) “1=2 라면 세상의 모든 말이 다 참이다. - 러셀” (6) 0으로 나눌 수 있으면 세상은 온통 뒤죽박죽 ! (7) 수학의 답은 항상 하나일까? (8) 일차방정식의 해법을 다룬 사람은 누구일까?
Ⅳ. 함수	(1) 함수의 근원 - 고대 바빌로니아 시대 (2) 개념화 된 함수의 도입 - 라이프니츠, 오일러 (3) “x에 대한 함수 $f(x)$”이 표현은 누가 제일 먼저 썼을까? (4) 좌표는 누가 만들었을까? (5) $f(x)=x^2+ax$, $g(a)=x^2+ax$ 는 같은 함수일까? (6) 같은 함수는 몇 개나 있을까? (7) ‘사다리 타기’도 함수이다 !
참고	<수학자의 묘비에는 어떤 내용이 적혀 있을까?> (1) 디오판토스 (2) 아르키메데스 (3) 야곱베르누이 (4) 가우스 (5) 뉴턴 <수학의 노벨상 ‘필즈상’과 ‘아벨상’>

1. 집합과자연수

1) 집합

(1) 집합론의 창시자 칸토어



<그림 Ⅳ-1> 칸토어

독일의 수학자 칸토어(Georg Cantor, 1845~1918)는 1845년 러시아 상트페테르부르크 태생으로 집합론의 창시자다. 그는 베를린 대학에서 정수론을 연구하여 학위를 받았고, 그 후 무한급수에 관한 이론에 접하면서 무한에 관심을 가지게 되었다. 29세의 젊은 나이에 그는 무한 집합에 관한 가히 혁명적이라 할 수 있는 논문을 발표하였다.

칸토어가 발표한 무한집합론은 오늘날에는 모든 수학의 기초가 되어 있지만, 그것을 발표했을 당시만 해도 그의 논법이 너무나 혁신적이고 대담한 것이어서 수학자들 사이에서 조차 제대로 받아들여지지 않았다. 뿐만 아니라, 당대의 대수학자 크로네커(Kronecker, 1823~1891)는 칸토어가 창시한 무한집합론을 수학에 대한 하나의 도전으로 받아들이고 칸토어와 칸토어의 이론에 대해서 공격을 퍼부었다.

이러한 과정에서 매우 예민한 감성의 소유자인 칸토어는 이를 견뎌 내지 못하고 결국 정신 병원에 여러 번 입원하는 신세가 되고 만다. 만년에 가서야 칸토어는 겨우 자신의 수학적 업적을 인정받고, 크로네커와도 화해를 했다고 한다. 하지만, 이때에는 이미 칸토어의 정신병은 심각한 지경에 있었다. 그는 할레라는 도시에 있는 정신병원에서 1918년 1월6일 쓸쓸히 눈을 감았다. 수학사에 빛나는 큰 업적을 남기고도 생을 정신병원에서 쓸쓸히 마쳤다.

(2) 집합은 왜 만들었을까?

집합론은 독일의 수학자 칸토어(Georg Cantor, 1845~1918)에 의해 창시되어 체계화되었다. 그렇다면 칸토어는 도대체 무엇을 하려고 그 당시에는 생소하기만 한 개념인 집합론을 연구한 걸까?

칸토어가 집합론을 창시하고 연구한 목적은 바로 무한의 성질을 규명하기 위

한, 무한을 보다 조직적으로 다루기 위해 창조된 획기적인 아이디어였다.

쉬운 예로, 집합 {1, 2, 4, 5}의 원소의 개수가 4개라는 것은 누구나 안다. 그럼 자연수 집합의 원소의 개수[8]는 도대체 몇 개일까? 또한 정수의 집합의 원소의 개수는? 실수 집합의 원소의 개수는? 이것들이 모두 무한개라는 것은 설명하지 않아도 쉽게 알 수 있을 것이다. 자연수의 개수와 실수의 개수가 모두 무한개라면 자연수와 실수의 개수는 같은 것일까? [9]만약 실수의 개수가 더 많다면, 실수의 개수를 나타내는 무한개와 자연수의 개수를 나타내는 무한개는 다른 무한개인가?

무한이라는 개념처럼 흥미를 끄는 것도 드물지만, 이것만큼 사람들을 혼란에 빠뜨리고, 또 다루기 힘든 것도 없을 것이다. 일찍이 갈릴레이는 "무한에 대해서는 많다든가 적다든가, 같은 수만큼 있다든가 하는 말을 해서는 안 된다."고 선언하고, 깨끗이 무한의 문제에서 손을 뗐다. 이에 대하여 "아니야, 한번 해 보자." 하는 마음으로 무한의 문제를 파고든 사람이 바로 칸토어였다.

우선 칸토어는 1872년의 논문에서 '집합이란 확정되어 있고 또 서로 명확히 구별되는 것들의 모임'이고, "두 집합 사이에 1대 1의 대응[10]관계가 성립할 때 두 집합의 농도(=원소의 개수)는 같다."고 정의했다. 칸토어는 집합의 원소의 개수가 같다는 것을 각각의 원소를 하나씩 짝지을 수 있다는 것으로 해석한 것이다.

그는 이 같은 개념을 써서 여러 무한집합 사이의 대응관계를 조사해 다음과 같은 사실을 밝혀냈다. 첫째, 자연수 전체와 유리수 전체는 1대 1로 빠짐없이 대응시킬 수 있다. 둘째, 자연수 전체와 실수 전체를 1대 1로 빠짐없이 대응시킬 수는 없다.

이로써 그는 자연수와 유리수의 집합의 원소의 개수가 같고, 자연수와 실수의 집합은 그 개수가 같지 않음을 밝혀냈다. 이는 "전체는 부분보다 크다."라는 그리스 이래 전해져 온 통념과 "무한은 모두 같은 것으로 간주한다."라는 그때가지의

8) 농도, 기수에 해당하는 의미
9) 서로 짝짓기가 가능한가? 라는 의미
10) 수를 몰랐던 선조들은 가축이나 자식의 수만큼 돌멩이를 모은다거나 동물의 뼈나 돌에 금을 그어 그 수를 나타냈는데 이러한 짝짓기의 방법을 오늘날 수학용어로 1대 1대응이라 부른다.

상식을 동시에 깬 일대 사건이었다(자연수는 유리수의 한 부분인데도 그 개수가 같으므로 전체가 부분과 같고, 자연수의 개수나 실수의 개수는 모두 무한대지만 실수 쪽이 개수가 많다.). 그는 이를 바탕으로 무한을 셈하는 무한에 관한 연산과 그 밖의 성질들도 규명해 냈다.

(3) 벤에 대하여

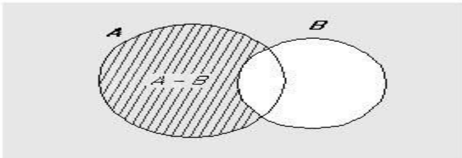
유명한 영국의 수학자 벤(Venn, John, 1834~1923)은 잉글랜드의 훔버사이드에서 태어나 케임브리지에서 생을 마감했다. 열아홉이 되던 해인 1853년 케임브리지의 카이우스 칼리지(Caius College of Cambridge University)에 입학했다. 그는 칼리지에 입학할 당시만 해도 수학과 관련된 특별한 지식도 별로 없었지만, 1857년 졸업과 동시에 특별 연구원이 되었다. 벤은 영국국교의 복음파라는 종교적 배경을 가지고 있었다. 졸업 2년 후인 1859년에는 사제로 임명받고 1년간 부목(副牧)으로 있었다. 1862년에는 다시 케임브리지대학으로 돌아와 윤리학을 강의하게 된다. 이 시기 벤은 논리학과 확률론을 연구하고 가르쳤다.

벤은 불(George Boole, 1815~1864)의 기호논리학을 발전시켰고 그의 책 "가능성의 논리"에서는 확률이론을 연구했다. 이 책은 매우 독창적이고 통계이론 발전에 큰 영향을 끼친 것으로 평가받고 있다. 벤은 기계제작 등에도 뛰어난 기술을 갖고 있는 등 다른 분야의 재주도 출중했다. 한 예로 크리켓 볼을 굴리는 기계를 제작했는데 성능이 뛰어났다고 한다. 1909년 호주의 크리켓 경기 팀이 케임브리지를 방문했을 때 벤의 기계 가 네 번이나 최고수를 이겼다고 한다.

(4) 벤 다이어그램은 누가 만들었을까?

벤 다이어그램은 집합 사이의 관계를 도식화하는 도구로서 영국의 논리학자 벤(Venn, John, 1834~1923)이 고안한 데서 붙여진 이름이다. 그의 유명한 벤 다이어그램은 1880년 논문 '명제와 논리의 도식적·역학적 표현에 관하여'(On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Propositions and Reasonings)에서 처음으로 소개되었다. 형식논리에 있어 도형이나 도표(다이어그램)를 사용한 역사를 찾는 것은 쉬운 일이 아니다. 하지만 틀림없는 사실은 이런 다이어그램이 벤과 관련돼 있다고 대중적으로 받아들여지고 있다는 것이다.

물론 벤 이전에도 다이어그램을 사용한 흔적은 있지만 구체적이고 논리적으로 엮은 것은 벤의 몫이며, 벤 다이어그램은 추상적인 수학을 그림으로 구체화시킬 수 있다는 장점이 있다.

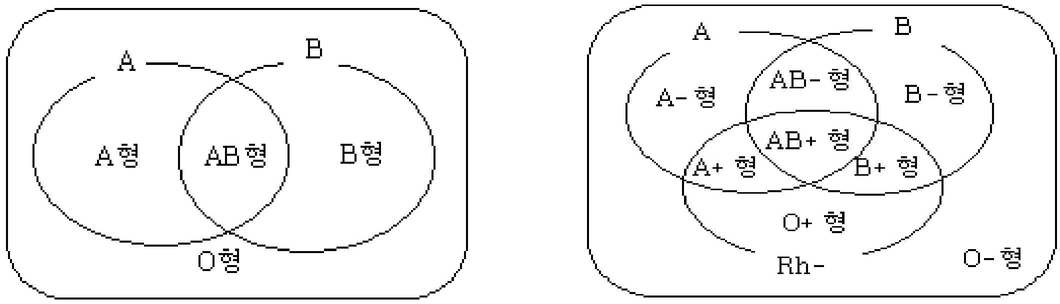


<그림 Ⅳ-2> 집합 $A-B$의 벤 다이어그램

그리고 벤 다이어그램을 이용하여 혈액형을 간단하게 정리하고 분류할 수도 있다. 사람의 혈액형은 응집성의 차이에 따라 A형, B형, O형, 그리고 AB형으로 분류할 수 있다는 ABO식 혈액형 체계 발견의 업적으로 란트슈타이너는 1930년 노벨상을 수상한다.

ABO식 혈액형 다음으로 임상적으로 중요한 혈액형이 Rh식 혈액형이다. Rh 혈액형 군에 속하는 항원들은 49개가 있으며 이중 가장 중요한 것은 D항원이다. 적혈구 표면에 D항원이 있으면 Rh+, 없으면 Rh-로 분류한다. A+형은 A, D항원만을 가지고 있는 혈액형이다. A-형은 A항원만 가지고 있는 혈액형이다. B+형은 B, D항원만을 가지고 있는 혈액형이다. B-형은 B항원만 가지고 있는 혈액형이다. AB+형은 A, B 그리고 D항원만을 가지고 있는 혈액형이다. AB-형이란, A, B항원만 가지고 있는 혈액형이다. 0+형이란, D항원만을 가지고 있는 혈액형이다. 0-형이란, 항원을 가지고 않은 혈액형이다.

벤 다이어그램을 이용하여 혈액형을 간단하게 정리하고 혈액형을 분류하여 보자.



<그림 Ⅳ-3> ABO식과 Rh식 혈액형의 분류

(5) 집합 기호는 누가, 언제 만들었을까?

① 집합기호 { }

독일의 수학자 칸토어(Georg Cantor, 1845~1918)가 1895년에 쓴 원고에서 처음 나타나고 있다. 칸토어는 어떤 대상 m 을 원소로 하는 집합 M을 $\boldsymbol{M}$={ $\boldsymbol{m}$ }로 나타내었다. 여기서 M과 m은 모두 '집합'을 의미하는 독일어 Menge의 첫 자이다.

현재 집합은 흔히 영어 알파벳의 대문자 이탤릭체 $A,\ B,\ C,\cdots$를 사용하여 나타내고, 원소는 영어 알파벳의 소문자 이탤릭체 $a,\ b,\ c,\ \cdots$를 사용하는데 이러한 방식은 역시 칸토어가 1895에 사용한 방식을 그대로 따른 것으로 보인다.

② 원소기호 ∈

1903년 영국의 수학자이자 철학자인 러셀(Russell, Bertrand Arthur Willam, 1872~1970)의 책에 처음 사용되었다. 그러나 이 기호의 원조는 1889년에 이탈리아의 수학자 페아노(Giuseppe Peano, 1858~1932)가 사용한 그리스 알파벳의 하나인 입실론(epsilon) ε 이다. 기호 ∈는 ε을 보기 좋게 변형한 것으로 보이고, 기호 ∋는 ∈를 뒤집은 것이다. 이 ε은 '이다(is)'를 의미하는 그리스어 ἐδτι의 첫 자인 것으로 전해진다.

기호 ∈이 '원소'를 의미하는 영어 'element'의 첫 자 e (또는 E)를 변형하여 만든 것이라는 소문도 있다.

한편 어떤 대상이 어떤 집합의 원소가 아님을 나타내기 위한 기호는 ∉ 또는

$\not\ni$ 이다. 이 기호는 $\in$ 또는 $\ni$ 에, '…이 아니다'를 나타낼 때 흔히 사용되는 ' / '이 결합된 것이다. 그러나 이 기호가 언제부터, 그리고 누가 사용하기 시작했는지는 알려지지 않고 있다.

③ 공집합 기호 $\varnothing$

프랑스의 수학자 베일(Weil, A., 1906~1998)이 노르웨이어 알파벳의 하나인 $\varnothing$를 공집합의 기호로 도입했다. 오늘날 그리스 알파벳의 하나인 ϕ(파이:phi)가 흔히 사용되는 것은, 그 모양이 기호 $\varnothing$와 유사하기 때문인 것으로 보인다. 또는 인쇄 문제 때문에 ϕ를 사용한 것인지도 모른다. 수학에서는 전통적으로 영어 알파벳 다음으로 대체로 그리스 알파벳을 사용해 왔으며, 노르웨이 알파벳을 사용하는 일은 거의 없었다. 그래서 모양이 비슷한 ϕ를 $\varnothing$대신 사용한 것인지도 모른다. 한편, 공집합이 0(영)과 같지 않다는 것을 강조하기 위해 '영(0)이 아니다(/)'를 결합하여 만들었다는 말도 있다.

④ 부분집합 기호$\subset$, $\supset$

부분집합을 나타내는 기호로 1898년 이탈리아의 수학자 페아노가 처음으로 도입하였다. 이것은 포괄하다(contain)의 첫 자에서 비롯되었다.

⑤ 합집합, 교집합 기호 $\cup$, $\cap$

이 기호의 원조는 알려져 있지 않지만 1877년 이탈리아의 수학자 페아노(Giuseppe Peano, 1858~1932)가 사용하였던 논리기호 $\frown$, $\hat{}$ 에서 발전, 변형된 것으로 본다.

⑥ 전체집합, 여집합 기호 U , ^{C}

이 두 문자는 대체적으로 각각 '전체집합' 과 '여집합'을 의미하는 영어 용어와 관련이 있는 것으로 보인다. 즉 U는 '전체집합'을 의미하는 Universal set의 첫 자로 보인다. 그리고 C 는 '여집합'을 의미하는 Complement의 첫 자로 보인다.

(6) 집합과 모임은 어떻게 다를까?

7보다 작은 자연수는? 누구에게 물어도 7보다 작은 자연수는 1, 2, 3, 4, 5, 6이다. 이렇게 조건을 만족하는 대상이 정확하게 결정되는 모임을 집합이라고 한다.

그러나 모든 모임을 집합이라고 부르지는 않는다. 예를 들어 우리 반에서 키가 작은 사람들의 모임을 보자. 키가 작다는 것은 생각하기 나름이다. '키가 작다' 혹은 '키가 크다'는 라는 기준은 개인에 따라 다르므로 기준을 정할 수 없기 때문이다. 마찬가지로 예쁜 사람들의 모임, 뚱뚱한 사람들의 모임을 집합이라고 부르지 않는다.

하지만 우리 반에서 키가 150㎝ 이상인 학생의 모임은 집합이 된다. 반 아이들의 키를 재어서 150㎝ 이상인 아이들을 정확하게 골라낼 수 있기 때문이다.

[문제] 다음 중 집합인 것은 ?

① 작은 홀수의 모임

② 키가 큰 학생들의 모임

③ 노래를 잘하는 가수들의 모임

④ 긴 강들의 모임

⑤ 6의 약수들의 모임

⑥ 우리 반에서 키가 가장 큰 학생의 모임

(풀이) 집합인 것은 ⑤, ⑥이다. ①, ②, ③, ④의 '작다', '크다', '노래를 잘 한다', '길이가 길다'라는 개념은 각자의 주관에 따라 다르게 나타나기 때문에 집합이 될 수 없다.

그러나 ⑤번은 1, 2, 3, 6으로 정확히 구분되어지며, ⑥번 또한 일일이 키를 재어보면 가장 큰 학생을 구별해 낼 수 있기 때문에 집합이 된다. 즉, 개인에 따른 주관이 개입될 수 없는 경우로 정확히 구분된다. ⑥번은 ②번과는 경우가 다르다.

(7) 우리 생활에서 집합의 편리함은 어떤 것이 있을까?

OO중학교 O학년 OO반

OO시 OO구 OO동

이것은 과연 집합일까? 결론적으로 이것은 집합이 된다. 우리 생활에서 자주 사용하는 이러한 표현은 집합이지만 우리는 생활 속에서 그것을 인식하고 있지 못하고 있을 뿐이다.

OO중학교라는 집합 안에 O학년이라는 부분집합이 있고, 그 안에 다시 OO 반이라는 부분집합이 있는 것이다.

이러한 집합적 개념이 없다면 우리는 반 이라는 표현 대신에 그에 속해 있는 이름들을 일일이 나열해야 하는 번거로움을 감수해야 할 것이다.

(8) 무한이야기 (호텔방 채우기-힐베르트 호텔)

▪안내문▪ 아무리 많은 분이 오셔도 좋습니다. 항상 방은 준비되어 있답니다. —은하계 호텔

위 안내문은 우주의 한 귀퉁이에 자리 잡은 '은하계 호텔'의 소개 문구이다. 이 호텔에는 자연수만큼의 객실이 준비되어 있는데, 위 안내문처럼 언제 어느 때라도 숙박이 가능하다는 편리함 때문에 온 우주에 소문이 자자했고, 항상 손님이 들끓었다. 그래서 이 호텔 사장은 단번에 유명인사가 되었고, 방송출연도 잦아지게 되었다. 어느 날 저녁, 토크쇼에 출연한 그는 그 비결에 대하여 다음과 같이 설명했다.

"비결은 따로 없습니다. 모든 객실이 꽉 찼는데, 새로운 여행객 한 쌍이 방문한다면 저는 손님들에게 자기 객실의 번호보다 하나 큰 번호의 객실로 옮겨 달라고 부탁합니다. 호실은 2호실로, 2호실은 3호실로 옮기는 거죠.

이렇게 하면 손님들은 다소 불평을 하지만 잘 따라 주시고, 1호실은 비게 되죠. 그러면 새 여행객은 1호실에 묵으면 됩니다."

"만일 자연수만큼 많은 무한의 사람들이 몰려들면 어떻게 합니까?"

"아, 걱정 없습니다. 객실 손님들에게 자기 객실 번호의 두 배가 되는 객실로 옮겨 달라고 부탁합니다. 그러면 모든 손님들은 짝수 번호 객실로 옮기게 되고, 홀수 번호 객실은 모두 비게 됩니다. 그리고 새로 온 손님들 중에서 첫 번째 사람은 1호실, 두 번째 사람은 3호실, 세 번째 사람은 5호실,.... 이렇게 지정해 주면

어려울 것이 없습니다.”

위 이야기는 무한의 세계에서 일어날 수 있는 기상천외한 일에 대해서 독일의 수학자 힐베르트(David Hilbert, 1862∼1943)가 만들어낸 재미있는 예로, 일명 ‘힐베르트 호텔’이라고도 불린다.

위의 예에서 홀수개의 객실과 자연수만큼의 사람은 하나씩 짝을 지을 수 있기 때문에(일대일대응이 가능하기 때문에) 홀수와 자연수 집합은 같은 개수(농도)의 원소로 이루어져 있다는 것을 알 수 있다.

어떻게 자연수의 일부분을 차지하고 있는 홀수와 자연수 전체의 농도가 같을까? 바로 이것이 유한의 세계에서 받아들일 수 없는 ‘부분과 전체가 같다’는 것이다.

(9) 짝수의 집합, 홀수의 집합, 그리고 자연수의 집합은 서로 짝짓기가 가능한가?

칸토어는 1872년의 논문에서 **′집합이란 확정되어 있고 또 서로 명확히 구별되는 것들의 모임′**이고, **″두 집합 사이에 1대1의 대응관계가 성립할 때 두 집합의 농도(=원소의 개수)는 같다.″**[11]고 정의했다. 이러한 사실을 바탕으로 다음을 수학적으로 설명해보자.

[탐구문제] ① (자연수 집합의 원소의 개수) + 1 = (자연수 집합의 원소의 개수)

② (짝수의 집합의 원소의 개수) = (홀수의 집합의 원소의 개수)

= (자연수의 집합의 원소의 개수)

(풀이) ① A를 자연수 전체의 집합과 어떤 수 n의 합집합, B를 자연수 전체의 집합이라고 두자. 즉 $A=\{n, 1, 2, 3, 4, 5\cdots\cdots\}$ 이고, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\cdots\cdots\}$ 라고 하자.

이제 두 집합 A, B 사이의 다음과 같은 대응 관계를 생각해 보자.

$$\begin{array}{ccccccccc} A: & n & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots\cdots\cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ B: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

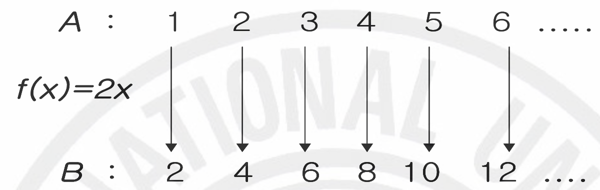
11) 칸토어는 집합의 원소의 개수가 같다는 것을 각각의 원소를 하나씩 짝지을 수 있다는 것으로 해석한 것이다.

집합 A의 원소 n을 집합 B의 원소 1에 그리고, 집합 A의 나머지 원소들은 자신보다 1큰 수에 대응 시킨다. 이 대응관계는 일대일 대응이므로 집합 A와 집합 B의 원소의 개수는 같다.

따라서 (자연수 집합의 원소의 개수)+1=(자연수 집합의 원소의 개수)이 성립한다.

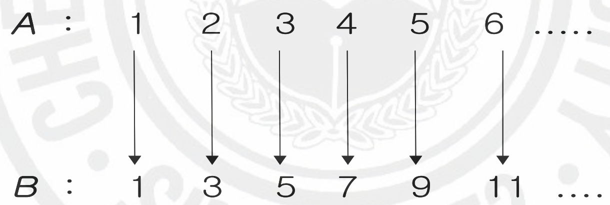
② A를 자연수 전체의 집합, B를 짝수의 집합이라고 하자.

그리고 함수 $f(x)=2x$ 로 표현되는 일대일 대응을 생각해 보자.



그러면 A와 B의 원소의 개수가 같다는 것이 분명해 진다.

또한 C를 홀수의 집합이라고 하고, 함수 $f(x)=2x-1$ 로 표현되는 일대일 대응을 생각할 수 있으므로, A의 원소의 개수와 C의 원소의 개수도 같다.



우리는 직관적으로 A를 자연수 전체의 집합, B를 짝수의 집합이라고 하면 B의 원소의 개수는 A의 원소의 개수의 $\frac{1}{2}$이어야 한다. 그러나 A와 B의 원소의 개수는 같다. B가 홀수의 집합인 경우에도 같은 결론을 얻을 수 있다.

이러한 사실들은 실로 유한(有限)의 관점에서는 이해하기 어려운 것이다. 이렇게 집합 M이 자신의 진부분집합 N과 원소의 개수가 같을 수 있는 집합이 무한집합이다.

(10) 집합론의 패러독스

집합론에는 칸토어 자신도 해결하지 못한 몇 가지 중요한 문제점들이 있다. 그

중에 하나가 러셀의 패러독스로 이름 붙여진 유명한 패러독스이다.

러셀(Russell, Bertrand Arthur Willam, 1872~1970)은 1902년에 다음과 같은 집합 그 자체에만 관계되는 역설을 발견하였다.

러셀의 패러독스

자기 자신을 포함하지 않는 모든 집합의 집합을 Z, 즉 $Z=\{X|X\notin X\}$라 할 때, ″Z는 자기 자신에 속하는 가?, 또는 속하지 않는가?″라는 질문에 대해, 만일 Z가 X에 속하지 않는다면, Z의 정의에 따라 Z는 자기 자신에 속한다. 또한 Z가 Z에 속한다면, Z의 정의에 따라 Z는 자기 자신에 속하지 않는다. 어느 경우에도 모순에 도달한다.

이것은 1919년 러셀 자신에 의하여 자기 스스로 면도하지 않는 사람들만 면도해 준다고 말한 어떤 이발사에 관한 이야기로 알려졌다. 이 이야기의 역설적 특성은 ″이발사는 스스로 면도하는가?″ 라는 물음에 답을 하려고 할 때 나타난다. 만일 그가 스스로 면도를 한다면 자신의 주장과 일치하지 않으며, 그가 스스로 면도하지 않는다면 그는 자신의 주장에 따라서 자신을 면도해 주어야 하는데 그것도 모순이다.

러셀의 패러독스는 순수 논리적인 것이므로, 논리학의 기초를 위태롭게 한다고 하여 한 때 비상한 관심을 모으기도 했다. 하지만 이것을 해결하기 위해 공리론적 집합론이 나왔으며, 새로운 논리학과 수학기초론의 근저를 이루게 되었다.

2) 자연수의 성질

(1) 인간은 어떻게 수를 셀 수 있게 되었나?

넓은 풀밭에서 한가로이 풀을 뜯고 있는 양 떼가 있었습니다. 어스름한 땅거미가 내리자, 한 소년이 나무 막대기로 양 떼를 몰고 왔습니다. 이제 양들을 우리에 가두어야 할 시간이 되었거든요. 소년은 양 떼를 몰아 우리 안으로 들여보내면서 흥얼흥얼 노래를 부르기 시작하였습니다. 노래가 끝날 무렵에는 대부분의 양들이 모두 우리 안으로 들어갔습니다. 그런데 그 모습을 몰래 숨어서 지켜보고

있던 한 남자가 있었습니다. 소년이 양 우리에 빗장을 채우고 집으로 돌아가자, 그 남자는 살금살금 양의 우리로 다가와서는 빗장을 열고 양 몇 마리를 훔쳐 달아나는 것이 아니겠어요? 다음 날이 되었습니다. 소년은 해질 무렵까지 양이 없어졌다는 사실을 모르고 있었습니다. 저녁때 양들을 우리 안으로 들여보내면서 어제 그 노래를 다시 불렀습니다.

"어?"

소년은 이상한 느낌이 들었습니다. 노래가 아직 끝나지도 않았는데, 어느새 양들이 우리 안으로 모두 들어간 것입니다. 소년은 이상한 생각이 들어 양들을 유심히 살펴보았습니다.

"양들이 줄어들었어. 늑대가 물어 간 흔적은 아무 데도 없는데……. 그렇다면 누군가가 훔쳐간 게 분명해!" 하고 소년은 중얼거렸습니다.

그러나 막연한 느낌뿐이었지 정확히 양이 몇 마리 없어졌는지는 알 수가 없었습니다. 왜냐하면, 소년은 수를 셀 줄 몰랐기 때문입니다. 소년은 마을의 우두머리인 촌장을 찾아갔습니다.

"내 양들을 누군가가 훔쳐 간 것 같아요. 범인을 잡아 주세요."

그리고 자신이 양들을 우리에 넣으면서 노래를 부른 일과 양들을 자세히 살펴보았다는 것을 말했습니다. 그러자 촌장은 곤란한 표정을 지으며 양들이 정말 없어졌는지 분명하게 알 수 없다고 하면서 소년의 말을 믿어주지 않았습니다.

소년은 고민을 했습니다. 그러다가 소년의 머리에 퍼뜩 떠오르는 생각이 있었습니다. 소년은 곧장 자기 집으로 달려가서 집 안 어디에선가 동물의 뼈 조각을 하나 찾아내고서는 매우 만족해하였습니다.

뼈 조각으로 대체 무엇을 하려는 걸까요?

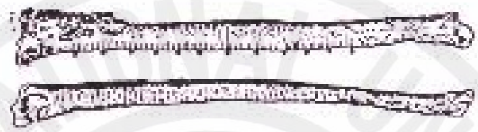
다음 날, 소년은 우리 앞에 웅크리고 앉아 양 한 마리가 우리로 들어갈 때마다 뼈 조각에 눈금을 하나씩 새겨 넣었습니다. 마지막 양이 우리 안으로 들어갔을 때, 33개의 눈금이 새겨졌습니다.

"이렇게 해 놓으면 이 눈금 하나가 양 한 마리인 거야. 이 뼈 조각만 있으면 내 양들이 몇 마리인지 알 수 있지. 내일부터 양들을 한 마리씩 우리로 들여보낼 때마다 손가락으로 눈금이 새겨진 뼈 조각의 자리를 하나씩 짚어 가면 되겠다. 그러면 양들이 그대로 인지 없어졌는지 확실하게 알 수 있잖아!"

이렇게 해서 소년은 양 한 마리와 눈금 한 개의 짝짓기를 통해 33이라는 수를 모르면서도 그 수만큼의 양을 헤아릴 수 있는 방법을 찾아냈답니다.

수를 전혀 몰랐던 원시인들도 이처럼 짝짓기의 방법을 통해 물건을 셀 수 있었다. 이러한 짝짓기를 오늘날의 수학 용어로는 '일대일 대응'이라고 부른다. 셈의 모든 것은 바로 '일대일 대응'의 원리에서 시작되었다고 할 수 있다.

그 외에 돌멩이나 나무 도막을 모은다든지, 흙이나 돌 위에 자국을 낸다든지, 또는 막대에 금을 그어 수를 나타내기도 하였을 것이다. 원시사회에서는 가장 중요한 재산이 가축이었으므로 이 막대가 바로 저금통장의 역할을 한 셈이다.



<그림 Ⅳ-4> 1937년 체코슬로바키아에서 발견된 늑대의 뼈에 새긴 텔리

실제로 1937년 체코슬로바키아에서 발견된 눈금이 새겨진 늑대의 뼈는 구석기 시대의 것으로 보이며, 1962년 콩고 이상고에서도 8000년 전의 것으로 보이는 눈금을 새긴 뼈가 발견되었다.

아마 그 이후에 소리로 세기 위해서 일종의 웅얼거림이 발전했을 것이다. 그러다 수를 뜻하는 말이 생겨나고, 훨씬 이후 표기법으로서 기호, 즉 숫자들이 생겨났을 것이다. 인류 초기의 셈과 수에 대한 이와 같은 설명은 주로 추측에 의한 것이지만 오늘날까지 존재하는 원시인들에 대한 인류학자들의 연구와 세계 여러 곳에서 발굴되고 있는 유적들이 이 추측을 받쳐주고 있다. 이것은 또한 현재에도 어린이들이 셈을 배우기 시작하는 방법이기도 하다.

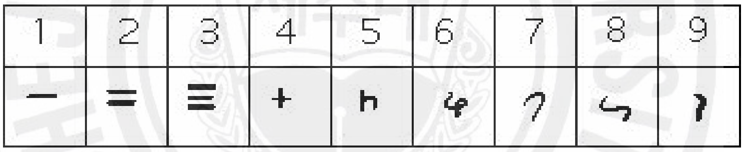
소리에 의해서 셈을 시작한 초기에는 두 마리의 양과 두 명의 사람을 나타낼 때 서로 다른 말이 사용되었었다. 그러면 수 '2'는 무엇을 뜻할까? 수학자이자 철학자인 러셀(B. Russel, 1872~1970)은 "인류가 닭 두 마리의 2와 이틀의 2를 같은 것으로 이해하기 까지는 수천 년이라는 시간이 걸렸다."라고 말하였다. 오래 걸리기는 했지만 과자 2봉지, 외화 자금 2억이라는 수를 추상하는 능력은 인

간만이 지닌 엄청난 능력인 것이다. 다시 말하면, 여러 개의 물건 또는 여러 가지 사실 사이의 공통되는 성질을 알아내고 마치 그러한 성질을 물건 다루듯이 하는 이 능력으로 인하여 인간은 발전하여 온 셈이다.

(2) 아라비아 숫자는 누가 만들었을까?

오늘날 우리가 아라비아 숫자라 부르는 것은 아라비아가 아닌 인도에서 발명된 것이다. 인도는 일찍부터 상업이 발달함에 따라 ‘계산’과 같은 실용 수학이 발달하였다. 이런 까닭으로 그들은 복잡한 셈을 간단히 해낼 수 있는 편리한 수표기법이 절실히 필요했다. 그들은 기원전 2세기에 이미 1에서 9까지의 수에 대응하는 각기 다른 기호를 만들었는데, 그 후 이 9개의 숫자는 기원전 2세기에서 8세기에 이르는 동안 오늘날의 모습으로 변화하게 되었고, 이러한 과정에서 빈자리를 나타내는 0이 고안되어 오늘날과 같은 10개의 숫자가 완성되었다.

<표 Ⅳ-2> 인도 고대 숫자 (서기 100년 경에 쓰인 문자)



그들은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 이 10개의 숫자로 10이 될 때마다 한 자리씩 올라가는 10진 위치적 기수법을 썼다. 따라서 이집트나 고대 로마에서처럼 자리수가 올라갈 때마다 새로운 기호를 만들어야 하는 번거로움을 없앨 수 있었다. 또한 그들은 바빌로니아 인들이 수를 표기할 때 애를 먹었던 빈자리의 처리 문제도 0을 이용해 해결할 수 있었다. 이렇게 함으로써 바빌로니아 인들이 가지고 있던 문제, 그리고 이집트나 고대 로마인들이 가지고 있던 문제가 모두 해결되었다.

인도에서 쓰던 이러한 기수법은 곧 아라비아로 전해지고, 거기서 다시 유럽으로 전해졌다. 이러한 연유로 오늘날 이러한 숫자들을 아라비아 숫자라고 부르게 되었는데, 정확히 말하자면 인도-아라비아 숫자라 불러야 옳고, 오늘날 우리가 쓰고 있는 기수법도 ‘인도-아라비아 식 10진 위치적 기수법’이라 해야 옳다. 유럽

으로 건너간 10진 위치적 기수법은 처음에는 경원시되었지만, 그것이 지닌 장점으로 말미암아 마침내 받아들여져 널리 보급되었고, 오늘날에는 만국 공통어가 되었다.

(3) 세상에서 가장 큰 수는?

과연 수는 얼마나 커질 수 있을까? 초등학교 3학년에서는 이미 네 자리의 수를 읽고 쓰는 방법을 배운다. 그리고 초등학교 4학년이 되면 보다 큰 수 단위의 하나인 조(1000000000000)까지 배우게 된다. 그렇다면 수의 단위는 '조'가 끝일까?

물론 아니다. '조'의 다음 단위는 '경'이 필요하다.

큰 수를 나타내거나 혹은 작은 수를 나타내는 단위 중에는 일상 언어와 관련된 경우가 많은데, 짐작조차 할 수 없는 이상한 일을 뜻하는 '불가사의'는 10을 64번 곱한 10^{64}을 나타내는 수이다. 너무 큰 수이기 때문에 상상조차 하기 힘들다는 측면에서 언어적 의미와 수학적 의미가 연결된다. 또, 10을 52번 곱한 수 10^{52}를 나타내는 수는 '항하사(恒河沙)'라고 한다. 여기서 '항하'는 인도 갠지스강의 한자 표현으로 '항하사'는 이 강의 모래만큼이나 많다는 뜻이다.

요즘 yahoo나 lycos 못지않게 인기 잇는 검색 엔진이 googol이다. googol은 10의 100제곱으로 천문학적인 큰 수를 말한다. googol로 검색하면 엄청난 크기의 수처럼 방대한 정보를 얻을 수 있다는 데서 그러한 이름을 붙였으리라 추측할 수 있다.

이와 반대로 흐릿하고 분명하지 않은 '모호'는 0.0000000000001을 나타내는 단위이다. 영겁과 대비되는 아주 짧은 순간을 나타내는 '찰나'는 '모호'보다 더 작아 소수점 뒤에 0이 17개 붙은 뒤에 1이 나온다. '영겁'은 선녀의 고운 손으로 아주 큰 대리석을 문질러 달아 없어질 때까지 걸리는 시간이고, '찰나'는 아주 가는 명주실에 날카로운 칼을 대어 끊어지는데 걸리는 시간이다. 티끌 하나 없을 만큼 깨끗하다는 '청정(淸淨)'은 '찰나'보다도 작은 수이다.

또한 좀처럼 얻기 힘든 기회를 말하는 '천재일우(千載一遇)'는 더 작은 수로, 소수점 뒤에 0이 46번 붙인 다음에야 1이 나온다.

이와 같은 수의 단위는 불교의 영향을 받은 것으로 무한에 가까운 시간, 혹은 아주 짧은 시간을 담아내기 위해서 <화엄경>의 표현을 따온 것이다.

<표 Ⅳ-3> 큰 수와 작은 수를 나타내는 단위

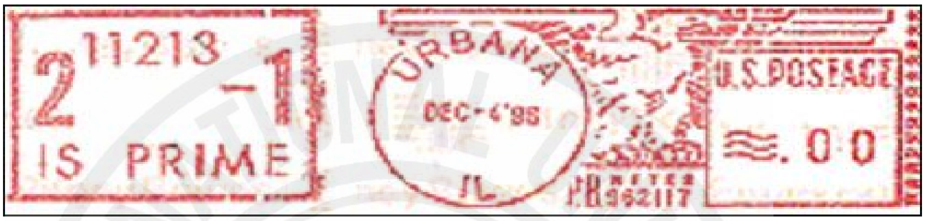
큰 수의 단위		작은 수의 단위	
1	일(一)	1	일(一)
10	십(十)	10^{-1}	분(分)
10^{2}	백(百)	10^{-2}	리(厘)
10^{3}	천(千)	10^{-3}	모(毛)
10^{4}	만(萬)	10^{-4}	사(絲)
10^{8}	억(億)	10^{-5}	홀(忽)
10^{12}	조(兆)	10^{-6}	미(微)
10^{16}	경(京)	10^{-7}	섬(纖)
10^{20}	해(垓)	10^{-8}	사(沙)
10^{24}	자(秭)	10^{-9}	진(塵)
10^{28}	양(穰)	10^{-10}	애(埃)
10^{32}	구(溝)	10^{-11}	묘(渺)
10^{36}	간(澗)	10^{-12}	막(漠)
10^{40}	정(正)	10^{-13}	모호(模糊)
10^{44}	재(載)	10^{-14}	준순(浚巡)
10^{48}	극(極)	10^{-15}	수유(須臾)
10^{52}	항하사(恒河沙)	10^{-16}	순식(瞬息)
10^{56}	아승지(阿僧祇)	10^{-17}	탄지(彈指)
10^{60}	나유타(那由他)	10^{-18}	찰나(刹那)
10^{64}	불가사의(不可思議)	10^{-19}	육덕(六德)
10^{68}	무량대수(無量大數)	10^{-20}	허공(虛空)
		10^{-21}	청정(淸淨)

(4) 가장 큰 소수는 무엇일까 ?

가. 현재까지 발견된 가장 큰 소수

2, 3, 5, 7, …처럼 1과 자신 이외의 약수를 갖지 않는 자연수를 소수라 한다. 소수에 대한 연구는 몇 천 년 전부터 이루어져, 고대 그리스의 수학자 유클리드는 이미 소수가 무한히 많다는 것을 증명했다. 소수는 무한히 많으므로 제일 큰 소수가 존재할 수 없다는 것을 알면서도 사람들은 더욱 큰 소수, 새로운 소수를 찾

으려는 노력을 계속해 왔다. 프랑스의 성직자이자 수학자인 메르센(Mersenne)은 자신의 이름을 딴 ‘메르센 소수’라는 것을 만들었다. 메르센 소수는 2의 거듭제곱에서 1을 뺀 수가 소수인 경우를 말한다. 첫 번째 메르센 소수는 $2^2-1=3$ 이고, 두 번째 메르센 소수는 $2^3-1=7$이다. $2^4-1=15$는 소수가 아니기 때문에 세 번째 메르센 소수는 $2^5-1=31$이 된다. 1963년 6월에 미국 일리노이 대학에서는 23번째 메르센 소수 $2^{11213}-1$를 발견하였는데 이를 기념하기 위하여 ‘$2^{11213}-1$은 소수이다’라고 새긴 우편 스탬프를 찍기도 했다.



<그림 Ⅳ-5> 소수의 발견을 기념하는 일리노이 주의 우편 스탬프

몇 년에 하나씩 발견되던 메르센 소수가 최근에는 매년 하나씩 추가로 발견되고 있다. 2003년에는 40번째, 2004년에는 41번째, 2005년 2월에는 42번째 메르센 소수, 2005년 12월에는 43번째 메르센 소수가 발견되었다.

<그림 Ⅳ-6> 현재까지 발견된 가장 큰 소수

현재까지 알려진 가장 큰 소수는 2006년 9월 11일에 커티스 쿠퍼 박사(Dr. Curtis Cooper)와 스티븐 부네박사(Dr. Steven Boone)가 주도하는 미국 센트럴 미주리 주립대학 팀(CMSU)이 채 1년도 지나지 않아 새로운 소수 $2^{32582657}-1$를 발견했다. 아쉽게도 10만 달러의 상금이 걸린 1000만 자리 소수는 아니었다. 이 소수는 980만 8358자리의 숫자이다. 이번 소수는 GIMPS(Great Internet

Mersenne Prime Search)가 찾아낸 10번째 소수이고, 44번째 메르센 소수(메르센 소수는 2^n-1형태의 소수)로 추정하고 있다. 이 소수로 쿠퍼와 부네 박사는 자신들의 기록을 스스로 깬 것이다.

12,457....로 시작하여 ....967,871로 끝나는 이 소수의 길이는 보통사람이 손으로 쓰면 꼬박 9주가 걸리고 그 길이만 해도 34km정도가 된다. 이번에도 CMSU는 대학의 700개의 컴퓨터를 Prime Net에 연결하여 이 소수를 발견했다.

현재까지 발견된 메르센 소수는 다음 표와 같다.

<표 Ⅳ-4> 현재까지 발견된 메르센 소수

순서	n	M_n	M_n의 자리수	발견일	발견자
1	2	3	1	고대	고대
2	3	7	1	고대	고대
3	5	31	2	고대	고대
4	7	127	3	고대	고대
5	13	8191	4	1456년	anonymous
6	17	131071	6	1588년	Cataldi
7	19	524257	6	1588년	Cataldi
8	31	2147483647	10	1750년	Euler
9	61	2305843009213693951	19	1883년	Pervushin
10	89	61870019...446562111	27	1911년	Powers
11	107	162259276...010288127	33	1914년	Powers
12	127	170141183…884105727	39	1876년	Lucas
13	521	686479766…115057151	157	1952년 1월	Robinson
14	607	531137992…031728127	183	1952년 1월	Robinson
15	1,279	104079321…168729087	386	1952년 6월	Robinson
16	2,203	147597991…697771007	664	1952년10월	Robinson
17	2,281	446087557…132836351	687	1952년10월	Robinson
18	3,217	259117086…909315071	969	1957년9월	Riesel
19	4,253	190797007…350484991	1,281	1961년11월	Hurwitz
20	4,423	285542542…608580607	1,332	1961년11월	Hurwitz
21	9,689	478220278…225754111	2,917	1963년5월	Gillies

순서	n	M_n	M_n의 자리수	발견일	발견자
22	9,941	346088282…789463551	2,993	1963년5월	Gillies
23	11,213	281411201…696392191	3,376	1963년6월	Gillies
24	19,937	431542479…968041471	6,002	1971년3월	Tuckerman
25	21,701	448679166…511882751	6,533	1978년10월	Noll & Nickel
26	23,209	402874115…779264511	6,987	1979년2월	Noll
27	44,497	854509824…011228671	13,395	1979년4월	Nelson & Slowinski
28	86,243	536927995…433438207	25,962	1982년9월	Slowinski
29	110,503	521928313…465515007	33,265	1988년1월	Colquitt & Welsh
30	132,049	512740276…730061311	39,751	1983년9월	Slowinski
31	216,091	746093103…815528447	65,050	1985년9월	Slowinski
32	756,839	174135906…544677887	227,832	1992년2월	Slowinski & Gage
33	859,433	129498125…500142591	258,716	1994년1월	Slowinski & Gage
34	1,257,787	412245773…089366527	378,632	1996년9월	Slowinski & Gage
35	1,398,269	814717564…451315711	420,921	1996년11월	GIMPS / Joel Armengaud
36	2,976,221	623340076…729201151	895,932	1997년8월	GIMPS /Gordon spence
37	3,021,377	127411683…024694271	909,526	1998년1월	GIMPS / Roland Clarkson
38	6,972,593	437075744…924193791	2,098,960	1999년1월	GIMPS/ Nayan Hajratwala
39	13,466,917	924947738…256259071	4,053,946	2001년11월	GIMP/ Michael Cameron
40*	20,996,011	125976895…855682047	6,320,430	2003년11월	GIMP/ Michael Shafer

순서	n	M_n	M_n의 자리수	발견일	발견자
41*	24,036,583	299410429… 733969407	7,235,733	2004년5월	GIMP / Josh Findley
42*	25,964,951	122164630… 577077247	7,816,230	2005년2월	GIMP / Martin Nowak
43*	30,402,457	315416475… 652943871	9,152,052	2005년12월	GIMP/ Curtis Cooper & Steven Boone
44*	32,582,657	124575026… 053967871	9,808,358	2006년9월	GIMP / CurtisCooper&Steven Boone

* 표의 39번째 메르센 소수와 44번째 메르센 소수 사이에 아직 발견되지 않은 다른 메르센 소수가 있는지는 알려져 있지 않다. 따라서 이 번호들은 바뀔 수도 있다.

나. 가장 큰 소수는 무엇일까? 과연 존재하는가?

이러한 의문에 대한 답은 이미 기원전 300년경에 그리스의 대 수학자 유클리드(Euclid, 기원전 330? - 기원전 270?)에 의해 내려졌다.

유클리드는 소수의 개수가 무한하다는 것을 귀류법을 사용하여 증명하였는데 다음과 같다.

[정리] 소수의 개수는 무한하다.

(증명) 소수가 유한 개 밖에 없다고 가정한다면 유한개의 소수를

$$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$$

으로 나타낼 수 있다. 이제 이 소수들의 곱에 1을 더한 수, 즉

$$P_1 \times P_2 \times P_3 \times \cdots \times P_n + 1$$

이라는 수를 생각해 보자.

이 수는 어느 소수보다도 크기 때문에 가정에 의하여 소수가 아니고 합성수이다. 그런데 이것은 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_n 중 그 어느 것으로도 나누어지지 않고 1이 남는다. 즉 모든 소수로 나누어 떨어 지지 않으므로

$P_1 \times P_2 \times P_3 \times \cdot\cdot\cdot\cdot\times P_n + 1$ 은 합성수가 아니라 소수이다. 이것은 모순이다. 따라서 소수는 무한히 많다.

(5) 소수는 어디에 사용할까?

우선 어떤 수가 소수인가? 잘 알고 있겠지만 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신 외의 약수를 갖지 않는 수가 소수이다.

예를 들면, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, …… 등이 있으며, 뒤로 갈수록 그 출현 빈도가 줄어들고 있는 특색을 볼 수 있다. 수학자들은 왜 큰 소수를 찾는 일에 관심을 쏟는 것일까?

소수를 찾는 것 자체가 수학적 의미를 지니기도 하지만, 오늘날 소수는 암호학에서 중요한 역할을 하기 때문이다. 전에는 숫자나 글자를 적당히 섞어서 암호를 만들었다. 그러나 암호가 쉽게 해독되면서 풀기 어려운 암호를 만드는 것이 매우 중요한 일이 되었다. 아주 큰 두 소수를 곱하여 수를 만들고, 그 수가 어떤 두 소수의 곱인지 알아야 암호를 풀 수 있게 만든다. 두 소수를 곱하는 것은 금방이지만, 주어진 수가 어떤 두 소수의 곱인지 알아내기 위해서는 슈퍼컴퓨터를 돌려도 아주 오랜 시간이 걸리기 때문에 소수를 찾아 암호를 풀었다고 해도 그때는 이미 소용없는 일이 되어 버렸을 가능성이 크다. 그래서 소수를 적절히 사용하여 가급적 기밀을 유지할 수 있는 것이다.

(6) 왜 공약수에서는 제일 큰 것을 말하고 공배수에서는 제일 작은 것을 말하는가?

수학에서 최대공약수와 최소공배수를 배웠다. 여기에서 여러분은 아마 이런 의문이 생길 것이다. 왜 공약수에서는 제일 큰 것을 말하고 공배수에서는 제일 작은 것을 말하는가? 최소공약수와 최대공배수는 있기는 한가? 만일 있다면 왜 그런 말을 하지 않는가?

우선 구체적으로 알아보자. 이를테면 양의 정수 16과 24는 공약수는 1, 2, 4, 8을 가진다. 이 두 수의 최대공약수는 8이고 최소공약수는 1이다. 다른 양의 정수

15 와 56 을 보자. 이 두 수는 공약수 1 만 가진다.

이와 같이 어떠한 두 양의 정수든지 공약수 1을 가지며 1은 언제나 그 두 수의 최소공약수라는 것을 알 수 있다. 두 개의 수이거나 두 개 이상의 수의 최소공약수는 언제나 1인 이상 구태여 더 말할 필요가 없는 것이다. 이것이 최소공약수를 취급하지 않는 이유라 할 수 있다.

두 양의 정수의 최대공약수는 분수의 약분에서 많이 쓰인다. 분자와 분모의 최대공약수로는 그 분수를 약분하여 가장 간단한 분수로 고칠 수 있지만, 최소공약수 1 은 별 의미가 없다.

다음에는 공배수를 살펴보자. 두 양의 정수에는 최소공배수는 있는가? 예를 들어 두 양의 정수 16과 24를 살펴보자. 이 두 수의 최소공배수는 48 이다. 그런데 이 48에 어떤 수를 곱하든지 여전히 16 과 24 의 공배수로 된다.

이를테면 48 × 2 = 96, 48 × 3 = 144, 48 × 4 = 192, 48×1000 = 48000 … 등 모두 16과 24의 공배수이다. 그런데 자연수에는 제일 큰 수가 없다. 따라서 제일 큰 공배수도 없다.

실제로 분수의 통분에서도 최소공배수만 필요하다. 만일 분수의 통분에서 최소공배수보다 큰 공배수를 쓴다면 번잡하기만 하다. 최대공배수도 없고 또 최소공배수보다 더 큰 공배수 필요하지 않는 이상 최대공배수를 다룰 필요가 없는 것이다. 이것이 최소공배수만 다루게 되는 이유이다.

(7) 친구수와 완전수

가. 친구수

피타고라스는 “친구는 제2의 나인데, 이것은 220과 284의 관계와 같다”고 말했다. 220과 284와 같은 수를 친구수라고 부르는데 이는 220의 약수 중 자신을 제

외한 모든 약수(1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110)를 더하면 284가 되며, 284의 약수(1, 2, 4, 71, 142) 중 자신을 제외한 모든 약수를 더하면 220이 되기 때문이다.

이와 같은 친구수는 피타고라스 시대부터 알려졌다. 당시의 사람들은 종종 친

구수를 우애의 상징으로 사용했다.

220과 284 외에 또 다른 친구수가 발견됐는데 1636년 페르마가 발견한 17296과 18416이다. 그 후 오일러는 60쌍의 친구수를 발견했으며 그 중 최소의 쌍은 2620과 2924였다.

아마추어 천문학자가 혜성을 발견하듯이 1866년 16세의 소년 파가니니는 220과 284 다음으로 큰 친구수인 1184와 1210을 발견 했다. 흥미로운 것은 친구수가 무한히 존재하는지의 여부는 아직 밝혀지지 않았다는 사실이다.

나. 완전수

성경은 하나님이 6일 동안에 세상을 창조하셨다고 전하고 있다. 6일 동안 완전한 우주 만물을 창조하셨다는 뜻이다. 기독교에서 6이란 숫자에 커다란 의미를 두는 것은 6이 완전수라는 것과 관계가 있는지 모른다. 자연수 n의 약수 중 n자신을 제외한 약수의 합이 n자신과 같게 될 때 n을 완전수라고 한다. 6은 약수 1, 2, 3, 6 가운데 6 자신을 제외한 1, 2, 3의 합이 6으로 자신과 같게 되어 완전수이다. 그리스인들은 6의 약수 1, 2, 3, 6에서 자기 자신의 수 6을 제외한 수 1, 2, 3의 합 즉, 1+2+3=6이 됨을 알고 있었는데, 이러한 수를 완전수라고 불렀다.

6이라는 완전수를 발견한 후부터 그리스인들에게 자연수의 성질을 이치에 맞게 규명하려는 노력이 있었다. 28의 경우를 보자. 28의 약수는 1, 2, 4, 7, 14, 28인데 자기 자신의 수 28을 제외한 수 1, 2, 4, 7, 14를 더하면 1+2+4+7+14=28이므로 28은 완전수가 된다. 여성의 생리주기는 28일이며, 임신기간 280일도 10으로 나누면 28일로 나누어 떨어 지는 것도 흥미로운 일이다.

그러나 홀수의 완전수는 알려져 있지 않으며, 완전수가 무한히 존재하는지의 여부도 밝혀져 있지 않다.

(8) 소수에 관한 두 가지 미해결 문제

가. p , $p+2$꼴로 표시되는 소수의 쌍(쌍둥이 소수)의 개수는 무한히 많을까?

유클리드의 정리에 의하면 소수는 무한히 많다. 그러나 소수가 어떤 규칙에 따

라 분포되어 있는지 규명하는 일은 매우 어렵다.

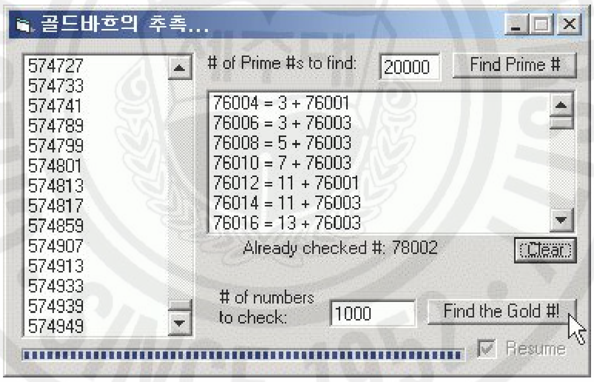
예를 들어 (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), ………, (71, 73), (101, 103), (107, 109), ……… 와 같이 p, $p+2$ 꼴로 된 두 소수의 쌍을 쌍둥이 소수라고 하는데, 이와 같은 쌍둥이 소수가 무한히 많은지 어떤지는 아직 알려져 있지 않다.

나. 4이상의 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있을까? (골드바하의 추측)

독일의 수학자 골드바하가 오일러에게 보낸 편지 속에는 다음과 같은 문제가 들어 있었다.

″5보다 큰 임의의 자연수는 3개의 소수의 합으로 나타낼 수 있음을 증명하여라.″

예를 들어 6=2+2+2, 7=2+2+3, 8=2+3+3, 9=3+3+3, 10=2+3+5, 11=3+3+5, …………, 23=3+3+17, …………, 40=2+7+31, …………과 같이 나타낼 수 있다.



이 문제를 보고 오일러는 ″이를 증명할 수는 없지만 이 문제와 관계있는 가설은 말 할 수 있다.″라며 다음과 같은 가설을 말하였다.

″2보다 큰 임의의 짝수는 두 개의 소수의 합으로 나타낼 수 있다.″

예를 들어 4=2+2, 6=3+3, 8=3+5, 10=5+5, 12=5+7, 14=7+7, 16=5+11, …………, 26=7+19, …………, 374=151+223, …………과 같이 계속 확인할 수 있다.

사실 오일러가 골드바하의 편지를 보고 세운 이 가설은 골드바하의 원래 문제보다 더 간단하며 본질적이다. 이 가설이 옳다는 것만 증명되면 골드바하의 원래 문제는 자연스럽게 해결됨을 알 수 있다. 골드바하가 처음 제기하고 오일러에 의

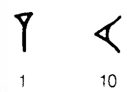
해 정리된 '2보다 큰(4이상의) 임의의 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다.'는 추측은 '골드바하의 추측' 또는 '오일러의 추측'이라고 불리 운다.

오일러의 발표 이후 많은 노력으로 20세기 초에 4부터 90만까지의 짝수를 검토하여 그 범위에서라면 이 가설이 옳다는 것을 실제로 확인하였다고 한다.

그러나 그것으로 4 이상의 모든 짝수에 대해서 성립됨이 증명된 것은 아니다. 아무리 큰 수까지 확인해 보여도 그것으로 이 가설이 증명되는 것은 결코 아니다. 오히려 계속 확인해 나가다가 이 가설이 성립하지 않는 반례가 나온다면 그것이 이 가설이 거짓임을 밝히는 반증이 될 것이다. 결국 이 추측은 아마도 참일 것이라고 예상되기는 하지만 200년 이상 지난 지금까지 증명도 반증도 안 된 아직 해결하지 못한 문제이다.

3) 십진법과 이진법

(1) 옛날 여러 나라는 어떤 숫자를 사용 했을까?

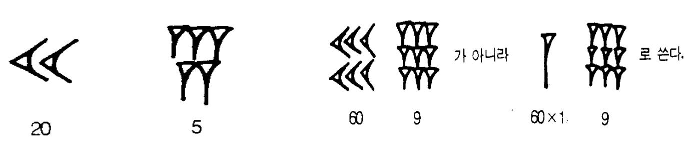


가. 바빌로니아 (60진법)

고대 바빌로니아는 무역의 길목에 위치하였기 때문에 상당히 높은 수준의 수학을 보여준다. 바빌로니아인들은 진흙으로 만든 판자 위에 쐐기 모양의 문자를 새겨 썼는데 이 문자를 '쐐기 문자'라 부른다. 그들의 기수법은 사실상 두 개의 숫자만을 사용하였는데 못과 서까래로 각각 1과 10을 표현하였다.

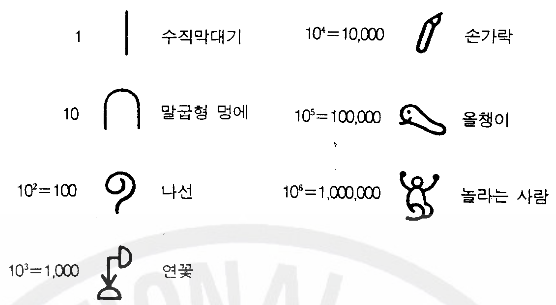
그렇지만 이 기수법은 오늘날의 십진법이 아니라 60진법이었기 때문에 한 단위가 60개가 모여야 다음의 한 단위를 이루게 된다.

예 : $25 = 2\times10+5$ $\quad$ $69 = 1\times60+9\times1$



나. 이집트의 숫자 (십진법)

기원전 3400년경 훨씬 이전에 이집트인들은 상형문자를 사용하였는데 메소포타미아의 문자나 숫자가 진흙 판에 새겨진데 비해 이집트의 숫자는 파피루스라고 하는 갈대로 만든 종이에 씌어졌다.



<그림 Ⅳ-7 이집트의 수 표현>

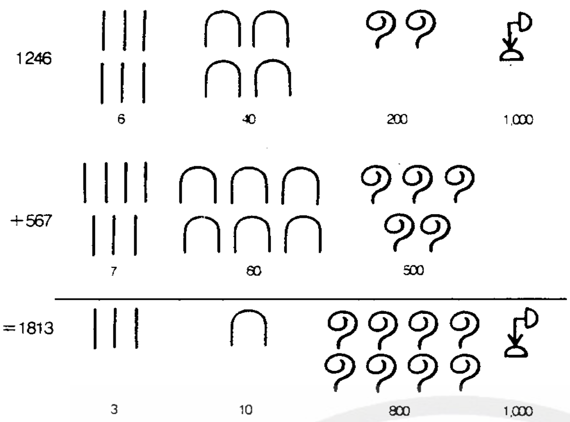
(ㄱ) 수 체계

이집트의 수 체계는 십진법에 기초하여 앞의 기호들을 반복하여 사용한다.

(예) 1436 = $1(10^3)+4(10^2)+3(10)+6$

이와 같이 이집트인들은 수를 나타낼 때 오늘날의 우리와는 반대로 오른쪽에서 왼쪽으로 써 내려갔다.

(ㄴ) 덧셈과 뺄셈



덧셈과 뺄셈도 십진법에 기초하고 있다. 위 그림은 1246 + 567의 계산과정을 보여준다.

(ㄷ) 곱셈과 나눗셈

1	26
2	52
* 4	104
8	208
* 16	416
32	832
* 64	1664

곱셈과 나눗셈의 방식은 덧셈과 뺄셈과는 전혀 다른 방식이다. 그들은 2로 곱하거나 나누는 것밖에 몰랐으므로 이를 연속적으로 실행하는 복잡한 방식을 사용하였다. 오른쪽의 예는 84×26의 결과를 얻는 방법이다. 84=64+16+4이므로 여기에 해당하는 26의 곱에 *표를 한 것이다. 이 수들을 합하여 104+416+1664=2184를 얻었다.

다. 로마의 수 체계

로마 숫자는 서양에서 아라비아 숫자를 사용하기 전까지 사용되었으나, 지금도 우리 생활에서 많이 사용하고 있다. 덧셈의 원리에 의한 기수법을 가법적 기수법이라고 하는데 대표적인 예가 로마 기수법이다.

(예) 234 : C C X X X IV

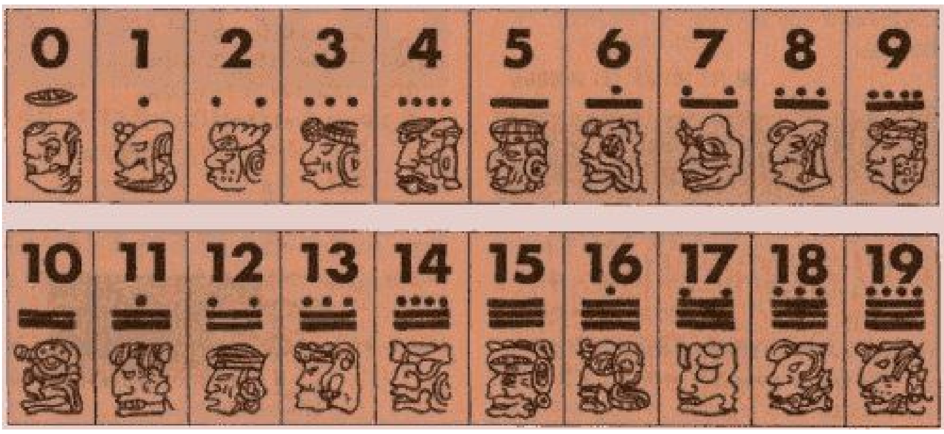
이처럼 기본 숫자를 더하는 식으로 다른 수를 나타내는 것이 로마 기수법이다. 다음은 로마의 수를 나타낸 표이다.

<표 Ⅳ-5> 로마의 수 표현

Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ	Ⅸ	Ⅹ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
XXX	XXXX (XL)	L	LX	LXX	LXXX	XC	C	CX	CXX
30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
CC	CCX	CCC	CCCX	CCCC (CD)	D	DC	DCC	DCCCC (CM)	M
200	210	300	310	400	500	600	700	900	1000
※ ▁=100000(100×1000) : 수의 1000배를 나타내기 위해 수위에 수평막대를 사용함									

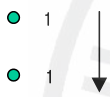
라. 마야의수 (20진법)

중앙아메리카의 찬란한 문화를 일으켰던 고대의 마야 인들은 메소포타미아의 수와 고대 이집트의 수보다 보다 정교하게 수를 만들어 사용하였는데, 20을 한 묶음으로 세어 나가는 수의 체계를 사용하였다.

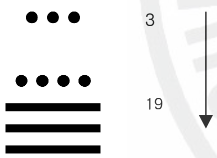


<그림 Ⅳ-8 >마야의 수 표현

마야숫자는 위 그림과 같다. 수는 세로로 나열하며, 20진법에 기초하고 있다. 즉, 21(=1×20+1)를 표기하자면 다음과 같다.

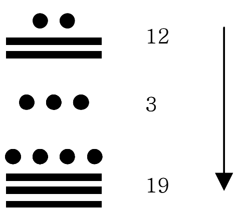


그리고 79(= 3×20 + 19)는 다음과 같다.



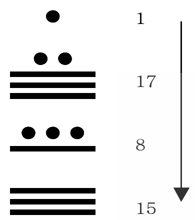
정상적으로라면 그 바로 윗 단계(20을 기초로 한 이 체계의 셋째 자리)는 둘째 열 수들의 20배 큰 가치를 지녀야 할 것이다. 즉 이 기수법의 셋째 열은 ‘사백의 배수(다시 말해 20×20=400의 배수)’가 되어야 할 것이다. 그런데 여기서 우리는 기이한 불규칙성과 마주하게 된다. 마야 학자들에게 있어서 셋째 단은 사실 360의 배수를 지시하는 것이다.

예를 들어 다음의 표기는,



$12\times20^{2}+3\times20+19=12\times400+3\times20+19$이 아니라, $12\times360+3\times20+19$에 해당하는 것이다. 그 다음에 이어지는 자리에는 다시 20진법이 엄격히 지켜져, 넷째 단에서부터는 바로 전 단 보다 20배의 가치를 지녔다. 따라서 셋째열의 불규칙성으로 인해, 넷째 자리는 $7200=20\times360$의 배수($8000=20\times20\times20$의 배수가 아니라)에 해당했으며 다섯째 자리는 $144000=20\times7200$의 배수($160000=20\times20\times20\times20$의 배수가 아니라)에 해당했다.

예를 들어 네 숫자로 된 다음의 표상은



$1\times7200+17\times360+8\times20+15$이다.

어떤 열의 단위가 하나도 없을 경우 각 숫자가 제 단에 자리할 수 있도록 마야학자들은 제로를 발명했다. 그리고 그 개념에다 그들은 (우리가 알 수 없는 어떤 이유로) 조개 또는 달팽이껍질을 닮은 형태를 부여했다. 마야 천문학자들의 수학적 재능에 대한 두 가지 명백한 증거는 '①위치기수법을 구상해냈다 ②제로를 고안해냈다'는 것을 들 수 있다. 그리고 마지막으로 마야 인의 수 체계에서 보여 지는 셋째 자리의 이상스런 변칙에 대해 해명하려면 이 기수법은 일상적인 셈의 필요에 의해 구상된 것이 아니라, 시간의 계산과 천문학적 관찰의 필요를 충족시키기 위해 만들어졌다. 그것은 이 문명에서 찾아볼 수 있는 시간의 분해와 신의 세계 사이의 긴밀한 관계에서 비롯된 것이다.

예를 들면,

1 kin(킨) = 1일

1 uinal(우이날) = 20kins = 20일

1 tun(툰) = 18 uinals = 18 × 20일 = 360일

1 katun(카툰) = 20 tuns = 20 × 18 × 20일 = 7200일

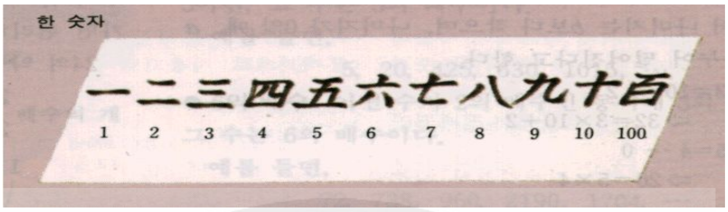
1 baktun(박툰) = 20 katuns = 20 × 20 × 18 × 20일 = 144000일

1 pictun(픽툰) = 20 × 20 × 20 × 18 × 20일 = 2880000일 을 나타낸다.

마. 중국의 수체계

곱셈의 원리에 의한 기수법을 승법적 기수법이라고 하며 이 예로는 한(漢) 숫자가 있다. 한 숫자의 기본 숫자는 1→一, 10→十, 100→百, 1000→千 인데 다른 수를 나타낼 때에는 이들 기본 숫자의 몇 곱이라는 형식으로 쓴다.

(예) 234 : 二百三十四 (이는 百의 2곱과 十의 3곱과 4가 있다는 뜻이다.)



<그림 Ⅳ-9> 한나라의 수 표현

(2) 여러 가지 진법(進法)의 유래와 그의 활용

가. 10진법

10을 한 단위로 하여 받아 올리기를 하는 것을 10진법이라 하는데, 역사를 통틀어 가장 폭넓게 사용되었고 오늘날에도 범세계적으로 채택되고 있음에도 불구하고 매우 늦게 발생하였다.

10진법은 고대 이집트, 그리스, 중국 등 비교적 많은 나라에서 사용되었으며, 지속적으로 발달하여 왔다. 이 10진법으로 물건을 세는 방법이 우리 인류에게 가장 많이 쓰이게 된 주된 이유는 인간의 양 손의 손가락이 모두 10개라는 것에 의거하여 셈을 하는데서 유래한다. 우리가 어릴 적부터 자연스럽게 몸에 밴 10진법은 수를 세는데 용이하다. 이는 주로 화폐에 적용이 되어 있으며, 주가지수나 경제지수 등 각종 지수에 사용되고 있다.

아프리카에는 수많은 종족과 언어가 있는데 70이 넘는 아프리카 어(語)를 조사한 결과 10은 어느 언어에서도 공통으로 사용된 것을 알 수 있었고, 역시 손가락의 수에 근거를 두고 있다. 양손은 물건을 가장 많이 만지고 물건을 옮기고, 손가락으로 수를 표시하는데 가장 편리하였기 때문에 10진법이 수의 표시에 많이 쓰인 것이다. 그리고 10진법이 널리 쓰이게 된 또 하나의 이유는 수를 나타내는데 필요한 기호(記號)가 간단하고 적은 것으로도 나타낼 수 있는데 있다.

따라서 오늘날 우리가 자연스럽게 사용하고 있는 10진법은 오랜 세월 동안 다듬어진 결과이다.

나. 2진법

2진법은 매우 오래전에 만들어진 진법으로 정확한 사용 시기는 알 수 없으나 기원전 7세기 고대 인도에서 비롯되었다는 주장이 있으며, 최초로 사용한 기수법으로 추정된다.

퀸스랜드의 원주민들은 지금도 "one, two, two and one, two twos"등으로 세며, 오스트레일리아와 폴리네시아의 많은 종족들도 최근까지 2진법을 사용하고 있다고 한다.

오늘날 2진법은 전자제품과 정보통신기술 등에 많이 활용되고 있다. 예를 들면, 컴퓨터에서의 명령은 모두 2진수로 처리된다. 최근에 우리 주변에서 흔히 접할 수 있는 디지털 카메라 역시 2진법의 원리가 활용이 되는데, 사진을 찍어 컴퓨터에 옮길 때 2진 코드로 저장하게 된다. 즉, 각 픽셀마다 색깔과 밝기 등을 나타내기 위하여 1개 이상의 바이트가 할당이 되는데, 그것이 모두 2진 코드로 이루어져 있다. 이러한 것들에 적용되는 진법 체계에 2진법 이외에 다른 기수법을 사용할 수도 있지만, 비용과 효율 면에서 가장 적합한 이유로 2진법이 매우 유용하게 사용되고 있다.

다. 5진법

가장 광범위하게 사용된 첫 번째 수 체계였을 것으로 추정되는 5진법은, 한 손만을 가지고 손가락셈을 하는데서 유래한 것으로 보인다. 이것은 물건의 개수와 손가락으로 대응시켜 되풀이되는 방법으로 셈을 하는데, 경우에 따라 작은 돌이나 나뭇가지로 5의 표시를 하기도 하였다.

최근에도 남아메리카 종족들은 “one, two, three, four, hand, hand and one"과 같이 5를 단위로 셈을 하며, 파라과이의 한 부족에서는 5는 '한 손의 손가락', 10은 '두 손의 손가락', 20은 '두 손과 두 발의 손 발가락'이라고 구술(口述)로 불리어진다고 한다. 카브리의 한 부족은 시(詩)에서 10을 '두 손의 아들'이라고 하고 있다. 또한 오늘날 사용하고 있는 로마 숫자를 보면 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ, Ⅴ, Ⅵ,

Ⅶ, Ⅷ, Ⅸ, Ⅹ, Ⅺ, Ⅻ 과 같이 쓰이고 있다. 이것은 읽는 방법이 아닌 표기법의 입장에서 보면 5를 한 묶음으로 하여 되풀이되는 수이므로 5진법의 표기법이라고 볼 수 있다.

계산을 목적으로 사용되는 주판에서 5진법의 원리를 엿볼 수 있는데 아래 칸의 알 5개가 위 칸의 알 1개에 해당하므로 아래 칸의 알 5개를 모두 올릴 필요 없이 위 칸의 알 1개를 내리면 되므로 아래 칸의 알을 4개로 만든 오늘날의 주판이 완성되었다. 그밖에 독일 농부의 달력은 1800년까지도 5진법을 이용하였으며, 동양의 오행설에 나타나는 목, 화 토, 금, 수가 5진법에 의한 것이다.

라. 7진법

일주일은 "월 화 수 목 금 토 일"과 같이 7을 한 묶음을 하여 되풀이 되고 있다. 중국이나 홍콩에서는 제1요일(월) 제2요일(화) 제3요일(수) 제4요일(목) 제5요일(금) 제6요일(토) 제7요일(일)이라 쓰고 제8요일은 없다. 이 경우의 요일은 7진법이라고 볼 수 있다.

마. 12진법

12를 한 묶음으로 하여 되풀이 되는 기수법으로 선사(先史)시대부터 사용되었다. 1년 동안 초승달에서 다음 초승달까지의 기간이 12번이었기 때문에 유래된 12진법은 그 기본수가 크기에 비해 많은 약수를 가지고 있기 때문에 편리하게 사용하였다. 12진법의 유래는 고대 로마인들이 시작했으며 프랑스 대혁명이 일어난 시기에 프랑스의 시작으로 10진법을 채택하기 시작했다.

18세기 영국에서 12가 단위인 숫자를 사용하고 있었는데, 1726년 간행된 영국 작가 스위프트의 소설 '걸리버 여행기'에서 그 흔적을 발견할 수 있다. 소설의 한 구절에서 '걸리버는 소인국 사람의1728배를 먹어야 했다'라는 구절이 나오는데, 걸리버의 키가 소인국의 12배라 생각하였던 것이다. 키가 12배이면 부피는 12^3 (=1728)이므로 식량도 그만큼이 필요하게 된다. 또한 걸리버는 소인들의 144배가 되는 옷을 입었는데, 옷은 면적이므로 12^2(=144)배의 옷이 필요하게 된 것이다. 영국은 화폐단위도 12진법을 사용할 정도로 가장 늦게까지 12진법을 고수한 나

라이며, 이 때문에 한때는 교역이 이루어지지 않을 정도로 불편을 겪었다. 이렇듯 과거에 12진법은 다양하게 활용되었으며, 아직도 그 흔적이 우리 주변에 남아 있다.

12진법은 세계의 여러 지역에서 주로 측정(測定)과 관련지어 사용하였다고 볼 수 있는 일들이 많다. 그것은 1년간의 달수(太陰曆의 月數)가 12이고, 또 12는 2, 3과 4로 나누어 떨어져서 미터법이 나오기 전까지 나눔이 쉬워 사람의 마음을 끌었다. 예를 들어 1피트(feet)는 12인치(inch), 1실링은 12펜스, 1다스는 12개, 1그로스는 12다스를 들 수 있다. 또 영어에서 11, 12를 ten one과 ten two로 쓰지 않고 eleven, twelve 라고 읽고 쓰는 것에서도 12진법의 흔적을 찾을 수 있다.

바. 20진법

선사시대부터 사용된 20진법은 양손과 더불어 양발로 셈을 하는 맨발 시대의 유물이다. 그 시대의 사람들을 손가락과 더불어 발로써 물건의 흥정을 했던 것이다. 아메리카의 찬란한 문화를 이룩했던 고대의 마야 인들은 20을 한 묶음으로 세어나가는 20진법을 사용하였다.

오늘날 프랑스어를 보면, 80을 위턴뜨(huitante)라고 부르는 대신 4개의 20인 까뜨르 방(qutre-vingt), 90을 노낭뜨(nonante)라고 부르는 대신 4개의 20과 10인 까뜨르 방 디스(quitre-vingt-dix)라고 부르며, 120은 시스 방(six-vingt) 등을 사용하는 것도 20진법의 자취이다. 또한 게에루인이 51을 “1, 10 및 2개의 20”을 사용했고, 화란인이 50을 “20의 2배와 20의 3배의 평균‘을 썼으며 멕시코의 아즈테크 지방에서는 20이 돋보이는 정밀한 계산 체계를 갖추고 있는데 이것 또한 20진법의 흔적이라고 할 수 있다.

영어권의 세계에서도 그들의 선조(先祖)가 20을 기수로 하여 셈 한 것이라고 생각되는 것이 많다. 미국의 16대 링컨 대통령의 연설문 속에 Four score and seven years ago, (4개의 20과 7년 전에)에서 score 는 20을 나타낸다. 프랑스어의 vingt과 동의어이다. 또 영어의 ″a score of times″ 는 무한대의 뜻을 나타낸다. 여기서의 20은 하나의 한계(限界)를 나타낸다. 또 마야인도 20진법을 사용한 흔적이 남아있다.

20진법은 오늘날 널리 활용되고 있지는 않으나 우리주변에서 살펴보면 측량과

관련하여 사용되고 있다. 예를 들면 담배 1갑=20개피, 오징어 1축=20마리, 한약 1재=20첩, 조기 1두름=20마리 는 20진법의 수체계로 볼 수 있다.

사. 60진법

60진법이 사용된 계기는 정확하게 알려진 바 없으나 다음과 같이 추측을 할 수는 있다. 천문학이 발달한 바빌로니아 인들은 오랜 관찰로 인하여 지구의 1년 궤도가 360일이라는 것을 알게 되었다. 또한 내접 6각형의 1변의 길이가 그 원의 반지름과 같은 것을 알고 있었으므로 원 둘레의 각을 360으로 생각하고 이것을 6등분하여 얻은 숫자 60을 단위로 택하였으리라 추측된다. 또한 60이 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 및 30으로 나누어지고, 그 60을 분모로 계산하면 매우 편리하고 간단하며 실용적이기 때문에 60이 선택되었다고 볼 수도 있다.

오늘날 60진법은 시간과 각도의 단위로 많이 사용되고 있다. 그 외 음양오행의 원리를 바탕으로 한 사주의 명리학과 서양의 점성술도 60진법을 기초로 한 것이다.

(3) 태극기 속의 이진법의 원리

주역은 주(周)나라 시대의 역(易)으로, 천지만물이 끊임없이 변화하는 원리를 설명하고자 한 심오한 철학서이다. 공자가 책을 묶은 가죽 끈이 세 번 끊어질 만큼 애독했다는 사실로도 유명한 주역은 이진법의 원리로 구성되어 있다. 주역의 기본 단위인 효(爻)에는 양(—)과 음(--)이 있는데, 각각 1과 0에 해당한다. 옛날 중국과 우리나라에서는 모든 것을 음양으로 나누어서 따지는 경향이 강했으며 지금도 그 전통이 뿌리 깊게 남아 있다. 우리나라의 태극기가 이를 잘 상징하고 있는데 초기의 태극기에는 8괘가 모두 포함돼 있었다. '팔괘(八卦)'는 아래의 8가지인데 " — "(양)을 1, ' --'(음)을 0에 대응시키면 8괘를 이진법의 수로 표현할 수 있으며, 아래 표와 같다.

<표 Ⅳ-6> 8괘의 이진수의 수 표현

괘명	팔괘							
	곤	간	감	손	진	리	태	건
괘 · 효	☷	☶	☵	☴	☳	☲	☱	☰
십진법의 수로 표현	0	1	2	3	4	5	6	7
이진법의 수로 표현	000	001	010	011	100	101	110	111

현재 우리나라 태극기의 네 귀퉁이에는 건(하늘), 곤(땅), 감(달), 리(해), 네 개의 괘가 그려져 있다. 그 의미를 살펴보면 다음 표와 같다.

<표 Ⅳ-7> 태극기의 4괘와 그 의미

사괘[四卦]	☰	☷	☵	☲
이름[卦名]	건(乾)	곤(坤)	감(坎)	리(離)
방위[方位]	동(東)	서(西)	북(北)	남(南)
자연[卦象]	천(天)	지(地)	월(月)	일(日)
계절[季節]	춘분(春分)	하지(夏至)	동지(冬至)	추분(秋分)
사덕[四德]	인(仁)	의(義)	지(智)	예(禮)
가정[家庭]	부(父)	모(母)	딸(女)	아들(子)
요일[曜日]	금(金)	목(木)	수(水)	화(火)
의미[意味]	정의	풍요	생명력과 활력	지혜와 정열
이진법의 수로 표현	111	000	010	101

(4) 제주 정낭과 이진법

정낭이란 서까래 크기의 나무를 세 개의 구멍이 뚫린 돌기둥 두 개에 구멍을 통해 가로로 걸어 놓음으로서 집안에 사람이 있는지의 여부를 알리는 제주 고유의 출입문이다. 정낭은 산업화의 영향으로 가옥이 개량되면서 거의 사라졌지만 아직도 제주의 외진 곳이나 관광지에는 그대로 남아 있어 정낭을 보기란 그리 어렵지 않다. 제주 특유의 풍습 때문인지, 아니면 제주인의 넉넉한 인심 때문인지는 모르겠으나 제주의 전

통 가옥에는 대문이 없었던 터라 짐승들이 집 마당에 널어놓은 조, 보리 등 밭곡식을 헤쳐 놓고 가기 일쑤였다. 이러한 짐승들의 출입을 막고자 고안된 장치가 바로 정낭인데 후일 사람이 집안에 있는지를 외부에 알리는 수단으로 쓰이게 되었다 한다.

정낭 세 개 중에 맨 위쪽에 하나만 걸쳐져 있으면 현재 집에 사람이 없으나 이웃에 마실(외출) 갔다가 곧 돌아온다는 것을 의미하며, 돌기둥 맨 위와 맨 아래 구멍에 정낭 두 개가 걸쳐 있으면 좀 늦게 돌아온다는 뜻이고, 정낭 세 개가 모두 돌기둥에 걸쳐 있으면 먼 곳에 출타 중이란 뜻이다. 물론 정낭이 하나도 걸려 있지 않으면 집안에 사람이 있으니 어서 들어오라는 의미이다. 결국 정낭은 집안에 사람의 존재 유·무를 알리는 정보 표현 수단으로 해석할 수 있으며 이는 요즘 세상을 변화시키고 있는 정보통신이나 컴퓨터에 적용되고 있는 디지털 개념과 매우 흡사하다.

돌기둥 맨 위에 정낭 하나가 얹혀 있을 경우를 디지털로 표현하면 「100」이요, 맨 위쪽과 맨 아래 쪽에 정낭이 걸쳐 있다면 「101」, 정낭 세 개가 모두 걸쳐 있으면 「111」이다. 결국 비트 3개의 조합 「100」은 외출 후 곧 돌아온다는 의미이고, 「101」은 좀 늦게 돌아온다는 뜻이며, 「111」은 당분간 돌아오지 못함을 말한다. 물론 정낭이 하나도 안 걸쳐 있는 경우에 해당하는 「000」은 사람이 현재 집안에 있다는 의미이다.

물론 이러한 해석은 다소 무리가 있지만 정낭 운영방식에는 적어도 다음과 같은 디지털적 논리가 숨어있는 것으로 보여 진다. 정낭 시스템은 3비트로 되어 있으며 두 개의 돌기둥에 가로 놓이는 맨 위쪽의 정낭은 0과 1로 조합되는 세 자리수의 첫째 자릿수를 나타내며 반대로 맨 아래쪽의 정낭은 맨 아래 자릿수를 나타낸다. 이때 위에서 첫 번째 정낭은 집안에 사람의 존재 유무를 나타내는 것으로 3비트 2진수의 조합의 경우 맨 윗자릿수가 0이면 사람이 집에 있는 상태이며, 1은 사람이 집에 없는 경우를 나타낸다. 위에서 두 번째, 즉 가운데 정낭은 공간적 거리를 나타내는 것으로 가운데 자리 수가 0이면 집 주인이 가까이에 외출 중이며 1이면 멀리 출타중임을 알리는 것이다. 마지막으로 맨 아래 정낭은 시간을 나타내는 것으로서 0이면 잠시 후 돌아옴을 나타내고 1이면 오래 걸림을 말해준다.

이렇듯 정낭을 통한 정보 표현은 디지털 2진 3비트를 이용한 정보 전달 수단으로 디지털 기술의 효시로 나타났다고 할 수 있다.

2. 정수와 유리수

(1) 0은 어떻게 탄생하게 되었을까?

현대 수학에서 0은 두 가지의 기능을 갖고 있다. 첫째로 52와 502를 구별할 수 있게 해준다.

숫자의 위치가 자릿수를 의미하는 이런 표기법에서 0은 '비어 있는 자리'를 나타내고 있다. 기원전 바빌로니아인들은 빈자리의 혼동을 피하기 위해 0의 사용을 권장하였고 그리스인들이 이것을 도입하여 지금과 비슷하게 생긴 기호(동그라미)를 정착시킨 것이다. 그러나 0이라는 수에 더욱 깊고 중요한 의미가 담겨져 있다. 이것은 너무도 심오하여 그로부터 수세기가 지난 뒤에야 인도인들에 의해 발견되었다.

<그림 Ⅳ-10> 마야의 0 기호(왼쪽)와
바빌로니아의 0 기호(오른쪽)

힌두의 수학자들은 0이 숫자들을 구별하는 기능만 갖고 있는 것이 아니라, 그 자체가 고유한 수임을 간파한 것이다. 1과 2가 고유한 수인 것과 마찬가지로, 0 역시 엄연한 수로서 존재한다. 즉 '아무것도 없음'을 나타내는 수인 것이다. 이전까지는 전혀 구체화시킬 수 없었던 무(無)의 개념은 0의 등장과 함께 비로소 실제적인 기호로 표현할 수 있었다. 현대를 사는 우리에게 0의 등장은 그다지 혁명적이지 않는 '별 볼일 없는' 사건으로 보일지도 모른다. 그러나 아리스토텔레스를 비롯한 고대 그리스의 위대한 철학자들도 0이 갖고 있는 깊은 의미를 눈치채지 못했다. 아리스토텔레스는 0을 가리켜 '규칙에서 벗어난 수'라고 하였다. 나눗셈을 할 때, 임의의 수를 0으로 나누면 당시로서는 도저히 이해할 수 없는 결과가 초래되었기 때문이다. 이 난점은 6세기가 되어서야 비로소 해결되었다. 인도 수학자들은 이 문제를 집요하게 파고들어 '무한대' 라는 개념과 연결시켰고 7

세기 학자 브라마굽타는 '임의의 수를 0으로 나눈 몫'을 무한대의 수학적 정의로 사용하였다.

(2) 음수의 역사

음수의 개념은 서양보다는 동양에서 먼저 사용됐는데 중국의 「구장산술」에는 이미 오랜 옛날부터 음수를 사용한 기록이 남아 있기는 하나 그 의미를 확실히 알고 썼다고는 생각되지 않는다. 여하튼 중국에서는 3세기경에 이미 류호라는 사람이 양수는 빨간 나무막대('산목'이라함), 음수는 검은 나무막대로 구별하여 나타내었으며, 산(算)의 색깔이 구분되어 있지 않을 때는 산대를 똑바로 두면 양수를, 막대를 비스듬히 한 개 올려놓으면 음수를 의미하는 것으로 표현했다. 예를 들어 -732라는 숫자를 나타낼 때, 마지막 숫자 위에 사선을 그려 음수를 표시했다.

(732) (-732)

음수의 의미를 제대로 설명한 사람은 인도의 브라마굽타(Brahmagupta, 598~660?)이다. 그는 서기 628년 「브라마굽타 시단타(Brahmagupta-siddhanta)」란 책에서 음수의 개념을 서술하였는데, 양수와 음수의 관계를 재산과 부채, 방향에 대한 반대 개념으로 설명하고 있지만 음수의 곱셈이나 나눗셈은 수학자들 사이에서조차 정확하게 이해하고 있었는지에 대해서는 불확실하다.

음수가 받아들어져 사용하기 시작한 것은 16세기경으로 이탈리아의 수학자 카르다노(G. Cardano, 1501~1576)의 공적에 힘입은 바 크다. 그의 유명한 저서인 '아르스마그나'에 방정식의 일반적인 성질을 자세하고 체계적으로 서술하고 있는데, 그 중에서도 음수의 개념을 확립하고 양수와의 여러 가지 법칙을 명확하게 밝히고 있다.

그 후 음수를 완전한 의미로 취급한 사람은 「좌표기하」의 창시자인 데카르트(R.Descartes, 1576~1650)였다. 그는 음수를 모자라는 수가 아니라, 다만 어떤

기준보다 낮은(작은) 수라고 정의하고, 수직선상에 음수를 표시하였다. 즉, 수직선의 개념, 좌표계에서의 음수의 위치 등을 설정함으로써 음수의 시각적, 기하학적 표현을 통하여 비로소 수 체계 안에서의 음수의 올바른 위치를 찾아내었다.

이렇듯이 16세기에 이르러서야 음수의 개념이 유럽에 소개되었고, 음수가 마침내 수의 체계에서 바른 위치를 차지한 것은 1700년경으로 보고 있다.

(3) 재미있는 0 이야기

<그림 Ⅳ-11> 마야의
숫자 0과 1

아주 오랜, 옛날 숫자 나라에 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9가 살고 있었다. 숫자 나라에서는 숫자가 클수록 힘이 셌다. 그래서 9가 대장 노릇을 하고 있었다. 어느 날 바위가 쩍 갈라지며 0이라는 숫자가 태어났다. 1이 자기보다 작은 숫자가 생겼다고 만세를 불렀다. 그런데 0은 아무짝에도 쓸모가 없었다. 연필에 0을 더해도 보탬이 안 되고, 지우개에 0을 빼도 그대로였기 때문이다. 또 0은 이해되지 않는 부분도 많았다. 3은 문방구에서 '공책 0개 주세요.'라고 했다고 혼이 났다. 6은 사과를 0조각으로 나누었다가 머리가 아파 병원에 입원했다. 모두들 이상하고 힘없는 0을 비웃고 조롱했다.

그러던 어느 날이었다. 이웃 나라에 살고 있는 '만'이라는 힘센 숫자가 그 숫자 나라에 싸움을 걸어왔다. '만'은 엄청난 힘을 가지고 있었다. 모든 숫자들은 무서워 꼼짝도 하지 못했다. '만'은 그 나라에 있는 음식들을 모두 먹어 치우고, 닥치는 대로 물건을 부쉈다.

그러나 맞서서 싸울 아무런 방법이 없었다. 그런데 '만'에게 대항해 보겠다는 숫자가 나타났다. 그것은 놀랍게도 0이었다. 다른 숫자들은 '0이 이제 미쳤구나' 하고 생각했다. 그러나 별 방법이 없기에 허락을 했다. 드디어 0과 '만'이 마주쳤

다. 쥐꼬리만 한 0 앞에 서 있는 집채만 한 '만'의 모습은 너무나 차이가 났다. 누가 봐도 '만'이 이길 거라고 생각이 들었다.

0은 '만'에게 용감하게 다가갔다. 그리고 '만'에게 곱하기를 했다. 그러자 그 힘세던 '만'은 그만 0으로 변해 버리고 말았다. 숫자 나라 숫자들이 함성을 질렀다.

"이겼다! 0이 '만'을 이겼다!"

그 후에 0은 '3 6 '이 306인지 30600인지 쉽게 알 수 있게 해주었다. 0이 있어서 3/4는 0.75로도 표시할 수 있게 되었다. 이제는 모두가 0을 사랑하고 오래 오래 행복하게 살았다.

(4) 수학기호 +, -, ×, ÷, = 는 누가, 언제 만든 것일까?

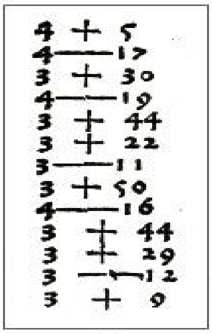
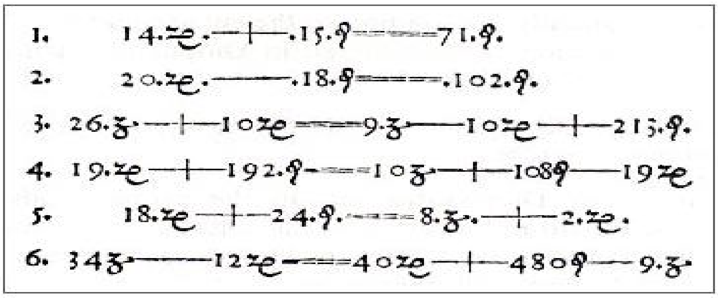
우리가 계산에서 사용하는 +, −, ×, ÷, = 등도 처음부터 이런 모양의 기호로 쓴 것은 아니었다. 처음에 누군가에 의하여 이렇게 쓰자고 제안되었다가 긴 시간에 걸쳐 사용되면서 편리하게 고쳐진 것이다.

수학에서 기호는 복잡한 상황이나 수식을 간단하게 표현할 수 있게 해 준다. 이렇게 고마운 기호들은 누가, 언제 만든 것일까?

① 더하기와 빼기 기호 +, -

더하기 기호 '+'와 빼기 기호 '−'는 1489년 독일의 수학자 비드만(Johannes Widman, 1462~1498)이 산출 책에서 처음으로 사용하였다고 한다. 그러나 그는 +는 과다, −는 부족의 의미로 사용하여 계산의 기호가 아니라, 단지 과부족의 기호로서 사용하였다.

'+' 기호는 라틴어로 '그리고'를 의미하는 et를 ('7 더하기 8'을 '7 et 8'로 썼다.) 지속적으로 흘려 쓰는 과정에서 +의 기호가 만들어졌다고 한다. '−' 기호는 '모자라다'라는 라틴어 단어 minus의 약자 $\overline{m}$에서 −만 따서 쓰게 되었다고 한다. 아래 그림 속에 +, − 기호는 비드만이 쓴 산술책의 1526년 아우크스부르크 판에 나타난 것인데 두 기호 모두 현재의 기호보다 더 크다.

↑< 지혜의 숫돌 (The whetstone of witte)>에 쓰인 기호들

↑ 비드만의 산술책 <Mercantile Arithmetic >에 쓰인 +, − 기호

<그림 Ⅳ-12> 비드만의 산술 책과 지혜의 숫돌에 쓰여 진 수학기호

② 등호 =

서로 같음을 나타내기 위한 등호 '='는 1557년 영국의 수학자 로버트 레코드(Robert Recorde, 1510?~1558)가 「지혜의 숫돌」이라는 책에서 '서로 같음'을 나타내기 위하여 처음으로 사용하였다. 레코드는 서로 평행한 두 직선에서 이 기호의 아이디어를 얻었다고 한다. 위의 그림은「지혜의 숫돌」에 쓰인 기호들인데 이때의 기호는 현재의 등호보다 옆으로 더 길었다.

③ 곱하기 기호 ×

곱하기를 나타내는 기호 '×'의 원조는 1631년 영국의 수학자 오우트레드(William Oughtred, 1574~1660)가 사용한 성안드레 십자가로 보인다. 곱하기 기호 ×는 +, − 에 비해 상당히 뒤늦게 나타났는데, 크기도 +, − 의 크기에 비해 현저히 작았다고 한다. ×기호는 미지수를 나타내는 문자 x와 비슷하여 잘 사용되지 않았다. 그러다가 19세기 후반에 이르러서야 널리 사용되었다.

④ 나누기 기호 ÷

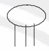
나누기를 나타내기 위한 기호 ÷는 1659년에 스위스 수학자 란(Johann Heinrich Rahn, 1622~1676)의 대수 책에서 처음으로 사용되었다. 이 기호에서 가로 막대 '—'의 아래와 위의 두 점 '·'는 사실상 수를 나타내는 것으로 기호 ÷는 분수의 모양을 추상화 한 것으로 볼 수 있다.

이와 같은 기호들은 그 의미가 쉽게 이해되고 쓰기도 편리하여 금방 널리 퍼지게 된 것이다.

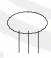
(5) 분수는 어떻게 해서 사용하게 되었을까?

역사적으로 분수는 분배와 측정의 결과를 기록하기 위해서 도입되었는데 특히 경작지를 배분하거나 곡식을 나누어 먹을 때 등의 경우에서 자연스럽게 발생하였다.

분수에 관한 지금까지 발견된 가장 오래된 수학 기록으로는 기원전 1650년경 이집트 아유세로 왕 때 서기 아메스가 쓴 린드 파피루스에 여러 문제가 다루어져 있다. 이것은 분수 개념이 수학사에서 매우 이른 시기에 발달하였음을 말해주는 것이다.

옛 이집트인들은 야자열매를 세 사람이 똑같이 나누었을 때의 한 사람의 몫, 즉 지금의 우리가 $\frac{1}{3}$이라고 부르는 수를  와 같이 나타내었다. 그러나 야자 1개를 두 사람이 똑같이 나누었을 때의 한 사람 몫은  이 아니다. 2개의 야자열매를 세 사람이 똑같이 나누었을 때의 한 사람 몫, 즉 $\frac{2}{3}$를 그들은 위 기호로 나타내었다.

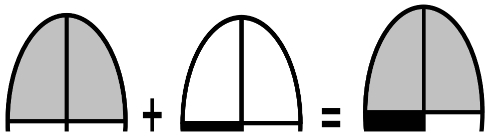
<표 Ⅳ-8> 옛 이집트인들이 사용한 분수

					…	
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	…	$\frac{1}{10}$

이집트인들은 분자가 1인 단위분수만을 썼는데, 예외적으로 $\frac{2}{3}$만은 그대로 사용하였다. 단위분수와 $\frac{2}{3}$외의 분수계산은 예를 들어 $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ 과 같이 했다.

이러한 계산은 복잡해 보이지만, 그림으로 나타내 보면,

$$\frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{4} \quad = \quad \frac{3}{4}$$



이다. 모든 분수를 단위분수 형태로 나타낸다는 것이 자연스러운 것임을 알 수 있다. 어린이 4명에게 사과 3개를 주면서 똑같이 나누어 먹으라고 하면 학생들은 위의 그림처럼 할 것이다. 다만 한 가지 다른 것이 있다면, 이집트인들이 $\frac{2}{3}$를 즐겨 사용하였다는 점이다. 할 수만 있으면, 먼저 $\frac{2}{3}$를 구하고 그 나머지를 단위분수로 나타내는 방법을 그들은 썼던 것이다. 단위분수로 모든 분수를 나타내는 것은 자연스럽기는 하지만, 실제로 계산을 할 때는 번거로운 일이었으므로 오늘날 사용하는 곱셈구구표 처럼 다른 분수를 단위 분수로 고치는 환산표를 사용했다.

(6) 소수는 누가 무엇 때문에 발명했을까?

분수가 기원전 1800년경 물건을 나누려는 행위로부터 생긴 반면, 소수는 분수가 나온 지 3000년이 더 지나서야 이자계산을 쉽게 하기 위해서 발견되었다. 즉, 분수가 자연스럽게 생긴 개념인 반면, 소수는 필요에 의해 생긴 인위적인 수 개념인 것이다.

소수를 발명한 사람은 벨기에의 수학자 스테빈(Simon Stevin, 1548~1620)이다. 스페인으로부터의 독립전쟁 중 스테빈은 독립군의 회계 책임을 맡았다. 독립군의 경리부는 기부를 받거나 빚을 얻어 쓰면서 식량비나 병사의 급료 등을 지불하느라고 언제나 복잡한 계산에 시달려야 했다. 특히 이자 계산은 더욱 힘든 일이었다. 이자가 $\frac{1}{10}$일 때에는 간단하였으나, $\frac{1}{11}$이나 $\frac{1}{12}$일 때에는 계산이 복잡해진다. 그 당시에는 이자는 모두 단위분수로 나타내는 관습이 있었다. 이자 계산을 좀 더 쉽게 할 수 있는 방법을 찾던 스테빈에게 좋은 생각이 떠올랐다.

"$\frac{1}{11}$은 거의 $\frac{91}{1000}$과 같기 때문에 $\frac{9}{100}$로 나타내고, 또 $\frac{1}{12}$은 $\frac{8}{100}$을 대신 쓰도록 채권자들과 합의만 하면 계산은 훨씬 간단해 지겠구나!"

이와 같이 이자를 나타내면 복잡한 나눗셈에 골치를 앓을 것도 없이 누구든지 간단히 계산할 수 있었다. 그래서 그는 곧 이자가 $\frac{1}{10}$에서부터 $\frac{5}{10}$까지 여러 가지 경우를 계산한 표를 만들어서 1548년에 출판하였다. 이자 계산표를 만든 후 $\frac{3328}{10000}$이니 $\frac{259712}{1000000}$이니 하는 분수 꼴로 되어 있을 때, 어느 쪽이 큰 수인지 분간하기가 힘들어 알아보기 쉽고도 편리하게 나타내는 방법을 연구했다. 이 두 수 중의 어느 쪽이 더 큰 수인가를 판가름하기 위해서는, 분자와 분모를 함께 비교해 보아야한다. 그러니까, 분모에 0이 몇 개 있으며, 분자가 몇 자리의 수인가를 동시에 알아보아야만 한다.

$\frac{259712}{1000000}$	$\frac{3328}{10000}$
↓	↓
①②③④⑤⑥	①②③④⑤⑥
2 5 9 7 1 2	3 3 2 8

고민 끝에 위와 같이 쓰게 되었고, 같은 ①자리에 있는 수는 오른쪽이 크다는 것을 금방 알 수 있었다. 이렇듯 1584년 소수를 처음 발표할 당시에는 3.268을 3⓪2①6②8③ 이와 같이 복잡하게 나타내었다. 오늘날과 같은 표기법은 소수 발견 후 33년이 지난 1617년에 이르러 네이피어(John Napier, 1550~1617)가 만들어 내었다.

(7) 단위 분수 이야기 (노인의 유언)

분수에 얽힌 재미난 문제를 소개한다. 아주 먼 옛날, 한 노인이 살고 있었습니다. 노인은 17마리의 낙타를 기르고 있었습니다. 세월이 강물처럼 흘러 노인이 죽게 되었습니다. 노인은 자기의 세 아들을 불러 놓고 유언하였습니다.

″얘들아! 내가 가지고 있는 낙타의 $\frac{1}{2}$은 큰애에게, $\frac{1}{3}$은 둘째에게, $\frac{1}{9}$은 막내에게 주겠노라.″

아들들의 울음소리를 뒤로 한 채 노인은 숨을 거두었습니다. 아들들은 고민에

빠졌습니다. 17이란 수는 2, 3, 9중 어떤 수로도 나누어지지 않았기 때문이었습니다. 이 때, 낙타를 몰고 가던 한 소년이 말하였습니다.

"아저씨들! 걱정하지 마세요. 제가 간단하게 해결해 드릴게요. 아저씨들이 가지고 있는 17마리의 낙타에 제가 가지고 있는 낙타 한 마리를 더하면 간단히 해결돼요."

"어떻게?" 형제들은 눈이 휘둥그레 졌습니다.

"잘 보세요. 큰 형님은 18÷2=9 이므로 아홉 마리를 가지세요. 둘째 형님은 18÷3=6 이므로 여섯 마리를 갖고 막내 동생은 18÷9=2 이므로 두 마리를 가지세요."

"그럼, 넌?"

"걱정 마세요. 그러고도 한 마리 남잖아요. 그것은 원래 제 낙타이니까요."

정말이었습니다. 아들들은 아홉 마리, 여섯 마리, 두 마리로 아버지의 유언대로 유산을 가를 수가 있었습니다.

그럼, 과연 맞게 분배한 것일까요? 아닙니다. 물론 틀린 것이죠. 노인의 유언에 함정이 있었던 것입니다. 노인의 유언대로 라면 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$로서 처음부터 낙타는 분배할 수조차 없었습니다. 옛날 이집트인들은 분자가 1인 단위 분수 만들기를 좋아해서 만들어낸 재미있는 이야기입니다.

3. 문자와 식

(1) 문자와 기호는 어떻게 만들어졌을까?

혹시 기호는 수학에서만 사용한다고 생각하고 있는가?

영어를 배우려면 우선 알파벳을 외워야하고, 지도를 보려면 학교, 광산, 도로 등의 표시를 알고 있어야 하며, 운전을 하려면 교통표지판의 뜻을 알아야 한다. 이 모든 것이 수학에서의 기호와 같은 것이다. 이 모든 기호는 약속일 뿐 이다. 그 약속 사항에 익숙해지기만 하면 지도를 읽는 일이나, 운전할 때 교통표지판을 보는 일이 어려운 일이 아니듯 수학 기호 또한 마찬가지이다.

그러면, 왜 수학에서 기호를 사용하게 되었을까? '어떤 수의 2배에 1을 더한 다

음, 다시 3배를 한 후에 1을 뺐더니 26이 됐다. 어떤 수는 얼마인가?' 라고 쓴 글을 읽으면 한 눈에 문제가 들어오지 않는다. 그러나 이 말을 '$(2x+1)\times 3-1=26$' 이라고 써놓으면, 문제가 한 눈에 들어올 뿐만 아니라, 어떤 수 x를 구하기도 쉬워진다. 이렇듯 말로 풀어쓸 경우 내용이 길어질 뿐만 아니라, 문제 상황을 이해하기가 힘들기 때문에 말로 되어있는 문장을 줄여 쓰기 시작했다. 처음에는 긴 문장을 줄여 쓰다가 다시 이 내용을 다른 문자나 기호로 표현하여 오늘날의 수식으로 발전하게 된 것이다.

문장을 문자와 기호로 나타내는 **대수적 표기**를 처음으로 사용한 사람은 디오판토스이다. 디오판토스는 『산학』이라는 책에서 미지수, 6차까지의 미지수의 거듭제곱, 뺄셈, 등호, 역수 등에 대한 축약을 사용하였다. 예를 들어

x^3+13x^2+5x와 x^3-5x^2+8x-1은 각각 $K^{\Upsilon}\alpha\,\Delta^{\Upsilon}\iota\varsigma\varepsilon$와 $K^{\Upsilon}\alpha\varsigma\eta\Lambda\,\Delta^{\Upsilon}\varepsilon\dot{M}\alpha$

와 같이 표기하였다. 인도 사람들도 덧셈은 일반적으로 병렬로 표시하고, 뺄셈은 빼는 수 위에 점을 찍어 표시하였으며, 곱셈은 bha를 항 뒤에 써서 나타냈으며, 나눗셈은 나뉨수 밑에 나눔수를 써서 표현했고, 제곱근은 ka를 그 양의 앞에 써서 나타냈다. 브라마굽타(Brahmagupta, 7세기)는 미지수를 yā 로 나타냈으며, 이미 알고 있는 정수는 rū 를 앞에 붙여서 나타냈다. 그 이외의 미지수는 서로 다른 색깔에 대한 단어들의 첫 음절로 표시했다. 이를테면 두 번째 미지수는 kā ('검정'이라는 뜻의 'kālaka'의 첫음절)로 표시되었다. 예를 들어 $8xy-7$은 yā kā 8 bha rū $\dot{7}$로 표현할 수 있다.

이 후 비에트(Francois Viete, 1540~1603), 데카르트(Descartes : 1596~1650)등의 많은 수학자들에 의해 현대의 문자표기 방식, 기호 등이 확정된 것이다. 즉, 문자와 기호의 사용은 복잡한 문제를 좀 더 편하게 표현하기 위해 만들어졌고, 이렇게 간단하게 문제를 표현할 수 있게 됨으로서 수학이 더욱 발전할 수 있었다.

(2) 아주 오랜 옛날에는 방정식을 어떻게 풀었을까?

가. 방정식의 풀이 방법의 원조 - 가정법

고대 이집트 시대에는 여러 가지 사실을 기록하는 데 종이 대신 파피루스라는 것을 썼다. 기원전 1650년경 이집트의 승려 아메스가 남긴 파피루스에는 분수의 계산을 비롯하여 많은 수학 문제가 나와 있는데, 그 중에 '아하 문제('아하'란 알지 못하는 값을 말한다)'라는 것이 있다.

'아하'에 '아하'의 $\frac{1}{7}$을 더하면 19가 된다. 그 수를 구해 보자.

이집트 사람들은 이러한 문제를 '가정법'이라 불리는 방법을 사용해서 해결했다. 그 풀이법의 골자는 바로 이런 것이다. 먼저 답을 어떤 수, 가령 7이라고 가정한다(가정하는 것이므로 다른 수여도 상관없다.). 그렇게 하면 $7+7\times\frac{1}{7}=8$이 된다. 그러나 원하는 값은 8이 아니라 19이므로 8을 19로 만들기 위해서는 $2, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ 배를 해서 더해야 한다.

$$8\times2+8\times\frac{1}{4}+8\times\frac{1}{8} = 16+2+1 = 19$$

따라서 처음에 가정한 수 7의 $2, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$배를 해서 더한 값이 답이 된다.

$$7\times2+7\times\frac{1}{4}+7\times\frac{1}{8} = 14+\frac{7}{4}+\frac{7}{8} = \frac{133}{8}$$

이 방법은 우리가 방정식을 배우기 이전에 미지의 값을 구하기 위하여 이것저것 미리 대입해 보았던 방법과 어느 면에서는 유사하다.

나. 디오판토스에 의한 기호의 등장

가정법을 이용하거나 일일이 대입해 확인하는 과정을 거치지 않고 단번에 풀 수 있도록 한 사람은 바로 '대수학의 아버지' 디오판토스이다. 디오판토스는 모르는 수를 ς로 놓고 식을 세워 문제를 풀 수 있도록 했다. 그러나 모르는 수를 ς로 놓고 푸는 방법을 알아내는 것은 쉬운 일이 아니었다. 여기에는 '모르는 것'을 '안다'고 생각하는 사고의 대전환이 필요했다.

지금의 우리는 모르는 문자를 x로 두어 아하 문제를 쉽게 풀 수 있다.

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

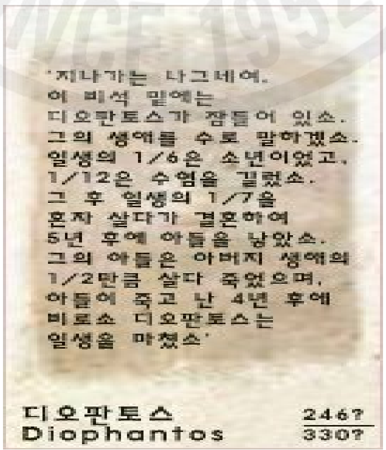
$$8x = 133$$

따라서, 아하는 $\frac{133}{8}$ 이다.

(3) 대 수학의 아버지 디오판토스

디오판토스(Diophantos : 3세기경)는 3세기 후반 알렉산드리아에서 활약했던 그리스의 수학자이며, 대수학의 아버지로 알려져 있다. 디오판토스는 특히 정수론과 대수학에 큰 공을 세운 수학자로서 미지수를 문자로 쓰기 시작하였다.

'디오판토스 해석'이라는 일종의 부정방정식 해법을 연구하였는데, 『산학(Arithmetica)』 13권에는 수사, 미지수, 계산 기호 등을 사용하여 대수학을 만들어 1차, 2차 방정식 및 연립방정식을 풀고 있다. 또 부정방정식 중에는 '주어진 평방수를 두 개의 평방수로 나누어라'는 문제가 있는데, 이것이 후에 페르마에게 큰 영향을 주어 '페르마의 대정리'가 되었다고 한다. 페르마는 '페르마의 대정리'를 포함해서 자신이 발견한 정리들을 디오판토스 책의 라틴어 번역판 여백에 적어 놓았다고 하니, 디오판토스가 후세에 미친 영향은 실로 대단하다고 하겠다. 그러나 디오판토스가 언제 어디서 태어났는지, 어떤 집안 출신인지, 심지어는 어떻게 죽었는지조차 알려진 것이 없다. 다만 그의 묘비에 글귀가 새겨져 있어 그가 84세까지 살았다는 것을 알 수 있을 뿐이다.



<그림 Ⅳ-13>
디오판토스의 비문

(4) x 는 누가 처음 사용 하였을까?

프랑스 수학자 데카르트(Descartes : 1596～1650)가 처음으로 사용하였다. 그는 1637년 a, b, c, …를 기지수로, 문자 x, y, z, ……를 미지수로 사용하였는데, 이 때 y, z보다 x가 특히 더 많이 사용되고 있는 이유에 대해서는 다음과 같은 두 가지 주장이 있다. 첫째는 인쇄상의 문제이다. 즉 데카르트의 원고를 조판하던 식자공(植字工)이 y활자나 z활자보다 x활자가 더 많이 남아 있어서, 데카르트의 허락을 받아 미지수를 x활자로 조판했기 때문에 x가 주로 사용 되었다는 것이고, 다른 하나는 x를 중세 시대에 미지수를 나타냈던 아랍어 shei의 음역인 xei의 첫 자로 보는 견해이다.

(5) " 1=2 라면 세상의 모든 말이 다 참이다." - 러셀

영국의 철학자이자 수학자였던 러셀이 어느 대학의 강연에서 "1=2 라면 세상의 모든 말이 다 참이다."라고 주장했을 때, 한 학생이 "그렇다면 당신이 로마교황임을 증명해 주십시오."라고 질문은 하였다. 러셀은 다음과 같은 방법으로 자신이 로마 교황임을 증명하였다.

[탐구문제] $x-2=2x-1$의 방정식을 풀어보자.

(풀이) $-2,-1$을 서로 다른 변으로 이항하면 ---①

$$x+1=2x+2$$

따라서 우변을 2로 묶어주면 ---②

$(x+1)=2(x+1)$이 된다.

양변을 $(x+1)$로 나누면 ---③

1=2 라는 결론이 나온다.

그런데, 나와 교황은 둘이다. ---④

앞서 우리는 1=2 라 하였으므로 '둘은 곧 하나이다.'에서 나와 교황은 둘이지만 하나이다. 따라서 나와 교황은 같다. 자 이제 나는 곧 교황이라는 증명이 끝났다.

과연 그의 증명의 어디에 문제가 있었을까? ③번이 잘못 되었다. 이러한 모순

이 나온 것은 우리가 너무나 잘 알고 있다고 믿고 있는 '등식의 성질' 중 네 번째 "양변을 0으로 나누어서는 안 된다."는 것을 잠시 잊고 계산했기 때문이다. 이 방정식을 다시 풀어보면

$$x-2=2x-1$$

$2x$를 좌변으로, -2를 우변으로 이항하면,

$$x-2x=-1+2$$

$$-x=1$$

$$x=-1$$

즉, $x=-1$ 이 되므로 $x+1=0$이 된다. 그런데, 양변을 $x+1$로 나누었기 때문에 0으로 양변을 나눈 것이 되었다.

(6) 0으로 나눌 수 있으면 세상은 온통 뒤죽박죽 !

그 동안 등식의 성질이나 실수의 연산 법칙에서 항상 '0으로 나누는 것은 제외'라는 조건이 따라다니는 것을 어떻게 이해하고 받아들여 왔는지...... .

그냥 대수롭지 않게 넘겼을 수도 있지만, 수학에서 0으로 나누는 것을 제외시킨 이유는 위에서도 살펴봤듯이, 등식을 0으로 나눌 수 있으면 엄청난 모순이 일어나기 때문에 이것을 피하기 위해서이다.

(7) 수학은 답이 항상 하나일까 ?

가. 불능(不能)

수학에서는 조건에 맞는 해를 아무리 열심히 찾아도 찾을 수 없는 경우가 있다.

아래의 문제를 풀어 보자.

[문제] $-5(x-1)+3=-5x+20$

(풀이) $-5x+5+3=-5x+20$

$$-5x+5x=20-5-3$$

$$0 \cdot x=12$$

$$\therefore \quad x = \frac{12}{0} \quad (\ ?\ )$$

$\frac{12}{0}$ 라는 수가 존재 하는가? 수학에서 분모가 0인 수는 다루지 않기 때문에 (즉, 0으로 나누는 것은 생각하지 않는다) 위 식의 해를 $\frac{12}{0}$ 라고 하는 것은 잘못이다. $x = \frac{12}{0}$ 이전의 식으로 돌아가자.

$$0 \cdot x = 12$$

바로 여기에서 0으로 등식을 나누지 말고 x에 수를 대입해 보자.

$x = 1$ 이면 $\quad 0 \cdot 1 = 0 \neq 12$

$x = 2$ 이면 $\quad 0 \cdot 2 = 0 \neq 12$

$x = 3$ 이면 $\quad 0 \cdot 3 = 0 \neq 12$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

x에 어떠한 숫자를 대입하더라도 좌변은 항상 0이 되기 때문에 우변의 12와 같을 수 없다. 즉, 해는 존재하지 않는다.

이처럼 주어진 조건을 만족하는 해가 존재하지 않을 때, 우리는 해를 구하는 것이 불가능(不可能) 하다는 것을 알 수 있다. 그래서 해가 존재하지 않는 방정식을 '불능'이라 한다.

나. 부정(不定)

모두가 조건을 만족한다면 모두 다 선택할 수밖에......

수학에서도 이러한 예는 쉽게 발견된다. 간단한 문제를 풀어보자.

[문제] $\quad 3(x-1)+2 = -1+3x$

(풀이) $\quad 3x-3+2 = -1+3x$

$$3x-3x = -1+3-2$$

$$0 \cdot x = 0$$

잠깐! 0으로 나누면 안 된다는 사실을 기억 하겠지요? 이제 더 이상 식을 정리할 수 없기 때문에 x에 적당한 수를 대입해서 해를 찾아보자.

$x=1$이면　　　　$0\cdot 1=0$

$x=2$이면　　　　$0\cdot 2=0$

$x=3$이면　　　　$0\cdot 3=0$

$\vdots$　　　　　　$\vdots$

1, 2, 3 모두 조건을 만족한다. 뿐만 아니라, 아직 대입하지 않은 수 중에서 어떠한 수를 생각하더라도 0×(수)=0 이므로 항상 좌, 우변은 일치한다. 일차 방정식의 해는 항상 하나였는데(물론 불능의 경우는 제외), 지금은 너무나 많아서 하나로 정하는 것이 불(不)가능하다. 그래서 해가 너무나 많은 방정식을 '부정'이라 한다.

(8) 일차 방정식의 해법을 다룬 사람은 누굴까?

일차 방정식 $ax+b=0$, (단, $a\neq 0$)의 근은 $x=-\frac{b}{a}$이다. 이러한 일차 방정식의 풀이는 고대로부터 잘 알려져 있었다. 그러나 이것을 오늘날과 같이 체계적으로 다룬 것은 아라비아의 수학자 알-콰리즈미(al-Khwarizmi, 780-850)가 820년에 출판한 「알제브르 왈무카발라(Al-gebr wa-al-muqabala)」라는 책에서이다.

그는 이 책 속에서 책제목에 나타난 대로 이항하여 동류항을 정리하는 방법을 써서 일차 방정식의 풀이를 설명하고 있다.

예를 들어,

$$5x-7=3x+5$$

라는 일차 방정식이 주어졌을 때, '알-제브르(이항)'에 의하여

$$5x-3x=5+7$$

이 되고, '알-무카발라(동류항 정리)'에 의해서

$$2x=12$$

가 된다. 다시 양변을 2로 나누면

$$x=6$$

이라는 일차 방정식의 근이 얻어진다.

유럽에서는 이 책 표제의 머리 부분이 '알-제브르' 라는 이름으로 널리 알려져 있고 이것이 변하여 오늘날 대수학(代數學)을 의미하는 '앨지브라(algebra)'라는

단어가 되었다고 한다.

4. 함수

(1) 함수의 근원 - 고대 바빌로니아 시대

현대 수학의 출발점인 그리스 수학에는 함수라는 것이 전혀 없었고 함수에 대해 관심도 기울이지 않았다. 오히려 바빌로니아의 수학에는 함수의 성질을 가진 것이 눈에 띈다. 기원전 5세기경의 바빌로니아 사람들이 천문학을 연구하면서 만든 수표는 함수를 나타낸다. 그들은 천체의 위치의 주기성을 발견하고 경험적 자료를 바탕으로 천체의 운동을 나타내는 경로를 추정하고 이를 수표로 나타내었다. 기울기나 그림자의 길이와 관련되어 자연스럽게 제기된 Tangent의 기원도 바빌로니아이다. 그리스의 천문학자 프톨레마이오스의 천문학 책에는 현의 표가 나오는데 이는 천체운동을 삼각함수로 기술한 것이다. 일차함수, 이차함수, 삼차함수와 같은 함수의 기원 역시 그것이 의식적으로 다루어지지는 않았지만 바빌로니아 수학에서 찾아볼 수 있다.

(2) 개념화된 함수의 도입 - 라이프니츠, 오일러

개념화된 함수는 17세기에 이르러 역학에서 물체의 운동을 곡선으로 나타내어 연구하는 가운데 시간과 거리와 같은 변량 사이의 관계로서 수학에 도입되었다. 갈릴레이가 발견한 물체의 낙하 법칙에서 운동하는 물체의 위치 y는 시간 x에 대하여 $y=\frac{1}{2}gx^2$이 되는 것을 말로 서술한 것이다. 즉, 이 법칙에는 '변수 y는 변수 x의 각각의 값(시간)에 대응하여 결정된다'는 함수 개념이 포함되어 있다.

뉴턴과 함께 미적분학을 창시한 라이프니츠가『접선의 역방법, 곧 함수에 관해서』라는 논문에서 처음으로 함수(functio)라는 이름을 사용했다. 그러나 이때의 함수의 개념은 지금의 함수개념과는 판이한 것이다. 여기서 functio는 접선, 접선영, 법선, 법선영 등의 기하학적인 '양(量)'을 뜻하였으나 이어서 이러한 양 사이의 '관계'로, 그리고 「변량 x의 함수란 x에 관한 식이다」라는 생각으로 바뀌어져 갔다는 것을 라이프니츠와 요한 베르누이 사이의 왕래 서신(특히 1694, 1698

년)을 통해 알 수 있다. 라이프니츠는 곡선 위를 점이 움직일 때 그 점에서 그은 곡선의 접선이나 그 점에서 나타나는 곡률을 움직이는 점의 함수라고 했다.

처음으로 함수 개념을 명확히 정의한 사람은 오일러이다. 해석기하학의 발달과 함께 여러 가지 곡선이 방정식으로 표현되면서 변량 사이의 함수 관계가 하나의 방정식으로 나타내어지게 되었다. 오일러는 그러한 상황을 일반적인 것으로 인식하고, 자신의 저서『무한소 해석 입문』에서 '정수와 변수로 조합된 해석적인 식을 그 변수의 함수라고 한다'라고 정의하였다. 그리고 해석적인 식의 예로

$$a+3x,\ \ ax-4x^2,\ \ ax+b\sqrt{a^2-x^2}$$

등을 들고 있다. 오일러는 변량 사이의 관계를 나타내는 해석적인 표현, 곧 식을 함수라고 정의한 것이다. 오일러가 임의의 함수는 직선 또는 곡선을 나타내고, 역으로 임의의 곡선은 함수에 의해 나타내어진다고 한 것은 수학의 중심이 기하학으로부터 기호적 대수로 옮아가는 것을 나타내고 있다는 점에서 주목을 끈다.

(3) " x 에 대한 함수 $f(x)$" 이 표현은 누가 제일 먼저 썼을까?

수학에서 사용되는 모든 기호들은 보다 편리하고 알아보기 쉽도록 연구에 연구를 거듭해서 탄생된 것이다.

함수를 나타내는 f 또한 마찬가지이다. '함수' 는 영어로 'function'이라고 하며, 독일의 수학자 라이프니치(G.W.F.Leibniz ; 1646-1716)가 제일 먼저 사용 했다고 한다. 그 후, 오일러(Leonhard Euler ; 1707-1783)가 함수를 표현하는 방법으로 $f(x)$를 쓰기 시작했고, 여러 개의 함수를 나타내기 위해서는 f부터 알파벳순으로 $f,\ g,\ h,$……를 사용한다.

(4) 좌표의 탄생

단순한 수식이나 대응 관계로만 보이던 함수를 '그래프' 라는 강력한 도구로 한눈에 알아 볼 수 있도록 한 사람은 데카르트(Rene Descartes;1596~1650) 이다. 데카르트는 태어나자마자 어머니를 여이고 어려서부터 몸이 허약하여, 이를 염려한 그의 아버지는 8살이 될 때까지 학교에 보내지 않았다.

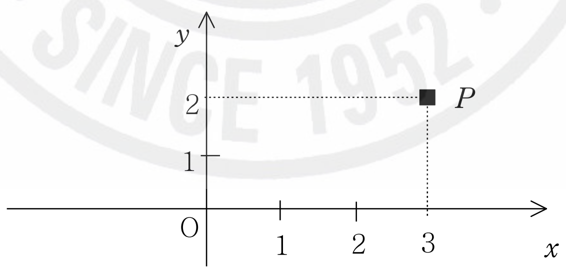
그러나 데카르트의 뛰어난 재능을 아깝게 여기던 아버지는 결국 그를 예수회

학교에 보냈다. 마침 학교의 교장인 샤를레 신부는 영리한 데카르트를 귀여워해서, 몸이 약한 그에게 아침 기상 시간과 관계 없이 침대에 누워 있어도 좋다고 허락 했으며, 교실에서 친구들과 있기 싫으면 방으로 가도 좋다고 했다. 후에 중년이 된 데카르트는 그때의 아침 명상 시간이 자신의 철학과 수학의 원천이 되었음을 고백할 정도였다.

그 후, 학교를 졸업한 데카르트는 수학의 증명만이 가장 과학적이며 엄밀한 사고라는 결론에 도달하여, "나는 생각한다. 고로 존재한다." 라는 유명한 말을 남기기도 했다.

데카르트가 수학 역사상 큰 획을 그은 좌표를 생각해낸 것은, 그가 심신의 평안을 찾기 위해서 전쟁터에 지원했을 때였다. 그때에도 그는 막사의 침대에 누워 생각에 잠겨 있었는데 마침 천장을 기어 다니는 파리를 발견하고는 그 파리의 위치를 쉽게 나타내는 방법이 없을까 하고 고민하게 되었다. 고민 끝에 그는 천장에 있는 세로줄과 가로줄을 기준으로 하면 된다는 사실을 알아냈다. 결국 그는 천장에 있는 가로축과 세로축으로 부터 '좌표'라는 개념을 탄생 시켰던 것이다.

데카르트가 만들어 낸 '좌표'의 원리는 평면 위에 존재하는 점의 위치를 나타내기 위하여, 기준축의 교점이 되는 원점 O에서부터 가로축으로 얼마만큼, 세로축으로 얼마만큼 떨어져 있는가를 순서쌍으로 나타내는 것을 말한다.



위 그림에서 점 P는 원점 O에서 오른쪽으로 3칸, 위로 2칸 떨어져 있으므로 (3, 2)로 표시한다. 역으로 (3, 2)라는 순서쌍을 좌표평면 위에 나타낼 수도 있다.

데카르트가 만든 '좌표'는 대수학과 기하학에 획기적인 발전을 가져왔을 뿐만 아니라, 함수를 표현하는 수단으로도 크게 환영 받게 되었다.

(5) $f(x)=x^2+ax$, $g(a)=x^2+ax$ 는 같은 함수일까 ?

다음의 두식

$$f(x)=x^2+ax \cdots ①$$

$$g(a)=x^2+ax \cdots ②$$

를 살펴보자.

두 식을 보면 우변은 일치하지만, 좌변의 표현은 각각 $f(x)$와 $g(a)$라고 되어 있어서 ①은 x에 대한 (이차)함수, ②는 a에 대한 (일차)함수라는 의미를 갖는다.

위에서 0의 함수 값을 구해 보면

$$f(0)=0^2+a\cdot 0=0$$

$$g(0)=x^2+0\cdot x=x^2$$

이 된다. 수를 대입하는 독립변수가 다르기 때문에(f는 x에 대입, g는 a에 대입), 함수 값이 일치하지 않는다. 따라서 f, g 는 다른 함수이다.

반면에, 아래의 두 식은 독립변수는 다르지만, 같은 함수를 나타낸다.

$$f(x)=x-5$$

$$g(t)=t-5$$

f와 g는 똑같이 독립변수에서 5를 빼는 규칙을 나타내고 있기 때문에 두 함수는 같은 함수이다.

(6) 같은 함수는 몇 개나 있을까?

$$f(x)=x+4 \quad \cdots ①$$

$$g(2x)=2x+4 \quad \cdots ②$$

$$h(x^2-1)=x^2+3 \quad \cdots ③$$

위의 함수 중에서 같은 함수는 몇 개나 있을까?

①번부터 ③번까지 모두 다른 모양을 하고 있기 때문에 같은 함수는 없는 것 같다. 과연 모두 다른 함수일까?

①번 함수 $f(x)$는 x에 대한 함수이며, x에 4를 더하는 규칙을 나타내고 있다. 즉,

$$\begin{array}{ll} x=0\text{이면} & f(0)=4 \\ x=1\text{이면} & f(1)=5 \\ x=2\text{이면} & f(2)=6 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

②번 함수 $g(2x)=2x+4$는 $2x$에 대한 함수이며, $2x$에 4를 더하는 규칙을 표시하고 있다. x의 값을 변화하면서 함수 값을 살펴보는데, 함수 g에 대입되는 변수는 $2x$임을 주의하자.

$$\begin{array}{ll} x=0\text{이면} & g(2x)=g(0)=4 \\ x=\frac{1}{2}\text{이면} & g(2x)=g(1)=5 \\ x=1\text{이면} & g(2x)=g(2)=6 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

①번 함수와 비교해 볼 때, x의 값을 적절히 대입하면,

$$f(0)=g(0)\ ,\ f(1)=g(1)\ ,\ f(2)=g(2)\ ,\ \cdots$$

임을 확신 할 수 있다.

③번 함수 $h(x^2-1)=x^2+3=(x^2-1)+4$ 는 (x^2-1)의 함수이며, 이 또한 독립변수 (x^2-1)에 4를 더하는 대응임을 알 수 있다.

$$\begin{array}{ll} x=1\text{이면} & h(x^2-1)=h(0)=4 \\ x=\sqrt{2}\text{이면} & h(x^2-1)=h(1)=5 \\ x=\sqrt{3}\text{이면} & h(x^2-1)=h(2)=6 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

이 경우도 $f(0)=h(0)$, $f(1)=h(1)$, $f(2)=h(2)$, $\cdots$ 가 되는 것을 확인할 수 있다.

전혀 다른 모양을 하고 있는 세 개의 함수가 사실은 모두 같은 함수를 나타낸다는 것을 알았다. 바꾸어 말하면, ①번 $f(x)=x+4$를 여러 가지 다양한 모습으

로 표시할 수 있다는 뜻이 된다. 이렇게 본다면 $f(x)=x+4$를 표시하는 방법으로 굳이 ①번 모양의 함수식을 고집할 필요는 없을 것이다. 각자 개성과 취향에 맞게 ②, ③번을 사용 할 수도 있고, 필요하다면 더 만들 수도 있다.

그러나 다음의 경우에 ②, ③번 함수식은 난관에 부딪치게 된다.

“$\frac{5}{2}$의 함수 값은 얼마인가?”

①번식은 x에 바로 $\frac{5}{2}$를 대입하면 된다. $f(\frac{5}{2})=\frac{5}{2}+4=\frac{13}{2}$.

그러나 나머지 식은 x에 $\frac{5}{2}$를 대입하면 전혀 엉뚱한 수의 함수 값을 계산하는 결과가 된다.

예를 들면, g의 x에 $\frac{5}{2}$를 대입하면, $g(2\times\frac{5}{2})=g(5)$가 되어서 $\frac{5}{2}$의 함수 값이 아니라 5의 함수 값을 구하는 결과가 된다. 그러므로 괄호 속 전체의 수가 $\frac{5}{2}$가 되도록 x의 값을 잘 선택해야 한다.

②번 : $x=\frac{5}{4}$ 대입 $\quad g(2x)=g(2\times\frac{5}{4})=g(\frac{5}{2})$

③번 : $x=\sqrt{\frac{7}{2}}$ 대입 $\quad h(x^2-1)=h(\frac{7}{2}-1)=h(\frac{5}{2})$

즉, ②, ③의 경우 함수 값을 구하려면 조건에 맞는 x의 값을 찾기 위해 많은 시간을 소비해야 한다. 그래서 함수를 나타내는 다양한 식 중에서 가장 간단한 ①번식을 선택해서 하나의 변수 x에 대한 식으로 나타내기로 약속했다.

이는 개성을 무시하는 억압이 아니라, 보다 빠른 계산을 위한 수학자들의 배려인 것이다.

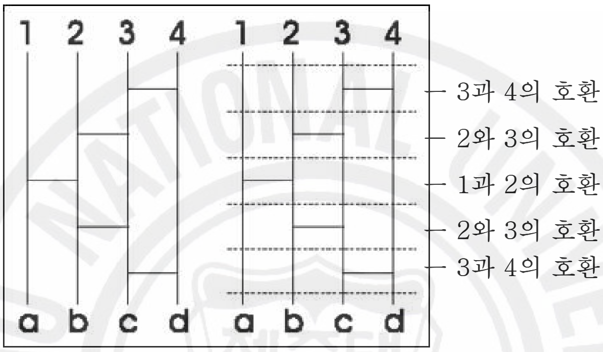
(7) 사다리타기도 함수이다!

사다리 타기는 돈 낼 사람을 정할 때, 상을 줄 때, 혹은 짝짓기를 할 때 자주 동원하는 방법이다. 사다리 타기를 할 때에는 위쪽과 아래쪽에 동일한 개수의 항목을 적어놓고 세로줄과 가로줄을 그린 뒤, 다음 두 가지 규칙을 따라 짝을 짓는다.

첫째, 세로줄의 위에서 아래로 진행한다.

둘째, 세로줄을 따라 가다 가로줄을 만나면 그 가로줄을 따라 바로 옆의 세로줄로 이동한다.

그림의 모양이 복잡해지면 혹시 술래로 두 사람이 나오거나, 한 항목이 여러 개와 연결되거나, 아무 것과도 연결되지 않는 '꽝'이 나올지 모른다는 생각이 들기도 한다. 그러나 예상과 달리, 어떤 모양으로 사다리를 그려도 각기 위와 아래 항목이 하나씩만 짝지어진다는 사실에는 변함이 없다. 이런 이유로 사다리 타기는 반드시 하나씩만 연결되어야 하는 상황에 이용된다.



<그림 Ⅳ-14> 사다리 타기

1, 2, 3, 4 와 a, b, c, d를 짝짓기 위하여 위의 그림과 같이 사다리 타기를 한다고 가정해보자. 앞의 규칙에 따라 이동을 하면 1은 b와 c를 거쳐 d로 연결된다. 또 2는 c를 거쳐 b로 연결되며, 3은 d를 거쳐 c로, 4는 c와 b를 거쳐 a로 연결된다(아래 단의 a, b, c, d가 일렬이 되게).

그림과 같이 사다리를 각 단계별로 나누어 보면(점선으로 표시) 하나의 세로선은 옆의 세로선과 연결되어 있다. 이를 통해 바로 옆의 것과 자리바꿈을 하는데, 수학적으로는 '호환(互換, transposition)'이라고 한다.

이러한 자리바꿈을 두세 번 반복하여도 서로 하나씩 맞바꾼다는 점에는 변화가 없다. 수학적으로 표현하면 '호환'을 '합성'하여도 서로 하나씩만 대응되는 '일대일 대응'이 된다. 따라서 처음에 일대일 대응으로 시작하면 아무리 복잡한 사다리를 거치더라도 그 결과는 일대일 대응이 된다.

<수학자의 묘비에는 어떤 내용이 적혀 있을까?>

태어나고 죽은 연도와 직계 가족의 이름이 적혀 있는 일반인의 묘비와 달리 적지 않은 수학자의 묘비에는 자신이 발견한 수학적 업적이 새겨 있다.

묘비에까지 수학을 새기고자 하는 수학에 대한 애착이 그들을 위대한 수학자로 만들었을지 모르겠다.

수학자들의 묘비를 계기로 자신의 묘비에 의례적인 사항 이외에 무엇을 새길지 한 번쯤 생각해 보는 것도 나쁘지 않을 것 같다.

(1) 디오판토스의 묘비

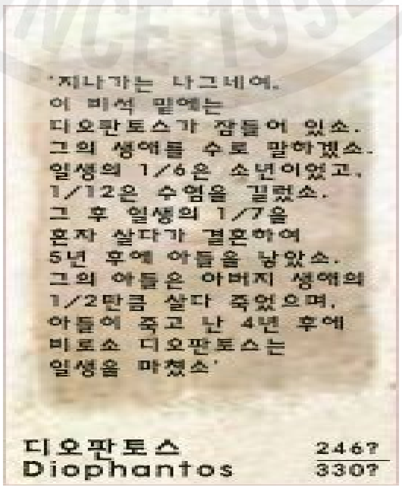
옆 비문은 그리스의 수학자 디오판토스(Diophatos, 246?～330?)의 묘비에 새겨진 글이다. 그는 유클리드 이레 유행 했던 기하학적 전통에서 벗어나 대수학 연구에 도전했다. 특히 방정식에 몰두했던 그는 묘비에까지 일차 방정식 문제를 출제했다. 이 묘비에 주어진 정보를 식으로 표현해 보면 다음과 같다.

디오판토스의 나이를 x라하고 일차방정식을 세워 보면,

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x$$

이 된다.

이 방정식을 풀어 x를 구하면 84, 즉 디오판토스는 84세까지 살았다. 디오판토스는 246년에 태어나 330년에 사망한 것으로 알려져 있다.



<그림 1> 디오판토스의 비문

(2) 아르키메데스의 묘비

아르키메데스(Archimedes, BC.287?~BC.212)의 연구는 다방면에 걸쳐 있지만, 가장 중요한 업적 중의 하나는 원기둥에 내접하는 구의 부피가 원기둥의 부피의 $\frac{2}{3}$가 된다는 사실을 발견한 것이다. 아르키메데스의 묘비에는 그의 소원에 따라 원기둥에 내접하는 구가 새겨져 있다.

반지름의 길이가 r인 구가 원기둥에 내접할 때, 원기둥 밑면의 반지름은 r이고 높이는 $2r$이 된다.

따라서

$$\text{구의 부피 : 원기둥의 부피} = \frac{4}{3}\pi r^3 : 2\pi r^3 = \frac{4}{3} : 2 = 2:3$$

<그림 2> 아르키메데스의 비문

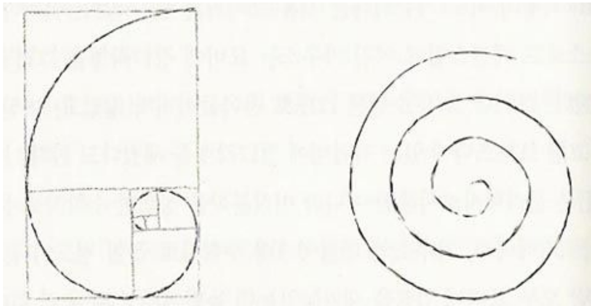
(3) 야곱 베르누이의 묘비

수학사에서 훌륭한 수학자를 가장 많이 배출한 가문은 스위스의 베르누이 일가이다. 베르누이 일가의 대표적인 수학자 야곱 베르누이(Jakob Bernoulli, 1654~1705)는 '등각나선'이라는 것을 생각해냈다.

등각나선(等角螺線)에서는 곡선 위의 각 점에서 그은 접선이 곡선과 이루는 각이 일정하기 때문에 그런 이름이 붙여지게 되었다.

일설에 의하면 야곱 베르누이는 묘비에 등각나선을 그리고 '나는 변하지만 똑같이 일어설 것이다(Eadern mutata resurgo).'라는 비문을 새기도록 요청했다고 한다. 그러나 등각나선을 잘못 이해한 석공이 소용돌이 무늬를 그려 넣었다는 에

피소드가 전해져 온다.

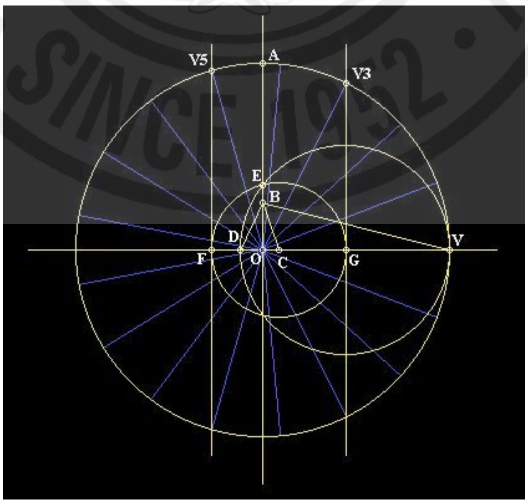


<그림 3> 등각나선과 소용돌이 문양

(4) 가우스의 묘비

19세기 독일의 수학자 가우스(Johann Carl Friedrich Gauss, 1777~1855)는 이미 18세 때 정17각형의 작도가 가능하다는 것을 증명했다. 작도가 가능하다는 것은 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 가지고 도형을 그릴 수 있음을 말하는데, 정삼각형이나 정사각형과 달리 정17각형이 작도 가능하다는 것을 보이기는 쉽지 않다.

이러한 발견을 스스로도 대견스럽게 여긴 가우스는 묘비에 정17각형을 그려달라고 요청했다. 그러나 그의 소원은 그대로 받아들여지지 않았고, 대신 가우스의 고향 브룬즈빅에 있는 기념비에 정17각형을 새겼다고 한다.



<그림 4> 리치몬드에 의한
정17각형작도

(17각형의 작도법의 가장 알기 쉽고 간결한 형태는 1893년 리치몬드에 의한 것이다. 여기에 그 작도법을 소개한다.

원의 중심 O에서 지름과 원이 만나는 점 V와 O에서 이에 수직으로 그은 이 원과 만나는 점을 A라 한다. OA의 1/4에 해당하는 점에 B점을 찍고 ∠OBV를 4등분하여 1/4되는 직선이 OV 와 만나는 점을 C라 한다. 다시 ∠CBD가 직각의 1/4이 되게 D점을 OV의 연장선 상에 찍는다. DV를 지름으로 원을 그려 그 원이 OA와 만나는 점을 E, CE를 반지름으로 C점에서 원을 그려 그 원이 OV 직선이나 이 연장선과 만나는 점을 G, F라 한다. 이제 G, F에서 GF 직선에 수선을 그려 그 수선이 O를 중심한 큰 원과 만나는 점을 V3, V5 라 하면 V, V3, V5는 정 17각형의 시작점, 3번 째 꼭지점, 5번째 꼭지점이 된다.)

(5) 뉴턴의 묘비

뉴턴(Isaac Newton, 1642～1727)은 물리학자로서 뿐만 아니라 미적분학을 정립한 수학자로 유명한데, 아르키메데스, 가우스와 더불어 3대 수학자로 꼽힐 정도이다. 다른 두 사람 모두 묘비에 업적을 새겨놓았는데 뉴턴이라고 빠질 리 없다. 그의 묘비에는 '이항정리'가 씌어져 있다고 전해진다. 이항정리란 $(a+b)^n$ 처럼 두 항을 더한 것의 거듭제곱을 전개하는 공식이다.

<그림 5> 이항정리가
그려진 조선우표

< 수학의 노벨상 ‘필즈상’과 ‘아벨상’>

가. 필즈상

오늘날 필즈메달이 수학의 노벨상이라고 일컬어지는 것은 노벨상에 수학 부문이 없고, 필즈메달의 권위가 노벨상에 버금가기 때문이다. ‘왜 수학 부문 노벨상은 만들지 않았는가?’에 대해서는 여러 가지 풍문이 있다. 그중 하나는 노벨과 당대의 유명한 수학자 미타그 레플러가 어떤 이유 때문인지는 모르지만 사이가 좋지 않았다는 설과 수학이라는 학문이 실용 과학과는 거리가 있다고 생각한 노벨의 무관심이 거론되고 있는데 후자의 설명이 더 설득력이 있다고 많은 사람은 생각하고 있다.

캐나다 토론토 대학 교수인 필즈(John Charles Fields Jr.,1863~1932)는 1924년 토론토에서 열린 국제수학자회(ICM)의 대회장을 맡게 되었다. 그는 회의를 성공적으로 개최하기 위해 많은 성금을 모금했다. 평소 수학자를 위해 노벨상과 같이 국제적으로 명성이 있는 상이 필요하다고 생각한 필즈는 대회 개최 후 남은 돈을 수학분야의 권위 있는 상을 위한 기금으로 조성했다. 1932년 취리히 국제수학자회의에서 이 상을 필즈메달이라 제정하고 1936년 노르웨이 오슬로 회의 때부터 필즈메달이 처음 수여됐다.

<그림 6> 필즈상의 앞▪뒷면과 존 찰스 필즈

필즈메달은 4년에 한 번씩 2~4명의 수학자에게 주어지고 있으며 수상자의 나이가 40세 미만의 젊은 수학자로 제한되는 것이 불문율이다. 그렇기 때문에 노벨

상 이상의 희소가치가 있다고 말할 수 있다. 재미있는 이야기로 페르마의 마지막 정리를 증명한 앤드루 와일즈(Andrew Wiles)만 해도, 최초에 증명을 내놓은 것이 1993년이었다. 그런데 이때 오류가 있음이 지적되어서 1994년에 필즈 메달을 수상하지 못했다. 완성된 증명을 내놓은 것은 1994년 ICM이 끝난 이후였는데, 1998년 ICM 때는 이미 40세가 넘어서 필즈상을 못 타고 대신 공로상을 받았다. 1936년 노르웨이 오슬로 회의부터 시작하여 2002년에 이르기까지 총 44명에게 필즈상이 수여되었다. 동양인은 일본인 3명 중국인 1명이다. 우리나라는 아직까지 유감스럽게 한 사람도 없다.

필즈상의 금메달에 새겨진 상은 필즈가 아니라 고대 그리스 수학자 아르키메데스의 얼굴이다. 한번 생각해 봐야 할 부분이다.

나. 아벨상

몇 년 전까지 수학 분야에서 노벨상에 견줄만한 상은 필즈상(Fields medal)이었다. 그런데 필즈상은 노벨상과 여러 면에서 차이가 있다. 필즈상은 4년에 한 번씩만 수여하고 수상자의 연령이 만 40세 미만으로 제한되어 있다. 또한 가문의 영광이자 국가의 영광인 필즈상에서는 상금보다 명예가 중요하기는 하겠지만 필즈상의 상금은 1만 달러에 불과해 노벨상과 큰 차이가 있다.

노벨상에 필적할 만한 상을 제정하고자 하는 수학계의 염원은 아벨상(Abel prize)으로 그 결실을 맺었다. 아벨상은 매년 수상자를 내고, 수상자의 연령 제한이 없으며, 상금은 노르웨이 크로나로 6백만, 미화로 약 백만 달러이므로, 여러 면에서 노벨상과 동격이라고 할 수 있다.

2003년 첫 수상자를 낸 아벨상은 노르웨이의 수학자 닐스 헨릭 아벨(Niels Henrik Abel, 1802~1829)을 기리기 위한 것이다. 여러 수학자 중 굳이 노르웨이 출신인 아벨의 이름을 넣은 것은 스웨덴 출신인 '노벨'과 발음이 유사하고 스웨덴과 노르웨이가 북유럽의 이웃 국가라는 점도 작용했을 것이다.

수학자 아벨의 수학적 업적 중 중요하게 손꼽히는 것은 불과 19세 때 5차 방정식의 일반해(一般解)가 존재하지 않는다는 사실을 증명한 것이다. 수학자들은 1차 방정식에서 시작하여 자연스럽게 2차, 3차, 4차 방정식으로 차수를 높여가면서 일반해를 찾았다.

이때 3차 방정식의 해법은 2차 방정식의 근의 공식을 이용하고, 또 4차 방정식의 해법은 3차 방정식의 근의 공식을 이용하는 식으로 전개되었기에, 4차 방정식의 근의 공식을 이용하면 5차 방정식의 해법을 알아낼 수 있으리라 추측했다.

기라성 같은 수학자들이 5차방정식의 해법을 찾는데 도전했지만, 큰 장애에 부딪히게 되었다. 결국 5차방정식 문제는 약 3세기 동안 수학의 난제로 남아 있다가 결국 아벨에 의해 일반해가 존재하지 않는다는 것이 증명되었다.

아벨은 5차방정식에 관한 논문을 당시 수학계의 최고 권위자였던 가우스(Gauss)에게 보냈으나, 가우스는 논문을 읽어 보지도 않고 쓰레기통에 버렸다고 한다. 결국 아벨은 당대에는 인정받지 못한 채 27세의 나이에 요절했다. 아벨의 수학적 재치를 보여주는 일화가 하나 있다. 중학생 시절 아벨은 수학 선생님에게 편지를 보냈는데, 마지막에 날짜를 $\sqrt[3]{60643.21219}$ 라고 적었다. $\sqrt[3]{a}$은 세 번 곱해서 a가 되는 수를 말한다. 예를 들어 $\sqrt[3]{8}$은 세 번 곱해서 8이 되는 수, 즉 2이다. 계산기로 $\sqrt[3]{60643.21219}$를 계산하면 약 1823.5908이 된다. 그러므로 편지를 작성한 해는 1823년이고, 소수점 아래의 0.5908을 계산하여 월일을 알아내야 한다. $365 \times 0.5908 = 215.64$이고 평년인 1823년에서 215일째 되는 날은 8월 3일이므로 215.64에 해당하는 날짜, 즉 편지를 적은 날짜는 8월 4일이 된다.

2003년 6월 3일 열린 제1회 아벨상 시상식에서는 프랑스의 세르(Jean-Pierre Serre, 1926.9.15~)가 상을 받았다. 2004년에는 영국의 아티야(Michael Francis Atiyah, 1929.4.22~)와 미국의 싱어(Isadore Manual Singer, 1924.5.4~), 2005년에는 미국의 랙스(Peter David Lax, 1926.5.1~), 2006년에는 스웨덴의 칼레슨(Lennart Carleson, 1928.3.18~)이 수상하였다.

우리나라에도 언젠가는 아벨상이나 필즈상을 받을 수학자가 출현하기를 기대해 본다.

Ⅴ. 결론 및 제언

1. 결 론

오늘날 현실 속에서 수학의 중요성이나 필요성을 매우 강조하고 있으면서도 학문을 위한 것이 아니라 입시 준비라는 명목아래 목적이나 수단으로서의 수학의 기능만을 강조하고 있는 면이 없지 않다.

수학은 타 교과에 비해 기호화되고 형식화, 추상화 되어 있어서 학생들이 실생활과는 무관하다고 생각하며 어렵다고 인식하는 경우가 많다. 이러한 인식은 현재 수학교육의 많은 문제점을 낳고 있는 이유 중 하나이기도 하다. 그러므로 이러한 문제점을 개선하기 위한 필요성이 점점 증가하고 있다. 그 대안 중 하나가 바로 수학교육에 수학사를 도입하는 것이라고 말할 수 있고 많은 연구를 통해 그 효과가 입증되고 있다.

따라서 학습현장에서 도움이 될 수 있는 여러 자료의 개발이 시급하다. 그동안은 수학사와 관련된 자료를 이용하고자 해도 그 양이 방대하여 자료를 찾기가 힘이 들고 수학사 내용을 단원과 관련되게 적절히 연결시키는 것 또한 쉬운 일이 아니었다. 그러므로 본 논문에서는 수학사 지도의 필요성과 활용방법을 살펴보고 조금이나마 도움이 되고자 7차 교육과정 7-가 수학교과서를 중심으로 단원별로 이론적 배경과 수학자들의 일화 및 학생들이 가질 수 있는 궁금증을 바탕으로 내용들을 뽑아 구성하였다. 미흡하나마 본 연구 내용이 현재 수학을 배우고 있는 학생들에게 흥미와 관심을 주고, 수학을 가르치는 많은 수학교사들에게 도움이 되기를 바란다.

2. 제 언

마지막으로 수학수업에 수학사를 활용하기 위하여 다음과 같이 몇 가지 제안을 하고자 한다.

첫째, 수학사에 관한 자료들은 많지만 학생들의 수준을 고려한 자료는 부족한 실정이므로 학생들의 능력을 고려한 서적이나 자료의 개발과 보급을 통해 교수-

학습에 도움을 줄 수 있어야 할 것이다. 아울러 실제 지도에 적절하게 이용될 수 있도록 그 방안을 모색하여야 한다.

둘째, 현재 사용되고 있는 수학교과서에 많은 수학사 내용들이 있지만 실질적으로 수업시간에 활용하기에는 양적으로 부족한 면이 없지 않다. 따라서 수업시간에 활용할 수 있도록 학습과 관련된 다양한 수학사 관련 자료의 개발이 필요하며, 동기유발을 위한 촉진제로서 역할을 하도록 분량이 적절하여야 하고, 너무 흥미 쪽으로 흘러 수학 수업 본연의 목적이 희석 되어서는 안 된다.

셋째, 수학사 도입에 대해 교사들이 많은 관심을 가지고 이러한 인식의 보편화가 이루어지기 위해서 예비교사들을 위한 수학사 관련 강좌 개설과 교사를 위한 연수 프로그램 마련이 필요하다고 본다. 그리고 수학교사는 각 단원별로 수업에 도입 지도할 내용을 발췌하여 필요시 적절히 꺼내어 쓸 수 있도록 자료를 만들어 놓는 것이 바람직하겠다.

참고문헌

수학 7-가, 이영하 외 3명저, (주)교문사, 2002

수학 7-가, 강옥기 외 2명저, (주)두산, 2004

수학 7-가, 이행고 외 9명저, (주)중앙교육진흥연구소, 2006

김동화, 현 중등학교 및 대학 수학교육의 문제점과 개선방안, 교육이론과 실천 제12권 제1호, 2002, p.221-232

김미정 외 4명, 99수학사 2팀, 수학사를 이용한 학습지 개발

김선화, 여태경(공저), 교실밖 수학여행, 사계절 출판사, 1997

김종명, 수학사를 도입한 수학교육, 수학사랑 15호, 1999

김현주, 중학교 수학의 수학사를 통한 교수-학습자료 개발에 관한 연구, 숙명 여자 대학교 교육대학원 석사학위 논문, 2002

박경미, 수학 비타민, 중앙M&B, 2003

박경미, 수학 콘서트, 동아시아, 2006

박교식, 수학기호 다시보기 (series1), 수학사랑, 2001

박정미, 중학교 수학 교과서 단원별 수학사 자료 비교 분석(7-가, 8-가, 9-가를 중심으로), 공주 대학교 교육 대학원 석사학위 논문, 2006

백석윤, 수학사와 수학교육과정, 제5회 교육학세미나집,1990

백석윤, 전게서, 1990

이만근, 오민영(공저), 흥미있는 수학이야기, 수학사랑, 2001

정완상, 칸토르가 들려주는 집합 이야기, 자음과 모음, 2005

주영희, 수학교육에 있어 수학사 활용에 대한 교사들의 인식, 강원대 교육 대학원 석사학위 논문, 1997

표용수, 수학 독립선언, 경문사, 2006

허민, 수학사와 수학교육, 수학교육 프로시딩 제 6집, 1997

Iflah, Georges, (신비로운) 수의 역사, 예하, 1990

ABSTRACT

Development of Teaching-Learning Materials using the History of Mathematics
(Focused on Mathematics 7- ga)

Jin, Jung-Suk
Mathematics Education Major
Graduate School of Education, Cheju National University
Jeju, Korea
Supervised by professor Yang, Young-Oh

Since the mathematics education focuses only on examinations in our country, many students often think that mathematics is a very difficult and boring subject which they can simply answer the questions. They are not so interested in mathematics and simply regard it as an irrelevant subject to our lives as well.

Therefore, it is necessary for the students to have a way which gives them the motivation in mathematics and allows them to recognize the value of mathematics. Many scholars suggest that they have to use history of mathematics in order to teach that.

The purpose of this thesis is that those materials use the history of mathematics to motivate the student's interest in mathematics.

The body of this thesis shows a comparative analysis of each chapter of mathematics 7-ga based on the 7th Educational Process with the history of mathematics and the questions which students naturally can ask in each chapter of their textbooks.

※ A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Education, Cheju National University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Education in August, 2007

In addition, it shows lives and episodes of mathematicians focused on the mathmatics 7-ga, the historial background of theory and answers, and shows the theorizal basis the questions which they can present.

Finally, I think this material is very valuable to the students and mathematics teachers as 'Teaching-Learning materials'.